

СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
НТУУ “КПІ” імені Ігоря Сікорського,
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОНІКИ, 2016
ПЕРШИЙ КУРС

1. Знайти $(\operatorname{arctanh} x)'$.
2. Послідовність $\{x_n\}$ задана співвідношеннями $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$ при $n \geq 1$. Доведіть, що існує границя $\{x_n\}$ і обчисліть її.
3. Дано чотири вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , кожні три з яких некопланарні. Знайдіть їх суму, якщо відомо, що вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору \vec{d} , а вектор $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ колінеарний вектору \vec{a} .
4. Знайти $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^{2016}$.
5. Довести, що в будь-якій нескінченній послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.
Приклад: 5222089 ... 11240 3951303 9005262 ...
 $= 2017 \cdot 1959$
6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, a_1, \dots, a_d, r - додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність $\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d$.

СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
НТУУ "КПІ" імені Ігоря Сікорського,
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОНІКИ, 2016
СТАРШІ КУРСИ

1. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2\pi n} |\sin x| dx}{\int_0^{2\pi n} \cos^2 x dx}$.

2. Знайти суму ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

3. Побудуйте графік функції, заданої співвідношенням

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n+1}}.$$

Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції і відрізком $[0,2]$ осі Ox .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy'' + y'(x - 1) = x^2 e^{-x}.$$

5. Знайти суму ряду: $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n}$, де $x, y \in [0,1)$ - фіксовані числа.

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, a_1, \dots, a_d, r - додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$. Довести,

що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність $\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d$.