РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

ІСЗЗІ, НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

І курс

1. Для знаходження коефіцієнтів многочлена

$$P_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

задано $P_4(-3) = 12$, $P_4(-2) = -9$, $P_4(-1) = -6$, $P_4(1) = 0$, $P_4(2) = 27$.
Знайти коефіцієнти a_1 та a_4.
Вказівка. Для ефективності обчислень використати методи знаходження визначників вищих порядків типу Вандермонда.
Розв'язок:
І метод (Гаусса).

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 27 \\ 1 & -2 & 2^2 & -2^3 & 2^4 & -9 \\ 1 & -3 & 3^2 & -3^3 & 3^4 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -19 & 65 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \text{ або } \begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_1 = 3 \\ a_2 + 2a_1 + 5a_0 = 8 \\ a_1 = 2 \\ a_0 = 1 \end{cases}.$$

Відповідь: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -3.$
ІІ метод (Крамера).
Використаємо визначник Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 5} (x_j - x_i) = (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3) \cdot$$

$$\cdot (x_5 - x_4)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = 5 \cdot 24^2;$$

$$\Delta_{a_4}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 27 & -9 & 12 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix}=-15\cdot 24^2;\Delta_{a_1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ 0 & -6 & 27 & -9 & 12 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix}=$$

$=10\cdot 24^2$.

Отже, $a_1=\dfrac{\Delta_{a_1}}{\Delta}=\dfrac{10\cdot 24^2}{5\cdot 24^2}=2$, $a_4=\dfrac{\Delta_{a_4}}{\Delta}=\dfrac{-15\cdot 24^2}{5\cdot 24^2}=-3$.

Відповідь: $a_1=2, a_4=-3.$

2. Звести рівняння другого порядку

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$$

до канонічного виду.

Знайти відповідний ортонормований базис власних векторів, визначити тип поверхні другого порядку та зобразити її схематично в новій системі координат.

Розв'язок:

Запишемо матрицю коефіцієнтів $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, тоді характеристичне рівняння: $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix}=0$, або

$(\lambda+5)((\lambda-2)^2-1)=0$, $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=-5$ - власні числа.

1) $\lambda_1=1:\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ -8x_3=0 \end{cases}\Rightarrow \vec{e}^{\,0}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) $\lambda_2=3:\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ -6x_3=0 \end{cases}\Rightarrow \vec{e}^{\,0}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$;

3) $\lambda_3 = -5$: $\begin{cases} 7x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 7x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{e}^{\,0}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тоді матриця переходу

$T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\beta = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, $\beta' = (\vec{e}^{\,0}_{\lambda_1}; \vec{e}^{\,0}_{\lambda_2}; \vec{e}^{\,0}_{\lambda_3})$.

Тоді $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ z = z' \end{cases}$, бо $X_\beta = T_{\beta\to\beta'} X_{\beta'}$. Використовуючи ці формули переходу до нового базису, маємо: $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y -$

$-4z + 2 = (x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 3(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 5(z' + \frac{2}{5})^2 + \frac{4}{5} = 0$.

Або $\frac{(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4/5} + \frac{(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4/15} - \frac{(z' + \frac{2}{5})^2}{4/25} = -1$, якщо $\begin{cases} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} = x'' \\ y' - \frac{\sqrt{2}}{2} = y'' \\ z' + \frac{2}{5} = z'' \end{cases}$, то

канонічне рівняння поверхні $\frac{x''^2}{4/5} + \frac{y''^2}{4/15} - \frac{z''^2}{4/25} = -1$.

Відповідь: рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

3. Довести нерівність

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}.$$

Показати, що послідовність $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k}$ - збіжна.

Розв'язок:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$;

б)

$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$

$\oplus$

$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$;

$2S_n = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}) + (\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}) + (\frac{1}{n+3} + \frac{1}{2n-2}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1}) =$

$= (3n+1)(\frac{1}{(n+1)2n} + \frac{1}{(n+2)(2n-1)} + \cdots + \frac{1}{2n(n+1)}) < (3n+1)\frac{1}{(n+1)2n} n = \frac{3n+1}{2(n+1)} <$

$< \frac{3(n+1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}$, отже $2S_n < \frac{3}{2}$, або $S_n < \frac{3}{4}$.

Послідовність збігається за достатньою ознакою збіжності Вейєрштрасса, бо $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ - обмежена та монотонно зростає, дійсно $x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > x_n$.

4. Обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x) arctg(\log_2(1+x))}{\sin(5^{x^2}-1)(\frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt[3]{1+x}-1))}.$$

Розв'язок:

Використовуючи еквівалентні нескінченно малі функції, маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x) arctg(\log_2(1+x))}{\sin(5^{x^2}-1)(\frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt[3]{1+x}-1))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos x)\log_2(1+x)}{(5^{x^2}-1)\arcsin((1+x)^{\frac{1}{3}}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(1-\cos x))\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}}{x^2 \ln 5((1+x)^{\frac{1}{3}}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\frac{x}{\ln 2}}{x^2 \ln 5 \cdot \frac{1}{3}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}\frac{x}{\ln 2}}{x^2 \ln 5 \cdot \frac{1}{3}x} =$$

$$= \frac{3\pi}{4\ln 5 \ln 2}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{\ln 5 \ln 16}$.

І тур XXXI олімпіади з математики (ІСЗЗІ)
(2016/17 н.р.)

Старші курси

1. Обчислити визначник матриці

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2016},$$

де i - уявна одиниця.

Розв'язок:

Використаємо властивість $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^2 = -1, \quad (-1)^{2016} = 1.$$

Відповідь: 1.

2. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n}+1}.$$

Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції та відрізком $[0;\,2]$ осі Ox.

Розв'язок:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2}}{x^{2n}+1} + \frac{x^2}{x^{2n}+1}\right) = \begin{cases} x^2, \text{ при } |x| \le 1; \\ \sin\frac{\pi x}{2}, \text{ при } |x| > 1. \end{cases}$$

Отже $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sin\frac{\pi x}{2} dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi+6}{3\pi}$.

Відповідь: $\frac{\pi+6}{3\pi}$.

3. Розклавши в ряд Фур'є на $x \in (0;\,\pi)$ функцію

$$f(x) = x(\pi - x),$$

знайти суму ряду $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

Розв'язок:

Розкладемо в ряд за синусами:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin nx dx = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0,\ n = 2k; \\ \dfrac{8}{\pi(2k-1)^3},\ n = 2k-1;\ k \in N. \end{cases}$$

Тоді $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ маємо: $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$, тобто

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi}S.$$

Отже $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Відповідь: $\frac{\pi^3}{32}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + y'(x-1) = x^2e^{-x}.$$

Розв'язок:

$xy'' - y' + xy' = x^2e^{-x}\big|\div x^2$, тоді $\frac{xy''-y'}{x^2} + \frac{y'}{x} = e^{-x}$.

Заміна $\frac{y'}{x} = p$, тоді $p' = \frac{xy''-y'}{x^2}$.

Маємо $p' + p = e^{-x}$ - лінійне рівняння І-го порядку.

$p = uv,\ p' = u'v + v'u$,

$u'v + v'u + uv = e^{-x},\ u'v + u(v'+v) = e^{-x}$,

$v' = -v,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \int\frac{dv}{v} = -\int dx,\ \ln v = -x,\ v = e^{-x}$;

$u'e^{-x} = e^{-x},\ u' = 1,\ u = x + C_1$;

$p = uv = (x+C_1)e^{-x},\ y' = x(x+C_1)e^{-x},$ тоді

$y = \int(x^2 + C_1x)e^{-x}dx = -(x^2+C_1x)e^{-x} + \int e^{-x}(2x+C_1)dx = -(x^2+C_1x)e^{-x} -$

$-(2x+C_1)e^{-x} + \int e^{-x}2dx = e^{-x}(-x^2 - C_1x - 2x - C_1 - 2) + C_2$.

Відповідь: $y = C_2 - e^{-x}(x^2 + C_1^*x + C_1^*)$.