РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ФАКС/ІТС, НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

Перший курс

Задача 1. Для всіх значень параметра λ розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + 6x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + (\lambda^2 - 8)x_4 = \lambda - 5. \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 1,$$
$$2x_1 + x_3 + 6x_4 = 3,$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + (\lambda^2 - 8)x_4 = \lambda - 5.$$

Розв'язання. Дослідімо і розв'яжімо систему

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

методом Ґауса.

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & \lambda^2 - 8 & \lambda - 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 9 & \lambda - 3 \end{array}\right) \sim \ldots$$

Якщо $\lambda = -3$, то $\operatorname{rang} A = 2 < \operatorname{rang}(A \mid \vec{b}) = 3$ і система розв'язків не має.

Якщо $\lambda = 3$, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid \vec{b}) = 2 < 4$ і система має безліч розв'язків

$$... \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}C_1 - 3C_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}C_1 - 2C_2, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}. \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq -3$ і $\lambda \neq 3$, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid \vec{b}) = 3 < 4$ і система має єдиний розв'язок

$$... \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 - \dfrac{7}{\lambda + 3} \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 1 + \dfrac{8}{\lambda + 3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\lambda + 3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{7}{\lambda + 3} - 2C_1, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 1 + \dfrac{8}{\lambda + 3} + 4C_1, \\ x_4 = \dfrac{1}{\lambda + 3} \end{cases} C_1 \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: Для $\lambda \neq -3$ і $\lambda \neq 3$ безліч розв'язків

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{7}{\lambda + 3} - 2C_1, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 1 + \dfrac{8}{\lambda + 3} + 4C_1, \\ x_4 = \dfrac{1}{\lambda + 3} \end{cases} C_1 \in \mathbb{R};$$

для $\lambda = 3$ безліч розв'язків

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}C_1 - 3C_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}C_1 - 2C_2, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}; \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2, \end{cases}$$

для $\lambda = -3$ система розв'язків не має.

Задача 2. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB має довжину c. Обчисліть суму

$$\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)+\left(\overline{BC},\overline{BA}\right)+\left(\overline{CA},\overline{CB}\right),$$

де $(\overline{a},\overline{b})$ означає скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Розв'язання.

$$\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)+\left(\overline{BC},\overline{BA}\right)+\left(\overline{CA},\overline{CB}\right)=$$

$$=\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)+\left(\overline{BC},-\overline{AB}\right)+\left|\overline{CA}\right|\left|\overline{CB}\right|\cos\frac{\pi}{2}=$$

$$=\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)+\left(-\overline{BC},\overline{AB}\right)=\left(\overline{AB},\overline{AC}-\overline{BC}\right)=\left(\overline{AB},\overline{AB}\right)=\left|\overline{AB}\right|^2=c^2.$$

Відповідь: c^2.

Задача 3. Побудуйте графік функції $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac{\ln x}{n}}\right)^{-n}$.

Розв'язання. $D(f) \subset [1;+\infty)$.

$$\text{Для } x = 1 \;\; y = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{\ln x}{n}}\right)^{-n} = 1.$$

Для $x > 1$

$$y = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{\ln x}{n}}\right)^{-n} = [1^{\infty}] = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{\ln x}{n}} - 1\right)(-n)\right) =$$
$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{n}(-n)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right) = \sqrt{x}.$$

Відповідь: $y = \sqrt{x}, x \geq 1$.

Задача 4. Через фокус параболи $y^2 = 2px, p > 0,$ проведено хорду, яка перпендикулярна до осі параболи. Через точки перетину цієї хорди з параболою проведено дотичні. Доведіть, що дотичні перетинаються під прямим кутом.

Розв'язання. Знайдімо кутові коефіцієнти дотичних до графіків функцій $y = \sqrt{2px}$ та $y = -\sqrt{2px}$ у точці $x = \frac{p}{2}$.

$$k_+ = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=\frac{p}{2}} = 1, k_- = -\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=\frac{p}{2}} = -1.$$

Отже, $k_+k_- = -1$. А це й означає, що дотичні перпендикулярні.

Старші курси

1. Відомий розв'язок $y_1 = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ диференціального рівняння

$$y'' + py' + qy = \sin x - \cos x,$$

де $p, q \in \mathbb{R}$. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

Розв'язання. Функція $y_1 = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ перетворює диференціальне рівняння на тотожність:

$$y_1 = \cos x + 1, y_1' = -\sin x; y_1'' = -\cos x.$$

$$-\cos x - p\sin x + q\cos x + q \equiv \sin x - \cos x;$$

$$p = -1, q = 0.$$

$y'' - y' = \cos x - \sin x.$

$y'' - y' = 0; \lambda^2 - \lambda = 0; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0; y_{\text{зо}} = C_1 e^x + C_2.$

$y_* = A\cos x + B\sin x; y' = -A\sin x + B\cos x; y'' = -A\cos x - B\sin x.$

$-A\cos x - B\sin x + A\sin x - B\cos x \equiv \sin x - \cos x;$

$$\begin{cases} -A - B = -1; \\ A - B = 1. \end{cases} \Leftrightarrow A = 1, B = 0.$$

$y_{\text{чн}} = \cos x.$

Відповідь. $y = C_1 e^x + C_2 + \cos x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Обчисліть $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \big(x + \cos x\big) \ln\dfrac{1-x}{1+x}\,dx.$

Розв'язання.

Оскільки $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ і функція $\cos x$ парна, то $\cos x \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ — непарна функція і $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\dfrac{1-x}{1+x}\,dx = 0$, а $x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ — парна функція і $\int\limits_{-1/2}^{1/2} x\ln\dfrac{1-x}{1+x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1/2} x\ln\dfrac{1-x}{1+x}\,dx$

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}\big(x+\cos x\big)\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx=\int\limits_{-1/2}^{1/2}x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx+\int\limits_{-1/2}^{1/2}\cos x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{1/2}x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln\dfrac{1-x}{1+x} & du=\dfrac{2}{x^2-1}\\ dv=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\bigg|_0^{1/2}-2\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{x^2}{x^2-1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln 3-\left(2x+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\bigg|_0^{1/2}=\frac{3}{4}\ln 3-1.$$

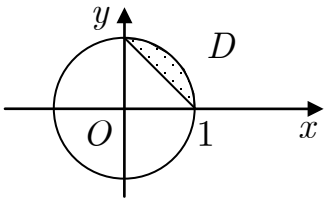
Відповідь. $\dfrac{3}{4}\ln 3-1.$

3. Обчисліть

$$\iint\limits_D\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

де $D: x^2+y^2=1, x+y=1, x\geq 0, y\geq 0.$

Розв'язання.



Перейдімо до полярних координат:

$$\iint\limits_D\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=\iint\limits_{\bar{D}}\frac{\rho\,d\varphi d\rho}{\rho^3}=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1}\frac{d\rho}{\rho^2}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\bigg|_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1}d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\big(-1+\cos\varphi+\sin\varphi\big)d\varphi=$$

$$=\big(-\varphi+\sin\varphi-\cos\varphi\big)\big|_0^{\pi/2}=2-\frac{\pi}{2}.$$

4. Знайдіть область збіжності та суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)!}.$$

Область збіжності $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)!};$

$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)x^n}{(n+1)(n-1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{k+1}}{k!} = xe^x, f(0) = 1.$

$f(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$

$1 = f(0) = C.$

$f(x) = e^x(x-1) + 1.$

Відповідь. $f(x) = e^x(x-1) + 1, x \in \mathbb{R}.$