

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

ФБМІ, НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

1. Побудуйте графік неявно заданої функції $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$, $a > 0$.
2. Складіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $y = x^2 + 2x$ та $y = -x^2 + 2x - 8$.
3. Вектори $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$ – сторони трикутника. Розкладіть за цим базисом вектор $\overline{BH} = \vec{h}$, що співпадає з висотою цього трикутника, проведеною з вершини B .
3. (II) Розкладіть у ряд Маклорена функцію $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}$.
4. Знайдіть у точці $x = 0$ значення похідної функції $y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2016)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Побудуйте графік неявно заданої функції $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$, $a > 0$.

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді

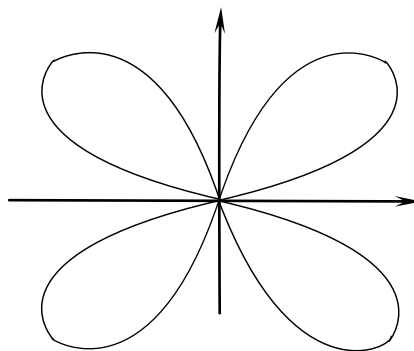
$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^3 = 4a^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Leftrightarrow \rho^6 = a^2 \rho^4 \sin^2 2\varphi \text{ або}$$

$$\rho^6 - a^2 \rho^4 \sin^2 2\varphi = 0 \Leftrightarrow \rho^4 (\rho - a \sin 2\varphi)(\rho + a \sin 2\varphi) = 0.$$

Звідки розв'язками для $\rho \in \mathbb{R}$ є $\rho = 0$, $\rho = a \sin 2\varphi$, $\rho = -a \sin 2\varphi$. Оскільки $\rho \geq 0$, то для

випадку $\rho = a \sin 2\varphi$ кут φ задовольняє умову $\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а у випадку

$\rho = -a \sin 2\varphi$ кут φ задовольняє умову $-\frac{\pi}{2} + \pi k \leq \varphi \leq \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Графік має вигляд



2. Складіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $y = x^2 + 2x$ та $y = -x^2 + 2x - 8$.

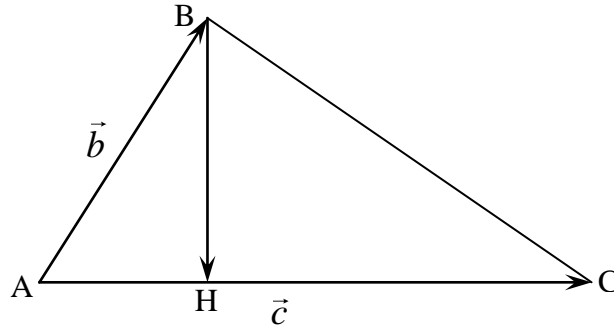
Нехай рівняння дотичної $y = kx + b$. Пряма і кожна з парабол має лише одну спільну точку, тобто квадратні рівняння $x^2 + 2x = kx + b$ і $-x^2 + 2x - 8 = kx + b$ мають

лише один корінь. Тоді дискримінанти рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} (2-k)^2 + 4b = 0 \\ (2-k)^2 - 4(b+8) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = -6, b = -4.$$

Відповідь: $y = -2x - 4, y = 6x - 4$

3. Вектори $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$ – сторони трикутника. Розкладіть за цим базисом вектор $\overline{BH} = \vec{h}$, що співпадає з висотою цього трикутника, проведеною з вершини B .



Вектор $\overline{BH} = |AH| \cdot \vec{c}^0 - \vec{b}$, де $\vec{c}^0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$. Модуль $|AH| = n p_{\vec{c}} \vec{b} = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|}$. Тому

$$\overline{BH} = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c}^0 - \vec{b} = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} - \vec{b}.$$

Відповідь: $\overline{BH} = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} - \vec{b}.$

3. (II) Розкладіть у ряд Маклорена функцію $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}$.

Розкладемо у ряд Маклорена функцію $\arcsin t$ ($|t| < 1$).

$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2}$. Скористаємося біноміальним рядом

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Покладемо $\alpha = -\frac{1}{2}$, $x = -t^2$. Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} t^6 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n}.$$

Інтегруючи останню рівність маємо

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^{2n} \right) dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n \cdot n!} x^{2n+1} = \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2!} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!} \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Тоді

$$x \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n \cdot n!} x^{2(n+1)} =$$

$$= x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3 x^6}{2! \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^8}{2^3 3! \cdot 7} + \dots$$

Після заміни x на \sqrt{x} одержимо

$$y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3 x^3}{2! \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^4}{2^3 3! \cdot 7} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n \cdot n!} x^{2n} .$$

Відповідь: $\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n \cdot n!} x^{2n}$

4. Знайдіть у точці $x=0$ значення похідної функції $y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2016)$.

Знаходимо похідну за правилом диференціювання добутку функцій

$$y' = (x+1)(x+2)\cdots(x+2016) + x(x+2)\cdots(x+2016) + x(x+1)(x+3)\cdots(x+2016) +$$

$$+ x(x+2)\cdots(x+2015)$$

і зауважимо, що усі доданки починаючи з другого містять множник x . Тому

$$y'(0) = (0+1)(0+2)\cdots(0+2016) + 0 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2016 = 2016!$$

Відповідь: $y'(0) = 2016!$