Лекция 17

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

1. Характеристическая функция случайного вектора

Определение 1. Пусть $\mathbf{X}$ — случайный n-вектор. *Характеристической функцией случайного вектора* $\mathbf{X}$ называется

$$h(\mathbf{t}) = h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathsf{E}\left[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right] = \mathsf{E}\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right], \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть координаты вектора $\mathbf{X}$ являются независимыми случайными величинами. Поскольку случайные величины $e^{it_1X_1}, \ldots, e^{it_nX_n}$ в этом случае являются независимыми при любых фиусированных $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$, то

$$\mathsf{E}\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right] = \mathsf{E}\left[e^{it_1X_1}\right] \ldots \mathsf{E}\left[e^{it_nX_n}\right]$$

и поэтому

$$h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = h_{X_1}(t_1) \ldots h_{X_n}(t_n).$$

Таким образом, характеристическая функция случайного вектора с независимыми координатами равна произведению характеристических функций его координат.

Вычисление характеристической функции вектора с зависимыми координатами часто представляет сложную задачу, но ее можно решить для гауссовских случайных векторов. Сначала мы напомним вид характеристической функции гауссовской случайной величины.

1.1. Характеристическая функция гауссовской случайной величины. Согласно определению характеристической функции, $h_\xi(t) = \mathsf{E}\left[e^{it\xi}\right]$ для любой случайной величины ξ.

Лемма 1. *Пусть ξ — гауссовская случайная величина с параметрами a и σ^2. Тогда ее характеристическая функция $h(t)$ равна*

$$h(t) = e^{iat - t^2\sigma^2/2}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть сначала $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Согласно определению

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{3}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t, получаем

$$h'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} e^{-x^2/2}\, dx.$$

[0] Printed from the file `[17-Gauss-cf.tex]` on 30.3.2016

Дифференцирование под знаком интеграла разрешено, поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}e^{-x^2/2}\,dx$ сходится равномерно (см. Фихтенгольц, т. II, глава 520, §712, стр. теорема 3). ① Проинтегрируем теперь по частям интеграл для производной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}e^{-x^2/2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\left(e^{-x^2/2}\right)$$
$$= -\,e^{itx}e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-x^2/2}\,dx,$$

откуда $h'(t) = -th(t)$. ② Решением этого дифференциального уравнение является $h(t) = Ce^{-t^2/2}$ при любой константе C. Поскольку $h(0) = 1$, то $C = 1$ и $h(t) = e^{-t^2/2}$. ③

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим случайные величины $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$ и $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\xi + a$. Тогда $\eta \in \mathcal{N}\left(a,\sigma^2\right)$ и $h_\eta(t) = e^{iat}h_\xi(\sigma t)$. С учетом уже рассмотренного случая $\mathcal{N}(0,1)$ это и влечет (2). $\square$

1.2. Х. ф. гауссовского случайного вектора. Логарифм характеристической функции гауссовской случайной величины является полиномом второй степени. Аналогичное свойство верно и для гауссовских векторов.

Теорема 1. *Если $\mathbf{X} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$, то $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{X} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$. Зафиксируем действительные числа $t_1,\ldots,t_n$, для которых $|t_1| + \cdots + |t_n| > 0$. В соответствии с определением 16.2 случайная величина $Z \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}'\mathbf{X}$ в равенстве (1) является гауссовской. В силу теоремы 16.2 с $\mathbf{B} = \mathbf{t}'$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ параметры этой случайной величины равны $\mathsf{E}[Z] = \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} a$ и $\mathsf{var}[Z] = \mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2$. Поскольку характеристическая функция гауссовской случайной величины Z равна $h_Z(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\left[e^{iuZ}\right] = e^{iua - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}$ (см. лемму 1) и $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = h_Z(1)$, то теорема доказана. $\square$

Теперь мы покажем, что только гауссовские векторы имеют характеристические функции вида $e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$. Для этого напомним некоторые полезные сведения из алгебры.

2. Диагонализация неотрицательно определенной матрицы

Квадратная $n \times n$ матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется *симметричной*, если $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Это условие можно записать иначе: $a_{ij} = a_{ji}$ для любых $1 \le i,j \le n$.

Матрица $\mathbf{C}$ называется *ортогональной*, если $\mathbf{C}'\mathbf{C} = \mathbf{I}$ или, иными словами, если $\mathbf{C}' = \mathbf{C}^{-1}$. Тут $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Для нас важным является такой факт:

Утверждение 1. *Если $\mathbf{A}$ — симметричная матрица, то существует диагональная матрица $\mathbf{D}$ и ортогональная матрица $\mathbf{C}$, для которых $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'$, причем диагональ матрицы $\mathbf{D}$ составлена из собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.*

[1] Убедиться, что дифференцирование под знаком интеграла в (3) допустимо.

[2] Объяснить равенство $e^{itx}e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

[3] почему?

Замечание 1. Напомним, что *собственным числом матрицы* $\mathbf{A}$ называется любое число λ, для которого система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ имеет нетривиальное решение. Вектор $\mathbf{x}$, который отвечает собственному числу λ, называется *собственным вектором матрицы* $\mathbf{A}$. Отметим, что если $\mathbf{x}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, то $c\mathbf{x}$ также ее собственный вектор каким бы ни было действительное число c. ④

Если систему, которая определяет собственные числа, переписать в виде $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, то легко найти условие существования нетривиального решения, а именно $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Правая часть последнего равенство является полиномом степени n от переменной λ. ⑤ По основной теореме алгебры это, в частности, означает, что $n \times n$ матрица $\mathbf{A}$ имеет ровно n собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (возможно кратных или комплексных). ⑥

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— симметричная вещественная матрица, а* λ *— некоторое собственное число матрицы* $\mathbf{A}$*. Тогда* $\lambda \in \mathbf{R}$*. Иными словами, любое собственное число симметричной неотрицательно определенной матрицы является действительным.*

Доказательство. По определению, уравнение $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ имеет нетривиальное решение; само число λ является решением уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Это уравнение степени n, поэтому если λ является его корнем, то комплексно сопряженное число $\mu = \overline{\lambda}$ также его корень. Поэтому $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ для некоторого вектора $\mathbf{y}$. Больше того, $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \mu\overline{\mathbf{x}}$. Иными словами, координаты вектора $\mathbf{y}$ являются комплексно сопряженными к соответствующим координатам вектора $\mathbf{x}$, то есть $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{x}}$. Итак,

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}'\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}'\mathbf{y}.$$

В силу симметричности $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ и значит

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y})' = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y},$$

так как $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ — действительное число. Отсюда вытекает, что

$$\lambda\mathbf{y}'\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}'\mathbf{y} = \mu\,(\mathbf{y}'\mathbf{x})' = \mu\mathbf{y}'\mathbf{x},$$

так как $\mathbf{y}'\mathbf{x}$ — действительное число. Таким образом, $(\lambda - \mu)\mathbf{y}'\mathbf{x} = 0$. Так как вектор $\mathbf{x}$ невырожденный и $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{x}}$, то $\mathbf{y}'\mathbf{x} > 0$ и поэтому $\lambda = \overline{\lambda}$, то есть λ — действительное число. □

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— симметричная вещественная матрица,* $\lambda \neq \mu$ *два ее собственных числа,* $\mathbf{x}$ *— собственный вектор для* λ *и* $\mathbf{y}$ *— собственный вектор для* μ*. Тогда* $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$*. Иными словами, собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, являются ортогональными.*

Доказательство. Имеем $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Поэтому $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}'\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}'\mathbf{y}$. Так как $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является действительным числом и $\mathbf{A}$ симметричной матрицей, то

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})'\mathbf{y} = (\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x})' = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

[4]почему?
[5]объяснить!
[6]доказать!

Поэтому $\mu\mathbf{x}'\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}'\mathbf{x}$. Так как $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ является действительным числом, то $\mathbf{y}'\mathbf{x} = (\mathbf{x}'\mathbf{y})' = \mathbf{x}'\mathbf{y}$ и поэтому $(\lambda - \mu)\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$. Это и означает $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$. $\square$

Доказательство утверждения 1. Мы рассмотрим только случай, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ разные. Итак, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — соответствующие собственные векторы. Эти векторы выберем такими, чтобы $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i = 1$ для всех $1 \le i \le n$. [7] Рассмотрим матрицу $\mathbf{T}$, столбцами которой являются вектора $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогда строками матрицы $\mathbf{T}'$ являются векторы $\mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n'$. Элементами матрицы $\mathbf{T}'\mathbf{T}$ являются числа $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_j$. В силу леммы 3 $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_j = 0$, $i \ne j$, то есть $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Это означает, что $\mathbf{T}$ — ортогональная матрица.

Заметим теперь, что матрица $\mathbf{AT}$ составлена из столбцов $\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_n$, то есть из столбцов $\lambda_1\mathbf{x}_1, \ldots, \lambda_n\mathbf{x}_n$. Поэтому

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}.$$

Домножим это матричное равенство слева на $\mathbf{T}$, а справа — на $\mathbf{T}'$ и воспользуемся ортогональностью матрицы $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}'\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{T}' = (\mathbf{T}\mathbf{T}')\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{T}') = \mathbf{A}. \qquad \square$$

3. Квадратный корень из матрицы

Матрица $\mathbf{B}$ называется *квадратным корнем* матрицы $\mathbf{A}$, если $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. Квадратный корень матрицы $\mathbf{A}$ обозначается $\mathbf{A}^{1/2}$. Квадратный корень существует не для всех матриц. Пример: $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. [8]

Утверждение 2. *Если $\mathbf{A}$ — неотрицательно определенная симметричная матрица, то квадратный корень $\mathbf{A}^{1/2}$ существует.*

Доказательство. Действительно, так как $\mathbf{A}$ симметричная матрица, то $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'$ на основании утверждения 1, причем $\mathbf{C}$ — ортогональная, а $\mathbf{D}$ — диагональная. Так как $\mathbf{A}$ неотрицательно определена, то $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \ge 0$ для любого собственного вектора $\mathbf{x}$. Поэтому $\lambda\mathbf{x}'\mathbf{x} \ge 0$ для любого собственного числа λ и любого собственного вектора $\mathbf{x}$, отвечающего этому числу. Отсюда вытекает, что $\lambda \ge 0$.

В частности, $\mathbf{D}^{1/2}$ существует: это диагональная матрица с элементами $\sqrt{d_i}$ на главной диагонали, [9] где d_i — это диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}$. Положим $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}'$. Тогда в силу ассоциативности умножения матриц и ортогональности $\mathbf{C}$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}'\mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}' = \mathbf{A}.$$

Значит $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{1/2}$ действительно существует. $\square$

---

[7] почему так можно выбрать собственные векторы?

[8] доказать!

[9] проверить!

4. Второе определение гауссовского случайного вектора

Определение 2. Случайный вектор $\mathbf{X}$ называется гауссовским, если его характеристическая функция равна $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$, где $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$, а $\boldsymbol{\Lambda}$ – симметричная неотрицательно определенная матрица.

Мы покажем, что определения 2 и 16.2 эквивалентны. Согласно теореме 1, любой гауссовский вектор в смысле определения 16.2 является гауссовским в смысле определения 2. Поэтому остается доказать обратное утверждение.

Сначала мы покажем, что $h^*(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$ является характеристической функцией какими бы ни были вектор $\boldsymbol{\mu}$ и неотрицательно определенная симметричная матрица $\boldsymbol{\Lambda}$.

Лемма 4. *Пусть $\boldsymbol{\mu}$ — неслучайный вектор, а $\boldsymbol{\Lambda}$ — неотрицательно определенная симметричная матрица. Тогда $h^*(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$ является характеристической функцией некоторого случайного вектора $\mathbf{X}$, у которого $\mathsf{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ и $\mathsf{Cov}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\Lambda}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Y}$ — это n-вектор, координаты $Y_1, \ldots, Y_n$ которого являются независимыми $\mathcal{N}(0,1)$ случайными величинами. Определим другой вектор по формуле

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}. \tag{4}$$

Поскольку $\mathsf{E}[\mathbf{Y}] = \mathbf{0}$ и $\mathsf{Cov}[\mathbf{Y}] = \mathbf{I}$, [10] то из лемм 16.2 и 16.4 вытекает, что

$$\mathsf{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}, \qquad \mathsf{Cov}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\Lambda}, \tag{5}$$

поскольку $\left(\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\right)' = \left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}'\right)' = (\mathbf{C}')'\left(\mathbf{D}^{1/2}\right)'\mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}' = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$, так как $\mathbf{D}^{1/2}$ — диагональная матрица (см. доказательство утверждения 2). В силу свойства (G_1) (лекция 16, стр. 124) вектор $\mathbf{Y}$ является гауссовским. Поэтому из теоремы 16.2 вытекает, что и вектор $\mathbf{X}$ является гауссовским, причем $\mathbf{X} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$. Следовательно $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = h^*(\mathbf{t})$ по теореме 1. □

Заметим, что в лемме 4 не доказывается, что вектор $\mathbf{X}$, имеющий характеристическую функцию h^*, обязательно является гауссовским в смысле определения 16.2. Именно это мы доказываем в следующем результате.

Лемма 5. *Пусть $\boldsymbol{\mu}$ — вектор, а $\boldsymbol{\Lambda}$ неотрицательно определенная симметричная матрица. Если характеристической функцией некоторого случайного вектора $\mathbf{X}$ является $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$, то $\mathbf{X} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Найдем характеристическую функцию случайной величины $\mathbf{c}'\mathbf{X}$:

$$h_{\mathbf{c}'\mathbf{X}}(u) = \mathsf{E}\left[e^{iu\mathbf{c}'\mathbf{X}}\right] = h_{\mathbf{X}}(u\mathbf{c}) = e^{i(u\mathbf{c})'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(u\mathbf{c})'\boldsymbol{\Lambda}(u\mathbf{c})} = e^{iua - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}, \tag{6}$$

где $a = \mathbf{c}'\boldsymbol{\mu}$, $\sigma^2 = \mathbf{c}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{c}$. В силу взаимной однозначности характеристических функций и функций распределения имеем $\mathbf{c}'\mathbf{X} \in \mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right)$. Так как вектор $\mathbf{c}$ произвольный, то $\mathbf{X}$ — гауссовский вектор в смысле определения 16.2. Чтобы

[10] показать!

найти его параметры, воспользуемся леммой 16.2: так как $\mathsf{E}\left[\mathbf{c}'\mathbf{X}\right] = a = \mathbf{c}'\boldsymbol{\mu}$ в силу (6) и $\mathsf{E}\left[\mathbf{c}'\mathbf{X}\right] = \mathbf{c}'\mathsf{E}\left[\mathbf{X}\right]$ в силу леммы 16.2, то $\mathbf{c}'(\mathsf{E}\left[\mathbf{X}\right] - \boldsymbol{\mu}) = 0$. В силу произвольности вектора $\mathbf{c}$ получаем $\mathsf{E}\left[\mathbf{X}\right] = \boldsymbol{\mu}$. [11]

Для нахождения ковариационной матрицы используем теорему 16.2: так как $\mathsf{Cov}\left[\mathbf{c}'\mathbf{X}\mathbf{c}\right] = \mathbf{c}'\,\mathsf{Cov}\left[\mathbf{X}\right]\mathbf{c}$ в силу теоремы 16.2 и $\mathsf{Cov}\left[\mathbf{c}'\mathbf{X}\mathbf{c}\right] = \mathbf{c}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{c}$ в силу (6), то $\mathbf{c}'(\mathsf{Cov}\left[\mathbf{X}\right] - \boldsymbol{\Lambda})\mathbf{c} = \mathbf{O}$ (тут $\mathbf{O}$ — нулевая матрица). В силу произвольности вектора $\mathbf{c}$ получаем $\mathsf{Cov}\left[\mathbf{X}\right] = \boldsymbol{\Lambda}$. [12] □

4.1. Эквивалентность двух определений. Теперь мы легко доказываем эквивалентность двух определений гауссовского вектора.

Теорема 2. *Случайный вектор* $\mathbf{X}$ *является гауссовским в смысле определения* 16.2 *тогда и только тогда, когда его характеристическая функция имеет вид* $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$, *где* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$, *а* $\boldsymbol{\Lambda}$ *– симметричная неотрицательно определенная матрица.*

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{X}$ — гауссовский вектор в смысле определения 16.2, то из теоремы 1 вытекает, что его характеристическая функция имеет необходимый вид. Матрица $\boldsymbol{\Lambda}$ неотрицательно определена в силу теоремы 16.1. Ее симметричность вытекает из леммы 16.3.

Обратное утверждение теоремы 2 вытекает из леммы 5. □

4.2. Построение гауссовского вектора из простейшей формы. Как видно из доказательства леммы 4, общий $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$ гауссовский вектор можно построить из $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ вектора с помощью линейного преобразования (4). В свою очередь, такой вектор составлен из независимых координат.

Следствие 1. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда вектор* $\mathbf{X}$ *является* $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$*-вектором.*

Доказательство. Так как $\mathsf{E}\left[e^{i(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)}\right] = e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_n^2)} = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{I}\mathbf{t}}$ в силу независимости, то следствие 1 вытекает из теоремы 2 □

[11] объяснить!

[12] объяснить!

† Всего в тексте было 12 вопросов