НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
__________ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)
“___”_____________20__ р.

Дипломна робота

на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст»

зі спеціальності 7.04020101, «Математика»
(код і назва спеціальності)

на тему: «Імовірності великих відхилень для оцінки найменших квадратів»

Виконав: студент VI курсу, групи ОМ-41с
(шифр групи)

Плаксін Олександр Дмитрович ___________
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Керівник д. ф.-м. н., проф. Іванов О. В. ___________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант з охорони праці та безпеки в надзвичайних ситуаціях
(назва розділу)

к. т. н., доц. Мітюк Л. О. ___________
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище, ініціали) (підпис)

Рецензент Член-кор. НАНУ, зав. відділом мат. методів дослідження операцій Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ,

д. ф.-м. н., проф. Кнопов П. С. ___________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2016

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) фізико-математичний
(повна назва)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва)

Освітньо-кваліфікаційний рівень – «спеціаліст»

Спеціальність 7.04020101, «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту

Плаксіну Олександру Дмитровичу

1. Тема роботи «Імовірності великих відхилень для оцінки найменших квадратів»,
керівник роботи Іванов Олександр Володимирович, д. ф.-м. н., проф.
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «24» листопада 2015 р. № 3192с

2. Термін подання студентом роботи «4» лютого 2016 р.

3. Об’єкт дослідження: нелінійна модель регресії з дискретним часом.

4. Предмет дослідження: ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів параметра нелінійної моделі регресії.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

а) основна частина:

1. Опрацювати статтю А. Сайдерса та К. Джапарідзе. Детально розібрати доведення загальної теореми про ймовірності великих відхилень нормованих М-оцінок.

2. Застосувати цю теорему для отримання результату про ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів у випадку незалежних предгауссівських похибок спостережень. Навести достатні умови вірності цього результату.

3. Отримати теореми про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів для незалежних субгауссівських похибок спостережень та стаціонарних сумісно строго субгауссівських похибок спостережень. Навести приклад виконання умов цих теорем.

b) охорона праці

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях	доцент Мітюк Л. О.		

7. Дата видачі завдання 25.11.15

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання на дипломну роботу. Узгодження попереднього змісту дипломної роботи. Робота з літературою.	3.12.15	
2	Детальний запис доведення загальної теореми Сайдерса-Джапарідзе про ймовірності великих відхилень статистичних оцінок.	17.12.15	
3	Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів у випадку незалежних предгауссівських похибок спостержень.	19.01.16	
4	Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів у випадку незалежних і залежних субгауссівських похибок спостережень.	28.01.16	
5	Оформлення роботи.	2.02.16	

Студент ____________ О. Д. Плаксін
(підпис) (ініціали, прізвище)

Керівник роботи ____________ О. В. Іванов
(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Дипломна робота: 51 стор., 21 слайд для проектора, 17 першоджерел.

Вивчаються ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної моделі регресії з дискретним часом.

Мета роботи полягає в отриманні умов до функції регресії та випадкових похибок спостережень, за яких ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів спадають із експоненційною швидкістю.

Завданням роботи є доведення теорем про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів за різними припущеннями щодо функції регресії та похибок спостережень. Об'єктом дослідження є нелінійна модель регресії з дискретним часом. Предметом дослідження є ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів параметра нелінійної моделі регресії.

Для отримання вказаних результатів використано сучасні поняття теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

Запропоновано сукупність умов, за яких імовірності великих відхилень норми нормованої різниці оцінки найменших квадратів та істинного значення параметра збігаються до нуля з експоненційною швидкістю, що визначає актуальність, важливість і новизну цього дослідження для математичної статистики. Робота має теоретичний характер, проте наведений в ній приклад показує, що отримані результати можна застосовувати у розв'язанні прикладних статистичних задач.

Природними напрямками продовження дослідження є поширення отриманих результатів на інші класи випадкових величин та статистичних оцінок, а також розгляд випадку моделі регресії з неперервним часом.

Ключові слова: імовірності великих відхилень, нелінійна модель регресії, оцінка найменших квадратів, предгауссівські, субгауссівські, сумісно строго субгауссівські випадкові величини.

Abstract

Graduation paper contains 51 pages, 21 slides for projector, 17 sources.

Probabilities of large deviations for normed least squares estimator of discrete time nonlinear regression model vector parameter are studied in this paper.

The goal of this work lies in obtaining conditions on the regression function and random observation errors to ensure exponential decrease rate of probabilities of large deviations for the least squares estimator.

The task of this research is to proof large deviations theorems for the least squares estimator under different assumptions on regression function and observation errors. Discrete time nonlinear regression model is the object of the study. Probabilities of large deviations for normed least squares estimator of nonlinear regression parameter are the subject of the research.

To obtain results of the paper contemporary concepts of probability theory and theory of random processes have been used.

A set of conditions is proposed under which probabilities of large deviations of the norm of the normed least squares estimator and true parameter value difference converges to zero with exponential rate. This fact determines urgency, importance and novelty of this research for mathematical statistics. This work is of a theoretical nature, however, the example mentioned in it shows that obtained results can be used in solution of applied statistical problems.

A natural direction for further study lies in extension of the results to other classes of random variables and statistical estimators, and also in analysis of continuous time regression model case.

Key words: probabilities of large deviations, nonlinear regression model, least squares estimator, pregaussian, subgaussian, jointly strictly subgaussian random variables.

Зміст

Вступ

Теорія великих відхилень в теорії ймовірностей вивчає асимптотичну поведінку хвостів різноманітних сімей імовірнісних розподілів. Перші ідеї цієї теорії простежуються в роботах П. С. Лапласа, С. Н. Бернштейна, Г. Крамера. Загальну математичну концепцію великих відхилень було запропоновано у 1966 році С. Р. С. Вараданом [1], який у 2007 році отримав Абелеву премію за роботи в цьому напрямку.

У вивчення ймовірностей великих відхилень для сум незалежних випадкових величин і векторів величезний внесок зробили В. В. Петров [2, 3] та Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао [4].

Результати про великі відхиленння для різноманітних функціоналів від різних класів випадкових процесів складають великий розділ теорії випадкових процесів. Ми зішлемося тут лише на монографію В. В. Булдигіна, Ю. В. Козаченка [5], оскільки тематика нашої дипломної роботи торкається деяких понять, детально викладених в цій книзі.

Теорія великих відхилень в математичній статистиці вивчає асимптотичну поведінку хвостів імовірнісних розподілів статистичних оцінок скалярних та векторних, параметричних та непараметричних.

Отримання результатів такого роду з точними або наближено точними константами в правих частинах нерівностей дає можливість будувати надійні області для невідомих параметрів, що оцінюються, надійні інтервали для невідомих функціональних характеристик випадкових процесів, таких як коваріаційна функція стаціонарного гауссівського процесу (див., наприклад, [5]). Крім цього, результати про великі відхилення статистичних оцінок дають можливість за наявності асимптотичної нормальності оцінки, що вивчається, доводити збіжність моментів оцінки до моментів граничного розподілу.

Зосереджуючи увагу на параметричних оцінках, вкажемо на монографію І. А. Ібрагімова, Р. З. Хасьмінського [6], у розділі 1.5 якої було отримано нерівність для ймовірностей великих відхилень оцінок максимальної вірогідності з експоненційно спадною правою частиною. Цей результат разом із попередніми публікаціями авторів сприяв появі низки робіт, присвячених тематиці великих відхилень статистичних оцінок.

У роботі О. В. Іванова [7] було доведено теорему про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів (ОНК) скалярного параметра нелінійної регресії із степневим спаданням. Б. Л. С. Пракаса Рао [8] отримав аналогічний результат з експоненційною швидкістю збіжності для нелінійної гауссівської регресії. Зішлемося також на роботу С. ван де Гір [9], присвячену тій же тематиці. В перелічених роботах розглядалися нелінійні регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень.

У монографії О. В. Іванова, Н. Н. Леоненка [10] з використанням техніки розвинутої у [6] було отримано результат про степеневу швидкість збіжності ймовірностей великих відхилень ОНК векторного параметра нелінійної моделі регресії з випадковим шумом, який є однорідним гауссівським полем.

У роботі А. Сайдерса, К. Джапарідзе [11] було доведено теорему про ймовірність великих відхилень, що узагальнює результат І. А. Ібрагімова і Р. З. Хасьмінського [6], із застосуванням до ОНК параметра нелінійної моделі регресії із незалежними предгауссівськими [5] випадковими похибками спостережень.

Незалежно від цієї роботи, але пізніше на 10 років, аналогічні результати з'явились в монографії О. В. Іванова [12], в якій було отримано степеневу та експоненційну швидкість збіжності ОНК параметрів нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими випадковими похибками спостережень.

Деякі узагальнення роботи [11] на корельовані спостереження містяться у роботі Ху Шухе [13].

Дипломна робота складається їх трьох розділів.

У 1-му розділі наведено докладне доведення теореми Сайдерса-Джапарідзе [11] (у нас Теорема 1), яка узагальнює теорему Ібрагімова-Хасмінського [6] про ймовірності великих відхилень нормованих оцінок максимальної вірогідності. Теорема роботи [6] охоплює клас, так званих, M-оцінок. Зокрема, до цих оцінок відноситься ОНК векторного параметра нелінійної моделі регресії.

Таку модель і ОНК розглянуто у 2-му розділі дипломної роботи за умови, що похибки спостережень є незалежними однаково розподіленими предгауссівськими випадковими величинами. Ми даємо доведення Теореми 2 про ймовірності великих відхилень нормованої ОНК, яка належить авторам роботи [11]. Наше доведення дещо відрізняється від оригінального, оскільки нам не вдалося встановити справедливість одного твердження, пов'язаного із застосуванням моментної нерівності для суми незалежних однаково розподілених зважених випадкових величин (нерівність (3.10) в [11]). Нами наведено також важливий Наслідок 1 цієї теореми, що містить достатню умову розрізнення параметрів, яка, на наш погляд, не має такий штучний вигляд, як умова авторів [11].

У 3-му розділі вивчено ймовірності великих відхилень нормованої ОНК параметра нелінійної регресії із субгауссівськими похибками спостережень.

У підрозділі 3.1 розглянуто незалежні помилки спостережень і доведено Теорему 3 про ймовірності великих відхилень із спрощеною, завдяки субгауссовості похибок спостережень, умовою розрізнення параметрів. Спрощується тут і отримання вищезгаданої моментної умови.

Важливу роль у цьому підрозділі грає Теорема 4 про ймовірності великих відхилень ОНК у випадку підсиленої умови розрізнення параметрів, яку реально можна перевірити, про що свідчить Приклад 1, наведений наприкінці розділу.

У підрозділі 3.2 розглянуто нелінійну модель регресії з похибками спостережень, які утворюють стаціонарну сумісно строго субгауссівську випадкову послідовність. Отримано Теорему 5 про ймовірності великих відхилень ОНК, аналогічну Теоремі 3, за умови існування та обмеженості спектральної щільності цієї послідовності. Твердження, аналогічне Теоремі 4, в цьому підрозділі сформульовано як Наслідок 2.

Випадковий шум, який є гауссівською стаціонарною послідовністю, часто зустрічається в регресійному аналізі. З іншого боку, такий шум є частинним випадком стаціонарної сумісно строго субгауссівської послідовності. Для цього важливого частинного випадку ми формулюємо відповідну Теорему 6.

1 Одне узагальнення теореми Ібрагімова-Хасьмінського про ймовірності великих відхилень

У цьому розділі роботи ми наведемо у зручній для наших подальших цілей формі одне узагальнення класичної теореми Ібрагімова-Хасьмінського [6] про ймовірності великих відхилень оцінок максимальної вірогідності, яка належить А. Сайдерсу та К. Джапарідзе [11].

Розглянемо сім'ю статистичних експериментів $\mathcal{E}^T = (\mathcal{X}^T, \mathcal{F}^T, \mathbb{P}_\theta^T; \theta \in \Theta^c)$, де Θ^c — замикання відкритої множини $\Theta \in \mathbb{R}^k$. Розглянемо також M-оцінку, що максимізує за $\theta \in \Theta^c$ функціонал $C_T : \mathcal{X}^T \times \Theta^c \to (0, \infty)$ від спостережнь $X^T \in \mathcal{X}^T$, де $C_T(X^T, \theta)$ для всіх $X^T \in \mathcal{X}^T$ є додатною неперервною функцією параметра $\theta \in \Theta^c$ та для кожного $\theta \in \Theta^c$ є вимірною функцією від X^T.

Ми далі припускаємо, що для всіх $\theta \in \Theta^c$ та $X^T \in \mathcal{X}^T$ супремум $\hat{\theta}_T$ у співвідношенні

$$C_T(X^T, \hat{\theta}_T) = \sup_{\theta \in \Theta^c} C_T(X^T, \theta) \tag{1.1}$$

досягається. Тоді на підставі Теореми (3.10) на с. 270 роботи І. Пфанцагля [14] існує хоча б один такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T$.

Результати нашої роботи є вірними для достатньо великих $T \, (T > T_0 > 0)$ та $R \, (R > R_0 > 0)$, де "$T \to \infty$" описує наближення до граничного статитичного експерименту $\mathcal{E}^\infty$, а R описує величину відхилення нормованої оцінки $\hat{\theta}_T$ від істинного значення параметра $\theta \in \Theta$.

Нехай для $T > T_0$ та $\theta \in \Theta$ $\phi(T, \theta)$ — деяка невироджена нормуюча квадратна матриця порядку k. Визначимо нормалізоване відношення

$$Z_{T,\theta}(u) = \frac{C_T(X^T, \theta + \phi(T,\theta)u)}{C_T(X^T, \theta)}, \tag{1.2}$$

яке для фіксованих спостережень X^T є неперервною додатною скінченною функцією на множині $U_{T,\theta} = \phi(T,\theta)^{-1}(\Theta^c - \theta)$. Також визначимо множину

$$\Gamma_{T,\theta,R} = U_{T,\theta} \cap \{u : \ R \le |u| \le R+1\}. \tag{1.3}$$

Означимо клас $\mathbf{G}$ всіх функцій g_T, які мають наступні властивості:

1) для фіксованого T, g_T є монотонно зростаючою до нескінченності на $[0,\infty)$ функцією;

2) для будь-якого $N > 0$

$$\lim_{R\to\infty,\, T\to\infty} R^N \exp(-g_T(R)) = 0. \tag{1.4}$$

Далі в міркуваннях ми будемо позначати $\pi(R)$ будь-який поліном від R, необов'язково один і той самий, коефіцієнти якого можуть залежати від m, α, k, але не від T, θ, R, u, v.

Означимо також клас $\mathbf{H}$ всіх функцій $\eta_{T,\theta}$, які мають наступні властивості:

1) для фіксованого T та $\theta \in \Theta$, $\eta_{T,\theta} : U_{T,\theta} \to (0,\infty)$;

2) існує поліном $\pi(R)$ такий, що для $T > T_0$ і $R > R_0$

$$\sup_{u\in\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta}^{-1}(u) \le \pi(R). \tag{1.5}$$

Нехай для кожного T та θ $\tilde{\zeta}_{T,\theta} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — монотонно неспадна неперервна функція. Визначимо випадковий функціонал

$$\zeta_{T,\theta}(u) = \tilde{\zeta}_{T,\theta}(Z_{T,\theta}(u)). \tag{1.6}$$

Теорема 1. *(a) Нехай функціонали $\zeta_{T,\theta}(u)$, $u \in U_{T,\theta}$, мають наступні* *властивості: існують дійсні числа* m *і* α, $m \geq \alpha > k$, *функції* $g_T \in \mathbf{G}$ *та* $\eta_{T,\theta} \in \mathbf{H}$, *дійсний поліном* $\pi(R)$ *такі, що для* $T > T_0$ *і* $R > R_0$ *виконуються наступні умови:*

$$\textbf{(M.1)} \quad \mathbb{E}_\theta^T \left|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)\right|^m \leq |u - v|^\alpha \pi(R), \quad u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}; \tag{1.7}$$

$$\textbf{(M.2)} \quad \mathbb{P}_\theta^T \left(\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u)\right) \leq \exp(-g_T(R)), \quad u \in \Gamma_{T,\theta,R}. \tag{1.8}$$

Тоді існують константи $B_0, b_0 > 0$ *такі, що для* $T > T_0$ *і достатньо великих* H $(H > H_0 > 0)$

$$\mathbb{P}_\theta^T \left(|\phi(T,\theta)^{-1}(\hat{\theta}_T - \theta)| \geq H\right) \leq B_0 \exp(-b_0 g_T(H)), \tag{1.9}$$

причому значення b_0 *можна зробити довільно близьким знизу до* $\frac{\alpha-k}{\alpha-k+mk}$, *обравши* B_0 *достатньо великим.*

(b) Результат частини (a) буде виконуватись, якщо замінити ***(M.1)*** *на*

(M.1δ) *Умову* ***(M.1)*** *виконано для всіх* $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ *при* $|u - v| \leq \delta$, *де* δ *— фіксована додатна константа, за умови, що одна з наступних (слабкіших) умов виконується:*

(M.1') Θ *є опуклою множиною;*

(M.1") $\mathbb{E}_\theta^T|\zeta_{T,\theta}(u)|^m \leq \pi(R)$ *для всіх* $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$.

Сформулюємо дві леми, які будемо використовувати у доведенні Теореми 1.

Лема 1. *Нехай величини* $Z, \hat{\theta}_T$ *та ін. визначено так само, як і вище. Тоді*

$$\mathbb{P}_\theta^T \left(|\phi(T,\theta)^{-1}(\hat{\theta}_T - \theta)| \geq H\right) \leq \mathbb{P}_\theta^T \left(\sup_{|u| \geq H,\, u \in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1\right). \tag{1.10}$$

Доведення. Позначимо $\hat{u}_T = \phi(T,\theta)^{-1}(\hat{\theta}_T - \theta)$. Тоді враховуючи, що

$Z_{T,\theta}(0) = 1$, маємо за означенням оцінки $\hat{\theta}_T$

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(|\hat{u}_T| \geq H\right) = \mathbb{P}_\theta^T\left(|\hat{u}_T| \geq H,\, Z_{T,\theta}(\hat{u}_T) \geq Z_{T,\theta}(0)\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}_\theta^T\left(|\hat{u}_T| \geq H, \sup_{|u|\geq H,\, u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(\hat{u}_T) \geq Z_{T,\theta}(0)\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{|u|\geq H,\, u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(\hat{u}_T) \geq Z_{T,\theta}(0)\right).$$

■

Лема 2. *Нехай* $\zeta(u)$ *— вимірна та сепарабельна дійсна випадкова функція на замкненій підмножині* $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$*. Нехай також існують числа* $m \geq \alpha > k$ *та обмежена на компактах функція* $C : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *такі, що для всіх* $u, v \in \Gamma$

$$\mathbb{E}|\zeta(u)|^m \leq C(u), \tag{i}$$

$$\mathbb{E}|\zeta(u) - \zeta(v)|^m \leq C(u)|u - v|^\alpha. \tag{ii}$$

Тоді майже напевно реалізації $\zeta(u)$ *є неперервними функціями на* Γ*. Більше того, покладемо*

$$w(h, \zeta, L) = \sup |\zeta(u) - \zeta(v)|,$$

де $\sup$ *береться по всім* $u, v \in \Gamma$ *з* $|u - v| \leq h, |u| \leq L, |v| \leq L$*. Тоді*

$$\mathbb{E}w(h, \zeta, L) \leq B\left(\sup_{|u|\leq L} C(u)\right)^{1/m} L^{k/m} h^{(\alpha-k)/m},$$

де константа B *залежить тільки від* m, α, k*.*

Доведення. Це твердження доведено в [6], с. 488, Теорема 19, а описку у її формулюванні виправлено в [11]. ■

Доведення Теореми 1. Доведемо спочатку частину (b). Покажемо, що з **(M.1δ)** та **(M.1')** випливає **(M.1)**. З опуклості Θ випливає, що будь-які точки $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ можна з'єднати в $\Gamma_{T,\theta,R}$ лінійно-кусковим шляхом із сегментів довжиною не більше δ, де кількість сегментів не перевищує $c\delta^{-1}|u-v|$, а c — фіксована константа, яка не залежить від θ та R. Застосувавши нерівніть Мінковського та використавши оцінку кількості сегментів, маємо

$$\left(\mathbb{E}_\theta^T \left|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)\right|^m\right)^{1/m} \leq c\delta^{-1}|u-v|\delta^{\alpha/m}\pi(R)^{1/m},$$

що приводить до **(M.1)**, оскільки для $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$|u-v| \leq |u-v|^{\alpha/m}(2(R+1))^{1-\alpha/m},$$

де другий множник поглинається поліномом $\pi(R)$.

Доведемо тепер, що з **(M.1δ)** та **(M.1")** випливає **(M.1)**. З **(M.1")**, знову використовуючи нерівність Мінковського, знаходимо, що ліва частина **(M.1)** обмежена $2^m\pi(R)$, що при $|u-v| > \delta$ обмежена $|u-v|^\alpha 2^m \delta^{-\alpha}\pi(R)$.

Покажемо, що для отримання основного результату теореми (a) достатньо довести, що знайдуться такі константи B та b, що

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0)\right) \leq B\exp(-bg_T(R)). \tag{1.11}$$

Дійсно, з означення ζ (1.6), монотонності g_T та $\tilde{\zeta}$ для будь-якого малого $\delta > 0$, з урахуванням (1.11), маємо

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{|u|\geq R,\, u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1\right) \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,r+R}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,r+R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0)\right) \leq$$

$$\leq B\sum_{r=0}^{\infty} \exp(-bg_T(r+R)) =$$

$$= B\exp(-b_0 g_T(R))\sum_{r=0}^{\infty}\exp(-b\delta g_T(r+R)), \tag{1.12}$$

де $b_0 = b(1-\delta)$.

Доведемо, що ряд в правій частині (1.12) збігається. З (1.4) випливає, що для $N > 0$, $R > R_0(N)$, $T > T_0(N)$ виконується $R^N \exp(-g_T(R)) \leq 1$. Покладемо $N = \frac{2}{\delta b}$, тоді $\exp(-b\delta g_T(R)) \leq (R^{-N})^{b\delta} = R^{-2}$. А це означає, що ряд з (1.12) можна оцінити рядом $\sum\limits_{r=0}^{\infty}(r+R)^{-2} < \infty$. Отримали співвідношення

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{|u|\geq R,\, u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1\right) \leq B_0\exp(-b_0 g_T(R)). \tag{1.13}$$

Тепер використаємо Лему 1, покладемо $H = R$, тоді з (1.12) і (1.13) випливає результат теореми.

Отже, залишилося довести співвідношення (1.11). Розіб'ємо множину $\{u : R \leq |u| \leq R+1\}$ на N областей, кожна з яких має діаметр менший за h. Таке розбиття можна зробити так, що кількість областей буде обмежена величиною

$$N \leq c(k)(R+1)^{k-1}h^{-k}, \tag{1.14}$$

де $c(k)$ — константа, яка залежить тільки від k. Це розбиття породжує розбиття $\Gamma_{T,\theta,R}$ на не більше, ніж N множин. Позначимо

$$\Gamma_{T,\theta,R} = \Gamma_{T,\theta,R}^{(1)} \cup \Gamma_{T,\theta,R}^{(2)} \cup \ldots \cup \Gamma_{T,\theta,R}^{(N')}, \quad N' \leq N. \tag{1.15}$$

Візьмемо з кожного $\Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}$ точку u_i. Тоді

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0)\right) \leq \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2, \tag{1.16}$$

де

$$\mathrm{P}_1 = \sum_{i=1}^{N'} \mathbb{P}_\theta^T\left(\zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u_i)\right), \tag{1.17}$$

$$\mathrm{P}_2 = \mathbb{P}_\theta^T \left(\sup_{|u-v|\le h} |\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)| \ge \inf_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta};\ u,v \in \Gamma_{T,\theta,R} \right). \qquad (1.18)$$

Для отримання цієї оцінки запишемо

$$\mathbb{P}_\theta^T \left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \ge \zeta_{T,\theta}(0) \right) = \mathbb{P}_\theta^T \left(\sup_{u \in \bigcup\limits_{i=1}^{N'} \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0)) \ge 0 \right) \le$$

$$\le \mathbb{P}_\theta^T \left(\bigcup_{i=1}^{N'} \left\{ \sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0)) \ge 0 \right\} \right) =$$

$$= \mathbb{P}_\theta^T \left(\bigcup_{i=1}^{N'} \left\{ \sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i) + \zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0)) \ge \eta_{T,\theta}(u_i) - \eta_{T,\theta}(u_i) \right\} \right).$$

Зауважимо, що

$$\left\{ \sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i) + \zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0)) \ge \eta_{T,\theta}(u_i) - \eta_{T,\theta}(u_i) \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i)) \ge \eta_{T,\theta}(u_i) \right\} \cup \left\{ \zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0) \ge -\eta_{T,\theta}(u_i) \right\},$$

а також

$$\left\{ \sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}^{(i)}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i)) \ge \eta_{T,\theta}(u_i) \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \sup_{|u-v|\le h} |\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)| \ge \eta_{T,\theta}(u_i),\ u,v \in \Gamma_{T,\theta,R} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \sup_{|u-v|\le h} |\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)| \ge \inf_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta},\ u,v \in \Gamma_{T,\theta,R} \right\}.$$

Отримали

$$\bigcup_{i=1}^{N'}\left\{\sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}}\left(\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(0)\right)\geq 0\right\}\subseteq$$

$$\subseteq\bigcup_{i=1}^{N'}\{\zeta_{T,\theta}(u_i)-\zeta_{T,\theta}(0))\geq-\eta_{T,\theta}(u_i)\}\cup$$

$$\cup\left\{\sup_{|u-v|\leq h}|\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(v)|\geq\inf_{\Gamma_{T,\theta,R}}\eta_{T,\theta},\ u,v\in\Gamma_{T,\theta,R}\right\},$$

звідки і випливає оцінка (1.16).

З умов **(M.2)** та (1.14) отримуємо

$$P_1\leq N'\exp(-g_T(R))\leq c(k)(R+1)^{k-1}h^{-k}\exp(-g_T(R)).\tag{1.19}$$

Оцінимо P_2. Нехай u_0 деяка точка з $\Gamma_{T,\theta,R}$. Розглянемо випадкову функцію $\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(u_0)$ на замкненій множині $\Gamma_{T,\theta,R}$. Застосуємо Лему 2. Покладемо

$$C(u)=\max\{1,\,|u-u_0|^{\alpha}\}\pi(R).\tag{1.20}$$

Тоді $C(u)$ обмежена $\pi(R)$ при $u,u_0\in\Gamma_{T,\theta,R}$. При такому виборі $C(u)$ умови (i) та (ii) Леми 2 виконуються завдяки **(M.1)**. Тоді з нерівності Маркова, Леми 2 та обмеженості $\eta^{-1}_{T,\theta}$ поліномом маємо

$$\mathrm{P}_2\leq\frac{\mathbb{E}^T_\theta\left(\sup\limits_{|u-v|\leq h,\,u,v\in\Gamma_{T,\theta,R}}|\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(v)|\right)}{\inf\limits_{\Gamma_{T,\theta,R}}\eta_{T,\theta}}\leq h^{\frac{\alpha-k}{m}}\pi(R).\tag{1.21}$$

Тоді враховуючи (1.16), (1.19), (1.21), маємо

$$\mathbb{P}^T_\theta\left(\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}}\zeta_{T,\theta}(u)\geq\zeta_{T,\theta}(0)\right)\leq h^{-k}\pi(R)\exp(-g_T(R))+h^{\frac{\alpha-k}{m}}\pi(R).\tag{1.22}$$

Тепер покладемо $h=\exp(cg_T(R))$, де константу c потрібно обрати таким чином, щоб жоден доданок в правій частині (1.22) не домінував. Це призводить до

$$c = -\frac{m}{\alpha - k + mk}. \tag{1.23}$$

Тоді результат теореми випливає з (1.22), (1.23) та властивості (1.4) функції $\exp(g_T(R))$ подавляти будь-який поліном. ∎

2 Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів параметра регресії з незалежними предгауссівськими похибками спостережень

Припустимо, що спостереження $X_t, t = \overline{1,T}$, є випадковими величинами (в. в.) на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ з розподілами $\mathbb{P}_t$ ($\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин дійсної вісі $\mathbb{R}$). Припустимо також, що невідомий розподіл $\mathbb{P}_t$ належить деякій параметричній множині $\{\mathbb{P}_{t\theta}, \theta \in \Theta\}$. Будемо називати трійку $\mathcal{E}_t = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{t\theta}, \theta \in \Theta)$ статистичним експериментом, породженим спостереженням X_t.

Будемо казати, що статистичний експеримент $\mathcal{E}^T = (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T, \mathbb{P}_\theta^T, \theta \in \Theta)$ є добутком статистичних експериментів $\mathcal{E}_t, t = \overline{1,T}$, якщо $\mathbb{P}_\theta^T = \mathbb{P}_{1\theta} \times \ldots \times \mathbb{P}_{T\theta}$ ($\mathbb{R}^T$ — T-вимірний евклідів простір, $\mathcal{B}^T$ — σ-алгебра його борелевих підмножин).

В цьому розділі ми розглядаємо статистичні експерименти, породжені спостереженнями

$$X_t = a_t(\theta) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,T}, \tag{2.1}$$

де $a_t(\theta), \theta \in \Theta^c \subset \mathbb{R}^k, t \geq 1,$ — послідовність неперервних функцій, причому в (2.1) істинне значення параметра θ належить відкритій множині Θ, $\varepsilon_t, t \geq 1,$ — послідовність незалежних в. в., $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадратів (ОНК)* невідомого параметра $\theta \in \Theta$ називається такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T$, що

$$Q_T(X^T, \hat{\theta}_T) = \inf_{\theta \in \Theta^c} Q_T(X^T, \theta), \tag{2.2}$$

де $X^T = (X_1, \ldots, X_T)$, а $Q_T(X^T, \theta) = \sum_{t=1}^{T} (X_t - a_t(\theta))^2$.

Нехай

$$C_T(X^T, \theta) = \exp\left(-\frac{1}{2} Q_T(X^T, \theta)\right), \tag{2.3}$$

і будемо вважати, що інфімум у (2.2) досягається для всіх $X^T \in \mathcal{X}^T = \mathbb{R}^T$. Тоді, як було зауважено відносно (1.1), існує хоча б один випадковий вектор $\hat{\theta}_T$ з Означення 1.

Спираючись на монографію [5], введемо деякі поняття необхідні для отримання результатів цього розділу.

Означення 2. Випадкову величину ξ називають *предгауссівською*, якщо знайдуться такі числа $\Lambda \in (0, \infty]$ і $\gamma \in [0, \infty)$, що для всіх $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda)$ виконується нерівність

$$\mathbb{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2\right). \tag{2.4}$$

Розглянемо числову характеристику

$$\tau_\Lambda(\xi) = \inf\left\{\gamma \geq 0 : \quad \mathbb{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2\right), \lambda \in (-\Lambda, \Lambda)\right\}. \tag{2.5}$$

Числа Λ і $\tau_\Lambda(\xi)$ є параметрами предгауссівської випадкової величини ξ. Очевидно, що

$$\mathbb{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \tau_\Lambda^2(\xi) \lambda^2\right), \quad \lambda \in (-\Lambda, \Lambda). \tag{2.6}$$

Якщо ξ є предгауссівською випадковою величиною, то $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$ для будь-якого p. Крім цього, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 \leq \tau_\Lambda^2(\xi)$.

Предгауссівські випадкові величини характеризує наступне твердження ([5], с. 33).

Лема 3. *Нехай ξ — випадкова величина. Наступні твердження еквівалентні.*

(I) (Умова Крамера) *Існує така стала $H > 0$, що*

$$\mathbb{E}\exp(\lambda\xi) < \infty, \quad |\lambda| < H.$$

(II) *Існує таке число $a > 0$, що*

$$\mathbb{E}\exp(a|\xi|) < \infty.$$

(III) *Існуєть такі числа $b > 0, c > 0$, що при всіх $x > 0$*

$$\mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq b\exp(-cx).$$

Якщо $\mathbb{E}\xi = 0$, тоді кожне з тверджень (I), (II), (III) *еквівалентно наступному:*

(IV) *ξ — предгауссівська випадкова величина.*

Наступний факт є незначною модифікацією теореми В. В. Петрова ([2], с. 70–71, Теорема 15), яку сформульовано в роботі [11], а ми лише користуємось сучасною термінологією.

Лема 4. *Нехай $\xi_t, t = \overline{1,T}$, — незалежні предгауссівські випадкові величини зі спільним параметром Λ_1 і параметрами $\tau_t = \tau_{\Lambda_1}(\xi_t), t = \overline{1,T}$. Нехай також $S_T = \sum\limits_{t=1}^{T} \Delta_t\xi_t$, де $\Delta_t, t = \overline{1,T}$, — деякі числа. Покладемо $G = \sum\limits_{t=1}^{T} \tau_t^2\Delta_t^2$ та $\Lambda = \Lambda_1 / \max\limits_{t=\overline{1,T}} |\Delta_t|$. Тоді для всіх $x > 0$*

$$\mathbb{P}(S_T \geq x) \leq \exp(-\min(x^2/2G, \Lambda x/2)). \tag{2.7}$$

Аналогічну нерівність можна отримати і для $-S_T$.

Для формулювання наступної теореми і можливості застосування Теореми 1 для моделі спостережень (2.1) будемо використовувати ОНК $\hat{\theta}_T$, що задана співвідношенням (2.2) та функціоналом $C_T(X^T, \hat{\theta}_T)$, означеним рівністю (2.3).

В асимптотичній теорії нелінійної регресії (див., наприклад, [12]) в задачах нормальної апроксимації розподілу нормованої ОНК відхилення ОНК від істинного значення параметра $\hat{\theta}_T - \theta$ нормується діагональною матрицею

$$d_T(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1,k}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} a_t(\theta) \right)^2. \tag{2.8}$$

Таким чином, і в задачі, яку ми розв'язуємо, можна взяти матрицю $\phi(T,\theta) = d_T^{-1}(\theta)$, але для цього треба додатково вимагати, щоб в моделі спостережень (2.1) функції $a_t(\theta), \theta \in \Theta, t \geq 1$, були неперервно диференційовні в множині Θ. Ми вважаємо, що ця умова надалі виконується.

Введемо нормалізоване відношення

$$Z_{T,\theta}(u) = \frac{C_T(X^T, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)}{C_T(X^T, \theta)} =$$

$$= \exp\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta_t(u)\varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \Delta_t^2(u) \right), \tag{2.9}$$

де

$$\Delta_t(u) = a_t(\theta + d_T^{-1}(\theta)u) - a_t(\theta), \quad t = \overline{1,T}. \tag{2.10}$$

Припустимо, що в моделі спостережнь (2.1) випадкові похибки спостережень $\varepsilon_t, t \geq 1$, задовольняють наступній умові.

(N.1) $\varepsilon_t, t \geq 1$, — незалежні предгауссівські однаково розподілені випадкові величини з параметрами $\Lambda_1 < \infty$ та $\tau = \tau_{\Lambda_1}$, тобто для всіх $t \geq 1, |\lambda| < \Lambda_1$

$$\mathbb{E} \exp(\lambda \varepsilon_t) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \tau^2 \lambda^2 \right). \tag{2.11}$$

Припустимо також, що існують функція $g_T(R) \in \mathbf{G}$, константи $\delta \in$

$(0, \frac{1}{2}), \kappa > 0, \rho \in (0, 1]$, поліном $\pi(R)$ такі, що для $T > T_0, R > R_0$ виконано наступні умови:

(N.2) Для будь-яких $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ таких, що $|u - v| \leq \kappa$,

$$\sum_{t=1}^{T} (\Delta_t(u) - \Delta_t(v))^2 \leq |u - v|^{2\rho} \pi(R), \tag{2.12}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \Delta_t^2(u) \leq \pi(R); \tag{2.13}$$

(N.3) Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\sum_{t=1}^{T} \Delta_t^2(u) \geq r_T(\theta, u) g_T(R), \tag{2.14}$$

де

$$r_T(\theta, u) = \max \left\{ 2\tau^2 \delta^{-2}, 2\Lambda_1^{-1} \delta^{-1} \max_{1 \leq t \leq T} |\Delta_t(u)| \right\}. \tag{2.15}$$

Теорема 2. *Нехай виконано умови* **(N.1)**–**(N.3)**. *Тоді для* $T > T_0, H > H_0$ *існують такі константи* $B_0, b_0 > 0$, *що*

$$\mathbb{P}_\theta^T \left(|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)| \geq H \right) \leq B_0 \exp(-b_0 g_T(H)), \tag{2.16}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ *ми можемо обрати* B_0 *так, що*

$$b_0 \geq \frac{\rho}{\rho + k} - \beta. \tag{2.17}$$

Далі будемо писати $\sum\limits_{t=1}^{T} = \sum$.

Доведення. Доведення буде базуватися на перевірці умов **(M.1)** та **(M.2)** Теореми 1 з $\tilde{\zeta}(Z) = \log(Z)$.

Будемо вважати, що T та R взяті достатньо великими. Нехай $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$, $|u - v| \leq \kappa$. Спочатку перевіримо виконання умови **(M.1)**. Зауважимо, що з (2.13) випливає, що (2.12) справджується і при $|u - v| > \kappa$.

Дійсно,

$$\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \le \sum \Delta_t^2(u) + \sum \Delta_t^2(v) \le 2\pi(R) \le |u-v|^{2\rho}\kappa^{-2\rho}\pi(R),$$

де множник $\kappa^{-2\rho}$ поглинається поліномом $\pi(R)$.
З (2.9), обравши $\zeta_{T,\theta}(u) = \log Z_{T,\theta}(u)$, маємо

$$\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v) = \sum (A_t\varepsilon_t - B_t), \tag{2.18}$$

де

$$A_t = \Delta_t(u) - \Delta_t(v), \tag{2.19}$$

$$2B_t = \Delta_t^2(u) - \Delta_t^2(v). \tag{2.20}$$

Для $m \ge 1$ маємо

$$\mathbb{E}\left|\sum (A_t\varepsilon_t - B_t)\right|^m \le 2^{m-1}\left(\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m + \left|\sum B_t\right|^m\right). \tag{2.21}$$

Оцінимо кожний доданок окремо.

$$\left|2\sum B_t\right| = \left|\sum (\Delta_t^2(u) - \Delta_t^2(v))\right| \le \sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)| \cdot |\Delta_t(u) + \Delta_t(v)|.$$

Далі за нерівністю Коші

$$\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)| \cdot |\Delta_t(u) + \Delta_t(v)| \le$$

$$\le \left(\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \sum |\Delta_t(u) + \Delta_t(v)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

А тепер використаємо нерівність $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$:

$$\left(\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \sum |\Delta_t(u) + \Delta_t(v)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \cdot 2\sum (\Delta_t^2(u) + \Delta_t^2(v))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді з (2.12) і (2.13) маємо

$$\left(\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \cdot 2\sum(\Delta_t^2(u) + \Delta_t^2(v))\right)^{\frac{1}{2}} \le |u-v|^\rho (\pi(R))^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi(R))^{\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що поліноми $\pi(R)$ не обов'язково однакові, тому для оцінки правої частини знову використаємо нерівність Коші:

$$|u-v|^\rho (\pi(R))^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi(R))^{\frac{1}{2}} \le |u-v|^\rho \frac{\pi(R) + 2\pi(R)}{2} = |u-v|^\rho \pi(R).$$

Отже, отримали оцінку

$$\left|\sum B_t\right|^m \le |u-v|^{\rho m} \pi(R). \tag{2.22}$$

З іншого боку, із нерівності Розенталя (див., наприклад, [3], с.86, Теорема 19) та монотонного спадання за m норми в $\mathbb{R}^T$ ($|x|_m = (\sum |x_t|^m)^{\frac{1}{m}}$) отримуємо нерівність

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m \le c(m)\left(\mu_m \sum |A_t|^m + \mu_2^{\frac{m}{2}}\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}\right) \le$$

$$\le c(m)\left(\mu_m + \mu_2^{\frac{m}{2}}\right)\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}, \quad m \ge 2, \tag{2.23}$$

де $c(m)$ — додатна константа, яка залежить тільки від m, $\mu_m = \mathbb{E}|\varepsilon_1|^m$, $\mu_2 = \mathbb{E}\varepsilon_1^2 \le \tau^2$. Нарешті з (2.12), (2.21)–(2.23) маємо

$$\mathbb{E}|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)|^m \le |u-v|^{\rho m} \pi(R). \tag{2.24}$$

Якщо ми оберемо $m > \frac{k}{\rho}$, то (2.24) задовольняє умові **(M.1)** Теореми 1 з константою $\alpha = \rho m$.

Тепер перевіримо виконання умови **(M.2)**. Покладемо

$$\eta_{T,\theta}(u) = \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \sum \Delta_t^2(u). \tag{2.25}$$

За умови **(N.3)** для $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 8\tau^2 g_T(R), \tag{2.26}$$

яка разом з (2.25) показує, що $\eta_{T,\theta}(u) \in \mathbf{H}$, оскільки $g_T(R)^{-1} \leq 1$ для $T > T_0$ і $R > R_0$.

За таким вибором $\eta_{T,\theta}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta^T(\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u)) = \\ = \mathbb{P}_\theta^T \left(\sum \Delta_t(u)\varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum \Delta_t^2(u) \geq \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \sum \Delta_t^2(u) \right) = \\ = \mathbb{P}_\theta^T \left(\sum \Delta_t(u)\varepsilon_t \geq \delta \sum \Delta_t^2(u) \right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Застосуємо до правої частини (2.27) Лему 4:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta^T \left(\sum \Delta_t(u)\varepsilon_t \geq \delta \sum \Delta_t^2(u) \right) \leq \\ \leq \exp\left(-\min\left\{ \frac{\delta^2 \left(\sum \Delta_t^2(u)\right)^2}{2\tau^2 \sum \Delta_t^2(u)}, \frac{\Lambda_1 \delta \sum \Delta_t^2(u)}{2 \max\limits_{1\leq t\leq T} \{|\Delta_t(u)|\}} \right\} \right) = \\ = \exp\left(-\min\left\{ \frac{\delta^2}{2\tau^2}, \frac{\Lambda_1 \delta}{2 \max\limits_{1\leq t\leq T} \{|\Delta_t(u)|\}} \right\} \cdot \sum \Delta_t^2(u) \right) = \\ = \exp\left(-\frac{\sum \Delta_t^2(u)}{r_T(\theta, u)} \right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Умова **(N.3)** дає змогу оцінити праву частину (2.28), звідки приходимо до оцінки

$$\mathbb{P}_\theta^T(\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u)) \leq \exp(-g_T(R)), \tag{2.29}$$

таким чином, задовольняючи умову **(M.2)** Теореми 1.

Залишилося довести твердження теореми стосовно b_0. Візьмемо в умові

Теореми 1 величину $\alpha = \rho m$, а m спрямуємо до ∞:

$$\frac{\alpha - k}{\alpha - k + mk} = \frac{\rho m - k}{\rho m - k + mk} = \frac{\rho - \frac{k}{m}}{\rho - \frac{k}{m} + k} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{\rho}{\rho + k}. \tag{2.30}$$

■

Вкажемо достатні умови виконання умови **(N.3)** доведеної теореми. Припустимо, що для будь-якого $\theta \in \Theta$ існують додатні константи $C_0(\theta), C_i(\theta), i = \overline{1,k}$, такі, що
(N.3'):

1)
$$\left(\sup_{\nu \in \Theta^c, 1 \le t \le T} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_i} a_t(\nu) \right| \right) d_{iT}^{-1}(\theta) \le C_i(\theta) T^{-1/2}; \tag{2.31}$$

2) Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$ і деякого $\gamma \in (1, 2]$

$$\sum \Delta_t^2(u) \ge C_0(\theta)|u|^\gamma. \tag{2.32}$$

За умови (2.31), диференціюючи $\Delta_t(u)$ за $u = (u_1, \dots, u_k)$, знаходимо

$$\max_{1 \le t \le T} |\Delta_t(u)| \le \sum_{i=1}^k \sup_{\nu \in \Theta^c, 1 \le t \le T} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_i} a_t(\nu) \right| d_{iT}^{-1}(\theta)|u_i| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^k C_i(\theta)|u_i| \right) T^{-1/2} \le |C(\theta)| \cdot |u| T^{-1/2}, \tag{2.33}$$

де $C(\theta) = (C_1(\theta), \dots, C_k(\theta))$. Тоді, використовуючи нерівність (2.32), маємо

$$\frac{\sum \Delta_t^2(u)}{\max\limits_{1 \le t \le T} |\Delta_t(u)|} \ge \frac{C_0(\theta)}{|C(\theta)|} |u|^{\gamma - 1} T^{1/2}. \tag{2.34}$$

Із (2.32) та (2.34) для $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$ отримуємо

$$\sum \Delta_t^2(u) \ge 2\tau^2 \delta^{-2} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \tau^{-2} C_0(\theta) R^\gamma \right); \tag{2.35}$$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 2\Lambda_1^{-1}\delta^{-1} \max_{1\leq t\leq T} |\Delta_t(u)| \left(\frac{1}{2}\Lambda_1\delta\frac{C_0(\theta)}{|C(\theta)|}R^{\gamma-1}T^{1/2}\right). \tag{2.36}$$

Покладемо

$$g_T(R) = \frac{1}{2}\delta C_0(\theta)\min\left(\delta\tau^{-2}R^{\gamma},\, \frac{\Lambda_1}{|C(\theta)|}R^{\gamma-1}T^{1/2}\right), \tag{2.37}$$

і покажемо, що функція $g_T \in \mathbf{G}$. При фіксованому T

$$g_T(R) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta^2 C_0(\theta)\tau^{-2}R^{\gamma}, & R \leq \frac{\Lambda_1\tau^2}{\delta|C(\theta)|}T^{1/2}; \\ \frac{1}{2}\delta C_0(\theta)\frac{\Lambda_1}{|C(\theta)|}R^{\gamma-1}T^{1/2}, & R \geq \frac{\Lambda_1\tau^2}{\delta|C(\theta)|}T^{1/2}. \end{cases} \tag{2.38}$$

З представлення (2.38) бачимо, що $g_T(R) \uparrow \infty$ при $R \to \infty$. Очевидно також, що для будь-якого $N > 0$ виконується (1.4).

Завдяки (2.35) і (2.36) виконується умова **(N.3)** з $r_T(\theta, u)$, що задано формулою (2.15), та $g_T(R)$, що задано (2.38). Таким чином, маємо

Наслідок 1. *Нехай виконано умови* ***(N.1)**, **(N.2)** та **(N.3')**. Тоді виконується* (2.16) *і* (2.17) *з функцією $g_T(R)$, що задано* (2.38).

3 Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів параметра регресії з субгауссівськими похибками спостережень

3.1 Незалежні похибки спостережень

Сформулюємо деякі потрібні нам поняття та факти з [5].

Означення 3. Випадкова величина називається *субгауссівською*, якщо знайдеться таке число $\gamma \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbb{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right). \tag{3.1.1}$$

Введемо числову характеристику

$$\tau = \tau(\xi) = \inf\left\{\gamma \geq 0: \quad \mathbb{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

яку будемо називати *субгауссівським стандартом випадкової величини* ξ. Зауважимо, що випадкова величина ξ є субгауссівською тоді і тільки тоді, коли ξ є предгауссівською та $\Lambda = \Lambda(\xi) = \infty$ [5]. При цьому $\tau(\xi) = \tau_\infty(\xi) = \sup\limits_{\Lambda} \tau_\Lambda(\xi)$.

Позначимо $\mathrm{Sub}(\Omega)$ клас всіх субгауссівських випадкових величин, що задано на загальному ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Простір $\mathrm{Sub}(\Omega)$ є банаховим відносно норми $\tau(\cdot)$ [5].

Лема 5. *Нехай $\xi \in \mathrm{Sub}(\Omega)$. Тоді для будь-якого $m > 0$*

$$\mathbb{E}|\xi|^m < \infty.$$

Крім того, $\mathbb{E}\xi = 0$ і виконується

$$\mathbb{E}\xi^2 \leq \tau^2(\xi).$$

Далі в цьому підрозділі важливу роль грає наступне твердження про експоненціальну оцінку хвостів розподілів сум незалежних субгауссівських випадкових величин (див., наприклад, [5], с. 22).

Лема 6. *Нехай $\xi_t, t = \overline{1,T}$, — незалежні субгауссівські випадкові величини із субгауссівськими стандартами $\tau_t = \tau(\xi), t = \overline{1,T}$. Нехай також $S_T = \sum \Delta_t \xi_t$, де $\Delta_t, t = \overline{1,T}$, — деякі числа. Тоді для всіх $x > 0$ справедливі нерівності*

$$\mathbb{P}(S_T \geq x) \leq G_T(x), \quad \mathbb{P}(S_T \leq -x) \leq G_T(x),$$

$$\mathbb{P}(|S_T| \geq x) \leq 2G_T(x), \tag{3.1.2}$$

де

$$G_T(x) = \exp(-\frac{x^2}{2\sum \tau_t^2 \Delta_t^2}). \tag{3.1.3}$$

Введемо умови, які аналогічні відповідним умовам 2-го розділу відносно моделі спостережень (2.1).

(N.1.1) $\varepsilon_t, t \geq 1,$ — незалежні однаково розподілені субгауссівські випадкові величини із субгауссівським стандартом $\tau > 0$.

(N.3.1) Для будь-яких $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$ та $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, для $T > T_0$, $R > R_0$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 2\tau^2\delta^{-2}g_T(R). \tag{3.1.4}$$

Теорема 3. *Нехай виконано умови* ***(N.1.1)****,* ***(N.2)*** *та* ***(N.3.1)****. Тоді для* $T > T_0$, $H > H_0$ *існують такі константи* $B_0, b_0 > 0$*, що справедливі нерівності* (2.16)*,* (2.17)*.*

Доведення. Як і у доведенні Теореми 2, для отримання моментної умови (2.24) можна застосувати нерівність Розенталя (2.23), але ми отримаємо аналогічну нерівність за допомогою Леми 6, яка суттєво використовує субгауссовість похибок спостережень у моделі регресії (2.1).

Нехай в. в. $\varepsilon_t, t \geq 1$, задовольняють умові **(N.1.1)**, а в Лемі 6 $\xi_t = \varepsilon_t$, числа $\Delta_t = A_t = \Delta_t(u) - \Delta_t(v)$, де величини $\Delta_t(u)$ задано формулою (2.10). Тоді за формулою для моментів невід'ємної випадкової величини (див., наприклад, [15], с. 190) та (3.1.2), (3.1.3)

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m = m\int_0^\infty x^{m-1}\mathbb{P}\left(\left|\sum A_t\varepsilon_t\right| \geq x\right)dx \leq$$

$$\leq 2m\int_0^\infty x^{m-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2\sum A_t^2}\right)dx = \tag{3.1.5}$$

$$= \sqrt{2\pi}m\tau^m\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}\mathbb{E}|z|^{m-1}, \quad m > 0,$$

де z — стандартна гауссівська випадкова величина. За відомою формулою

$$\mathbb{E}|z|^{m-1} = \frac{2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad m > 0. \tag{3.1.6}$$

Разом (3.1.5) та (3.1.6) дають оцінку

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m \le 2^{\frac{m}{2}} m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\tau^m\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}, \tag{3.1.7}$$

яка надає можливість отримати нерівність (2.24), яка при $m > \frac{k}{\rho}$ призводить до виконання умови **(M.1)** Теореми 1.

Перевіримо виконання умови **(M.2)** Теореми 1, яка, як і у випадку предгауссівських випадкових величин з обмеженим Λ, зводиться до оцінки ймовірності (2.27). Застосуємо першу з нерівностей (3.1.2) для випадкових величин $\xi_t = \varepsilon_t$, чисел $\Delta_t = \Delta_t(u)$ та $x = \delta\sum\Delta_t^2(u)$. Тоді

$$\mathbb{P}_\theta^T\left(\sum\Delta_t(u)\varepsilon_t \ge \delta\sum\Delta_t^2(u)\right) \le \exp\left(-\frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}\sum\Delta_t^2(u)\right) \le$$

$$\le \exp(-g_T(R)), \tag{3.1.8}$$

тобто умову **(M.2)** Теореми 1 виконано, і, таким чином, Теорему 3 доведено. ■

Введемо умову

(N.4) Існують додатні числа $c_0(\theta)$ і $c_1(\theta)$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_{T,\theta} = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$, $T > T_0$,

$$c_0(\theta)|u-v|^2 \le \sum(\Delta_t(u) - \Delta_t(v))^2 \le c_1(\theta)|u-v|^2. \tag{3.1.9}$$

Наступна теорема, яку сформульовано в роботі [11] в дещо іншому вигляді, узагальнює результати робіт [7, 8].

Теорема 4. *Нехай виконано умови* ***(N.1.1)*** *та* ***(N.4)****. Тоді існують такі константи* B_0 *та* b*, що для* $T > T_0$, $H > H_0$

$$\mathbb{P}_\theta^T(|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)| \ge H) \le B_0\exp(-bH^2), \tag{3.1.10}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ *можна обрати* B_0 *таким чином, щоб вико-*

нувалась нерівність

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8\tau^2(1+k)} - \beta. \tag{3.1.11}$$

Доведення. Перевіримо виконання умов **(N.2)** та **(N.3.1)**. Тоді твердження теореми буде випливати із Теореми 3. Нерівність (2.12) умови **(N.2)** випливає із правої частини нерівності (3.1.9), якщо ми візьмемо в (2.12) $\rho = 1$, $\pi(R) = c_1(\theta)$. Нерівність (2.13) умови **(N.2)** випливає також із правої частини (3.1.9), якщо в ній взяти $v = 0$, $\pi(R) = c_1(\theta)(R+1)^2$. Для перевірки виконання умови **(N.3.1)** перепишему ліву частину нерівності (3.1.9) при $v = 0$ наступним чином:

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq c_0(\theta)|u|^2 \geq 2\tau^2\delta^{-2}\left(\frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)R^2\right), \tag{3.1.12}$$

тобто в нерівності (3.1.4) можна взяти

$$g_T(R) = \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)R^2. \tag{3.1.13}$$

Тепер запишемо показник експоненти в правій частині нерівності (2.16) у вигляді

$$-b_0 g_T(H) = -\left(b_0 \cdot \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)H^2\right).$$

Оскільки зараз у правій частині (2.17) $\rho = 1$, то для будь-якого $\beta > 0$ в (3.1.10) можна взяти

$$b = b_0 \cdot \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta) \geq \frac{\delta^2 c_0(\theta)}{2\tau^2(1+k)} - \beta. \tag{3.1.14}$$

Нерівність (3.1.11) отримаємо при $\delta \to \frac{1}{2}$. ■

Приклад 1. Припустимо, що $a_t(\nu) = a(y(t), \nu)$, де $y(t)$, $t \geq 1$, — послідовність, що набуває значення у компактній області планування регресійного експерименту $Y \subset \mathbb{R}^k$, $\nu \in \Theta^c$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ — відкрита обмежена опукла множина. Нехай $a(y, \nu) = \exp(\langle y, \nu\rangle)$, $\langle y, \nu\rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i\nu_i$. Тоді $a(y, \nu)$ неперервнодиференційовна за $\nu \in \Theta^c$ при кожному $y \in Y$, причому її частинні похідні за $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ обмежені за сукупністю змінних $(y, \nu) \in Y \times \Theta^c$. Для простоти будемо вважати, що Y не містить нуля. Тоді оскільки

$$\underline{d}_i T \leq d_{iT}^2(\theta) \leq \overline{d}_i T, \quad i = \overline{1, k},\ \theta \in \Theta, \tag{3.1.15}$$

$\underline{d}_i$, $\overline{d}_i$ — деякі додатні константи, що не залежать від θ, то можна взяти замість $d_T(\theta)$ нормуючу матрицю $T^{1/2}\mathbb{I}_k$, де $\mathbb{I}_k$ — одинична матриця k-го порядку. Тоді за введеними вище умовами

$$\sum (\Delta_t(u) - \Delta_t(v))^2 = \sum \left(e^{\langle y(t), \theta + T^{-1/2}u \rangle} - e^{\langle y(t), \theta + T^{-1/2}v \rangle} \right)^2 \leq$$

$$\leq M^2 \sum \left(e^{\langle y(t), T^{-1/2}u \rangle} - e^{\langle y(t), T^{-1/2}v \rangle} \right)^2, \tag{3.1.16}$$

де $M = \max\limits_{(y,\nu) \in Y \times \Theta^c} e^{\langle y, \nu \rangle}$. За Теоремою Лагранжа для деякого $\eta \in (0, 1)$

$$\left| (e^{\langle y(t), T^{-1/2}u \rangle} - e^{\langle y(t), T^{-1/2}v \rangle} \right| =$$

$$= T^{-1/2} \left| \sum_{i=1}^{k} y_i(t) \exp(\langle y(t), T^{-1/2}(u + \eta(v - u)) \rangle) \right| \cdot |u_i - v_i| \leq$$

$$\leq T^{-1/2} M |y(t)| \cdot |u - v|, \quad |y(t)| = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2(t) \right)^{1/2}. \tag{3.1.17}$$

Із (3.1.16) та (3.1.17) отримуємо

$$\sum (\Delta_t(u) - \Delta_t(v))^2 \leq M^4 T^{-1} \sum |y(t)|^2 |u - v|^2 \leq$$

$$\leq M^4 \max_{y \in Y} |y|^2 |u - v|^2, \tag{3.1.18}$$

тобто в правій частині нерівності (3.1.9) можна взяти

$$c_1(\theta) = M^4 \max_{y \in Y} |y|^2. \tag{3.1.19}$$

Перевіримо виконання лівої частини нерівності (3.1.9) при $v = 0$. Для цього запишемо

$$\Delta_t^2(u) = \left(e^{\langle y(t), \theta + T^{-1/2}u\rangle} - e^{\langle y(t), \theta\rangle}\right)^2 =$$

$$= e^{2\langle y(t), \theta\rangle}\left(e^{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle} - 1\right)^2.$$

Оскільки $(e^x - 1)^2 \geq x^2$, $x \geq 0$, та $(e^x - 1)^2 \geq e^{2x}x^2$, $x < 0$,

$$\left(e^{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle} - 1\right)^2 \geq S^2\langle y(t), u\rangle^2 T^{-1},$$

$$S = \min\left(1, \min_{(y,\nu)\in Y\times\Theta^c} e^{\langle y, \nu\rangle}\right) > 0. \tag{3.1.20}$$

Таким чином,

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq S^2 T^{-1} \sum e^{2\langle y(t), \theta\rangle}\langle y(t), u\rangle^2 \geq$$

$$\geq S^4 \sum_{i,j=1}^{k}\left(T^{-1}\sum y_i(t)y_j(t)\right)u_i u_j. \tag{3.1.21}$$

Розглянемо невід'ємно визначену матрицю

$$J_T = \left(T^{-1}\sum y_i(t)y_j(t)\right)_{i,j=1}^{k} \tag{3.1.22}$$

та припустимо, що план регресійного експерименту $\{y_t,\ t = \overline{1, T}\}$ влаштовано таким чином, що для $T > T_0$ найменше власне число матриці J_T задовольняє умові

$$\lambda_{min}(J_T) \geq \lambda_0 > 0. \tag{3.1.23}$$

Тоді для $T > T_0$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq S^4\lambda_0|u|^2 \tag{3.1.24}$$

в лівій частині нерівності (3.1.9), яка використовується в доведенні Теореми

4 тільки при $v = 0$, можна покласти

$$c_0(\theta) = S^4\lambda_0. \tag{3.1.25}$$

Зауважимо, що припущення (3.1.23) відносно матриці регресійного експерименту (3.1.22) виглядає природнішим, якщо розглядати модель регресії (2.1) у схемі серій. Це не змінює позитивних результатів попередніх теорем, якщо їх умови переписати відповідним чином.

3.2 Залежні похибки спостережень

В цьому підрозділі ми будемо розглядати модель регресії (2.1), що задано на загальному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ і не будемо додавати до позначення ймовірності $\mathbb{P}$ індекси T та θ.

Як і в попередньому підрозділі, сформулюємо потрібні нам поняття і факти [5].

Означення 4. Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_T) \in \mathbb{R}^T$ називається *строго субгауссівським*, якщо для будь-якого $u = (u_1, \ldots, u_T) \in \mathbb{R}^T$

$$\mathbb{E}\exp(\langle \xi, u\rangle) \le \exp\left(\frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle\right), \tag{3.2.1}$$

де B — коваріаційна матриця вектора ξ.

Означення 5. Сім'я випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ називається *сумісно строго субгауссівською*, якщо для будь-якого $T \ge 1$ і будь-яких $\xi_1, \ldots, \xi_T$ із цієї сім'ї випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_T)$ є строго субгауссівським. Відповідно, випадкову послідовність $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ назвемо *сумісно строго субгауссівською послідовністю*, якщо для будь-якого $n \ge 1$ та будь-яких $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ випадковий вектор $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ є строго субгауссівським.

Введемо основну умову цього підрозділу стосовно похибок спостережень ε_t в моделі спостережень (2.1)

(N.1.2) Послідовність $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є стаціонарною сумісно строго субгауссівською випадковою послідовністю із додатною і обмеженою спектральною щільністю $f(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi)$:

$$f_0 = \inf_{\lambda \in [-\pi,\pi)} f(\lambda) > 0, \quad f_1 = \sup_{\lambda \in [-\pi,\pi)} f(\lambda) < \infty. \tag{3.2.2}$$

Позначимо $B(t) = \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_0, t \in \mathbb{Z},$ — коваріаційну функцію послідовності $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)$, $B = (B(t-s))_{t,s=1}^T$ — коваріаційну матрицю вектора ε, $u = \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_T)$. Тоді за Означеннями 4, 5 та умовою **(N.1.2)**

$$\mathbb{E}\exp(\langle \varepsilon, \Delta \rangle) = \mathbb{E}\exp\left(\sum \Delta_t \varepsilon_t\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{1}{2}\langle B\Delta, \Delta\rangle\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{t,s=1}^{T} B(t-s)\Delta_t\Delta_s\right). \tag{3.2.3}$$

Наступне твердження узагальнює Лему 6.

Лема 7. *Нехай виконано умову* ***(N.1.2)****. Нехай також* $S_T = \sum \Delta_t \varepsilon_t$, *де* $\Delta_t, t = \overline{1, T}$, — *деякі числа. Тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності*

$$\mathbb{P}(S_T \geq x) \leq D_T(x), \quad \mathbb{P}(S_T \leq -x) \leq D_T(x),$$

$$\mathbb{P}(|S_T| \geq x) \leq 2D_T(x), \tag{3.2.4}$$

де

$$D_T(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle B\Delta, \Delta\rangle}\right). \tag{3.2.5}$$

Доведення. Для будь-яких $\lambda > 0$, $x > 0$ за нерівністю Чебишова-Маркова та (3.2.1)

$$\mathbb{P}(S_T \geq x) \leq \exp(-\lambda x)\mathbb{E}\exp(\lambda S_T) \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\langle B\Delta, \Delta\rangle - \lambda x\right). \tag{3.2.6}$$

Мінімізуючи за $\lambda > 0$ показник експоненти в правій частині нерівності (3.2.6), отримуємо першу із нерівностей (3.2.4). Друга отримується аналогічно. Третя є очевидним наслідком перших двох. ∎

(N.3.2) Для будь-яких $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$ та $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ для $T > T_0$, $R > R_0$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 4\pi f_1 \delta^{-2} g_T(R). \tag{3.2.7}$$

Теорема 5. *Нехай виконано умови* ***(N.1.2)****,* ***(N.2)*** *та* ***(N.3.2)****. Тоді для* $T > T_0$, $H > H_0$ *існують такі константи* $B_0, b_0 > 0$*, що є вірними нерівності* (2.16), (2.17) *з Теореми 2.*

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 3. Нехай в. в. ε_t задовольняють умові **(N.1.2)**, а в Лемі 7 числа $\Delta_t = A_t = \Delta_t(u) - \Delta_t(v)$, де величини $\Delta_t(u)$ задано (2.10). Тоді аналогічно (3.1.5) для будь-якого $m > 0$

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t \varepsilon_t\right|^m = m \int\limits_0^\infty x^{m-1} \mathbb{P}\left(\left|\sum A_t \varepsilon_t\right| \geq x\right) dx \leq$$

$$\leq 2m \int\limits_0^\infty x^{m-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle B\Delta, \Delta\rangle}\right) dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot m \langle B\Delta, \Delta\rangle^{\frac{m}{2}} \mathbb{E}|z|^{m-1}, \tag{3.2.8}$$

де z — стандартна гауссівська випадкова величина.

За теоремою Герглотца ([16], с. 55) та умовою **(N.1.2)**

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \sum_{t,s=1}^{T} B(t-s) A_t A_s = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \left|\sum_{t=1}^{T} e^{i\lambda t} A_t\right|^2 d\lambda \leq$$

$$\leq f_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{t=1}^{T} e^{i\lambda t} A_t\right|^2 d\lambda = 2\pi f_1 \sum A_t^2. \tag{3.2.9}$$

Враховуючи формулу (3.1.6), із (3.2.8) та (3.2.9) отримуємо аналогічно (3.1.7)

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t \varepsilon_t\right|^m \leq 2^m \pi^{\frac{m}{2}} f_1^{\frac{m}{2}} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}, \tag{3.2.10}$$

що призводить при $m > \frac{k}{\rho}$ до виконання умови **(M.1)** Теореми 1.

Для перевірки виконання умови **(M.2)** застосуємо першу з нерівностей (3.2.4) до чисел $\Delta_t = \Delta_t(u)$ та $x = \delta \sum \Delta_t^2(u)$. Тоді за умови **(N.3.2)**

$$\mathbb{P}\left(\Delta_t(u)\varepsilon_t \geq \delta \sum \Delta_t^2(u)\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\left(\sum \Delta_t^2(u)\right)^2}{\langle B\Delta, \Delta\rangle}\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{4\pi f_1} \sum \Delta_t^2(u)\right) \leq \exp(-g_T(R)). \tag{3.2.11}$$

∎

Твердження, аналогічне Теоремі 4, сформулюємо як

Наслідок 2. *Нехай виконано умови **(N.1.2)** та **(N.4)**. Тоді існують такі константи B_0 та b, що для $T > T_0, H > H_0$, є вірною нерівність* (3.1.10), *причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати B_0 таким чином, щоб виконувалась нерівність*

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_1(1+k)} - \beta. \tag{3.2.12}$$

Важливим частинним випадком сумісно строго субгауссівської послідовності, очевидно, є гауссівська послідовність з нульовим середнім. Зважаючи на те, що гауссівська послідовність грає роль випадкового шуму в широко вживаній у застосуваннях гауссівській нелінійній моделі регресії, сформулюємо окреме твердження для цього випадку.

Теорема 6. *Нехай в моделі* (2.1) $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, *— гауссівська стаціонарна послідовність з нульовим середнім та спектральною щільністю $f(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi)$, що задовольняє умові* (3.2.2), *а послідовність функцій $a_t(\nu), \nu \in \Theta^c$, задовольняє умовам **(N.2)** та **(N.3.2)**. Тоді для $T > T_0, H > H_0$ існують такі константи $B_0, b_0 > 0$, що є вірними нерівності* (2.16) *та* (2.17) *з Теореми 2.*

*Якщо ж для послідовності $a_t(\nu), \nu \in \Theta^c$, виконано умову **(N.4)**, то справедлива нерівність* (3.1.10), *причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати B_0 таким чином, що є вірним* (3.2.12).

4 Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях

Написання дипломної роботи є фінальним і напруженим етапом в навчальному вихованні студента, тому в процесі для ефективної роботи важливо дотримуватися основних норм охорони праці, а саме контролювати режим праці і відпочинку, вміти оцінювати напруженість роботи, слідкувати за гігієною та організацією робочого місця, дотримуватися заходів безпеки при використанні технічних засобів.

Зазвичай при підготовці матеріалу для дипломної необхідно працювати з великою кількістю джерел інформації, це створює суттєве навантаження на нервову систему. В умовах значного обмеження у часі може виникнути бажання обробити "все і одразу", проте такий підхід на практиці не є ефективним, оскільки зменшує якість засвоєння інформації та значно підвищує ризики отримати перевтому.

Особливу увагу слід приділити організації робочого місця, необхідно подбати, щоб воно було зручним, чистим, добре освітленим, завчасно провітрюваним, без відволікаючих факторів.

Робота над дипломом також вимагає значної мобілізації ресурсів, як фізичних, так і психологічних, тому для уникнення перевантаження необхідно дотримуватися оптимального режиму праці та відпочинку.

Метою цього розділу є розгляд основних положень охорони праці та аналіз їх дотримання при виконанні дипломної роботи.

4.1 Оцінка напруженості праці

Для проведення атестації робочих місць та встановлення пріоритету в проведенні оздоровчих заходів використовується "Гігієнічна класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу. Виходячи з принципів Гігієнічної класифікації, умови праці діляться на 4 класи – оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1 клас – ОПТИМАЛЬНІ умови праці – такі умови, при яких зберігається не лише здоров'я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності. Оптимальні гігієнічні нормативи виробничих факторів встановлені для мікроклімату і факторів трудового процесу. Для інших факторів за оптимальні умовно приймаються такі умови праці, за яких несприятливі фактори виробничого середовища не перевищують рівнів, прийнятих за безпечні для населення.

2 клас – ДОПУСТИМІ умови праці – характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів, а можливі зміни функціонального стану організму відновлюються за час регламентованого відпочинку або до початку наступної зміни та не чинять несприятливого впливу на стан здоров'я працюючих та їх потомство в найближчому і віддаленому періодах.

3 клас – ШКІДЛИВІ умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні чинити несприятливий вплив на організм працюючого та/або його потомство. Шкідливі умови праці за ступенем перевищення гігієнічних нормативів та настання можливих змін в організмі працюючих поділяються на 4 ступені:

1 ступінь (3.1) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища та трудового процесу, які, як правило, викликають функціональні зміни, що виходять за межі фізіологічних коливань (останні відновлюються при тривалішій, ніж початок наступної зміни, перерві контакту з шкідливими факторами) та збільшують ризик погіршення здоров'я;

2 ступінь (3.2) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні викликати стійкі функціональні порушення, призводять у більшості випадків до зростання виробничо-обумовленої захворюваності, появи окремих ознак або легких форм професійної патології (як правило, без втрати професійної працездатності), що виникають після тривалої експозиції (10 років та

більше);

3 ступінь (3.3) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які призводять, окрім зростання виробничо-обумовленої захворюваності, до розвитку професійних захворювань, як правило, легкого та середнього ступенів важкості (з втратою професійної працездатності в період трудової діяльності);

4 ступінь (3.4) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні призводити до значного зростання хронічної патології та рівнів захворюваності з тимчасовою втратою працездатності, а також до розвитку важких форм професійних захворювань (з втратою загальної працездатності);

4 клас НЕБЕЗПЕЧНІ (ЕКСТРЕМАЛЬНІ) умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень.

Оцінка напруженності праці здійнюється за такими показаниками:

1) інтелектуальні навантаження (необхідність прийняття рішень, рішення складних завдань за відомим алгоритмом, евристична, творча діяльність тощо):

    (a) сприйняття інформації та її оцінка (необхідність корекції дій або її відсутність тощо);

    (b) розподіл функцій за ступенем складності сприйняття (обробка, виконання завдання його перевірка тощо);

    (c) характер виконуваної роботи (за планом, графіком, в умовах дефіциту часу тощо)

2) сенсорні навантаження (тривалість, щільність, кількість об'єктів тощо);

3) емоційне навантаження (ступінь відповідальності за результат діяльності, значущість помилки тощо;

4) монотонність навантажень (кількість та тривалість операцій за одиницю часу, час активних дій та пасивних спостережень);

5) режим праці.

Виходячи з даних таблиці “Класи умов праці за показниками напруженості трудового процесу” [17], можна зробити такі оцінки:

1) рівень інтелектуального навантаження допустимий, іноді шкідливий (під кінець роботи);

2) найбільше сенсорне навантаження припадає на зоровий апарат;

3) емоційне навантаження зростає під кінець роботи, коли необхідно в умовах дефіциту часу завершувати роботу, проходити через різноманітні бюрократичні процедури та готуватися до захисту дипломної роботи;

4) монотонність роботи незначна;

5) режим праці не перевантажений в залежності від періоду та вдалого розподілу часу.

4.2 Аналіз психологічних аспектів умов праці

Підготовка дипломної роботи, особливо математичного характеру, потребує значної інтелектуальної діяльності. На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. Під час розумової праці значно активізуються аналітичні та синтетичні функції центральної нервової системи, прийом і переробка інформації, виникають функціональні зв’язки, нові комплекси умовних рефлексів, зростає роль функцій уваги, пам'яті, навантаження на зоровий та слуховий аналізатори.

Для інтелектуальної праці характерні велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза, що зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При важкій розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока. Такому виду праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги - в середньому у 5-10 разів вище ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму - втома, що з часом може перетворитися на перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму.

Враховуючи вище сказане, вкрай важливо під час роботи організовувати перерви, під час яких розминатися, рухатися, дихати свіжим повітрям, відволікатися від завдання, давати відпочити зоровому апарату. Також під час інтенсивної розумової роботи необхідно дотримуватися правильного режиму харчування, забезпечувати організм поживними речовинами, вітамінами та мінералами, покривати підвищену потребу мозку в глюкозі. Без сумніву, при такій роботі надважливими є здоровий сон і регулярні фізичні навантаження.

4.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму роботи і відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці. Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу — інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів.

Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Таким чином, з фізіологічної точки зору режим праці і відпочинку являє собою процес управління функціональним станом працівника з метою оптимізації діяльності.

Режим праці і відпочинку протягом робочої зміни визначається такими факторами, як тривалість робочого дня, час початку і закінчення роботи, час надання і тривалість обідньої перерви, кількість і тривалість регламентованих перерв на відпочинок (макропауз), наявність мікропауз у трудовому процесі.

Тижневий режим праці і відпочинку характеризується встановленою кількістю робочих днів і годин, порядком чергування днів роботи і відпочинку, чергуванням роботи в різні зміни. Річний режим праці і відпочинку характеризується загальною кількістю днів і годин роботи, періодичністю і тривалістю основної і додаткових відпусток.

Режим праці і відпочинку залежить від характеру виробничого процесу, тобто може бути однозмінним або багатозмінним, стандартним або нестандартним. Однак у всіх випадках він повинен бути науково обгрунтованим, раціональним.

Раціональний, фізіологічно обґрунтований режим праці і відпочинку повинен відповідати таким вимогам:

- запобігати ранньому і надмірному розвиткові втоми працівників;
- сприяти збереженню високої працездатності і оптимального функціонального стану організму працівників протягом зміни;
- забезпечувати високу продуктивність праці;

- сприяти ефективному відновленню фізіологічних функцій під час відпочинку.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними і соціальними критеріями.

Працездатність і функціональний стан працівника характеризуються системою фізіологічних і психологічних показників, а також тривалістю і співвідношенням періодів впрацювання, стійкої працездатності і втоми; стійкістю фізіологічних функцій протягом робочого дня; часом відновлення функціональних показників по закінченню роботи.

Економічні критерії представлені показниками погодинного виробітку, затратами часу на одиницю продукції, якістю продукції тощо.

Гігієнічні критерії виявляються в показниках захворюваності і виробничого травматизму працівників.

Соціальні критерії — в задоволенні (чи незадоволенні) працівників режимом праці і відпочинку; чисельності працівників, які скаржаться на швидкий розвиток втоми або перевтому.

Розробка режимів праці і відпочинку передбачає:

- детальне вивчення характеру роботи, ліквідацію організаційних неполадок, оптимізацію виробничого середовища;
- проведення хронометражних спостережень робочого дня для встановлення періодів роботи і відпочинку;
- вивчення особливостей динаміки працездатності та графічний її аналіз на основі фізіологічних, психологічних і виробничих показників;
- раціоналізацію трудових процесів і впровадження заходів по запобіганню перевтомі працівників.

При розробці режимів праці і відпочинку враховуються:

- закономірності динаміки працездатності;

- конкретні організаційно-технічні умови виробництва;
- особливості відновлення фізіологічних функцій організму.

Розробка і впровадження нового режиму праці і відпочинку завершується перевіркою його ефективності за вищенаведеними критеріями. Якщо такий режим відповідає необхідним вимогам, то він може бути рекомендований як типовий.

Типовим називається режим праці і відпочинку, встановлений для працівників з різними умовами праці, який забезпечує приблизно однакові зміни в їх працездатності.

Проектування раціональних режимів праці і відпочинку здійснюється за такими методичними принципами:

- раціональне чергування роботи з відпочинком для запобігання перевтомі, підвищення працездатності і продуктивності праці є обов'язковим для всіх видів праці;
- розробка режимів праці і відпочинку для працівників фізичної, розумової, нервово-напруженої праці базується на єдиній методологічній основі;
- обгрунтування кількості і тривалості перерв на відпочинок в умовах різної тривалості робочої зміни базується на однакових принципах і методології;
- перерви на відпочинок, крім обідньої, надаються за рахунок робочого часу;
- перерви на відпочинок повинні бути регламентованими.

Основні вимоги до проектування внутрішньозмінних режимів праці і відпочинку зводяться до забезпечення поступового входження людини в роботу, ритмічності і послідовності дій, чергування робіт; обгрунтування тривалості обідньої перерви, кількості, тривалості і часу надання регламентованих перерв на відпочинок, змісту відпочинку та використання функціональної музики.

Упорядкування режиму праці і відпочинку передбачає регулювання таких трьох його параметрів, як загальний робочий час, тривалість періодів роботи і тривалість періодів відпочинку. Оптимізація часу роботи є вихідною умовою для мінімізації часу відпочинку і максимізації тривалості робочого часу.

4.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Санітарно-гігієнічні вимоги до робочих місць регулюються:

1. Законом України “Про охорону праці” (поточна редакція від 16.09.2008);

2. Правилами охорони праці під час експлуатації електронно-обчислювальних машин, затверджених наказом Державного комітету України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду від 26 березня 2010 року №65 та іншими нормативно-правовими актами;

3. Гігієнічною класифікацією праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу №4137-86, затвердженою МОЗ СРСР 12.08.86р та іншими нормативно-правовими актами.

Відповідно до ч.1 ст.13 Закону України “Про охорону праці”, роботодавець зобов’язаний створити на робочому місці в кожному структурному підрозділі умови праці відповідно до нормативно-правових актів.

Під час написання дипломної роботи я намагався слідувати вимогам та рекомендаціям нормативних актів щодо приміщення, організації робочого місця, освітлення, вентиляції, опалення, кондиціювання, мікроклімату, електробезпеки, рівнів шуму та вібрацій, рівня неіонізуючих електромагнітних випромінювань електростатичних полів.

4.5 Охорона праці при використанні технічних засобів

Під час підготовки тексту дипломної роботи, аналізу літератури, комунікації з науковим керівником виникає потреба у використанні різних технічних засобів, зазвичай це комп'ютер, проте іноді користуються планшетами, мобільним телефонами тощо. Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп'ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- пряма і відбита блискітливість;
- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;
- статичні перевантаження кістково-м'язового апарату та динамічні локальні перевантаження м'язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

Для мінімізації негативного впливу на здоров'я при роботі з ПК необхідно:

- регулярно проводити контроль обладнання;
- не використовувати несправне та надто застаріле обладнання;
- дотримуватися правил безпеки поводження з електромережами;
- підбирати індивідуально під себе ергономічні меблі;
- не перенапружувати зоровий апарат;
- контролювати яскравість та контрастність дисплею;
- не сидіти надто близько до екрану;
- регулярно проводити перерви.

Висновки

У дипломній роботі отримано сукупність умов на функцію регресії та випадкові похибки спостережень, за наявності яких імовірності великих відхилень норми нормованої різниці оцінки найменших квадратів та істинного значення параметра нелінійної моделі регресії з дискретним часом збігаються до нуля з експоненційною швидкістю.

Зокрема, розглянуто випадок незалежних однаково розподілених предгауссівських похибок спостережень та достатні умови на функцію регресії, за яких є вірним експоненційний закон великих відхилень.

Аналогічний факт отримано для незалежних однаково розподілених субгауссівських похибок спостережень. Наведено приклад виконаня умов відповідної теореми.

У заключній частині роботи отримано експоненційний закон великих відхилень для стаціонарної сумісно строго субгауссівської послідовності похибок спостережень.

Природними напрямками продовження дослідження є поширення отриманих результатів на інші класи випадкових величин та статистичних оцінок, а також дослідження випадку моделі регресії з неперервним часом.

Література

[1] Varadhan S. R. S. *Asymptotic probability and differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 19(3), 1966, pp. 261–286.

[2] Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*, М., “Наука”, 1972, 416 с.

[3] Петров В. В. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, М., “Наука”, 1987, 320 с.

[4] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*, М., “Наука”, 1982, 288 с.

[5] Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, Киев, ТВиМС, 1998, 289 с.

[6] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. *Асимптотическая теория оценивания*, М., “Наука”, 1979, 528 с.

[7] Иванов А. В. *Асимтотическое разложение распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной регрессии*, ТВП, 21, 1976, с. 571–583.

[8] Prakasa Rao B. L. S. *On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors*, Stat. Probab. Lett., 2, 1984, pp. 139–142.

[9] van de Geer S. *On rates of convergence in least squares estimation (report)*, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1986.

[10] Иванов А. В., Леоненко Н. Н. *Статистический анализ случаных полей*, Киев, “Вища школа”, 1986, 216 с.

[11] Sieders A., Dzhaparidze K. *A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis*, Ann. Stat., 15(3), 1987, pp. 1031–1049.

[12] Ivanov A. V. *Asymptotic theory of nonlinear regression*, Kluwer AP, Dordrecht, 1997, 330 p.

[13] Hu Shuhe. *A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression*, Stochastic Processes and their Applications, 47, 1993, pp. 345–352.

[14] Pfanzagl J. *On the measurability and consistency of minimum contrast estimates*, Metrika, 14, 1969, pp. 249–272.

[15] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, М., "Мир", 1967, 752 с.

[16] Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов*, М., "Наука", 1965, 656 с.

[17] Мітюк Л. О., Арламов О. Ю. *Методичні вказівки до розробки розділу «Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях» в дипломних роботах спеціалістів та магістерських дисертаціях студентів гуманітарного напрямку підготовки за освітньо-кваліфікаційними рівнями «спеціаліст» та «магістр»*, Київ, 2014, 32 с.