I тур XXXI олімпіади з математики (ІСЗЗІ)
(2016/17 н.р.)

I курс

1. Для знаходження коефіцієнтів многочлена
$$P_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$
задано $P_4(-3) = 12$, $P_4(-2) = -9$, $P_4(-1) = -6$, $P_4(1) = 0$, $P_4(2) = 27$.
Знайти коефіцієнти a_1 та a_4.
Вказівка. Для ефективності обчислень використати методи знаходження визначників вищих порядків типу Вандермонда.

2. Звести рівняння другого порядку
$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$
до канонічного виду.
Знайти відповідний ортонормований базис власних векторів, визначити тип поверхні другого порядку та зобразити її схематично в новій системі координат.

3. Довести нерівність
$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}.$$
Показати, що послідовність $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k}$ - збіжна.

4. Обчислити
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)\,arctg(\log_2(1+x))}{\sin(5^{x^2}-1)(\frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt[3]{1+x}-1))}.$$

5. Довести, що в будь-якій нескінченній послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.
Приклад: $5222089\ldots11240\underbrace{39513039}_{=2017\cdot 1959}005262\ldots$

6. Нехай $d \in N$, $a_1, \ldots, a_d, r$ - додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \ge 0$ виконується нерівність
$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \ge (r + s)^d.$$

I тур XXXI олімпіади з математики (ІСЗЗІ)
(2016/17 н.р.)

Старші курси

1. Обчислити визначник матриці

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2016},$$

де i - уявна одиниця.

2. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \sin\frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}.$$

Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції та відрізком $[0; 2]$ осі Ox.

3. Розклавши в ряд Фур'є на $x \in (0; \pi)$ функцію

$$f(x) = x(\pi - x),$$

знайти суму ряду $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + y'(x-1) = x^2 e^{-x}.$$

5. Знайти суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$

де $\{x, y\} \subset [0; 1)$ - фіксовані числа.

6. Нехай $d \in N$, $a_1, \ldots, a_d, r$ - додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$