РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ФІОТ/ФМФ, НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

Перший курс

Задача 1. Назвемо матрицю бінарною, якщо кожний її елемент дорівнює 0 або 1. Яке максимально можливе число одиниць може містити невироджена (тобто така, що має ненульовий визначник) бінарна матриця розмірності 10×10 ?

Розв'язання. Якщо серед елементів матриці є хоча б 92 одиниці, то принаймні два рядки будуть складатися лише з одиниць, і визначник такої матриці дорівнюватиме нулю. Якщо ж одиниць всього 91, то матриця може виявитися невиродженою. Прикладом такої матриці є

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Її визначник збігається з визначником матриці, отриманої відніманням першого рядку від кожного іншого:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^9 = -1 \neq 0.$$

■

Відповідь: 91.

Задача 2. Нехай точки $O,\ A,\ B,\ C$ такі, що

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Довести, що точки $O,\ A,\ B,\ C$ лежать в одній площині, а точки $A,\ B,\ C$ — на одній прямій.

Доведення. Домножимо обидві частини рівняння (1) скалярно на $\overrightarrow{OC}$. В результаты отримаємо, що

$$\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC} = 0,$$

тобто вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$ є компланарними. Останнє означає, що точки $O,\ A,\ B,\ C$ лежать в одній площині.

Для того, щоб довести, що точки $A,\ B,\ C$ лежать на одній прямій, покажемо колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\times\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\\&=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OA}=\\&=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

■

Задача 3. Нехай числову послідовність $\{a_n,\ n\geq 0\}$ задано у такий спосіб:

$$a_0=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}},\ n\geq 0.$$

Знайти a_{2016}.

Розв'язання. По черзі підставляючи в задане рекурентне рівняння $n=0,\ 1,\ 2$ та 3 й отримуючи $a_1=1=2^0$, $a_2=2^{-1}$, $a_3=2^{-2}$, $a_4=2^{-3}$ можна здогадатися, що $a_n=2^{-(n-1)}$ для будь-якого $n\geq 1$. Строге доведення легко проводиться методом математичної індукції: якщо $a_0=1$ та $a_k=2^{-(k-1)}$ для всіх $k=1,\ldots,n$, то

$$a_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{1+1+2+4+\cdots+2^{n-1}}=2^{-n}=2^{-\left((n+1)-1\right)}.$$

Отже, $a_{2016}=2^{-2015}$.

■

Відповідь: 2^{-2015}.

Задача 4. Побудувати графік функції, заданої в параметричній формі:

$$\begin{cases}x(t)=\cos t,\\ y(t)=\sin 2t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].\tag{2}$$

Розв'язання. Знайдемо явне рівняння, яке відповідає (2). Можливі два випадки:

I. Якщо $t\in[0,\pi)$, то

$$\begin{aligned}y=\sin 2t&=2\cos t\sin t=\\&=2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}=2x\sqrt{1-x^2};\end{aligned}$$

II. Якщо $t\in[\pi,2\pi)$, то

$$y=\sin 2t=2\cos t\sin t=-2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}=-2x\sqrt{1-x^2}.$$

Досліджуючи отриману функцію, будемо мати графік, зображений на Рис. 1.

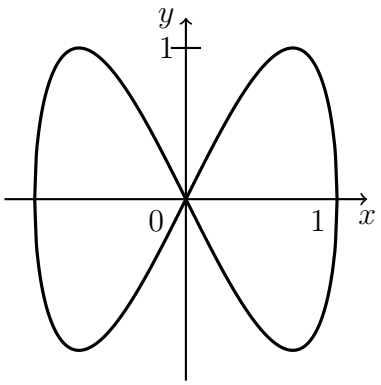

Рис. 1:

■

Старші курси

Задача 1. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Визначити, скільки разів диференційовною в точці $x = 0$ є функція f і скільки її похідних є неперервними в нулі.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f при $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

При $x = 0$ похідну будемо шукати за означенням

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Помітимо також, що

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

не існує (достатньо взяти дві послідовності аргументів при яких значення відповідних похідних будуть збігатись до різних границь).

З останього випливає, що функція $f'(x)$ є розривною в точці $x = 0$, а тому не має більше похідних в цій точці. ■

Відповідь: Один раз диференційовна в нулі; жодна похідна не є неперервною в нулі.

Задача 2. Нехай числову послідовність $\{a_n,\ n \geq 0\}$ задано у такий спосіб:

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},\ n \geq 0.$$

Знайти a_{2016}.

Розв'язання. Див. задачу 3 1-го курсу ■

Задача 3. Знайти

$$\int\int_D \frac{\min\{x, y\}}{1 + \max\{x, y\}}\, dxdy,$$

де область D задано нерівностями $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

Розв'язання. Внаслідок симетричності підінтегрального виразу відносно заміни $x \leftrightarrow y$

$$\iint_D \frac{\min\{x, y\}}{1 + \max\{x, y\}}\, dx\, dy = 2\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\min\{x, y\}}{1 + \max\{x, y\}}\, dy =$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{1 + x}\, dy = \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x}\, dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

■

Відповідь: $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Задача 4. Розв'язати задачу Коші

$$yy''' = y'y'',\ y(0) = -1,\ y'(0) = y''(0) = 1. \tag{3}$$

Розв'язання. Помітимо, що $y = 0$ не є розв'язком задачі Коші, а тому, при $y \neq 0$, рівняння (3) можна переписати

$$\frac{yy''' - y'y''}{y^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{y''}{y}\right)' = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{y''}{y} = C_1.$$

Використовуючи початкові умови (3) рівняння прийме вигляд

$$y'' + y = 0,$$

розв'язком якого є

$$y = C_2 \sin x + C_3 \cos x.$$

Використовуючи початкові умови (3) легко отримати розв'язок задачі Коші:

$$y = \sin x - \cos x.$$

■

Відповідь: $y = \sin x - \cos x$.