ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

З МАТЕМАТИКИ 2016 р.

ФММ

Перший курс

1. При яких значеннях $n \in \mathbb{N}$ система рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \dots \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

сумісна?

2. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ задана співвідношнням

$$a_1 = 2; a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, n \geq 1.$$

Довести, що існує границя цієї послідовності та знайти її.

3. Відомо, що в трикутнику ABC вершина A має координати $(2; 1)$, висота BD має рівняння $2x - y + 6 = 0$, а бісектриса зовнішнього кута при вершині B має рівняння $3x + y - 11 = 0$. Скласти рівняння усіх сторін трикутника.

4. Довести нерівність

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} < \frac{\alpha}{\beta},$$

де $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

5. Довести, що в будь-якій нескінченій послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.

Приклад: $5222089\dots1124\underbrace{03951303}_{=2017\cdot1959}9005262\dots$

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_d, r > 0$ такі, що $\prod\limits_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність:

$$\prod_{i=1}^{d}(a_i + s) \geq (r + s)^d.$$

ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

З МАТЕМАТИКИ 2016 р.

ФММ

Старші курси

1. При яких значеннях $n \in \mathbb{N}$ система рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \dots \\ -x_1 - x_2 - x_3 + ... - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

сумісна?

2. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ задана співвідношнням

$$a_1 = 2; a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, n \geq 1.$$

Довести, що існує границя цієї послідовності та знайти її.

3. Аполлон і Купідон посперечалися, хто з них краще стріляє з лука. Вирішити суперечку вони домовилися за допомогою одного-єдиного змагання. Ймовірність Аполлона влучити по мішені 0,99. Для Купідона ця ймовірність становить 0,95. Обидва виконують по одному пострілу. В результаті виявилось, що в мішень влучила лише одна стріла. Яка ймовірність того, що влучний постріл було зроблено Купідоном?

4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y} - 1$$

5. Знайти суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$

де $x, y \in [0, 1)$ — фіксовані числа.

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_d, r > 0$ такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність:

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$