Студентська математична олімпіада

ФАКС/ІТС-2016

1-й курс

1. (5 балів). Для всіх значень параметра λ розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + 6x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + (\lambda^2 - 8)x_4 = \lambda - 5. \end{cases}$$

2. (5 балів). У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB має довжину c. Обчисліть суму

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) + \left(\overline{BC}, \overline{BA}\right) + \left(\overline{CA}, \overline{CB}\right),$$

де $(\overline{a}, \overline{b})$ означає скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

3. (5 балів). Побудуйте графік функції $y = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\sqrt{\dfrac{\ln x}{n}}\right)^{-n}$.

4. (5 балів). Через фокус параболи $y^2 = 2px$ проведено хорду, яка перпендикулярна до осі параболи. Через точки перетину цієї хорди з параболою проведено дотичні. Доведіть, що дотичні перетинаються під прямим кутом.

5. (7 балів). Доведіть, що в будь-якій нескінченій послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.

Приклад: $5222089...11240\underbrace{3951303}_{=2017\cdot 1959}9005262...$

6. (7 балів). Нехай $d \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_d, r$ — додатні числа такі, що $\prod\limits_{i=1}^{d} a_i = r^d$.

Доведіть, що для всіх $s \geq 0$ виконано нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$

Студентська математична олімпіада

ФАКС/ІТС-2016

Старші курси

1. (5 балів). Відомий розв'язок $y_1 = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ диференціального рівняння

$$y'' + py' + qy = \sin x - \cos x,$$

де $p, q \in \mathbb{R}$. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

2. (5 балів). Обчисліть $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \big(x + \cos x\big) \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$

3. (5 балів). Обчисліть

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

де $D : x^2 + y^2 = 1, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0.$

4. (5 балів). Знайдіть область збіжності та суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)!}.$$

5. (7 балів). Знайдіть суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$

де $x, y \in [0;1)$ — фіксовані числа.

6. (7 балів). Нехай $d \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_d, r$ — додатні числа такі, що $\displaystyle\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$.

Доведіть, що для всіх $s \geq 0$ виконано нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r+s)^d.$$