**ФІОТ/ФМФ НТУУ "КПІ ім. І.Сікорського"**
**СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.**
*Перший курс*

1. Назвемо матрицю бінарною, якщо кожний її елемент дорівнює 0 або 1. Яке максимально можливе число одиниць може містити невироджена (тобто така, що має ненульовий визначник) бінарна матриця розмірності $10 \times 10$ ?

2. Нехай точки $O,\ A,\ B,\ C$ такі, що

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}.$$

   Довести, що точки $O,\ A,\ B,\ C$ лежать в одній площині, а точки $A,\ B,\ C$ — на одній прямій.

3. Нехай числову послідовність $\{a_n,\ n \geq 0\}$ задано у такий спосіб:

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},\ n \geq 0.$$

   Знайти $a_{2016}$.

4. Побудувати графік функції, заданої в параметричній формі:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin 2t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

5. Довести, що в будь-якій нескінченій послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.
   Приклад: $5222089 \ldots 1124\underbrace{03951303}_{=2017 \cdot 1959}9005262 \ldots$

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d, r$ — додатні числа такі, що $\prod\limits_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$

**ФІОТ/ФМФ НТУУ "КПІ ім. І.Сікорського"**
**СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.**
*Старші курси*

1. Нехай
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Визначити, скільки разів диференційовною в точці $x = 0$ є функція $f$ і скільки її похідних є неперервними в нулі.

2. Нехай числову послідовність $\{a_n,\ n \geq 0\}$ задано у такий спосіб:
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},\ n \geq 0.$$
Знайти $a_{2016}$.

3. Знайти
$$\int\int_D \frac{\min\{x, y\}}{1 + \max\{x, y\}}\, dxdy,$$
де область $D$ задано нерівностями $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

4. Розв'язати задачу Коші
$$yy''' = y'y'',\ y(0) = -1,\ y'(0) = y''(0) = 1.$$

5. Знайти суму ряду
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$
де $x, y \in [0, 1)$ — фіксовані числа.

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d, r$ — додатні числа такі, що $\prod\limits_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність
$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$