

Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2016

ФБМІ

1. Побудуйте графік неявно заданої функції

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2, a > 0.$$

2. Складіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $y = x^2 + 2x$ та $y = -x^2 + 2x - 8$.

3. (1 курс) Вектори $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$ – сторони трикутника. Розкладіть за цим базисом вектор $\overline{BH} = \vec{h}$, що співпадає з висотою цього трикутника, проведеною з вершини B .

3. (Старші курси) Розкладіть у ряд Маклорена функцію

$$y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}.$$

4. Знайдіть у точці $x = 0$ значення похідної функції

$$y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2016).$$

5. (1 курс) Довести, що в будь-якій нескінченній послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.

Приклад: 5222089... 1124039513039005262...
=2017·1959

5. (Старші курси) Знайти суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$

де $\{x, y\} \subset [0; 1)$ - фіксовані числа.

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, a_1, \dots, a_d, r - додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$. Довести, що для

всіх $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$