ФАКУЛЬТЕТСЬКА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА
НТУУ "КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
РТФ 2016

Задачі для студентів першого курсу

1. Знайти
$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^{2016}.$$
Тут i — уявна одиниця.

2. Числова послідовність $(x_n, n \geq 1)$ задана рекурентним співвідношенням:
$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}, \quad n \geq 1.$$
Показати, що існує границя послідовності $(x_n, n \geq 1)$, та знайти її.

3. Дано чотири вектори $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$, кожні три з яких не компланарні. Знайти їх суму, якщо відомо, що вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{d}$, а вектор $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$.

4. Використовуючи теорему про похідну оберненої функції, знайти $(arcthx)'$.

5. Довести, що в будь-якій нескінченій послідовності десяткових цифр знайдеться підряд-док, що утворює число, яке ділиться на 2017.
Приклад: $5222089\ldots1124\underbrace{03951303}_{=2017\cdot1959}9005262\ldots$

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d, r$ – додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність
$$\prod_{i=1}^{d}(a_i + s) \geq (r + s)^d.$$

ФАКУЛЬТЕТСЬКА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА
НТУУ "КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
РТФ 2016

Задачі для студентів старших курсів

1. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{2\pi n} |\sin x| dx}{\int_0^{\pi n} \cos^2 x dx}.$$

2. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

3. Побудувати графік функції, заданої співвідношенням:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

   Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції і відрізком $[0, 2]$ осі абсцис.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy'' + y'(x-1) = x^2 e^{-x}.$$

5. Знайти суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n},$$

   де $x, y \in [0, 1)$ — фіксовані числа.

6. Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d, r$ – додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$