РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, РТФ/ФЕЛ, НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 н.р.

Перший курс

1. Знайти
$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^{2016}.$$
Тут i — уявна одиниця.

Розв'язання

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$
Тоді матрицю A можна подати у вигляді $A = iE + B$, де
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Зауважимо, що $B^2 = \mathbb{O}$, а тому $B^n = \mathbb{O}, \quad n \geq 2$. Отже,
$$A^{2016} = (iE + B)^{2016} = \sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k i^k E^k B^{2016-k} = i^{2016}E + 2016 \cdot i^{2015} EB = \begin{pmatrix} 1 & -2016i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Числова послідовність $(x_n, n \geq 1)$ задана рекурентним співвідношенням:
$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}, \quad n \geq 1.$$
Показати, що існує границя послідовності $(x_n, n \geq 1)$, та знайти її.

Розв'язання

За індукцією доводимо, що послідовність $(x_n, n \geq 1)$ монотонно зростає та $x_n < 3, n \geq 1$. Тому існує $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Перейдемо в рекурентному співвідношенні до границі по $n \to \infty$. Отримаємо
$$a = 4 - \frac{3}{a}.$$
Звідки $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$.

3. Дано чотири вектори $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$, кожні три з яких не компланарні. Знайти їх суму, якщо відомо, що вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{d}$, а вектор $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$.

Розв'язання

З умови задачі слідує, що

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \alpha \cdot \overrightarrow{d},$$
$$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \beta \cdot \overrightarrow{a}.$$

Тому можна записати наступні позклади вектора $\overrightarrow{c}$ по векторам $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}$:

$$\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \alpha \cdot \overrightarrow{d}, \quad \overrightarrow{c} = \beta \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}.$$

Вектори $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}$ — некомпланарні, а тому утворюють базис і розклад кожного вектора за цим базисом єдиний. Отже, $\alpha = -1, \beta = -1$, звідки

$$\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{d},$$

і тому $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$.

4. Використовуючи теорему про похідну оберненої функції, знайти $(arcthx)'$.

Розв'язання

Нехай $y = arcthx$. Тоді $x = thy$, та $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{ch^2 y}$. З теореми про похідну оберненої функції слідує, що

$$\frac{dy}{dx} = ch^2 y = \frac{1}{1 - th^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Старші курси

1. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{2\pi n} |\sin x| dx}{\int_0^{\pi n} \cos^2 x dx}.$$

Розв'язання

$$\int_0^{2\pi n} |\sin x| dx = 4n \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = 4n.$$
$$\int_0^{\pi n} \cos^2 x dx = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{n\pi}{2}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{2\pi n} |\sin x| dx}{\int_0^{\pi n} \cos^2 x dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{\pi n} = \frac{8}{\pi}.$$

2. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадкову величину ξ, яка розподілена за геометричним законом з параметром $p = \frac{1}{2}$. Відомо, що

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{p} = 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

3. Побудувати графік функції, заданої співвідношенням:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції і відрізком $[0, 2]$ осі абсцис.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2}}{x^{2n} + 1} + \frac{x^2}{x^{2n} + 1} \right) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1, \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тому шукана площа

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy'' + y'(x - 1) = x^2 e^{-x}.$$

Розв'язання

Після заміни $z(x) = y'$ рівняння перетворюється в наступне лінійне диференціальне рівняння:

$$xz' + z(x - 1) = x^2 e^{-x}.$$

Його загальний розв'язок має вигляд $z = (x + C_1)xe^{-x}$. Повертаючись до заміни, знаходимо $y = -x^2 e^{-x} - (2 + C_1)(xe^{-x} + e^{-x}) + C_2$.