РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ФММ НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

Перший курс

1. При яких значеннях $n \in \mathbb{N}$ система рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \dots \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

сумісна?

Розв'язання. Віднімемо від першого рівняння системи друге, від другого - третє, від третього - четверте, і т.д. Отримаємо $n-1$ рівняння. Також додамо перше і останнє рівняння системи. В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_n - x_1 = 2 \end{cases}$$

Таким чином, бачимо, що рівними між собою являються невідомі з номерами однакової парності, тоді як невідомі з номерами різної парності мають протилежні значення. Тобто, якщо n - парне, система сумісна і її розв'язок $(-1, 1, -1, 1, ..., -1, 1)$. Якщо ж n - непарне, система несумісна, бо отримаємо протиріччя з останнім рівнянням перетвореної системи.

2. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ задана співвідношнням

$$a_1 = 2; a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, n \geq 1.$$

Довести, що існує границя цієї послідовності та знайти її.

Розв'язання. Методом математичної індукції доводимо, що $\forall n \geq 1$ виконується $1 < a_n < 3$ і $a_{n+1} > a_n$. Це означає, що границя існує. Перейдемо до границі в рекурентній формулі:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{a_n}.$$

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тоді

$$a = 4 - \frac{3}{a}.$$

звідки $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a = 1$ або $a = 3$. Враховуючи доведене раніше маємо єдиний варіант $a = 3$.

3. Відомо, що в трикутнику ABC вершина A має координати $(2;1)$, висота BD має рівняння $2x - y + 6 = 0$, а бісектриса зовнішнього кута при вершині B має рівняння $3x + y - 11 = 0$. Скласти рівняння усіх сторін трикутника.

Розв'язання. Точку B знаходимо, як перетин висоти і бісектриси зовнішнього кута. Маючи точку A, можемо записати рівняння сторони AB.

Сторону AC знаходимо як пряму, що проходить через точку A перпендикулярно до висоти BD.

І нарешті, сторону BC можемо знайти, використовуючи властивість бісектриси, згідно якої та рівновіддалена від сторін кута.

В результаті маємо:

$AB: 7x + y - 15 = 0, AC: x + 2y - 4 = 0, BC: x - y + 7 = 0$

4. Довести нерівність

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} < \frac{\alpha}{\beta},$$

де $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f_1(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, визначену на $(0; \frac{\pi}{2})$. На вказаному проміжку функція визначена і неперервна.

$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{2}\frac{2x - \sin 2x}{x^2 \cos^2 x}$

Розглянемо функцію $f_2(x) = 2x - \sin 2x$, визначену на $(0; \frac{\pi}{2})$. На вказаному проміжку функція визначена і неперервна.

$f_2'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \geq 0$ для довільного $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Тому функція $f_2(x)$ монотонно зростає на $(0; \frac{\pi}{2})$, причому $f_2(0) = 0$, тому

$f_1'(x) \geq 0$ для довільного $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Отже, функція $f_1(x)$ монотонно зростає, причому $f_1(0+) = \lim\limits_{x \to 0+} f_1(x) = 1$.

Тобто для будь-яких чисел $\alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ таких, що $\alpha < \beta$ виконується $f_1(\alpha) < f_1(\beta)$, тобто

$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$.

Враховуючи, що $\operatorname{tg}\beta > 0$ і $\alpha > 0$, отримаємо необхідне нам

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} < \frac{\alpha}{\beta},$$

для $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Старші курси

1. При яких значеннях $n \in \mathbb{N}$ система рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \dots \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

сумісна?

Розв'язання. Віднімемо від першого рівняння системи друге, від другого - третє, від третього - четверте, і т.д. Отримаємо $n-1$ рівняння. Також додамо перше і останнє рівняння системи. В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_n - x_1 = 2 \end{cases}$$

Таким чином, бачимо, що рівними між собою являються невідомі з номерами однакової парності, тоді як невідомі з номерами різної парності мають протилежні значення. Тобто, якщо n - парне, система сумісна і її розв'язок $(-1, 1, -1, 1, ..., -1, 1)$. Якщо ж n - непарне, система несумісна, бо отримаємо протиріччя з останнім рівнянням перетвореної системи.

2. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ задана співвідношнням

$$a_1 = 2; a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, n \geq 1.$$

Довести, що існує границя цієї послідовності та знайти її.

Розв'язання. Методом математичної індукції доводимо, що $\forall n \geq 1$ виконується $1 < a_n < 3$ і $a_{n+1} > a_n$. Це означає, що границя існує. Перейдемо до границі в рекурентній формулі:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{a_n}.$$

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тоді

$$a = 4 - \frac{3}{a}.$$

звідки $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a = 1$ або $a = 3$. Враховуючи доведене раніше маємо єдиний варіант $a = 3$.

3. Аполлон і Купідон посперечалися, хто з них краще стріляє з лука. Вирішити суперечку вони домовилися за допомогою одного-єдиного змагання. Ймовірність Аполлона влучити по мішені 0,99. Для Купідона ця ймовірність становить 0,95. Обидва виконують по одному пострілу. В результаті виявилось, що в мішень влучила лише одна стріла. Яка ймовірність того, що влучний постріл було зроблено Купідоном?

Розв'язання. Одне влучання в ціль з двох може статися у двох випадках: Купідон влучить або Купідон не влучить у ціль. Нехай подія A - Купідон влучив, подія B - в ціль було влучено рівно 1 раз із двох пострілів. Знайдемо ймовірність події B за формулою повної ймовірності.

$$P(B) = P(A) * P(B|A) + P(\bar{A}) * P(B|\bar{A}) = 0,95 * (1 - 0,99) + (1 - 0,95) * 0,99 = 0,059$$

Тоді за формулою Байєса знайдемо ймовірність того, що влучний постріл було зроблено Купідоном.

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,95 * 0,01}{0,059} = 0,161.$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y} - 1$$

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення
$y' \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y} - 1$, $y' \sin y = x - \cos y$.
Зробимо заміну $z = \cos y$, тоді $z' = -y' \sin y$, тоді рівняння набуде вигляду:
$-z' = x - z$, $z' - z = -x$, звідки вже нескладно отримати загальний розв'язок:

$$z = (x + 1) + Ce^x,$$

після повернення до заміни маємо

$$\cos y = (x + 1) + Ce^x,$$