

Національний технічний університет України «КПІ»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
IV Міжнародної
науково-практичної конференції
24—25 грудня 2015 року

Київ 2016

УДК 51 (082)
ББК 22.1я43
М 34

Математика в сучасному технічному університеті : матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 24—25 груд. 2015 р.). — Київ : НТУУ «КПІ», 2016. — 300 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Математика в современном техническом университете : материалы IV Межд. науч.-практ. конф. (Киев, 24–25 дек. 2015 г.). — Киев : НТУУ «КПИ», 2016. — 300 с. — Укр., рус., англ., белорус.

ISBN 978-617-7021-36-9

Оргкомітет IV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Україна)
Проф. О. В. Іванов (Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Україна)
Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

Оргкомитет IV Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)
Проф. Н. А. Вирченко (Украина)
Проф. А. В. Иванов (Украина)
Доц. А. А. Дыховичный (Украина)
Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

УДК 51 (082)
ББК 22.1я43

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7021-36-9

©Автори
©НТУУ «КПІ», 2016



ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

ONE METHOD FOR APPROXIMATION OF THE TIME SERIES USING THREE SEGMENTED LINEAR REGRESSION

V. N. Kuzmin

NTUU “Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

In this short article it is proposed a new method for optimal approximation of time series using three segmented linear regression. The main of this approximation is to determine optimally coordinates (abscissa) of break points with minimization of the sum of squared errors.

The three segmented regression in this case looks as follows:

$$y = a + bx + c(x - \bar{x}_1)_+ + d(x - \bar{x}_2)_+ \quad (1)$$

where the term $(x - \bar{x})_+$ means that

$$(x - \bar{x})_+ = \begin{cases} (x - \bar{x}) & \text{when } x > \bar{x} \\ 0 & \text{when } x \leq \bar{x}. \end{cases}$$

It is better to consider the method on a specific example (Table 1). [1].

Table 1. Petroleum imports in USA (thousand barrels per day)

№	Year	Volume	№	Year	Volume	№	Year	Volume
1	1973	6256	12	1984	5437	23	1995	8835
2	1974	6112	13	1985	5067	24	1996	9478
3	1975	6056	14	1986	6224	25	1997	10162
4	1976	7313	15	1987	6678	26	1998	10708
5	1977	8807	16	1988	7402	27	1999	10852
6	1978	8363	17	1989	8061	28	2000	11459
7	1979	8456	18	1990	8018	29	2001	11871
8	1980	6909	19	1991	7627	30	2002	11530
9	1981	5996	20	1992	7888	31	2003	12264
10	1982	5113	21	1993	8620	32	2004	13145
11	1983	5051	22	1994	8996			

The sum of squared errors is computed via the expression:

$$\sum e_y^2 = \sum y^2 - b \sum xy - c \sum y(x - \bar{x}_1)_+ - d \sum y(x - \bar{x}_2)_+$$

A visual analysis of the data graph shows the existence of the three groups of the data points that could be represented with three linear segments. To optimize the detection of abscissa switching points it is proposed to construct three-dimensional optimization paraboloid, that is described by equation:

$$z = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4y^2 + A_5xy$$

To construct the paraboloid by the least squares techniques along z-axis (applied) is sum of squared errors. Here $\bar{x}_1$ is abscissa of the first switching points, and $\bar{x}_2$ is parameter of the second switching point. It is necessary to organize a set of grid point. And for this grid is constructed the optimization paraboloid. For this particular case parameter x_1 takes consequently the values 3, 4, 5, 6 and 7; and parameter x_2 takes values 8, 9, 10, 11 and 12.

All in all we will have 25 different combinations (node points or variants).

Then it is necessary to find partial derivatives of the optimization paraboloid:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A_1 + 2A_3x + A_5y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= A_2 + 2A_4y + A_5x = 0 \end{aligned} \right\}$$

Now it is possible to compute optimal parameters of the switching points:

$$x_{1opt} = 5,227 + 1; \quad x_{2opt} = 9,718 + 1$$

These values are substituted into three segmented regression (1) we will get its optimal expression, that provides for the minimum of the sum of squares.

Reference

1. Montgomery D. C. Applied Statistics and Probability for Engineers / D. C. Montgomery, G. C. Runger. — 4th ed. — Wiley, 2006 — 784 p.

ABOUT ONE EXAMPLE OF WEYL FUNCTION OF FRIEDRICHS' MODEL FOR NON-PERTURBED OPERATOR

I. Y. Lozyska-Perun

National University «Lviv Polytechnic», Lviv, Ukraine

ivkaloz@gmail.com

In this paper, we consider example of Weyl function on half-line $(0, \infty)$. Calculation is based on Friedrichs' model and branching of resolvent (for Friedrichs' model, Weyl function and spectral theory see [1-2]).

We consider Friedrichs' model

$$T = S + V$$

for some operator

$$T : L^2_\rho(0, \infty) \rightarrow L^2_\rho(0, \infty), \quad \rho(\tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{\pi},$$

which continuous spectrum coincides with $[0, \infty)$,

$$S : L^2_\rho(0, \infty) \rightarrow L^2_\rho(0, \infty), \quad S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau), \quad \tau > 0$$

$$D(S) = \left\{ \varphi : \int_0^\infty |\tau\varphi(\tau)|^2 \rho(\tau) d\tau < \infty \right\},$$

and

$$V = A^*B : L^2_\rho(0, \infty) \rightarrow L^2_\rho(0, \infty).$$

Resolvent of operator T is denote by $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$. Let

$$S_\zeta = (S - \zeta)^{-1} = \frac{1}{\tau - \zeta}.$$

The aim of this paper is to give an example of Weyl function for Friedrichs' model for non-perturbed operator, that is for $T = S$. We use Lemma 3 (see [1]) to simplify the calculations. According to this Lemma

$$Vf = A^*Bf, \quad A, B : H \rightarrow \mathbb{R}.$$

Let $Vf = (f, \beta)\alpha$ (see [1]), where $Bf = (f, \beta)$, $A^*c = c\alpha$, and consider the case $V_1f = kVf$, where k — arbitrary constant. Let us choose elements

$$\alpha = \frac{1}{1 + \tau}, \quad \beta = \frac{1}{1 + 2\tau}.$$

As $m(\zeta) = (T_\zeta 1, 1)$ (see [1]) and according Lemma 3 (see [1], we must calculate

$$T_\zeta = S_\zeta - kS_\zeta A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta, \tag{1}$$

We have

$$K(\zeta) = 1 + (S_\zeta \alpha, \beta) = 1 + \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{\pi(\tau - \zeta)(1 + \tau)(1 + 2\tau)}.$$

After change of variables $\sqrt{\tau} = u$ we obtain

$$\begin{aligned} K(\zeta) &= 1 + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u - \sqrt{\zeta})(u + \sqrt{\zeta})(1 + u^2)(1 + 2u^2)} = \\ &= 1 + \frac{\sqrt{\zeta}}{\pi(1 + \zeta)(1 + 2\zeta)}. \end{aligned}$$

In view of equality (1) we have

$$T_\zeta \varphi = S_\zeta \varphi - k \cdot \frac{S_\zeta \alpha(S_\zeta \varphi, \beta)}{1 + (S_\zeta \alpha, \beta)}.$$

As $\varphi = 1$ let us calculate

$$(S_\zeta 1, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{\pi(\tau - \zeta)(1 + 2\tau)} = \frac{\sqrt{\zeta}}{\pi(1 + 2\zeta)}.$$

So we obtain

$$T_\zeta 1 = \frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{k\sqrt{\zeta}(1 + \zeta)}{\pi(1 + \zeta)(1 + 2\zeta) + \sqrt{\zeta}} \cdot \frac{1}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}.$$

Denote

$$C(\zeta) = \frac{k\sqrt{\zeta}(1 + \zeta)}{\pi(1 + \zeta)(1 + 2\zeta) + \sqrt{\zeta}}. \quad (2)$$

$$\text{So } T_\zeta 1 = \frac{1}{\tau - \zeta} - C(\zeta) \cdot \frac{1}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}.$$

As $\frac{1}{\tau - \zeta} \notin D(S)$ then after the next transformation

$$\frac{1}{\tau - \zeta} = \frac{1}{1 + \tau} + \left(\frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{1}{1 + \tau} \right) = \frac{1}{1 + \tau} + \frac{1 + \zeta}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}$$

we obtain

$$T_\zeta 1 = \frac{1}{1 + \tau} + \frac{1 + \zeta - C(\zeta)}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)}.$$

Therefore,

$$m(\zeta) = \left(\frac{1}{1 + \tau}, 1 \right) + \frac{1 + \zeta - C(\zeta)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{(\tau - \zeta)(1 + \tau)} = -1 + \frac{1 + \zeta - C(\zeta)}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\zeta}}{1 + \zeta}.$$

In view of (2) we obtain Weyl function

$$m(\zeta) = -1 + \frac{\sqrt{\zeta}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\zeta}(1-k) + \pi(1+\zeta)(1+2\zeta)}{\pi(1+\zeta)(1+2\zeta) + \sqrt{\zeta}}.$$

In the case of non-perturbed operator $T = S$, that is $k \rightarrow 0$ we have

$$m(\zeta) = -1 + \frac{\sqrt{\zeta}}{\pi}.$$

References

1. Lozynska-Perun I. Y. Non-local potential and Sturm-Liouville operator / I. Y. Lozynska-Perun, E. V. Cheremnikh (in print).
2. Левитан В. М. Введение в спектральную теорию / В. М. Левитан, И. С. Саргсян. — Москва : Наука, 1970. — 671 с.

**MEANS' SUBORDINATION BREAKING
BY THE MEANS OF MEANS OF ALPHA-TRINITY**

E. A. Machusky, S. S. Mikadze

NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

sivera@ukr.net, salome.mikadze7@gmail.com

The problem is based on the fact that experimental physics at measuring distances and time periods operates with the decimal fractions with limited bit capacity of numbers π and e , and the constants of quantum physics are the numbers from very large (square of the speed of light) to very small (Planck's constant). That is why it is desirable to establish deviation limits of relations and products of the numbers π and e , which belong to a key equation of quantum physics — the equation of black-body radiation.

The purpose of the previous research [1, 2] was to establish a link between π and e and the golden ratio φ depending on the bit capacity of calculator.

The relevance of the work is caused by the necessity to reduce the error in the calculation of thermodynamics and electrodynamics constants, which is essential for designing nanoelectronic devices at distances less than 10^{-9} m.

For the first time there were set arithmetic limits of deviation of median from numbers π and e from the canonical value of "golden fraction" ($\varphi = 1,618033988749$). There was shown that the point of intersection of median of π and e and Fibonacci numbers corresponds to the 11 decimal place of median's mantissa.

The median of two numbers is the one fourth of the sum of the arithmetical, geometrical, harmonic and root square means.

Table.1 shows medians of numbers π and e depending on the length of their mantissa.

The first number of golden ratio appears on 7 bit of mantissa. The first digits of the golden ration appear from 8 to 11 bits.

Tab.1

Bit capacity of mantissa			
↓	The value of π and e	*	Median
2	3.14 / 2.71	*****	2,91512016744914529914
2	3.14 / 2.72	****	2,92623236896033713310
3	3.141 / 2.718	*****	2,92567762907499899794
3	3.142 / 2.718	**	2,92616016771331580204
4	3.1415 / 2.7182	*****	2,92602265690834866226
4	3.1416 / 2.7183	*	2,92643403565281550789
4	3.1415 / 2.7183	****	2,92607453283991551885
4	3.1416 / 2.7182	**	2,92607091151771250914
5	3,14159 / 2,71828	*****	2,92610758716619799634
6	3,141592 / 2,718281	*****	2,92547870315271165718
6	3,141593 / 2,718282	*	2,92611047337827740238
6	3,141593 / 2,718281	**	2,92610955357192259470
6	3,141592 / 2,718282	****	2,92610958978563086318
7	3,1415926 / 2,7182818	*****	2,92610977556211227752
7	3,1415927 / 2,7182818	**	2,92608733657962088427
8	3,14159265 / 2,71828182	*****	2,92610981006474714678
8	3,14159265 / 2,71828183	****	2,92610981525236420036
9	3,141592653 / 2,718281828	*****	2,92610981566248483553
9	3,141592654 / 2,718281828	**	2,92610981614503285062
10	3,1415926535 / 2,7182818284	*****	2,92610981611126352522
10	3,1415926536 / 2,7182818285	*	2,92610981621139449726
10	3,1415926536 / 2,7182818284	**	2,92610981615951832673
10	3,1415926535 / 2,7182818285	****	2,92610981610530533306
11	3,14159265358 / 2,71828182845	*****	2,92610981617580545169
11	3,14159265359 / 2,71828182846	*	2,92610981618581854890
11	3,14159265359 / 2,71828182845	**	2,92610981618063093185
11	3,14159265358 / 2,71828182846	****	2,92610981618099306875
12	3,141592653589 / 2,718281828459	*****	2,92610981618481723918
12	3,141592653590 / 2,718281828459	**	2,92610981618529978719
13	3,1415926535897 / 2,7182818284590	*****	2,92610981618515502279
13	3,1415926535898 / 2,7182818284590	**	2,92610981618520327759
14	3,14159265358979 / 2,71828182845904	*****	2,92610981618521920258
14	3,14159265358979 / 2,71828182845905	****	2,92610981618522439020
15	3,141592653589793 / 2,718281828459045	*****	2,92610981618522324403

* - π and e rounded; ** - π rounded; *** - e rounded; ***** - π and e not rounded.

To show how the mean's subordination is breaking by the means of means let us take three numbers, which we named alpha-trinity.

$$A1 = 1/137 = 0.0072992700729927...$$

$$A0 = (\pi \cdot e / 100) ^2 = 0.0072927060593902...$$

$$AS = 3^6 / 10^5 = 0.0072900000000000...$$

For this alpha-trinity the subordination of means of means is breaking.[3]

The mean arithmetical and mean geometrical from numbers A1 and A0:

$$\begin{aligned}A1 &= 0.0072992700729927 \\mA\{A1,A0\} &= 0.0072959880661914 \\mG\{A1,A0\} &= 0.0072959873280070 \\A0 &= 0.0072927060593902\end{aligned}$$

The means of means arithmetical and geometrical:

$$\begin{aligned}mR[mA\{A1,A0\},mG\{A1,A0\}] &= 0.0072959876970992 \\mA[mA\{A1,A0\},mG\{A1,A0\}] &= 0.0072959876970992 \\mG[mA\{A1,A0\},mG\{A1,A0\}] &= 0.0072959876970992 \\mH[mA\{A1,A0\},mG\{A1,A0\}] &= 0.0072959876970992 \\A1 > A0 \text{ but } mR &= mA = mG = mH\end{aligned}$$

The same process of calculation for numbers A0 and AS:

$$\begin{aligned}A0 &= 0.0072927060593902 \\mA\{A0,AS\} &= 0.0072913530296951 \\mG\{A0,AS\} &= 0.0072913529041567 \\AS &= 0.0072900000000000\end{aligned}$$

The means of means arithmetical and geometrical:

$$\begin{aligned}mR[mA\{A0,AS\},mG\{A0,AS\}] &= 0.0072913516005540 \\mA[mA\{A0,AS\},mG\{A0,AS\}] &= 0.0072913529669259 \\mG[mA\{A0,AS\},mG\{A0,AS\}] &= 0.0072913529669259 \\mH[mA\{A0,AS\},mG\{A0,AS\}] &= 0.0072913543332982 \\A0 > AS, \text{ but } mR &< mA = mG < mH\end{aligned}$$

For the last sequence we can see the changes comparing with the previous one. Considering previous research and investigating the similarity and difference between calculated numbers we can state that the violation of means' subordination is based on the link between constants π and e and golden ratio φ .

References

1. Zhivkov A. P. On some numerical properties of the fine structure constant / A. P. Zhivkov, E. A. Machusky, A. V. Frolov // Математика в сучасному технічному університеті : Матеріали III Міжнар. наук.-прак. конф. (Київ, 25—26 груд. 2014 р.). — Київ : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 5—7.
2. Mikadze S. S. The link between π and e and golden ratio / S. S. Mikadze // Конкурс наук.-техн. проектів учнів Intel Techno Ukraine 2015 : тези робіт (Київ, 2015). — Київ, 2015. — С. 181—182.
3. Machusky E. A. Logarithmetics of quantum physics / E. A. Machusky // Шістнадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (14—15 травня, Київ) : Матеріали конф. — Київ : НТУУ «КПІ», 2015. — Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — С. 26—29.

ЗАСТОСУВАННЯ ЕКОНОМЕТРИКИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Т. В. Авдєєва

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

avdeeva_t1@rambler.ru

Математичні моделі використовували з ілюстративними та дослідними цілями ще у 18 ст. французькі вчені Ф. Кене (1758 «Економічна таблиця», модель відтворення), А. Сміт (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі). У 19 ст. великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа, представниками якої були Л. Вальрас, В. Парето, Ф. Еджворт та ін.). У 20 ст. математичні методи моделювання широко застосовувалися в усіх роботах, відзначених Нобелівською премією по економіці (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонт'єв, П. Самуельсон та ін.). При формалізації мікроекономічних та макроекономічних завдань зверталися до таких напрямів прикладної математики як теорія ігор, математичне програмування, математична статистика. У Росії на початку 20 ст. великий внесок у математичне моделювання економіки зробили вчені В. К. Дмитрієв, Е. Е. Слуцький, а у 60—80 роки — В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, Л. В. Канторович.

Економетричне моделювання виникло з потреб централізованого регулювання економіки в умовах загальної кризи світової економіки у 30-х роках 20 ст. Математична модель слугує описом функціонування реального економічного механізму.

Термін «економетрика» виник у роботах норвезького статистика Р. Фриша для позначення самостійної галузі наукового дослідження, присвяченого розвитку економічної теорії у її зв'язку зі статистикою й математикою. У 1931 р. серед науковців створено Міжнародне економетричне суспільство (Econometric society), заснований журнал «Економетрика». Вчений О. Лонге визначає економетрію як науку, що займається визначенням за допомогою статистичних методів кількісних закономірностей економічного життя. «Економетрія з'єднує між собою економічну теорію й економічну статистику і прагне за допомогою математико-статистичних методів додати конкретного кількісного вигляду загальним закономірностям, що установлюються економічною теорією». Американський економіст Дж. Джонстон у книзі «Економетричні методи» зазначає, що «економічна теорія має за мету вивчення різних наборів залежностей, щодо яких передбачається, вони описують функціонування частини економічної системи або всієї системи в цілому. Економетричне дослідження оцінює ці залежності статистично.»

Таким чином, під економетрією розуміють один із напрямків економіко-математичних методів аналізу, що полягає в статистичному вимірі (оцінюванні) параметрів математичних виразів, які характеризують деяку економічну

концепцію про взаємозв'язок і розвиток об'єкта, явища. На основі економетричних моделей формують конкретні економічні висновки.

Базовою категорією економетрії є модель. Якщо модель — це вираз формальної залежності у вигляді деяких математичних співвідношень, що відбивають зв'язок між явищами, то економетрична модель — особливий клас економіко-математичних моделей. Дослідник вибирає форму математичної залежності, що описує поведінку економічного об'єкта, оцінює параметри моделі різними методами (метод найменших квадратів, метод максимальної правдоподібності та ін.), перевіряє статистичну значущість моделі.

При побудові економетричної моделі реалізується метод моделювання за принципом «чорної скриньки». Дослідникові невідомий механізм процесів, що протікають у системі, вивчити цей механізм можна по вхідних і вихідних характеристиках системи. Вхідні й вихідні характеристики системи ототожнюють з екзогенними й ендогенними змінними, або в кореляційно-регресійному аналізі вживають терміни незалежні (факторні) змінні або регресори, і залежні (результативні) змінні або ознаки. Дослідникові необхідно виділити вхідні й вихідні характеристики і на підставі економетричних методів встановити характер причинно-наслідкових зв'язків, що лежать в основі механізму функціонування соціально-економічної системи.

На 1-му етапі побудови моделі проводиться її специфікація: докладний опис об'єкта дослідження, формується список економічних змінних, установлюється їхній взаємозв'язок. На 2-му етапі проводиться перевірка однорідності сукупності значень виділених змінних, виключення аномальних спостережень, уточнення об'єму змінних, установлення законів розподілу значень змінних. На 3-му етапі розраховуються оцінки параметрів рівнянь регресії, проводиться настроювання моделі. На 4-му етапі оцінюється адекватність моделі емпіричним даним. Якщо модель неадекватна, повертаються на 1-й етап, уточнюють специфікації й параметризації моделі. Якщо економетрична модель адекватна, вона може використовуватися для аналізу й прогнозування економічних процесів.

Список літератури

1. Економіко-математичне моделювання: навч. посібн. / Клебанова Т. С., Расвнєва О. В., Прокопович С. В. та ін. — Харків : ІНЖЕК, 2010. — 352 с.
2. Малярець Л. М. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник / Л. М. Малярець. — Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. — 312 с.

АЛЬТЕРНАТИВА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ В МЕТОДЕ ПОЛНЫХ КВАДРАТОВ

Д. И. Анпилогов

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

anpilogov@ua.fm

При обработке массива

$$x[n], 1 \leq n \leq N,$$

дискретных (в общем случае — комплексных) отсчётов аналогового сигнала $x(t)$ часто [1] строится система «линейных предсказаний вперёд»:

$$\sum_{m=0}^p a[m] x[n-m] = 0, \quad p+1 \leq n \leq N, \quad a[0] = -1. \quad (1)$$

Здесь каждое значение $x[n]$, начиная с $(p+1)$ -го, является линейной комбинацией p предыдущих значений. Современное цифровое оборудование позволяет легко накопить большое количество N отсчётов. Система (1) относительно искоемых коэффициентов $a[m]$ при $p \ll N$ за счёт наличия избыточных данных $x[n]$ становится неразрешимой точно. Поэтому возникает необходимость ввести ошибку $e[n]$ аппроксимации на основе линейного предсказания [2], положив

$$\sum_{m=0}^p a[m] x[n-m] = -e[n], \quad n = \overline{p+1, N}.$$

Коэффициенты $a[m]$ будем считать найденными оптимально при достижении минимума общей ошибкой:

$$S(a[1], a[2], \dots, a[p]) \equiv \sum_{n=p+1}^N |e[n]|^2 \rightarrow \min.$$

В работе обосновывается способ достижения этого минимума без применения операций дифференцирования.

Введём в рассмотрение матрицы

$$U_{(N-p) \times p} = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-p} \end{pmatrix}, \quad V_{(N-p) \times 1} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad A_{p \times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор ошибок (компоненты которого, вообще говоря — комплексные)

$$E_{(N-p) \times 1} = \begin{pmatrix} e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 x_p + a_2 x_{p-1} + \dots + a_p x_1 \\ a_1 x_{p+1} + a_2 x_p + \dots + a_p x_2 \\ \vdots \\ a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + \dots + a_p x_{N-p} \end{pmatrix} = V - UA.$$

Общая квадратичная ошибка линейного предсказания оказывается скалярным произведением, равным квадрату нормы вектора ошибок:

$$S = |e_{p+1}|^2 + |e_{p+2}|^2 + \dots + |e_N|^2 = E^H E.$$

Верхним индексом « H » обозначено эрмитово сопряжение. Используем соотношение

$$(PQ)^H = Q^H P^H,$$

справедливое для вообще любых матриц P , Q , порядки которых таковы, что их произведение PQ определено. Имеем:

$$\begin{aligned} S &= E^H E = (V - UA)^H (V - UA) = \\ &= V^H V - V^H U (U^H U)^{-1} U^H V + B^H C B = \text{const} + S'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$B = U^H V - U^H U A, \quad C = (U^H U)^{-1}, \quad S' = B^H C B.$$

Число S' назовем *матричным полным квадратом*. При постоянных матрицах U , V оно зависит только от компонент искомого столбца A и в силу эрмитовой симметрии ($C^H = C$) является действительным неотрицательным. Поэтому минимум ошибки S достигается при $S' = 0$. Поскольку матрица C не является нулевой, то достаточно нулевым считать столбец B , откуда

$$U^H V = U^H U A.$$

Тогда искомым столбец

$$A = (U^H U)^{-1} U^H V.$$

Заметим, если бы матрица U^H была квадратной невырожденной, мы получили бы

$$U^H V = U^H U A, \quad (U^H)^{-1} U^H V = (U^H)^{-1} U^H U A, \quad V = U A.$$

В этом случае вектор E ошибок оказался бы нулевым, а уравнение

$$V = U A$$

фактически являлось бы реализацией метода поточечной коллокации («привязки») по всем узловым точкам $x[n]$, $n = p+1, N$.

В действительности матрицы U , U^H — не квадратные, и (2) требует дополнительных комментариев. Для левой части (2) имеем:

$$\begin{aligned}(V - UA)^H (V - UA) &= (V^H - A^H U^H)(V - UA) = \\ &= V^H V - V^H U A - A^H U^H V + A^H U^H U A.\end{aligned}$$

Для правой части (2) имеем:

$$\begin{aligned}&V^H V - V^H U (U^H U)^{-1} U^H V + B^H C B = \\ &= V^H V - V^H U C U^H V + (U^H V - U^H U A)^H C (U^H V - U^H U A) = \\ &= V^H V - V^H U C U^H V + (V^H U - A^H U^H U)(C U^H V - C U^H U A) = \\ &= V^H V - V^H U C U^H V + \\ &+ V^H U C U^H V - V^H U C U^H U A - A^H U^H U C U^H V + A^H U^H U C U^H U A = \\ &= V^H V - V^H U C U^H U A - A^H U^H U C U^H V + A^H U^H U C U^H U A.\end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу

$$T = U C U^H.$$

Имеем:

$$TU = U C U^H U = U (U^H U)^{-1} U^H U = U \underbrace{(U^H U)^{-1}_{p \times p} (U^H U)_{p \times p}}_{I_{p \times p}} = U,$$

$$TU = U.$$

Здесь $I_{p \times p}$ — единичная матрица. Тогда правая часть (2) равна

$$\begin{aligned}&V^H V - V^H U C U^H U A - A^H U^H U C U^H V + A^H U^H U C U^H U A = \\ &= V^H V - V^H T U A - A^H U^H T V + A^H U^H T U A = \\ &= V^H V - V^H U A - A^H U^H U C U^H V + A^H U^H U A.\end{aligned}$$

Теперь, сравнивая это выражение с левой частью (2), достаточно доказать, что имеет место соотношение

$$A^H U^H U C U^H V = A^H U^H V.$$

Для этого достаточно убедиться, что

$$U^H U C U^H = U^H.$$

Эрмитово сопрягая последнее уравнение и учитывая, что

$$(U^H)^H = U,$$

а также, что

$$C^H = C,$$

получаем:

$$\begin{aligned}(U C U^H)^H (U^H)^H &= (U^H)^H, \\ (U^H)^H (U C)^H U &= U,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UC^H U^H U &= U, \\ UCU^H U &= U, \\ TU &= U, \end{aligned}$$

что уже доказано. Заметим, не следует полагать, будто T — единичная матрица. Противное может быть опровергнуто таким контрпримером:

$$U^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = UCU^H = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$TU = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = U.$$

Уравнение

$$TU = U$$

следует понимать так, что столбцы матрицы U (каждый — в отдельности) являются собственными векторами матрицы T , соответствующими собственному значению, равному единице.

Кроме того, если бы матрица T была единичной, для константы в (2) мы бы имели:

$$V^H V - V^H UCU^H V = V^H V - V^H TV = V^H V - V^H V = 0.$$

Это означало бы возможность точного предсказания:

$$e[n] = v[n] - \overline{v}[n] \equiv 0, \quad n = \overline{1, N},$$

т. е. возможность точной подгонки параметров $a[m]$ при избыточных данных $x[n]$.

Таким образом, в настоящей работе обоснована методика нахождения коэффициентов «линейного предсказания вперёд» при обработке массивов комплексных данных. Эта методика является модификацией метода наименьших квадратов, в которой за счёт выделения «матричного полного квадрата» из квадрата нормы вектора ошибок исчезает необходимость в операциях дифференцирования. Взамен использован развитый аппарат матричной алгебры.

Список литературы

1. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. — Санкт-Петербург : Питер, 2003. — 604 с.
2. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл.-мл. — Москва : Мир, 1990. — 584 с.

ДО ПИТАННЯ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРІАНТУ ПРОЕКТУ ІНЖЕНЕРНОЇ МЕРЕЖІ

І. С. Безклубенко

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
i.bezklubenko@gmail.com*

Планований розвиток великих міст призводить не тільки до ускладнення мереж комунального господарства, але й потребує ще на стадії проектування колосальної людської праці й великих капітальних вкладень. Перед спеціалістами, які проектують і експлуатують такі мережеві системи стоять задачі проектування мереж з урахуванням запасу пропускної спроможності й можливості оперативного змінення структури й параметрів магістральних та розподільних мереж в умовах зростаючої потреби в цільовому продукті. У зв'язку з цим, виникає необхідність в обмеженні строки ефективно розв'язувати задачі по знаходженню ресурсів, для інтенсифікації роботи мереж, уже на стадії проектування визначати оптимальні характеристики та параметри лінійного зв'язку, джерела цільового продукту, регуляторів, визначати можливість ліквідації аварійних ситуацій, визначати функціональні алгоритми роботи мереж в умовах автоматичного управління.

Тому, розв'язання проблеми автоматичного проектування інженерних мереж в умовах їх прогнозованого розвитку має важливе значення.

Проектні рішення, крім задоволення функціональним, технологічним та іншим вимогам, мають бути в деякому сенсі оптимальними, тобто реалізовувати можливість економно використовувати майже завжди обмежені матеріально технічні ресурси. Як бачимо з аналізу існуючих методів проектування, це не завжди можливо за наступних обставин:

- по-перше, існуючі методи проектування орієнтовані на застосування ручної праці, а це обумовлює спрощену постановку задач проектуванні й розв'язання їх приблизно;

- по-друге, існуючі методи проектування переважно визначають можливість прийняття суб'єктивних рішень, якість яких повністю залежить від професійної кваліфікації і практичних навиків проектувальника;

- по-третє, проектувальник завжди обмежений строками, у межах яких, наявними методами й засобами неможливо врахувати всі можливі варіанти проектних рішень і обрати з них найкращий за заздалегідь визначеним критерієм.

Збереження традиційних методів проектування призводить до зростання термінів створення нових та реконструкції наявних інженерних мереж, що нерідко призводить до морального зносу проектів.

Виповнити все зростаючий обсяг робіт та забезпечити отримання оптимальних проектних рішень, при збереженні існуючих на сьогодні методів проектування, не уявляється можливим. Тому ефективним, якщо не єдиним шляхом рішення задач, є автоматизація проектування.

Неперервне збільшення числа споживачів і змінення їх параметрів призводить до неперервного зростання вимог до інженерних мереж і відповідно до змінення критеріїв їх функціонування, тому виникає необхідність

розширення або реконструкції мережі. У зв'язку з цим, важливого значення набуває задача проектування мережі, яка б забезпечила всіх споживачів цільовим продуктом у необхідній кількості й відповідної якості при мінімальному значенні деякого критерію, записаного у вартісному, енергетичному або надійнісному виразі.

Задання векторів послідовних змінних (витрати) для великих мережевих систем не є складним, тому що з кожною послідовною змінною зв'язаний або споживач, або активне джерело цільового продукту, тому значення послідовних змінних є нормативними величинами, відомими до початку проектування. Це дає можливість побудувати оптимізаційну задачу вибору проекту мережі:

$$\min \left\{ \sum_{j \in N^{(H)}} A_{1j} \vec{D}_j^{(n)} + \sum_{j \in N^{(a)}} B_{1j} \frac{1}{\vec{D}_j^{(m)}} \right\} \quad (1)$$

$$\min \left\{ \sum_{j \in N^{(H)}} A_{1j} \vec{D}_j^{(n)} + \sum_{j \in N^{(a)}} B_{3j} \frac{1}{\vec{D}_j^{(m)}} - \Psi \sum_{j \in N^{(a)}} A_{1j} \vec{D}_j^{(m)} \right\} \quad (2)$$

$$\vec{B}h; \quad \vec{B}h \quad (3)$$

$$\vec{h}_j = B_{2j} \frac{1}{\vec{D}_j^{(m)}}, j \in N; \quad \vec{h}_j = B_{4j} \frac{1}{\vec{D}_j^{(m)}}, j \in \mathbb{N} \quad (4)$$

$$\vec{D}_j \in \left\{ \vec{D}_j^{(1)}, \dots, \vec{D}_j^{(K)} \right\}, j \in \mathbb{N}; \quad \vec{D}_j \in \left\{ \vec{D}_j^{(1)}, \dots, \vec{D}_j^{(K)} \right\}, j \in \mathbb{N} \quad (5)$$

У цій математичній моделі критерій (1) обумовлює потребу мінімізації фінансових витрат на будівництво та експлуатацію системи з метою забезпечення поставлених у час проектування потреб у цільовому продукті. Критерій (2) відображає потребу на перспективний розвиток системи в майбутньому від досягнутого рівня. Коефіцієнти $A_{1j}; B_{1j}; B_{3j}$ — пов'язані з вартістю будівельних робіт, Ψ — коефіцієнт використання старого обладнання. Обмеження (3) записані на основі другого закону Кірхгофа з цикломатичними матрицями $\vec{B}$ та $\vec{B}$, які відображають топологію мережі відповідно в момент проектування та в перспективі.

Задача полягає у виборі таких значень векторів паралельних змінних $\vec{h}, \vec{h}$ (напорів), однозначно (по формулах (4—5)) визначаючих діаметри $\vec{D}_j, \vec{D}_j, j \in \mathbb{N}$ ділянок мережі, що розвивається і оптимізує критерії (1), (2)

Список літератури

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин. — Москва : Мир, 1964. — 835 с.
2. Кулик Ю. В. Об одной математической модели функционирования сложной инженерной сети / Ю. В. Кулик, В. М. Михайленко // Ж. «ЭМ». — 1982. — № 5.

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ У КУРСІ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
zorot@ukr.net

Значення курсу «Математика для економістів» для майбутнього економіста є беззаперечним. Але аналіз багаторічного досвіду викладання цього курсу для студентів факультету менеджменту і маркетингу НТУУ «КПІ» свідчить про ряд вагомих проблем, серед яких:

- низький рівень підготовки студентів з елементарної математики;
- недостатня розвиненість абстрактного та логічного мислення;
- неготовність або небажання студентів працювати самостійно;
- відсутність мотивації та зацікавленості у навчанні математиці.

Вирішення трьох перших проблем частково може бути подолано шляхом додаткових занять, консультацій, більш ретельного контролю за виконанням завдань для самостійної роботи. А от можливість подолання четвертої проблеми ми вбачаємо у максимальному впровадженні в структуру курсу прикладних задач. Набір прикладів має бути максимально наближеним до реальної майбутньої практичної діяльності студентів. Такий підхід забезпечить більш свідоме і цілісне розуміння можливостей практичного використання математичного апарату та слугуватиме обґрунтуванням корисності програмного матеріалу.

Зупинимось на деяких прикладах.

Так, при вивченні елементів лінійної алгебри, доцільно розглянути задачі міжгалузевого балансу, задачі розподілу витрат сировини, палива, трудових ресурсів [1—5]. Такі приклади не лише допоможуть студенту оволодіти методами розв'язання систем лінійних рівнянь, а й дозволять зрозуміти характеристикацію економічного стану досліджуваного об'єкту. При запровадженні поняття власного числа та власного вектора (зауважимо, що ці поняття для студента-першокурсника зазвичай є досить абстрактними та незрозумілими) доцільно розглянути задачу взаємних закупівель товарів та модель міжнародної торгівлі [2].

Зокрема, продемонструємо, як поняття власного вектора і власних чисел матриці можна застосувати для аналізу процесу взаємних закупівель товарів.

Нехай маємо n країн. Їх національні бюджети позначимо відповідно через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Нехай a_{ij} — відносна частка бюджету, яку j -та країна витрачає на закупівлю товару i -ї країни.

Будемо вважати, що весь національний бюджет кожної країни витрачається лише на закупівлю товарів та послуг або всередині країни, або зовні її, тобто є справедливою рівність

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Розгляньмо матрицю, що складається з коефіцієнтів a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

вона називається *структурною матрицею торгівлі*.

У відповідності до (1) сума елементів кожного стовбця матриці A дорівнює одиниці.

Для i -ї країни прибуток від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \quad (2)$$

Умова збалансованої торгівлі формується так: прибуток від торгівлі кожної країни має бути не менше ніж її національний бюджет, тобто торгівля має бути бездефіцитною для кожної країни: $p_i \geq x_i$ для всіх i , або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Умовою бездефіцитної торгівлі є рівність

$$p_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введемо вектор бюджетів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тоді система рівностей (3) з урахуванням (2) приймає вигляд

$$A\bar{x} = \bar{x}.$$

Це рівняння означає, що власний вектор матриці A , що відповідає значенню $\lambda = 1$, складається з бюджетів країн, які ведуть збалансовану торгівлю. Отже, задача звелась до знаходження власного вектору структурної матриці торгівлі, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Широкий спектр прикладних задач можна розв'язувати при вивченні диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної, оскільки функції, рівняння, нерівності, як математичні моделі дають змогу пояснити і записати багато економічних процесів і явищ. Ознайомлення студентів з функціями попиту та пропозиції, умовами рівноваги попиту і пропозиції, функціями витрат та доходу сприятиме розумінню того, що основні математичні об'єкти, що вивчаються в курсі «Математика для економістів» є математичними об'єктами реальних економічних явищ. За допомогою засобів диференціального числення можна знаходити еластичність попиту та еластичність пропозиції відносно ціни, а при вивченні інтегрального числення розглядати задачі на обсяг виробництва змїну прибутку і доходу [2, 4, 5].

При вивченні функцій багатьох змінних доцільно вивчати *задачу про максимальний прибуток* [2, 5]. Розглянемо її більш детально.

Позначимо через x та y кількість ресурсів I та II виду, які використовуються у виробництві деякої фірми. Нехай p_1, p_2 — ціни факторів виробництва, а $f(x, y)$ — виробнича функція фірми, товар продається за ціною p_0 . Тоді функція прибутку має вигляд $P(x, y) = p_0 f(x, y) - p_1 x - p_2 y$.

Максимальний прибуток буде досягатись в точці локального максимуму такої функції. Це вимагає розв'язання системи

$$\begin{cases} P'_x = 0; \\ P'_y = 0; \end{cases}$$

з наступним аналізом її розв'язків.

Відомо, що диференціальні рівняння застосовуються при побудові динамічних моделей різних типів. Так, проста модель економічного росту описується за допомогою детермінованого диференціального рівняння з відокремлювальними змінними

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 = \text{const},$$

де $N(t)$ — розмір інвестицій в момент часу t , а $a(t)$ — відносна швидкість росту в момент часу.

Існує багато прикладів економічних задач, що зводяться до диференціальних рівнянь. Наведемо один з них.

Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зношення пропорційна в кожний момент його фактичній вартості. Початкова вартість — A_0 . Якою буде вартість використання впродовж t років?

Нехай A_t — вартість обладнання в момент t . Зміна вартості (знецінювання) виражається різницею $A_0 - A_t$. Швидкість знецінювання $(A_0 - A_t)'_t$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t . Одержуємо рівняння

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = kA_t$$

з початковою умовою

$$A_t(0) = A_0.$$

$$\ln|A_t| = -kt + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{A_t}{C}\right| = -kt;$$

Розв'язок має вигляд

$$A_t = A_0 e^{-kt}.$$

Отже, після низки представлених прикладів можемо зробити висновок, що необхідний рівень математичної підготовки студентів економічного напрямку по певним розділам неможливо забезпечити без створення системи прикладних

задач, які повинні мати професійно направлений характер. Тільки за допомогою такої системи студент може вмотивовано досягнути свого максимального рівня підготовки для подальшої професійної діяльності.

Уміння використовувати математичний апарат при вирішенні задач, зміст яких відповідає майбутній спеціальності, допоможе студентам у застосуванні математичного моделювання під час подальшого вивчення професійно-орієнтовних дисциплін, а також під час курсового та дипломного проектування.

Таким чином, набуття студентами навичок та вмінь при розв'язанні прикладних задач, в яких використовуються математичні моделі у повній відповідності до більшості розділів курсу «Вища математика для економістів» повинно бути невід'ємною складовою навчального процесу.

Список літератури

1. Барковський В. В. Математика для економістів / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — Київ : Нац. Академія управління. — 1997. — 382 с.
2. Буценко Ю. П. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум / Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — Київ : НТУУ «КПІ». — 2014. — 57 с.
3. Булдігін В. В. Конспект лекцій для студентів фінансово-економічного профілю / В. В. Булдігін, З. П. Ординська, Л. А. Репета. — Київ : НТУУ «КПІ», 2008. — 200 с.
4. Грисенко М. В., Математика для економістів. Методи і моделі, приклади та задачі / М. В. Грисенко. — Київ : Либідь, 2007. — 719 с.
5. Замкова О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замкова, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — Москва, 1997. — 368 с.

СТЕГАНОГРАФІЧНІ МЕТОДИКИ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ В АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМАХ ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
armchairdoc@yandex.ua, sergeant@aprodos.kpi.ua

Сучасне законодавство України (як і багатьох інших країн) забороняє приховування екологічної інформації, а також запровадження обмежень для громадян при її використанні та розповсюдженні. Інформація про стан довкілля не може бути віднесена до інформації з обмеженим доступом [1]. В той же час численні специфічні інформаційні повідомлення, пов'язані зі станом довкілля, зазвичай передають у «закритому» режимі. Перш за все, це команди керування системою екологічного моніторингу, зокрема, такі:

- ◆ вмикання та вимикання датчиків системи;
- ◆ організації додаткових процедур контролю стану довкілля;
- ◆ перевірки режимів роботи об'єктів — потенційних забруднювачів довкілля.

Зрозуміло, що передача такого роду інформації у відкритому вигляді істотно впливатиме на ефективність екологічного контролю та не дозволить отримати об'єктивної картини екологічної обстановки: у випадку «перехоплення» таких повідомлень вищезгадані потенційні забруднювачі оперативно реагуватимуть на них відключенням певних виробничих потужностей, змінами технологічних процесів, підключенням додаткових фільтрів, пиловловлювачів тощо. Тому доцільною є передача вказаної службової інформації у «закритому» вигляді з використанням шифрування та стеганографічних методів її захисту [2]. Враховуючи характерну для систем екологічного моніторингу обмеженість ресурсів, оптимальним видається поєднання нескладних (низького рівня захисту) процедур шифрування з використанням стежоконтейнерів [3]. Зазвичай як стежоконтейнери використовують неущільнені цифрові зображення. При цьому для передачі інформації можуть використовуватись відкриті (загальнодоступні) канали зв'язку (дротові, мобільні тощо).

В той же час ефективний контроль екологічної обстановки у промисловій зоні вимагає застосування методів стеження за тим, яким чином відбувається процес керування всередині потенційного забруднювача [4]. Це стосується режимів роботи промислових установок та очисних споруд, функціонування логістичних систем, появи нових та зміни місцезнаходження вже існуючих об'єктів, що можуть впливати на стан довкілля. Таким чином, виникає потреба у створенні, крім традиційних органів екологічної інспекції, також підсистеми «сигнальної розвідки» у структурі системи екологічного моніторингу. Серед завдань цієї підсистеми виокремимо, зокрема, наступні:

- ◆ виявлення незаконних (прихованих) каналів зв'язку, за допомогою яких здійснюють оперативне керування контрольованими об'єктами промислової зони;
- ◆ відслідковування інформаційної активності, результатом якої може бути поява нових потенційних забруднювачів;
- ◆ виявлення та негайне опрацювання повідомлень, що сигналізують про зміни в екологічній обстановці (в теперішній час або в майбутньому);
- ◆ виявлення використаних методів захисту інформації в усіх вказаних випадках.

Слід зазначити, що вирішення вказаних задач вимагає проведення серйозної підготовчої роботи, яка має включати:

- ◆ нормативне (на рівні як законодавчих, так і підзаконних актів) забезпечення, що дозволить обмежити кількість контрольованих каналів зв'язку та використовуваних методів приховування інформації;
- ◆ апаратне забезпечення, до складу якого входить обладнання для моніторингу (прослуховування) «дозволених» каналів та сканування решти;
- ◆ алгоритмічне забезпечення, зокрема, комплекс програм, що виділяють важливі «відкриті» повідомлення, аналізують інформацію на предмет наявності прихованих повідомлень, виконують їх розшифрування [5].

На думку авторів, підготовка, розробка та впровадження вказаних заходів дозволить істотно підвищити рівень інформаційного забезпечення систем екологічного моніторингу довкілля та оперативність реагування на надзвичайні ситуації.

Список літератури

1. Закон України «Про інформацію» [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/main/2657-12>.
2. Аграновский А. В. Основы компьютерной стеганографии / А. В. Аграновский, П. Н. Десянин, Р. А. Хади, А. В. Черемушкин. — Москва : Радио и связь, 2003. — 152 с.
3. Конахович Г. Ф. Компьютерная стеганография. Теория и практика / Г. Ф. Конахович, А. Ю. Пузыренко. — Киев : МК-Пресс, 2006. — 288 с.
4. Примаков А. В. Автоматизированные системы защиты воздушного бассейна от загрязнения / А. В. Примаков, А. Н. Щербань, А. С. Сорока. — Київ : Техніка, 1988. — 166 с.
5. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си / Б. Шнайер; пер. с англ. — Москва : Триумф, 2012. — 816 с.

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦІЇ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЦИФРОВИХ АВТОМАТІВ

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко, С. В. Семенов

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

ssaavva@ukr.net

Більшість алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел (ПЧ) базується на використанні регістрів зсуву із зворотними зв'язками по модулю 2 або LFSR (linear feedback shift register). Така ситуація виникла історично та пояснюється обмеженими можливостями елементної бази, що була доступною в 50—60-ті роки для реалізації алгоритмів. Застосовуючи лише функції зсуву та додавання за модулем 2, можна було отримати дуже прості та економні апаратні реалізації генераторів. На сьогодні ситуація докорінно змінилася: інтегральні схеми навіть середнього рівня інтеграції здатні реалізувати досить складні функції. Тому обмежуватись використанням алгоритмів генерації лише на базі LFSR виглядає архаїчним, оскільки без необхідності ігноруються практично необмежені можливості сучасної мікроелектроніки.

Очевидно, узагальненою моделлю генератора ПЧ може бути абстрактний цифровий автомат. З такої точки зору LFSR — це найпростіший автомат Мура. Зважаючи, що при генерації бажано отримати послідовність чисел максимальної довжини L без повторення чисел, граф переходів автомата Мура повинен бути 2-зв'язаним, тобто мати вигляд петлі (кільця). Для забезпечення максимальної довжини генерованої послідовності, необхідно, щоб автомат пройшов послідовно всі внутрішні стани — це ще більше обмежує клас можливих реалізацій генераторів та не виправдано збільшує шанси успішного криптоаналізу (наприклад, методом [1]) при використанні L як ключа для шифрування. Зазначені обмеження можуть бути суттєво пом'якшені, якщо за базову використати модель автомата Мілі. У цьому випадку

$$y_i(t) = f_i[X(t), Q(t)], i = 1, 2, \dots, n,$$

$$q_j(t + 1) = \varphi_j[X(t), Q(t)], j = 1, 2, \dots, k,$$

де $X(t)$ та $Q(t)$, відповідно, n -розрядний вхідний сигнал і k -розрядне слово, що описує внутрішній стан генератора в момент часу t , а f_i та φ_j — функції виходів і переходів автомата.

Модель Мілі дозволяє реалізувати деяку множину різних траєкторій переходів із одного внутрішнього стану в наступний стан і відповідно збільшити довжину генерованої послідовності ПЧ. (Зазначимо, що, використовуючи модель Мура, реалізується лише одна траєкторія із багатьох можливих). Збільшення довжини генерованої послідовності досягається простим «склеюванням» послідовностей, отриманих при різних вхідних сигналах. При незмінних функціях переходів і $n = 1$ отримуємо дві різні траєкторії та, відповідно, подвоєння довжини L . Очевидно, у загальному випадку при довільному n можемо отримати 2^n різних траєкторій, а змінюючи порядок (черговість) їх генерації можна отримати (принаймні, теоретично)

послідовність ПЧ завдовжки $L_{\max} = 2^k(2^n!)$ біт. Але для цього потрібно за певною програмою змінювати вхідні впливи $X(t)$, а саму програму теж змінювати від циклу до циклу. Зрозуміло, що для цього в структуру генератора ПЧ повинен бути введений додатковий блок для формування вхідних сигналів, що ускладнює алгоритм генерації та відповідну його реалізацію. Функції цього блоку, по суті, полягають у зміні траєкторій переходів, кожна з яких відповідає певному фрагменту генерованої послідовності.

Суттєве збільшення довжини циклу вже само по собі повинно наблизити отриману псевдовипадкову послідовність до дійсно випадкової. Для кількісної оцінки такого наближення можна скористатися тестами [2, 3], запропонованими ще у 1999 р. для перевірки послідовностей ПЧ «на випадковість». Тести NIST (всього 16 тестів) використовують різні критерії випадковості. До речі, один з них, а саме тест Linear Complexity, виявляє умовну складність послідовності з точки зору її аналітичного опису, але обмежений лише лінійними формами опису. За цим критерієм перехід до узагальненої моделі Мілі має шанси виявитися перспективним.

Ще одну групу тестів можна віднести до інформаційних (Universal Statistical Test, Approximate Entropy, Lempel-Ziv Complexity). Вони базуються на вимірюванні кількості інформації в послідовності, яка тестується (наприклад, визначається ефективність компресії або порівняння частот фрагментів послідовності, що перекривають один одного, з ймовірностями таких подій для дійсно випадкової послідовності).

Тести NIST на сьогодні є найбільш популярними і широко застосовуються для порівняння різних алгоритмів генерації ПЧ, але не можуть бути інструментом для числової оцінки наближення до дійсно випадкової послідовності ПЧ. На наш погляд, більш перспективним є підхід [4], що базується на розрахунках ентропії деяких умовних повідомлень, утворених фрагментами послідовності, яка генерується за допомогою конкретного алгоритму. Ідеалом для порівняння у цьому випадку є послідовність, в якій фрагмент будь-якої довільної довжини з'являється з однаковою частотою. Такий підхід дозволяє отримати саме числову оцінку послідовності ПЧ.

Список літератури

1. Пометун С. О. Алгебраїчні атаки на потокові шифратори як узагальнення кореляційних атак / С. О. Пометун // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 2. — С. 29—40.
2. Soto J. Randomness Testing of Advanced Encryption Candidate Algorithms _ NIST, 1999.
3. Потий А. Статистическое тестирование генераторов случайных и псевдослучайных чисел с использованием набора статистических тестов NIST STS / А. Потий, С. Орлова // Правове, нормативне та метрологічне забезпечення систем захисту інформації в Україні. — 2001. — Вип. 2. — С. 206—214.
4. Буценко Ю. П. Общее и селективное тестирование псевдослучайных битовых последовательностей / Ю. П. Буценко, Г. Н. Розоринов, Ю. Г. Савченко // Сучасний захист інформації. — 2014. — № 2. — С. 55—62.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М. Ш. Ганиев, Д. С. Сафаров, М. С. Шодиев

Институт энергетики Таджикистана

Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава,

Курган-Тюбе, Таджикистан

safarov-5252@mail.ru

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$\Delta^2 w + a\Delta w = bw^3(z) + cw^2(z) + dw(z) \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $w = u + i\vartheta$, $2w_z = w_x + iw_y$, $2w_{\bar{z}} = w_x - iw_y$, $\Delta w = 4w_{z\bar{z}}$,

Δw — оператор Лапласа, a, b, c — некоторые постоянные. Это уравнение встречается в теории изгиба тонких пластинок [1].

В данной работе выписывается решение уравнения (1) с помощью обобщенной эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(u)$ [2], определенное на плоскость некоторого квазипериодического гомеоморфизма $\omega(z)$ — уравнения Бельтрами [3]

$$u_{\bar{z}} - qu_z = 0, \quad |q| \leq q_0 < 1. \quad (2)$$

Такой гомеоморфизм $\omega(z)$ как показывалось в [3] удовлетворяет условиям:

1) $\omega(z)$ является решением (2);

2) $\omega(0) = 0$ и $\omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j$, где $h_1, h_2, \text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$;

периоды функции $q(z)$, $\tilde{h}_j$ зависит как функционал от h_j и $\text{Im}(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1) \neq 0$.

Когда $q(z) \equiv q$ — постоянное и $|q| < 1$, то функция

$$u(z) = z + q\bar{z}, \quad (3)$$

удовлетворяет условиям 1), 2), где $\tilde{h}_j = h_j + q\bar{h}_j$ если $|q| < 1$, то из условия $\text{Im}(h_2/h_1) > 0$ следует, что $\text{Im}(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1) > 0$.

При отображении $\omega(z)$ параллелограмм с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$ переходит на плоскости $\mathbb{C}_\omega$ в параллелограмм с вершинами $0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2, \tilde{h}_2$. Чтобы построить функцию Вейерштрасса $\wp(u)$ надо найти периоды $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$. В отличие от линейных уравнений в теории нелинейных уравнений периоды решения будут зависимыми от коэффициентов уравнения.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(z) = \wp(u) = \wp(z + q\bar{z}), \quad (4)$$

где постоянное q и периоды h_1, h_2 — пока неизвестные.

Функция $\wp(u)$ удовлетворяет уравнению Вейерштрасса [2]

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

где постоянные g_2 и g_3 называются инвариантами функции $\wp(u)$ с периодами $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$, которые являются решением системы нелинейной уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \sum' (m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2)^{-6} &= 140 g_2 \\ \sum' (m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2)^{-4} &= 60 g_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

штрих в сумме означает что $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0, m_1, m_2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

В теории модулярных функций [2] доказывалась система уравнений (4), когда $g_3^2 - 27g_2^2 \neq 0$ имеет единственное решение на верхней полуплоскости, то есть $\text{Im}(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1) > 0$. Подставляя (4) в (1) находим инварианты g_2, g_3 функции $\wp(u)$ и справедлива следующая.

Теорема. Пусть $0 < |b| < 120$ и $120d^2 = b$, $c = \frac{a\sqrt{b}}{20}$ и инварианты функции Вейерштрасса будут $g_2 = \frac{20b}{3b}$, $g_3 = \frac{20b}{3b\sqrt{b}}$ причем $20d^2 + 3a \neq 0$ и $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ — решение системы уравнений (4).

Тогда существует постоянное c такое, что уравнение (1) имеет решение вида

$$w(z) = \wp(z + \sqrt{b}) / (2\sqrt{30}\bar{z} + c)$$

с периодами

$$h_j = \frac{2\sqrt{30}}{120 - |b|^2} [2\sqrt{30}\tilde{h}_j + \sqrt{b}\bar{\tilde{h}}_j], \quad j = 1, 2.$$

Список литературы

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. — Москва : ОГИЗ, 1948. — 296 с.
2. Ахиезер И. И. Элементы теории эллиптических функций / И. И. Ахиезер — Москва : Наука, 1970. — 304с.
3. Сафаров Д. С. Двойкопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения / Д. С. Сафаров. — Душанбе : Дониш, 2012. — 190 с.

ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПРОМИСЛОВИХ КОМПЛЕКСІВ ШТУЧНОГО МІКРОКЛІМАТУ

І. М. Голінко, І. Є. Галицька

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
gal@pti.kpi.ua

Промислові комплекси штучного мікроклімату (ПКШМ) відображують складний технологічний процес, який має чималий діапазон зміни вихідних даних. З цих причин застосовують нетрадиційні рішення з автоматизації. Автоматичну систему керування (АСК) кондиціонера необхідно розглядати в рамках єдиного комп'ютерно-інтегрованого комплексу з технологічними взаємозв'язками між обладнанням кондиціонера [1].

Враховуючи наявність математичних моделей обладнання кондиціонера (калориферів, охолоджувачів та зволожувачів) у просторі стану [2—4], для стабілізації параметрів штучного мікроклімату, необхідно розробити комплексну динамічну математичну модель промислового кондиціонера як єдиного багатовимірного об'єкта керування (ОК) та розглянути задачу синтезу оптимального багатовимірного лінійно-квадратичного цифрового регулятора (ЛКЦР) у просторі стану, що є предметом дослідження.

Методика розробки комплексної динамічної моделі кондиціонера у просторі стану

Для розробки комплексної динамічної моделі кондиціонера в просторі стану необхідно дотримуватися такої послідовності дій.

1. Визначити кількісний склад кліматичного обладнання N для конкретного кондиціонера, де N — кількість одиниць обладнання.

2. Для наявного обладнання вибрати необхідні моделі кліматичного обладнання у просторі стану [2—4].

3. Визначити збурюючі та регулюючі канали впливу для технологічної системи кондиціонера U_1^i , F_2^i , F_3^i , де $i = 1 \dots N$.

4. Для комплексної моделі сформувати вектор керування U та збурення F із наявних впливів U_1^i та F_2^i на кліматичне обладнання.

5. Сформувати матрицю стану A комплексної моделі кондиціонера, діагональними елементами якої є матриці стану A^i кліматичного обладнання.

6. Сформувати матриці C^i із відповідних матриць B_2^i , які забезпечують передачу вектору вихідних змінних стану попередньої моделі X^{i-1} на відповідні змінні стану поточної моделі X^i обладнання кондиціонера.

7. Сформувати матриці B та D із відповідних матриць B_1^i та B_2^i .

При розробці комплексної моделі необхідно враховувати порядок динамічних моделей кліматичного обладнання.

За розглянутою методикою, формується комплексна модель ПКШМ, що має вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}; \end{cases} \quad (1)$$

Синтез ЛКЦР для багатовимірної системи керування із ОК (1) пропонується виконувати на основі критерію якості [5]:

$$I = \mathbf{X}_N^T \mathbf{S} \mathbf{X}_N + \sum_{s=0}^{N-1} [\mathbf{X}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_s + \mathbf{U}_s^T \mathbf{R} \mathbf{U}_s]; \quad (2)$$

де $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ — вагові додатні напіввизначені матриці; $\mathbf{R}$ — вагова симетрична додатна матриця; $\mathbf{X}_s$, $\mathbf{U}_s$ — відповідно вектор стану та вектор керування об'єкта на s -му кроці дискретизації з періодом T_{KV} , N — кількість кроків спостереження.

Синтез оптимального ЛКЦР для ПКШМ

Як відомо із класичної теорії керування, пропорційні регулятори не забезпечують точного відслідковування завдання та не повністю компенсують зовнішні збурення у системі керування [5, 6]. З цих причин необхідно переформулювати постановку завдання синтезу ЛКЦР таким чином, щоб у керуванні з'явилася інтегральна складова, яка компенсує статичний небаланс регулювання. Це можна зробити декількома способами. Один з них [5, 7] — розширення простору стану шляхом доповнення n -вимірному вектору $\mathbf{X}$ стану p -мірним вектором за яким необхідно мати інтегруючий вплив на ОК

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}\mathbf{X}. \quad (3)$$

У результаті зростає розмірність вектору стану на p (на кількість нових змінних), простір стану опишеться $(p + m)$ -вимірним вектором, а розширена модель ОК без детермінованої складової збурення $\mathbf{D}\mathbf{F}$ в просторі стану прийме вигляд

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}. \quad (4)$$

Для розширеного простору стану у неперервній формі лінійно-квадратичний регулятор формує ПІ-закон керування

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_P \mathbf{X} - \mathbf{K}_I \mathbf{Z} = -\mathbf{K}_P \mathbf{X} - \mathbf{K}_I \mathbf{C} \int_0^{t_f} \mathbf{X} dt, \quad (5)$$

тут $\mathbf{K}$ — матриця багатовимірного регулятора, що складається із пропорційної $\mathbf{K}_P$ та інтегральної $\mathbf{K}_I$ частин. Необхідною умовою існування такого регулятора є виконання нерівності $p < m$, тобто число змінних стану для яких вводиться інтегральний вплив не може бути більшим числа змінних керування.

Задачу синтезу оптимального ЛКЦР для ПКШМ можна сформулювати наступним чином. Нехай, відповідно до технології кондиціонування, модель ОК задано рівнянням (1). Потрібно синтезувати матрицю зворотного зв'язку K_d ЛКЦР, яка за параметрами стану ОК визначає траєкторію вектора оптимального впливу U_s^o для $s=1,2,\dots,N-1$, що мінімізує квадратичний критерій якості (2).

Перед усім, неперервну модель ОК (1) необхідно розширити змінними (3) за якими необхідно мати інтегральну складову в законі керування та отримати розширену модель ОК у просторі стану (4). Далі, розширену неперервну модель ОК потрібно привести до дискретного виду

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{s+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_s + \mathbf{B}_d \mathbf{U}_s, \\ \mathbf{Y}_s = \mathbf{C}_d \mathbf{X}_s \end{cases}, \quad (6)$$

$$\text{де } \mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_{KV}}, \mathbf{B}_d = \int_0^{T_{KV}} e^{\mathbf{A}(T_{KV}-\tau)} \mathbf{B} d\tau.$$

В загальному випадку оптимальний ЛКЦР представляється залежністю [8]

$$\mathbf{U}_s = -\mathbf{K}_d \mathbf{X}_s. \quad (7)$$

Регулятор формує зворотний зв'язок за станом параметрів ОК, використовуючи матрицю коефіцієнтів передачі $\mathbf{K}$. Матриця зворотного зв'язку визначається залежністю

$$\mathbf{K}_d = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d. \quad (8)$$

Параметри такого регулятора визначаються в результаті рішення рівняння Ріккаті. При $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ проводиться розв'язок стаціонарного матричного рівняння Ріккаті

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \left[\mathbf{I} - \mathbf{B}_d \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \right] \mathbf{A}_d. \quad (9)$$

Процедура синтезу ЛКЦР зводиться до наступної послідовності дій:

- 1) задаються параметри критерію (2) відповідно до технологічних вимог виробництва;
- 2) формується розширена неперервна модель ОК (4);
- 3) на основі (4) визначається дискретна модель ОК (6);
- 4) шукається розв'язок рівняння Ріккаті (9);
- 5) за залежністю (8) визначаються вектор параметрів ЛКЦР.

Ураховуючи наявність логічних перемикань між обладнанням кондиціонера задачу синтезу необхідно поділити на окремі підзадачі, що дозволить врахувати наявність логічного керування.

Висновки

Для промислових комплексів штучного мікроклімату запропонована методика розробки комплексної динамічної математичної моделі у просторі стану як єдиного багатовимірного об'єкта керування. Розглянута процедура синтезу оптимального багатовимірного лінійно-квадратичного цифрового регулятора, що дозволяє розрахувати матрицю зворотного зв'язку K_d , яка за параметрами стану об'єкта керування X_s визначає траєкторію вектора оптимального впливу U_{ss} , мінімізуючи квадратичний критерій (2). Запропонований алгоритм відрізняється наявністю логічного вибору обладнання для здійснення оптимального керування, що дозволяє переосмислити синтез автоматичної системи керування кондиціонера на основі розмежування взаємного впливу регулюючих параметрів.

На відміну від існуючих АСК, які стабілізують температуру та відносну вологість повітря, запропоновано регулювати температуру та вологовміст повітря, що дозволяє зменшити, а в деяких режимах виключити взаємозв'язок між параметрами температури та вологості. Математичне моделювання динамічних процесів для АСК промислового кондиціонера у середовищі Simulink MatLAB підтвердила ефективність запропонованого підходу до синтезу АСК ПКІМ. Це дозволяє перевести систему керування кондиціонером на якісно новий рівень і забезпечить ефективне використання енергоресурсів.

Список літератури

1. Голінко І. М. Аналіз та забезпечення ефективного керування системами штучного мікроклімату / І. М. Голінко, С. Г. Степаненко, І. Є. Галицька, В. Ю. Степаненко // Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки: Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції, 17—18 квітня 2013 р., Київ, 2013. — С. 172—175.
2. Голінко І. М. Моделювання температурного режиму теплообмінника / І. М. Голінко, А. І. Кубрак., А. С. Кравченко // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2010. — № 2/7(44). — С. 24—27.
3. Голінко І. М. Нестационарна модель тепло- та масообміну для водяного охолоджувача / І. М. Голінко // Сучасні проблеми наукового забезпечення енергетики: тези доповідей XII міжнародної науково-практичної конференції, 22—25 квітня 2014 р. — Київ, 2014. — С. 137.
4. Голінко І. М. Динамічна модель тепломасообмінних процесів у камері форсуночного зволоження / І. М. Голінко, А. І. Кубрак, І. Є. Галицька // Інформаційні системи, механіка та керування. — 2014. — № 11. — С. 61—71.
5. Рей У. Методы управления технологическими процессами / У. Рей. — Москва : Мир, 1983. — 368 с.
6. Голінко І. М. Оптимізація системи керування за модульним критерієм якості / І. М. Голінко, І. Є. Галицька // Інформаційні системи, механіка та керування. — 2013. — № 9. — С. 105—113.
7. Голінко І. М. Динамічна оптимізація при управлінні тепловим процесом / І. М. Голінко // Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т». — Київ, 1996. — 10 с. — Деп. у ДНТД України 22.04.96, №1011—Ук. 96.
8. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.

РЯДИ ФУР'Є В ЗАДАЧАХ ПРО РІВНОВАГУ НЕКРУГОВИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ

Я. М. Григоренко, Л. С. Рожок

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

r.l.s@ua.fm

При розв'язуванні задач теорії пружності про рівновагу некругових порожнистих циліндрів, а також оболонок, що мають форму поперечного перерізу, яке значною мірою відрізняється від колової, виникає потреба в застосуванні просторової моделі [1, 2].

Нехай напружено-деформований стан циліндрів описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \gamma} = \Phi_i \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \alpha^k}, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k}, \frac{\partial^2 Z_j}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + f_i(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i, j = \overline{1, I}, k = 1; 2), \quad (1)$$

де $Z_i = Z_i(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$) — шукані розв'язувальні функції, Φ_i — лінійні функції відносно своїх аргументів; $f_i(\alpha, \beta, \gamma)$ — праві частини, $O\alpha\beta\gamma$ — ортогональна криволінійна система координат. До цієї системи рівнянь необхідно додати граничні умови на контурах, наприклад, $\alpha = \text{const}, \gamma = \text{const}$ та умови періодичності в напрямку координати β .

Нехай граничні умови на контурах $\alpha = \text{const}$ дозволяють відокремити змінні шляхом розвинення розв'язувальних функцій та компонент навантаження в ряди Фур'є. Таким умовам відповідає діафрагма абсолютно жорстка в своїй площині та гнучка з неї, тоді

$$Z_i = \sum_{n=0}^N [Z_{in}(\alpha, \beta) \cos \lambda_n \alpha + Z'_{in}(\alpha, \beta) \sin \lambda_n \alpha] \quad (2)$$
$$(i = \overline{1, I}; \lambda_n = \pi n / l, l = \alpha_2 - \alpha_1).$$

Підставивши ряди (2) в розв'язувальну систему рівнянь (1) та відповідні граничні умови, після відокремлення змінних приходимо до двовимірної крайової задачі, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно амплітудних значень рядів (2) у вигляді

$$\frac{\partial Z_{in}}{\partial \gamma} = \Phi_{in} \left(\lambda_n, \beta, \gamma, \frac{\partial^k Z_{jn}}{\partial \beta^k} \right) + f_{in}(\beta, \gamma) \quad (i, j = \overline{1, I}; k = 1, 2; n = \overline{0, N}) \quad (3)$$

з граничними умовами при $\gamma = \text{const}$.

За рахунок періодичності, крайова задача дозволяє для всіх шуканих функцій подати розв'язки у вигляді рядів Фур'є за координатою β . Але при цьому потрібно, щоб всі члени рівнянь з відповідними коефіцієнтами не

перешкождали відокремленню змінних у цьому напрямку. В багатьох випадках в системі диференціальних рівнянь (3) присутні члени, що дорівнюють добуткам розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які характеризують геометричні параметри циліндрів і не дозволяють відокремити змінні вздовж координати β . Для подолання таких перешкод, вказані члени замінюються доповняльними функціями, які визначаються через розв'язувальні функції та їх похідні. При цьому розв'язувальна система рівнянь набуває вигляду (індекс n в позначеннях функцій опустимо)

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \gamma} = F_i(\lambda_n, \beta, \gamma, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k}, \varphi_r^p) + f_i(\beta, \gamma), \quad (4)$$

$$(i, j = \overline{1, I}; k = \overline{1, 2}; r = \overline{1, R}; p = \overline{1, P}),$$

де $\varphi_r^p = \varphi_r^p\left(\beta, \gamma, \frac{\partial^s Z_i}{\partial \beta^s}, \frac{\partial^t Z_i}{\partial \gamma^t}\right) (s, t \leq I)$ — доповняльні функції.

Таким чином, коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (4) формально не залежать від координати β , але за рахунок доповняльних функцій φ_r^p , загальне число невідомих перевищує порядок системи рівнянь, що необхідно враховувати при чисельному розв'язуванні крайової задачі.

Тепер подамо всі функції, що входять в систему рівнянь (4), у вигляді розвинень у ряди Фур'є за координатою β , тобто

$$\tilde{X}(\beta, \gamma) = \sum_{m=0}^M \tilde{X}_m(\gamma) \cos \lambda_m \beta; \tilde{Y}(\beta, \gamma) = \sum_{m=0}^M \tilde{Y}_m(\gamma) \sin \lambda_m \beta; \lambda_m = 2\pi m / T, \quad (5)$$

де $\tilde{X}, \tilde{Y}$ — розв'язувальні та доповняльні функції системи (4), T — період.

Підставляючи ряди (5) в систему рівнянь (4) та відповідні граничні умови, після відокремлення змінних та деяких перетворень, для амплітудних значень рядів (5) отримуємо зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\frac{dZ_{im}}{d\gamma} = F_{im}(\lambda_n, \gamma, Z_{im}, \varphi_{rm}^p) + f_{im}(\gamma), \quad (6)$$

$$(i = \overline{1, l}; m = \overline{0, M}; r = \overline{1, R}; p = \overline{1, P})$$

з граничними умовами на кінцях інтервалу $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$. Система рівнянь (6) крім амплітудних значень розв'язувальних функцій утримує ще амплітудні значення доповняльних функцій, які треба визначати окремо. Для цього на кожному кроці застосування чисельного методу, при фіксованому значенні γ в деяких точках інтервалу $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ обчислюємо значення доповняльних функцій, використовуючи поточні амплітудні значення розв'язувальних функцій. Потім будуємо ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній

множині точок [3, 4], амплітудні значення яких підставляємо до системи рівнянь (6) і робимо наступний крок інтегрування. Зі збільшенням числа точок, в яких обчислюються значення доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є все менше буде відрізнятися від точного ряду Фур'є і таким чином можна отримати результат з високою точністю. На кінцях інтервалу $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ задовольняємо граничні умови.

Практично при розв'язуванні прикладних задач в більшості випадків використовують лише небагато перших членів дискретного ряду Фур'є, тому що коефіцієнти Фур'є швидко спадають, а з ними швидко зменшується вплив далеких гармонік. Поряд з цим існують наближені підходи, які дозволяють порівняти значення коефіцієнта дискретного ряду Фур'є, побудованого на скінченній множині точок, з точним значенням цього ж та інших коефіцієнтів ряду Фур'є для тієї ж функції, яка задана аналітично [4].

Наведемо результати цього підходу.

Нехай функція $y(x)$ задана на множині точок, тобто $y(x_i) = y_i$ при $x_i = i \frac{2\pi}{k}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$). Побудуємо ряд Фур'є для функції $f(x)$, що задана на дискретній множині точок x_i ($i = \overline{0, k-1}$). Цей ряд запишемо у вигляді

$$y(x) = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (n \leq k/2),$$

де коефіцієнти a_0, a_m, b_m визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i; \quad a_m = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cos m \frac{2\pi i}{k}; \quad b_m = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} y_i \sin m \frac{2\pi i}{k} \quad (m \leq k/2) \quad (7)$$

Визначимо співвідношення, які зв'язують наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є з точними значеннями коефіцієнтів цього ряду.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка задана на інтервалі $[0, 2\pi]$ аналітично, і двічі диференційована. Точний ряд Фур'є для цієї функції має вигляд

$$y(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos jx + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin jx.$$

Тут великими літерами позначені точні значення коефіцієнтів.

Покладаючи $x_i = i \frac{2\pi}{k}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$), обчислюємо ті значення функції $y_i = y(x_i)$, які утримуються в формулах (7). Підставляючи ці значення y_i в формули (7), після деяких перетворень дістаємо

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \dots,$$

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \dots (m \leq k/2).$$

Зокрема, маємо: 1) при $k = 12$:

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \dots, a_1 = A_1 + A_{11} + \dots, a_2 = A_2 + A_{10} + \dots, a_3 = A_3 + A_9 + \dots;$$

2) при $k = 24$:

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \dots, a_1 = A_1 + A_{23} + \dots, a_2 = A_2 + A_{22} + \dots, a_3 = A_3 + A_{21} + \dots,$$

$$a_4 = A_4 + A_{20} + \dots, a_5 = A_5 + A_{19} + \dots, a_6 = A_6 + A_{18} + \dots, a_7 = A_7 + A_{17} + \dots,$$

$$a_8 = A_8 + A_{16} + \dots, \text{ і т. д.}$$

З цих рівностей видно, що при $k = 12$ можна враховувати тільки 2—3 гармоніки, а при $k = 24$ — можна очікувати достатню точність уже для перших 7—8 гармонік.

З використанням викладеного методу проведено дослідження впливу на розв'язок задачі кількості точок R , в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій та кількості членів M , які утримуються в дискретних рядах Фур'є на прикладі порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом під дією внутрішнього тиску [5]. Задачу розв'язано за таких умов: $R = 16; 32; 40$; $M = 6; 9; 13$; товщина циліндра $H = 5$; довжина $l = 60$; радіус середнього кола $r = 40$; степінь еліптичності $\Delta = 0,2$.

Результати розв'язання задачі подано в таблиці для переміщень u_γ та напружень σ_θ в середньому перерізі по довжині циліндра $s = 0,5l$.

R	M	$u_\gamma E / q_0$				σ_θ / q_0			
		$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$		$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$	
		γ / H							
		-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2
16	6	-198,80	-201,76	1208,5	1186,1	12,134	-1,789	4,779	17,251
32		-200,26	-203,19	1207,3	1184,9	12,169	-1,857	4,814	17,223
40		-200,26	-203,20	1207,3	1184,9	12,169	-1,857	4,814	17,223
16	9	-204,46	-207,14	1199,8	1177,4	13,063	-1,543	4,697	16,677
32		-206,57	-209,33	1197,8	1175,4	13,067	-1,539	4,720	16,711
40		-206,57	-209,33	1197,8	1175,4	13,067	-1,539	4,720	16,711
16	13	-204,09	-206,75	1199,8	1177,4	13,067	-1,546	4,697	16,677
32		-206,60	-209,35	1197,8	1175,4	13,095	-1,521	4,711	16,697
40		-206,60	-209,35	1197,8	1175,4	13,095	-1,521	4,711	16,697

З наведених в таблиці даних видно як впливає число точок R , в яких обчислюються значення доповняльних функцій і кількість M членів дискретних рядів Фур'є, що враховуються при розв'язуванні задачі, на збіжність отриманих розв'язків.

Список літератури

1. Grigorenko Ya. M. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // Int. App. Mech. — 2014. — **50**, № 2. — P. 105—127.
2. Grigorenko Ya. M. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section / Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok // J. Eng. Math. — 2006. — **54**. — P. 145—157.
3. Хемминг Р. В. Численные методы / Р. В. Хемминг. — New-York : MG Graw-Hill, 1962. — 400 p.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — Москва : Наука. — 1949. — Т. 3. — 783 с.
5. Григоренко Я. М. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми / Я. М. Григоренко, Л. С. Рожок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — **48**, № 2. — С. 79—100.

ЗАСТОСУВАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ МОДЕЛІ В. ЛЕФЕВРА В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ НАУКИ

О. О. Дмитренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

dmytrenko.o@gmail.com

За останні десятиліття розвиток науки характеризується проникненням математики майже в усі області дослідження, включаючи такі гуманітарні області, як економіка, психологія, мовознавство і навіть історія. Якщо раніше, впродовж віків, математика для інших наук була інструментом для подання та обробки інформації, то тепер вона все частіше використовується як засіб дослідження — створення математичних моделей, аксіоматичний підхід і т. п. Як наслідок, виникли такі науки як математична економіка, математична лінгвістика та математична психологія. Психологи, зазвичай, використовують математичний апарат у своїх дослідженнях, виражаючи в кількісній формі ті відношення, з якими вони працюють.

Обговорення проблем, пов'язаних з важливістю людської інтуїції в наукових дослідженнях, є актуальним для багатьох галузях науки, таких як: психологія, фізіологія, соціологія, фізико-математична, військова та політична галузі.

Актуальність даної проблеми полягає в тому, що в провідних наукових областях відсутнє логічне і обґрунтоване пояснення деякої людської поведінки. Відомий російсько-американський математик та психолог Володимир Лефевр запропонував математичну модель біполярного рефлексивного вибору людини, і, в окремих випадках живих істот.

Обговорення проблем, пов'язаних з місцем інтуїції в наукових дослідженнях має довгу історію. Перші роботи по дослідженню рефлексивних процесів з'явилися в 60-х роках минулого століття. На відміну від ретроспективного підходу, Володимир Лефевр у своїй роботі «Алгебра совісті» використовує інтуїцію, в першу чергу, для побудови формальної моделі індивіда, яка могла б передбачати майбутню поведінку суб'єкта. Також проблема правомірності використання методів, заснованих на інтуїції, виникала і в економістів [1].

Модель біполярного вибору запропонована Лефевром, може бути використана і за межами власне морального вибору. В праці також описано як завдяки цій моделі вдалося досягти прогресу в розв'язанні трьох нерозв'язаних до цього моменту психологічних проблем, пов'язаних з оцінювальною діяльністю людини [1].

Мета статті — на основі результатів психологічних експериментів відновити значення об'єктивного впливу на суб'єкта. Пропонується розглянути задачу рефлексивного керування.

В. Лефевром було запропоновано трьохрівневу модель рефлексії [1—4]. Під рефлексією розуміється здатність суб'єкта займати місце спостерігача по відношенню до своїх думок та почуттів.

Розглянемо неперервну модель, введену Володимиром Лефевром у роботі «Алгебра совісті»:

$$X_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 - x_1 x_2} \text{ при } x_1 + x_2 > 0$$
$$X_1 = \forall \text{ значення на } [0,1], \text{ при } x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Умова $x_1 = 0, x_2 = 0$ відповідає вільному вибору суб'єкта. Величина X_1 , що відповідає ймовірності, в околі точки $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ змінюється хаотично.

Експерименти в області психології, в результаті яких люди здійснюють моральний вибір, неможливі через етичні причини. Та існують аргументи, що дають змогу робити припущення, що співвідношення

$$X_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 - x_1 x_2} \quad (1)$$

повинно проявляти себе не тільки в моральному виборі, а й в оцінювальній людини. В. Лефевр робить припущення, що X_1 може проявляти себе в якості суб'єктивної оцінки місткості деякої позитивної якості в даному об'єкті, при умові, що суб'єкт має досвід оцінок місткості даної якості і в інших об'єктах подібного типу. Тоді x_1 виражає об'єктивну міру даної якості у представленому об'єкті, а x_2 — це середня міра даної якості у об'єктах, що були пред'явлені раніше (включаючи і даний). Тобто, суб'єкту показуються по черзі об'єкти, середня міра насиченості яких даною якістю практично не змінюється і рівна константі [1].

Наведена неперервна модель інтенціонального суб'єкта (1) передбачає вибір суб'єкта в експериментах, де потрібно здійснити оцінку міри насиченості об'єкта даною якістю. Так, наприклад, при оцінюванні ступеня насиченості деякою якістю матеріальних об'єктів, явищ чи ситуацій.

Спробуємо розв'язати обернену задачу: виходячи з результатів експерименту (наприклад, соціологічного опитування) отримати початкові значення об'єктивної інтенсивності в оцінюваному об'єкті. Тобто, знаючи розподіл оцінок, на основі двох відомих нам максимумів, оцінити значення об'єктивної міри насиченості оцінюваного об'єкта даною якістю, тобто оцінити x_1 . З'являється так звана задача рефлексивного керування: оцінити, яким повинен бути керуючий вплив, щоб суб'єкт здійснив бажаний для нас вибір.

Розглянемо можливий розв'язання цієї задачі. Візьмемо значення, відомого нам, правого максимуму X_1 . Знаючи, що оцінюваний об'єкт єдиний в запропонованій вибірці (тобто досвід суб'єкта заснований лише на значенні x_1) покладемо $x_2 = x_1$.

В результаті, отримуємо:

$$X_1 = \frac{x_1}{2x_1 - x_1^2}$$

Отримуємо квадратне рівняння з однією невідомою x_1 :

$$X_1 x_1^2 + (1 - 2X_1)x_1 = 0,$$

розв'язуючи яке отримуємо оцінку значення об'єктивної міри насиченості оцінюваного об'єкта даною якістю для однієї групи учасників експерименту ($x_1 = 0$ не є розв'язком):

$$x_1 = \frac{2X_1 - 1}{X_1}$$

Розв'яжемо конкретну задачу. Нехай в нас є два максимуми $X_1^* = 0,2$ та $X_1 = 0,6$. Внаслідок того, що максимуми не симетричні, отримуємо два різні x_1^* та x_1 , але близькі значення об'єктивної міри для двох груп учасників експерименту. Отже, оцінюване значення належить інтервалу $[x_1, x_1^*]$.

Оцінимо, при якому значенні з інтервалу $[x_1, x_1^*]$, сума квадратів різниць між значеннями максимумів в оцінюваній точці і відповідними, даними з експерименту, значеннями максимумів X_1^* та X_1 буде мінімальна.

Побудувавши нескладну програмну реалізацію наведеного алгоритму, отримуємо оцінюване значення x_1 . Поставлена задача розв'язана.

В результаті, для запропонованих значень експерименту $X_1^* = 0,2$ та $X_1 = 0,6$ передбачається отримати x_1 (значення об'єктивної інтенсивності насичення запропонованого об'єкта позитивною якістю) рівне 0,2(6).

Отже, неперервна модель індивіда, запропонована Володимиром Лефевром, має широке застосування в суміжних з математикою науках. Отримані результати дають можливість нам говорити про тісний зв'язок математики з іншими науками. Також, враховуючи актуальність і перспективність отриманих результатів, планується продовжити дослідження в цьому напрямку.

Список літератури

1. Лефевр В. Алгебра совести / В. Лефевр. — Москва : Когито-центр, 2003. — 426 с.
2. Lefebvre V. Sketch of Reflexive Game Theory / V. Lefebvre / Proc. Workshop on Multi-Reflexive Models of Agent Behaviour. — Los Alamos, New Mexico, USA. — 1998. — P. 1—40.
3. Лефевр В. Космический субъект / В. Лефевр. — Москва : Ин-кварти, 1966. — 168 с.
4. Lefebvre V. The Fundamental Structures of Human Reflexion. — New York : Peter Lang Publishing, 1990.

АКТУАЛЬНІСТЬ ПОПУЛЯРИЗАЦІЇ ОСНОВ КРИПТОГРАФІЧНИХ ЗНАНЬ

Ю. Д. Жданова, С. М. Шевченко

Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна

yuzhdanova@yandex.ru, SN-shevchenko65@yandex.ru

Великі системні інтереси сучасного суспільства вимагають розвитку науково-популярної освіти. Наше суспільство як суспільство європейського типу ґрунтується на науковому світогляді і досягненнях науки.

Прогрес науки в ХХІ ст. поставив популяризацію наукових знань на новий рівень. Головною проблемою є доступність цих знань для неспеціалістів, тому що, як виявилось, досконаліша наука не стає тим самим доступнішою і лише частково може бути засвоєною через ті або інші популярні форми подачі, особливо в абстрактно-теоретичних областях.

Нині можна виділити дві найбільш характерні точки зору на популяризацію наукових знань:

- наукові проблеми і гіпотези мають такі аналоги, за допомогою яких можливий, хоча і не повною мірою, їх переклад мовою неспеціального знання;
- популярне знання завжди лише ілюзія залучення до наукового знання, лише сурогат останнього.

Спеціальні дослідження свідчать скоріше на користь першої точки зору.

Найважливішим і найбільш перспективним, судячи з усього, аспектом сучасної наукової популяризації для масової аудиторії є популяризація наукового світогляду, основ наукового мислення.

Спрощення наукового знання при його популяризації традиційно розглядалося лише як неминуче витрачання, на яке свідомо йде популяризатор в цілях довести складне спеціальне знання «до розуму» необізнаних. Але це лише одна сторона справи. Все більш усвідомлюється й інша особливість дійсно серйозної, компетентної популяризації: можливість через спрощення виявити і викласти найбільш суттєве в науковому знанні, не захаращуючи виклад масою технічних і інших подробиць. Саме у популярних роботах вчені мають можливість звернути увагу на світоглядні, загальнонаукові, соціальні і культурні аспекти як самої наукової діяльності, так і її основних результатів. Усвідомлення принципової важливості наукової популяризації для розвитку самої науки і її філософії знаходить все більше віддзеркалення в сучасній науковій свідомості.

Сьогодні наука змінилася принципово, стала набагато більше спеціалізованою, тепер навіть і вчені не завжди можуть зрозуміти колегу — задачі популяризації стали якісно важче.

Найбільш складними для популяризації є точні науки, представники яких небезпідставно переконані в неможливості повного перекладу математичної і фізичної мови на будь-яку іншу мову з-за складності подолання

термінологічного бар'єру, високого рівня абстрактності, віддаленості об'єктів їх науки від звичайного досвіду.

Криптографія як область прикладної математики є однією із найстаріших наук, її історія налічує декілька тисяч років.

Криптографія дозволяє зберігати важливу інформацію або передавати її по ненадійних каналах зв'язку (наприклад, мережею Інтернет) так, що вона не може бути прочитана ніким, окрім законного одержувача. Криптографія не займається: захистом від обману, підкупу або шантажу законних абонентів, крадіжки ключів і інших погроз інформації, що виникають у захищених системах передачі даних.

Сьогодні криптографія торкається самих різних сторін життя, у тому числі і повсякденних. Будь-який користувач інформаційно-комунікаційної системи не раз стикається із словами «шифр», «ключ», «криптограма», «електронний підпис», але не завжди має уявлення про зміст цих понять. Більш того, він не знає не лише про існуючі способи криптографічного захисту інформації, але і про шифри, якими користувалися в докомп'ютерну епоху і про існуючі уявлення про криптографію майбутнього, оскільки сучасний стан освіти в загальноосвітній і вищій школі з цього питання не задовольняє вимогам суспільства до рівня знань молодого покоління в області захисту інформації. Цим пояснюється актуальність популяризації основ криптографічних знань.

Розгляд питань, пов'язаних з цією тематикою має як теоретичну, так і практичну значущість. Пояснимо на прикладах.

У меню багатьох засобів навігації мережі Internet задається питання, чи потрібний режим шифрування, і якщо відповісти «потрібний», починається процедура вироблення ключа. Щоб правильно діяти, користувач повинен мати уявлення про основи криптографії.

Ще 20 років тому мало хто знав про існування банківських карток, а сьогодні практично в кожного в гаманці знайдуться декілька штук. Раніше картки були тільки магнітними і трималися на магнітній непідроблюваності, потім з'явилися інтелектуальні картки, в які вшитий процесор, що виконує криптографічні функції. Безліч людей заклопотана збереженням своїх грошей. Цим людям необхідно розповідати про криптографію в популярній формі.

Поняття електронного цифрового підпису в усіх на слуху, всі про це говорять, але не всі розуміють, що це таке, і тим більше, не розуміють математичну основу цього поняття. Цифровий підпис є криптографічною конструкцією, відмінною від шифрів, і від неї вимагаються інші якості: не просто захист відкритого тексту, але і непідроблюваність, і захист від відмови від підпису. Саме це має виняткове значення в усіх справах, пов'язаних з використанням електронного документообігу.

Широке поширення отримало зараз застосування в процесі навчання локальних і дистанційних комплексних навчальних систем, кожна з яких має свою специфіку в плані захисту інформації. Оскільки комплексні навчальні системи включають системи тестування знань, то основна проблема тут полягає

в захисті тестових завдань і відповідей на них від спроб несанкціонованого доступу. Якщо йдеться про дистанційну систему, то тут захист потрібен для мережевого з'єднання між клієнтською і серверною компонентами системи. В обох випадках допомогти може шифрування, для першого випадку — із закритим, для другого — з відкритим ключем.

Приклади, які можна продовжити, показують, що сьогодні криптографія з теоретичної науки перетворюється на глибоко практичну область.

На жаль, у наш час швидкостей, обізнаність у великому занепаді, і жертвувати багато часу для пізнання звичайна людина не згодна — у неї є інші інтереси. В зв'язку з цим істотно впав інтерес до науково-популярних друкарських робіт — накладі малі, видавництва менш зацікавлені. Ринок таких продуктів невеликий, прибутки малі, працювати там не вигідно.

З метою популяризації знань по основах криптографічних знань представляється доцільним створення для шкіл і університетів різних профілів креш-курсів, на яких давалися б: поняття про захист даних і чому він потрібен в повсякденному житті; базові основи безпеки інформації, способи по збереженню приватності своїх даних. Пояснити, що таке «*https*» і навіщо треба вибирати пароль поскладніше, чому не варто підключатися до незахищених WIFI-спотів, що не варто зберігати в хмарі і таке далі.

Проте масово потрібні лише базові знання, а в криптографії з наукової точки зору повинен розбиратися саме фахівець.

Список літератури

1. Лазаревич Э. А. Искусство популяризации науки. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1978. — 224 с.
2. Баричев С. Криптография без секретов. Интернет-издание. — Горячая Линия – Телеком, 2004. — 43 с.

ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ У ЗАДАЧАХ З ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Т. В. Іваненко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

ivanenko@inet.ua

Фінансова математика — це дисципліна, що вивчає математичні методи, які застосовуються до фінансових розрахунків. Предметом вивчення фінансової математики є грошові потоки, які створюються при кредитуванні або інвестуванні; актуарні розрахунки, що застосовують у страховій справі; розрахунки показників деривативів, які мають значну кількість стохастичних чинників, а також прогнозування фінансових показників.

Розглянемо застосування математичних методів у фінансах на прикладі таких фінансових інструментів, як цінні папери. Цінні папери створюють грошові потоки, математичною моделлю яких можуть бути степеневі ряди. Проілюструємо це на прикладі облігації.

Облігація — це цінний папір, що засвідчує відносини позики між її емітентом (позичальником) та особою, що придбала облігацію (кредитором). Облігація характеризується такими параметрами: номінальною вартістю (сумою позики), купонною ставкою (кредитним процентом k %), терміном погашення n та ринковою вартістю, яка може відрізнитись від номінальної. Характеристиками облігацій також є курс, дюрація та опуклість.

Курс облігації — це відношення ринкової вартості до номіналу. *Дюрація* (D) — це середньозважений термін потоку платежів (купонних виплат та погашення основного боргу C_i), зважений за дисконтованою сумою виплат (1):

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n T_i \frac{C_i}{(1 + 0.01r)^i}}{\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + 0.01r)^i}}, \quad (1)$$

де T_i — строк i -ої виплати. Дисконтування проводиться за ставкою r %, яка виражає повну дохідність облігації і враховує як купонну дохідність, так і дохідність від погашення при відмінності ринкової вартості від номінальної. Знаменник формули (1) виражає вартість облігації як цінного паперу, що генерує грошовий потік C_i , його можна позначити

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + 0.01r)^i}.$$

Дюрація характеризує чутливість (еластичність) потоку платежів до зміни процентної ставки (2):

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right), \text{ або } \frac{\Delta P}{P} = -\frac{D}{1+r} \Delta r \quad (2)$$

Чим більше дюрація цінного паперу, тим більш значними є зміни її ринкової вартості при зміні ставки дисконтування, а отже вище ризик процентної ставки. Позначимо $D_m = \frac{D}{1+r}$ і назовемо її модифікованою дюрацією. *Опуклість облігації* характеризує різницю між ринковою ціною облігації та ціною, спрогнозованою на підставі модифікованої дюрації. З формули (2) бачимо, що зв'язок між змінами ціни і ставки ΔP і Δr лінійний, але насправді це не так. Графічно ця залежність описується деякою кривою (рис. 1), причому чим більшою є зміна дохідності Δr , тим більша похибка оцінки зміни ціни ΔP , яка розрахована за формулою (2), тобто заміною нелінійної залежності лінійною.

На рис. 1 ΔP — фактичний приріст ціни, ΔP^* — приріст, розрахований за допомогою модифікованої дюрації.

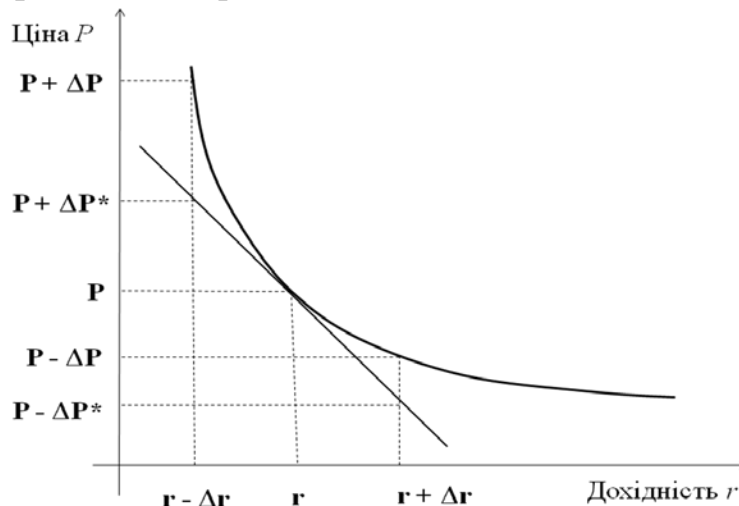


Рис. 1. Графік залежності між змінами ціни ΔP і ставки Δr

Для уточнення розрахунків і зменшення похибки розглянемо ціну облігації як функцію дохідності: $P = f(r)$, значення якої в точці r відомо. Треба знайти значення функції в точці $r + \Delta r$. Для цього розкладемо функцію в ряд Тейлора (3), обмежуючись першими трьома членами ряду:

$$f(r + \Delta r) = f(r) + \frac{f'(r)}{1!} \Delta r + \frac{f''(r)}{2!} (\Delta r)^2 \quad (3)$$

Тоді зміною ціни буде

$$\Delta P = f(r + \Delta r) - f(r).$$

Уведемо таку заміну та розділимо обидві частини рівності (3) на P :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{f'(r)}{P} \Delta r + \frac{f''(r)}{2P} (\Delta r)^2.$$

$\frac{f'(r)}{P}$ — це модифікована дюрація D_m , а $W = \frac{f''(r)}{P}$ — опуклість. Тоді його можна розрахувати за формулою (4):

$$W = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n 10^{-4} \frac{i(i+1)C_i}{(1+0.01r)^{i+2}} \quad (4)$$

Остаточно, відносна зміна ціни, визначена з урахуванням опуклості, може бути розрахованою за формулою (5):

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_m \Delta r + \frac{1}{2} W (\Delta r)^2 \quad (5)$$

Проілюструємо це на такому прикладі: облігацію номіналом 1200 грн. куплено за ціною 1000 грн. за 4 роки до погашення. Купонна ставка — 15%. Купонний дохід виплачується один раз на рік, дохідність від погашення цієї облігації — 21.6%. Прогнозується зростання дохідності до 25%. Знайти ціну облігації при вказаному зростанні дохідності.

Розв'язання. Знайдемо дюрацію, модифіковану дюрацію та опуклість. Для цього скористаємось розрахунковою таблицею 1. За даними таблиці 1:

$$D = \frac{3213,82}{1000} = 3,2; D_m = \frac{3,2}{1,216} = 2,63; W = \frac{1}{1000} \cdot \frac{14836,58}{(1,216)^2} = 10,03.$$

$$\Delta r = 25 - 21,6 = 3,4 \text{ (\%)}$$

Таблиця 1. Розрахунок показників D , D_m та W

i	$(1.216)^{-i}$	C_i	$C_i \cdot (1.216)^{-i}$	$i \cdot C_i \cdot (1.216)^{-i}$	$i(i+1) \cdot C_i \cdot (1.216)^{-i}$
1	0.8221	180	147.98	147.98	297.96
2	0.6758	180	121.64	243.28	729.84
3	0.5556	180	100.01	300.02	1201.10
4	0.4568	1380	630.38	2521.54	12607.68
Разом:			1000	3213.82	14836.58

Розрахуємо відносну зміну ціни за допомогою модифікованої дюрації:

$$\frac{\Delta P}{P} = -2,63 \cdot 0,034 = -0,089.$$

Нове значення ціни

$$P - \Delta P^* = 1000(1 - 0,089) = 910,6 \text{ (грн.)}$$

Тепер уточнимо отримане значення, використовуючи показник опуклості:

$$\frac{\Delta P}{P} = -2,63 \cdot 0,034 + 0,5 \cdot 10,03 \cdot (0,034)^2 = -0,089 + 0,006 = -0,083.$$

Нове значення ціни з урахуванням опуклості

$$P - \Delta P = 1000 \cdot (1 - 0,083) = 917 \text{ (грн.)}$$

Список літератури

1. Аньшин В. М. Инвестиционный анализ: учебно-практическое пособие / В. М. Аньшин. — Москва : Дело, 2000. — 280 с.
2. Збірник задач з фінансової математики / О. Д. Борисенко, Ю. С. Мішура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко. — Київ : Техніка, 2006. — 255 с.
3. Пасічник Я. А. Математика для економістів: Підручник / Я. А. Пасічник. — Острог : Вид. Національного університету «Острозька академія», 2010. — 432 с.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КРИВОЇ СТАНІВ РІВНОВАГИ ОДНІЄЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

В. В. Ковальчук, О. В. Бамбура

Державний економіко-технологічний університет транспорту,

Київ, Україна

kovaltchukvv@ukr.net

Одним з актуальних напрямків сучасних досліджень динамічних систем є вивчення біфуркацій і катастроф у фазових просторах цих систем при зміні суттєвих параметрів. Особливе місце при цьому посідають дослідження маятникових систем твердих тіл і, зокрема, систем, що перебувають під дією слідкуючих сил. Поштовхом до детального вивчення впливу таких сил було виявлення особливих динамічних процесів, що при певних режимах суттєво впливають на функціонування пружних циліндричних труб, всередині яких протікає рідина. Вдалою дискретною моделлю для дослідження тоді була запропонована модель у вигляді перевернутого математичного маятника зі слідкуючою силою на верхньому кінці. Напрямок дії такої сили змінюється в залежності від деформації механічної системи, зумовленої цією самою силою.

Проблема стабілізації об'єктів типу «перевернутий маятник» має свій розвиток і в теорії автоматичного управління. Також такі об'єкти є ефективними моделями конструктивних елементів багатьох будівельних споруд, і тому вивчення впливу параметрів системи на характер стійкості її станів рівноваги дає можливості для оптимізації цих параметрів із метою забезпечення надійності та міцності відповідної механічної системи. При цьому технологічні недосконалості у виготовленні відповідних елементів конструкцій або неточності прикладання стискуючого навантаження можна враховувати параметрами асиметрії слідкуючої сили.

При дослідженні руху перевернутого математичного маятника зі слідкуючою силою, прикладеною до верхнього кінця маятника, застосовуємо диференціальні рівняння Лагранжа 2-го роду. Методику складання рівнянь збуреного руху маятника наведено в [1] для узагальненої моделі n -ланкового маятника. Для триланкового маятника беремо за узагальнені координати кути ϕ_1 , ϕ_2 та ϕ_3 , на які відхиляються від вертикалі нижня, середня і верхня ланки відповідно. Значення

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \text{ та } \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 = 0$$

відповідають вертикальному положенню рівноваги маятника. В околі цього положення рівняння збуреного руху маятника можна подати у матричній формі:

$$M\ddot{\phi} + B\dot{\phi} + C\phi + Q\phi = 0, \quad (1)$$

де B — матриця дисипативних сил, C — матриця жорсткості (симетрична), Q — матриця непотенціальних позиційних сил (кососиметрична),

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T.$$

Матриця M інерційних сил має вигляд:

$$M = \begin{vmatrix} (m_1 + m_2 + m_3)l_1^2 & (m_2 + m_3)l_1 l_2 & m_3 l_1 l_3 \\ (m_2 + m_3)l_1 l_2 & (m_2 + m_3)l_2^2 & m_3 l_2 l_3 \\ m_3 l_1 l_3 & m_3 l_2 l_3 & m_3 l_3^2 \end{vmatrix}.$$

Тут l_1, l_2, l_3 — довжини ланок маятника.

Фазові траєкторії, побудовані засобами пакету прикладних програм Maple, показують, що при зміні суттєвих параметрів маятника у його фазовому просторі відбуваються біфуркації та катастрофи, внаслідок яких вертикальний стан рівноваги втрачає стійкість, а в його околі маємо інші стани рівноваги. Для побудови кривої стаціонарних станів досліджуваного маятника застосуємо метод продовження за параметром. Відповідно до ідеї цього методу спочатку знаходимо один зі станів рівноваги маятника $(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*)$ із максимально

можливою точністю при фіксованому значенні λ^* параметра слідкуючої сили. При цьому можна застосовувати безпосереднє інтегрування нелінійних рівнянь збуреного руху (1), або розв'язати рівняння

$$f_i(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \lambda) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

де λ — параметр слідкуючої сили. Отримавши «стартову» точку $(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*, \lambda^*)$, рухаємось уздовж кривої рівноважних станів. На кожному наступному кроці використовуємо розв'язок, знайдений на попередньому кроці.

Для побудови кривої станів рівноваги та аналізу впливу асиметрії слідкуючої сили на поведінку маятника застосуємо диференціально-геометричний метод, запропонований Y. A. Shinohara [2]. Вважаючи, що у просторі змінних $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \lambda)$ система рівнянь (2) визначає певну криву (K), параметризуємо її власною дуговою координатою s . Отже, параметричне рівняння кривої (K) можна записати у вигляді:

$$\phi_1 = \phi_1(s), \phi_2 = \phi_2(s), \phi_3 = \phi_3(s), \lambda = \lambda(s).$$

Визначення цієї кривої зводимо до розв'язування задачі Коші:

$$\frac{d\phi_1}{ds} = -\frac{D_1}{D}, \frac{d\phi_2}{ds} = \frac{D_2}{D}, \frac{d\phi_3}{ds} = -\frac{D_3}{D}, \frac{d\lambda}{ds} = \frac{D_4}{D}, \quad (3)$$

при початкових умовах

$$\phi_1|_{s=0} = \phi_1^*, \phi_2|_{s=0} = \phi_2^*, \phi_3|_{s=0} = \phi_3^*, \lambda|_{s=0} = \lambda^*. \quad (4)$$

Тут позначено:

$$D_1 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\phi_2, \phi_3, \lambda)}, \quad D_2 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\phi_1, \phi_3, \lambda)},$$

$$D_3 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\phi_1, \phi_2, \lambda)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\phi_1, \phi_2, \phi_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi_3} \end{vmatrix},$$

$$D = \beta \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2}, \quad \beta = \pm 1.$$

Зазначимо, що при $\beta = 1$ задача Коші (3)—(4) дає можливість визначити одну гілку кривої (K) рівноважних станів маятника. Відповідно до [2] друга гілка кривої симетрична до першої відносно стартової точки. Побудувати її можна, розв'язуючи задачу (3)—(4) при $\beta = -1$.

Для досліджуваного триланкового маятника, верхній кінець якого пружно-закріплений і перебуває під дією слідкуючої сили, криві, визначені при розв'язуванні задачі (3)—(4), є багатьма стаціонарних станів (станів рівноваги). При практичній реалізації описаного вище методу ці багатовиди побудовані двома способами. Один з них використовує продовження за параметром ε (лінійний ексцентриситет слідкуючої сили), а у другому випадку приймаємо $\lambda = \delta$ — «статична» складова кута відхилення слідкуючої сили від вертикалі. Для проведення числових розрахунків використані засоби пакету прикладних програм MATLAB. Проаналізована зміна конфігурації кривої (K) при зміні характеристик пружних елементів маятника (жорсткі, м'які або лінійні). На кривій (K) визначені біфуркаційні точки, що відмежовують ділянки стійкості від ділянок нестійкості. При певних значеннях параметрів маятника

конфігурація побудованих кривих указує на наявність у фазовому просторі маятника катастроф зборки, що приводять до стрибкоподібної зміни кількості станів рівноваги. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації параметрів елементів відповідних механічних систем.

Список літератури

1. Lobas L. G. Generalized mathematical model of an inverted multilink pendulum with follower force // Int. Appl. Mech. — 2005. — V. 41, № 5. — P. 566—572.
2. Shinohara Y. A. A geometric method for numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1972. — V. 8, № 1. — P. 13—42.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЕГАНИЯ ПРОГРЕССИВНОЙ ВОЛНЫ НА НАКЛОННУЮ СТЕНКУ

П. И. Копейка, Е. Х. Чабан

Национальный университет «Одесская морская академия», Одесса, Украина
pikop@renome-i.net

Рассматривается волновое движение тяжелой жидкости со свободной поверхностью и исследуется набегание прогрессивной волны на наклонную стенку. Жидкость считается идеальной, движение безвихревое, смещение и скорость частиц малые.

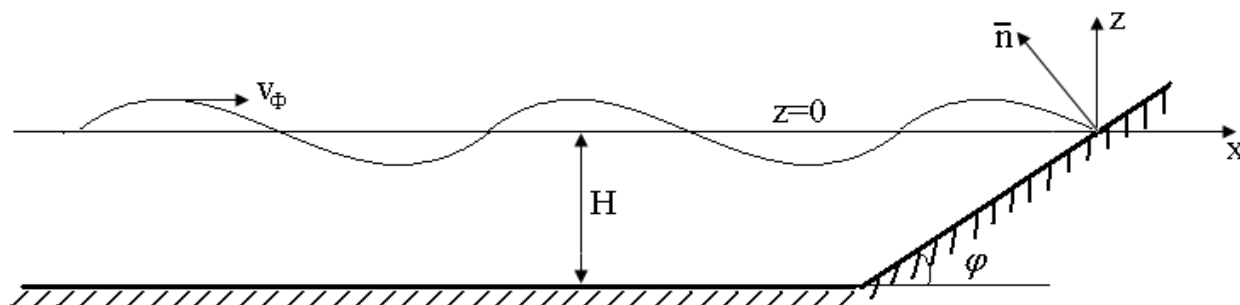


Рис. Схема набегания волны на наклонную стенку

Из первых двух предположений следует, что существует потенциал скорости $\varphi(x, z, t)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа во всей области, занятой жидкостью [1]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Сверху жидкость ограничена свободной поверхностью $z = \zeta(x, t)$, которая в невозмущенном состоянии совпадает с плоскостью $z = 0$.

На свободной поверхности удовлетворяется динамическое условие равенства гидродинамического давления p и атмосферного p_0 , т. е.

$$(p)_{z=\zeta} = p_0.$$

Выполняется также кинетическое условие совпадения нормальной составляющей скорости перемещения точки свободной поверхности и частицы жидкости, находящейся в этой же точке, которое сводится к выполнению следующего условия [2]

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (2)$$

Рассматриваются следующие граничные условия на дне

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-H} = 0 \quad (3)$$

и на откосе $v_n = 0$, или $-v_x \sin \varphi + v_z \cos \varphi = 0$, т. е.

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \varphi = 0 \quad (4)$$

Решив задачу (1)—(4), т.е. определив $\varphi(x, z, t)$, найдем профиль свободной поверхности ζ :

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

и составляющие волновых скоростей

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Распределение давлений находим из формулы

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Потенциал скорости ищется в виде периодической функции по x и t , т. е.

$$\varphi = \Phi(z) \sin(kx - \sigma t), \quad (5)$$

где k — волновое число, σ — частота колебаний.

Подставляя (5) в уравнение (1), получим:

$$(\Phi'' - k^2 \Phi) \sin(kx - \sigma t) = 0,$$

т. е. $\Phi'' - k^2 \Phi = 0$.

Решение последнего уравнения можно записать в виде

$$\Phi = A e^{kz} + B e^{-kz}$$

или в равносильной форме

$$\Phi = A \operatorname{ch} k(z + H) + B \operatorname{sh} k(z + H).$$

Из граничного условия на дне получаем $B = 0$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\varphi = A \cdot \operatorname{ch} k(z + H) \cdot \sin(kx - \sigma t).$$

Удовлетворяя потенциал скорости на свободной поверхности получаем, что выполняется соотношение

$$\sigma^2 = gk \cdot \operatorname{th}(kH),$$

которое называется *дисперсионным соотношением*.

Удовлетворим теперь граничное условие на наклонной стенке (откосе) $v_n = 0$. Для этого введем отраженную волну

$$\varphi_2 = -A_2 \cdot \operatorname{ch} k(z + H) \cdot \sin(kx + \sigma t).$$

Тогда потенциал скорости результирующего движения можно записать в виде

$$\varphi = \operatorname{ch} k(z + H) (A \sin(kx - \sigma t) - A_2 \sin(kx + \sigma t))$$

Этот потенциал удовлетворяет условию на дне и на свободной поверхности. Удовлетворяя потенциал (6) на откосе $v_n = 0$, т.е.

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \varphi = 0,$$

получаем переменную амплитуду отраженной волны

$$A_2 = A \cdot \frac{1 - \operatorname{th}(kH) \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \sigma t}{1 + \operatorname{th}(kH) \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \sigma t}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (5), получим потенциал скорости набегания прогрессивной волны на откос [3].

Решение задачи также можно искать в виде суперпозиции двух волн прямой и отраженной, когда отраженная волна распространяется с амплитудой $A \sin \varphi$ и со сдвигом фазы волны на величину δ :

$$\varphi = \operatorname{ch} k(z + H)(A \sin(kx - \sigma t) - A \sin \varphi \sin(kx + \sigma t + \delta)). \quad (8)$$

Удовлетворяя граничное условие на откосе $v_n = 0$, когда

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \varphi = 0,$$

можно определить величину сдвига δ для конкретных значений угла откоса φ .

Так, например, для угла $\varphi = \frac{\pi}{4}$ величина $\delta = 0,7$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ решение (8) описывает классическое решение задачи о набегании волны на вертикальную стенку, при $\varphi = 0$ решение (8) описывает распространение прогрессивной волны в безграничном горизонтальном направлении [2].

Список литературы

1. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Москва : Физматгиз, 1963. — 585 с.
2. Черкесов А. В. Основы динамики несжимаемой жидкости / А. В. Черкесов. — Киев : Наукова думка, 1984. — 167 с.
3. Дорофеев В. С. Воздействие ветровых волн на гидротехнические сооружения / В. С. Дорофеев, С. И. Рогачко. — Одесса : ОГАСА, 2012. — 224 с.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

М. М. Коpecь

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

optimal201214@yandex.ua

Розглядається наступна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dr_{11}(t)}{dt} - a^2[r_{12}(t) + r_{21}(t)] - r_{12}(t)r_{21}(t) + 1 = 0, \\ \frac{dr_{12}(t)}{dt} - a^2r_{22}(t) + r_{11}(t) - r_{12}(t)r_{22}(t) = 0, \\ \frac{dr_{21}(t)}{dt} - a^2r_{22}(t) + r_{11}(t) - r_{21}(t)r_{22}(t) = 0, \\ \frac{dr_{22}(t)}{dt} + r_{12}(t) + r_{21}(t) - r_{22}^2(t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

де $t_0 \leq t \leq t_1$, $t_0 \geq 0$, $t_1 > 0$, $a > 0$ — відомі числові параметри. Система типу (1) виникає при дослідженні задач оптимального керування коливальними процесами струни, бруса, прямокутної та круглої мембран. Для рівняння (1) задані умови трансверсальності

$$r_{11}(t_1) = 1, r_{12}(t_1) = 0, r_{21}(t_1) = 0, r_{22}(t_1) = 1. \quad (2)$$

Система (1) породжує таку матрицю четвертого порядку

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Дійсно, систему (1) можна записати як одне матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = -\mathbf{R}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{F}\mathbf{R}(t) - \mathbf{Q}, \quad (4)$$

де матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{R}(t)$ відповідно задані наступним чином

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Символом $\mathbf{A}^T$ позначено транспоновану матрицю $\mathbf{A}$. Запропоновані позначення дозволяють записати матрицю (3) в блочній формі

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix},$$

а умови трансверсальності (2) в матричній формі матимуть вигляд

$$\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{I},$$

де символом $\mathbf{I}$ позначено одиничну матрицю четвертого порядку.

Якщо позначити

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + 1} - a^2}{2}}, \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + 1} + a^2}{2}},$$

то власні числа матриці $\mathbf{H}$ можна записати таким чином

$$\lambda_1 = -\alpha - i\beta, \lambda_2 = -\alpha + i\beta, \lambda_3 = \alpha - i\beta, \lambda_4 = \alpha + i\beta.$$

Тепер можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. Матричний експоненціал $\exp(\mathbf{H}t)$ має вигляд

$$\exp(\mathbf{H}t) = \mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) & s_{13}(t) & s_{14}(t) \\ s_{21}(t) & s_{22}(t) & s_{23}(t) & s_{24}(t) \\ s_{31}(t) & s_{32}(t) & s_{33}(t) & s_{34}(t) \\ s_{41}(t) & s_{42}(t) & s_{43}(t) & s_{44}(t) \end{bmatrix},$$

де функції $s_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, задані наступними виразами

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &= s_{22}(t) = s_{33}(t) = s_{44}(t) = \cosh(\alpha t) \cos(\beta t), \\ s_{21}(t) &= -s_{34}(t) = \alpha \sinh(\alpha t) \cos(\beta t) - \beta \cosh(\alpha t) \sin(\beta t), \\ s_{31}(t) &= s_{24}(t) = -\alpha \cosh(\alpha t) \sin(\beta t) - \beta \sinh(\alpha t) \cos(\beta t), \\ s_{41}(t) &= s_{23}(t) = -s_{32}(t) = -s_{14}(t) = \sinh(\alpha t) \sin(\beta t), \\ s_{12}(t) &= -s_{43}(t) = \frac{\alpha \sinh(\alpha t) \cos(\beta t) + \beta \cosh(\alpha t) \sin(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ s_{13}(t) &= s_{42}(t) = \frac{\alpha \cosh(\alpha t) \sin(\beta t) - \beta \sinh(\alpha t) \cos(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості співвідношень

$$\frac{d\mathbf{S}(t)}{dt} = \mathbf{HS}(t), \mathbf{S}(0) = \mathbf{I},$$

де символом $\mathbf{I}$ позначено одиничну матрицю четвертого порядку.

В [1] показано, що з допомогою позначень

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{11}(t) &= \begin{bmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) \\ s_{21}(t) & s_{22}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{12}(t) = \begin{bmatrix} s_{13}(t) & s_{14}(t) \\ s_{23}(t) & s_{24}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}_{21}(t) &= \begin{bmatrix} s_{31}(t) & s_{32}(t) \\ s_{41}(t) & s_{42}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{22}(t) = \begin{bmatrix} s_{33}(t) & s_{34}(t) \\ s_{43}(t) & s_{44}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

розв'язок $\mathbf{R}(t)$ задачі (1)—(2) можна записати у вигляді

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{S}_{22}(t_1 - t) - \mathbf{S}_{12}(t_1 - t)]^{-1} [\mathbf{S}_{11}(t_1 - t) - \mathbf{S}_{21}(t_1 - t)].$$

У результаті безпосередніх перетворень отримаємо такі формули для елементів матриці $\mathbf{R}(t)$:

$$r_{11}(t) = \frac{q_{11}(t_1 - t)}{\sigma(t_1 - t)}, \quad r_{12}(t) = r_{21}(t) = \frac{q_{12}(t_1 - t)}{\sigma(t_1 - t)}, \quad r_{22}(t) = \frac{q_{22}(t_1 - t)}{\sigma(t_1 - t)},$$

де функції $q_{11}(t)$, $q_{12}(t)$, $q_{22}(t)$, $\sigma(t)$ мають відповідно наступний вигляд

$$q_{11}(t) = (\alpha^2 + \beta^2)[(\alpha^2 + \beta^2 - 1)\cos(2\beta t) - (\alpha^2 + \beta^2 + 1)\operatorname{ch}(2\alpha t)] - 2\alpha \sin(2\beta t) - 2\beta \operatorname{sh}(2\alpha t),$$

$$q_{12}(t) = 2\alpha\beta[\operatorname{ch}(2\alpha t) - \cos(2\beta t)] - \beta(\alpha^2 + \beta^2 - 1)\sin(2\beta t) + \alpha(\alpha^2 + \beta^2 + 1)\operatorname{sh}(2\alpha t),$$

$$q_{22}(t) = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)\cos(2\beta t) + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)\operatorname{ch}(2\alpha t) - 2\alpha \sin(2\beta t) + 2\beta \operatorname{sh}(2\alpha t),$$

$$\sigma(t) = 2\beta^2 \operatorname{ch}(2\alpha t) + 2\alpha^2 \cos(2\beta t) + \beta(\alpha^2 + \beta^2 + 1)\operatorname{sh}(2\alpha t) + \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - 1)\sin(2\beta t).$$

Для ілюстрації отриманих результатів пропонується декілька рисунків у випадку, коли $a = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 20$.

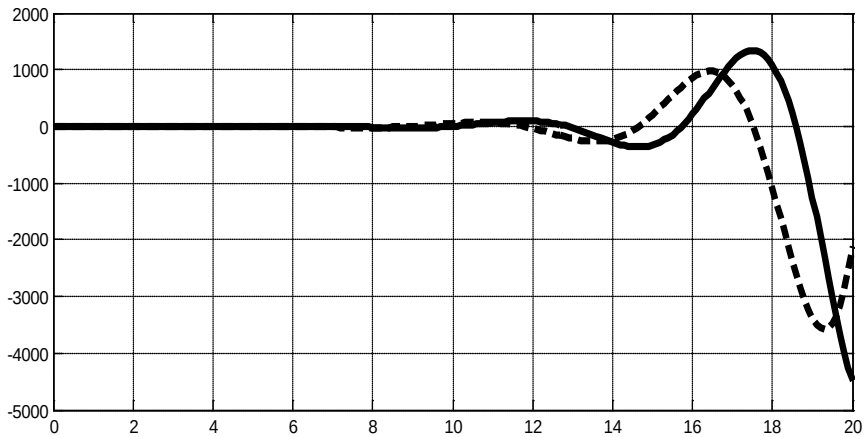


Рис. 1. Графіки функцій: $x(t) = \operatorname{ch}(\alpha t) \cos(\beta t)$ — суцільна крива; $y(t) = \alpha \operatorname{sh}(\alpha t) \cos(\beta t) - \beta \operatorname{ch}(\alpha t) \sin(\beta t)$ — пунктирна крива.

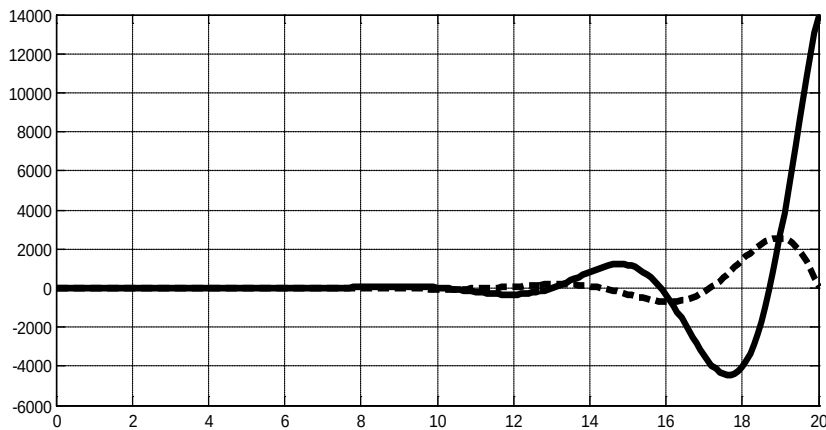


Рис. 2. Графіки функцій: $x(t) = -\alpha \operatorname{ch}(\alpha t) \sin(\beta t) - \beta \operatorname{sh}(\alpha t) \cos(\beta t)$ — суцільна крива; $y(t) = \operatorname{sh}(\alpha t) \sin(\beta t)$ — пунктирна крива

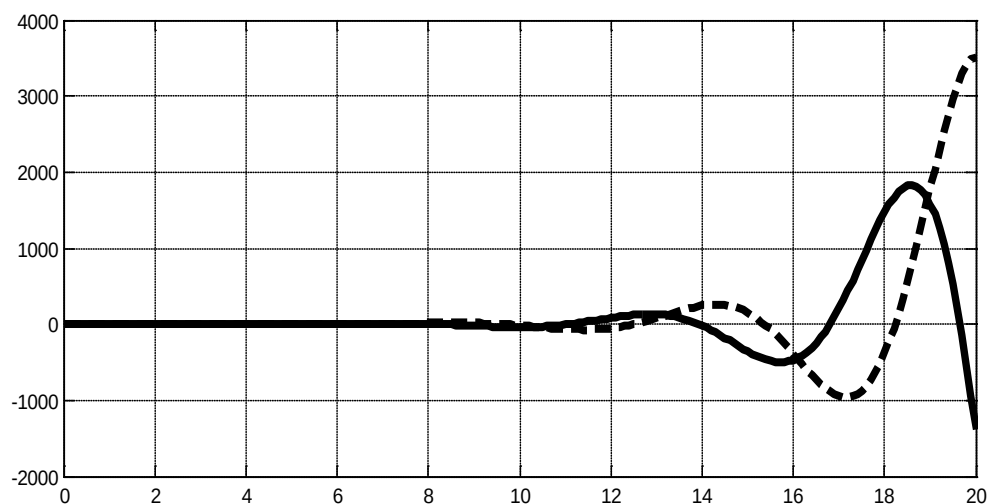


Рис. 3. Графіки функцій: $x(t) = \frac{\alpha \sinh(\alpha t) \cos(\beta t) + \beta \cosh(\alpha t) \sin(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}$ — суцільна крива; $y(t) = \frac{\alpha \cosh(\alpha t) \sin(\beta t) - \beta \sinh(\alpha t) \cos(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}$ — пунктирна крива

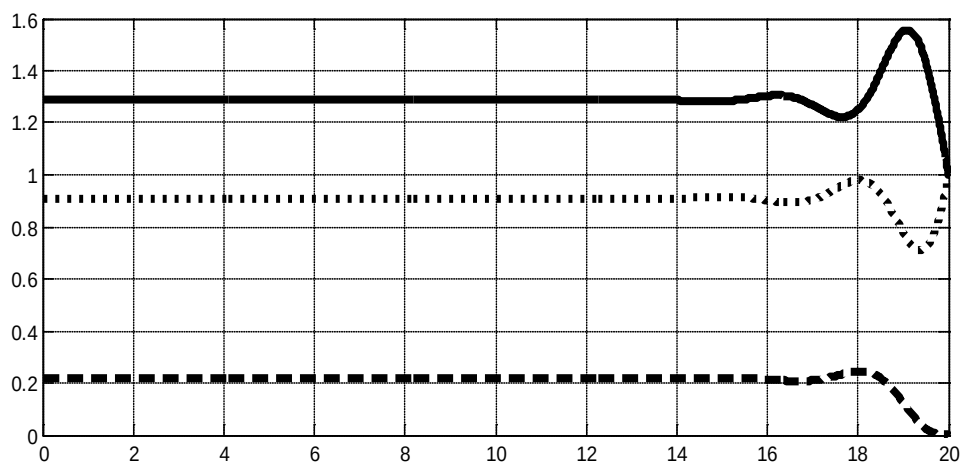


Рис. 4. Графіки функцій: $x(t) = r_{11}(t)$ — суцільна крива; $y(t) = r_{12}(t) = r_{21}(t)$ — пунктирна крива; $z(t) = r_{22}(t)$ — дрібна пунктирна крива

Список літератури

1. Kopets M. M. Linear-quadratic optimal control problem for hyperbolic system / М. М. Копець // Проблеми управління и інформатики. — 2015. — № 1. — С. 40—51.

ВИПАДКОВІ ЛІСИ

В. В. Кориліук

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

vita8521@rambler.ru

Такий метод класифікації як *випадковий ліс* (random forest) з'явився порівняно недавно. Але набув доволі широкого вжитку в різних сферах прикладної діяльності людини. Розвиток випадкових лісів почався з дерев прийняття рішень (ДПР).

ДПР створюють моделі, що дозволяють класифікувати певну вибірку, створюючи набір правил прийняття рішень, які витягуються з навчальних наборів даних. Нехай $t_{i(t)}, i = 0, 1, \dots, k_t - 1$ — вершина, яка є i -им нащадком вершини t . Множину X_t і правило f_t задають наступним чином:

$$X_{t_{i(t)}} = X_t \cap \{x \in X : f_t(x) = i\}$$

Кожен вузол в дереві може розглядатися як рішення. Тест проводиться для можливого набору функцій та їх відповідного діапазону значень. Таким чином, для класифікації даного зразка починається тестування значення ознаки кореневого вузла і переходить вниз по дереву до наступної гілки. Цей процес потім повторюється для під-дерева, починається з нового вузла, поки, нарешті, не досягне листового вузла (вершини t такої, що $x \in X_t$). У випадку класифікації вектор x належить до такого класу що найчастіше зустрічається в підвибірці D_t , яка відповідає даному вузлу. Кожен шлях від кореня до листка являє собою кон'юнкцію цих обмежень, а дерево — диз'юнкція таких шляхів.

ДПР реалізуються з допомогою CART (Classification and Regression Trees). Цей алгоритм створює бінарні дерева, які в кожному вузлі використовують функцію і поріг значення ознаки, що дає найбільший виграш інформації. Бінарне розщеплення вершини t можна розглядати як функцію

$$f_t : X \rightarrow \{0, 1\}, x \in X,$$

де в випадку $f(x) = 0$ вектор x відноситься до одного (лівого) нащадку, а в разі $f(x) = 1$ — до іншого (правого). Зазвичай ця функція має простий вигляд і залежить від значень тільки однієї ознаки. Якщо деяка ознака x виміряна за числовою шкалою, то розщеплення полягає у виборі x_s :

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_s, \\ 1 & \text{при } x > x_s. \end{cases}$$

Для реалізації рекурсивного розбиття вершини необхідно визначити поняття міри однорідності.

Зазвичай замість міри однорідності розглядається протилежна за змістом міра забрудненості (impurity). Нехай t — деяка вершина дерева рішень, $D(t)$

— підвибірка, пов'язана з цією вершиною і $i(t)$ — забрудненість вершини. Природно вимагати, щоб забрудненість вершини дорівнювала 0, якщо $D(t)$ містить прецеденти тільки одного класу і була б максимальною в випадку, якщо $D(t)$ містить прецеденти кожного класу. Однією з найбільш використовуваних є міра забрудненості вершини, яка базується на понятті ентропії (entropy impurity):

$$i(t) = -\sum_{i=1}^c P(w_i) \log_2 P(w_i),$$

де $P(w_i)$ — частка прикладів класу w_i у підвибірці $D(t)$ і $0 \log_2 0 = 0$.

Зменшення міри забрудненості вершини t визначається як

$$\Delta i(t) = i(t) - \sum_{k=1}^B P_k i(t_k),$$

де B — кількість нащадків вершини t , P_k — елементи підвибірки $D(t)$, яка

відповідає вершині t_k і $\sum_{k=1}^B P_k = 1$.

Процес формування дерева зупиняється, коли для алгоритму CART стає неможливо зменшити забрудненість вершини або коли дерево досягає заданої глибини.

Випадковий ліс створює кілька дерев рішень і кожне дерево навчається на підмножині повного навчального набору. Ці підмножини будуються так, що в них деякі спостереження не потрапляють, а деякі потрапляють по декілька разів. Крім того, в кожному вузлі тільки випадкова підмножина функцій дозволяє уникнути корельованості дерев. Результат прогнозування даного зразка потім вважається середній прогноз окремих дерев рішень (у випадку регресії проводиться оцінка умовного математичного сподівання ознаки, яка являє собою середнє значення ознаки в цій підвибірці).

Параметри, які використовуються у випадкових лісах такі ж, як у дерева рішень. Крім того, можна контролювати кількість дерев рішень, які будуть створені. Для підвищення надійності та узагальнюючої здатності алгоритму використовують декілька дерев рішень. Як показала практика: при застосуванні великої кількості дерев, цей алгоритм має високу точність.

Випадкові ліси застосовуються в таких дисциплінах, як «Data Mining», прикладній статистиці, а в останні роки навіть для геопросторових досліджень. Дуже зручно використовувати подібні алгоритми для класифікації ділянок земної поверхні. Наприклад, для вимірювання площ прісних вод на території певної країни, чи площ полів (засіяних і незасіяних), площ населених пунктів і тому подібне. Такі задачі прекрасно розв'язуються за наявності достатньої кількості початкових даних. В якості яких можуть виступати супутникові

знімки земної поверхні. Знімки мають попередньо оброблюватись, очищатись від шумів, а захмарені знімки відсіюються, оскільки вони не підходять для навчальної вибірки. Для відокремлення різних видів територій робляться вибірки ділянок, по яким і проводиться навчання класифікатора. У такий спосіб можна відрізнити воду від суші, населені пункти від незаселених територій, гори від рівнин і т. д.

Такий симбіоз математичних і прикладних алгоритмів прекрасно полегшує розв'язання задач та суттєво зберігає час. Адже для вирішення геопросторових питань є і інші способи, але використання випадкових лісів для класифікації ділянок земної поверхні на сьогодні найоптимальніше рішення. Навіть платформа Google Earth Engine впровадила в використання масу класифікаторів, серед яких випадковий ліс показав найкращі результати.

Список літератури

1. da Luz P. M. Botnet Detection Using Passive DNS : Master Thesis / Pedro Marques da Luz ; Department of Computing Science, Radboud University Nijmegen, 2013/2014. http://www.ru.nl/publish/pages/769526/z-thesis_pedroluz.pdf
2. Breiman L. Random Forests, 2001. — 33 p.
<https://www.stat.berkeley.edu/~breiman/randomforest2001.pdf>
3. Чистяков С. П. Случайные леса: обзор / С. П. Чистяков // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. — 2013. — № 1. — С. 117—136.
4. <http://www.intuit.ru/studies/courses/6/6/lecture>

ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Д. О. Котляренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

d.oniks@yandex.ua

Математична фізика — це теорія наближених описів у математичних термінах фізичного процесу. Теорія математичних моделей фізичних явищ займає особливе положення і в математиці, і в фізиці, перебуваючи на стику цих наук. Математична фізика тісно пов'язана з фізикою в тій частині, яка стосується побудови математичної моделі, і водночас математична фізика — розділ математики, оскільки методи дослідження моделей є математичними. У поняття методів математичної фізики включаються ті математичні методи, які застосовуються для побудови і вивчення математичних моделей, що описують широкі класи фізичних явищ [1].

Рівняння теплопровідності — рівняння, що описує закон зміни температури з часом при теплопередачі через теплопровідність.

Рівняння теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла має вигляд

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F, \quad (1)$$

де $u(t, x, y, z)$ — це температура твердого тіла в точці (x, y, z) у момент часу t , $k > 0$ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла, ρ — об'ємна густина речовини тіла, c — питома теплоємність речовини, F — об'ємна густина джерела тепла, який знаходиться всередині твердого тіла [2].

Якщо тіло однорідне, тобто c, ρ і k — сталі, то рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f, \quad (2)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{F}{c\rho}$.

Для того, щоб описати розповсюдження тепла у стрижні на заданому відрізку одного рівняння теплопровідності не вистачить, необхідно знати ще розподіл температури всередині стрижня в початковий момент часу (початкова умова) та тепловий режим на границі S стержня (крайова умова).

Для рівняння теплопровідності задається тільки одна початкова умова $u|_{t=0} = \varphi(x)$ (або в іншому записі $u(x, 0) = \varphi(x)$) і фізично вона означає, що початковий розподіл температури стержня має вигляд $\varphi(x)$ [2].

Крайову умову можна задати різними способами. Найчастіше використовують крайові умови наступних типів.

1. Перша крайова умова або умова Діріхле: в кожній точці поверхні S задана температура $u|_S = \psi_1$, де ψ_1 — відома функція часу t і точки поверхні S .

2. Друга крайова умова або умова Неймана: на поверхні S заданий тепловий потік $q = -k \frac{\partial u}{\partial n}$, тобто $\frac{\partial u}{\partial n} \big|_S = \psi_2$.

3. Третя крайова умова: на поверхні тіла відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура u_0 якого відома.

Рівняннями (1) і (2) описується також процес дифузії речовини в нерухомому середовищі. При цьому $u(t, x, y, z)$ — це концентрація речовини, що дифундує в точці (x, y, z) у момент часу t , k — коефіцієнт дифузії, а c_p — коефіцієнт пористості.

Такі ж рівняння виникають у теорії ядерних ланцюгових реакцій. У ланцюговій реакції того типу, котрий використовується у ядерних реакторах, відбувається ділення ядер урану, в результаті чого звільняються нейтрони. Швидкість звільнення нейтронів велика, але при проходженні через уповільнювач, за який використовують зазвичай графіт, вона швидко зменшується, після чого ще протягом деякого часу нейтрони дифундують через речовину і після того поглинаються. Поглинання нейтронів, у більшості випадків, призводить до ділення ядер, які поглинули нейтрон. У результаті чого звільняються нейтрони нового покоління і т.д. Таким чином відбувається ланцюгова реакція [4].

При вивченні процесу уповільнення нейтронів виникає рівняння віку, яке має вигляд (2), де $u(t, x, y, z)$ — це число нейтронів у точці (x, y, z) , які досягли віку t віднесені до одиниці об'єму й одиниці часу. Після проходження через уповільнювач нейтрони перестають втрачати енергію і їх рух можна описати за допомогою рівняння дифузії (2) відносно густини нейтронів $u[2]$.

Використання рівняння теплопровідності не обмежується математикою та фізикою, воно також застосовується для опису складних явищ у біології, хімії, економіці, екології, програмуванні, географії і т.д.

За допомогою рівняння теплопровідності було зроблене одне з найбільших географічних відкриттів другої половини 20-го століття — озеро «Схід» [3]. На початку 60-х років дослідник І. Зотиков провів теплофізичні розрахунки, засновані на розв'язуванні рівняння теплопровідності в льодовику і показав, що центральні області льодовикового покриву Антарктиди знаходяться в умовах малого відведення тепла від нижньої поверхні льодовика вгору через всю його товщину. Таким чином було доведено існування підлідних озер Антарктиди.

Отже, математична фізика має широкий спектр свого застосування, який торкається усіх областей нашого життя.

Список літератури

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Математична_фізика.
2. Ивасишен С. Д. Параболические уравнения: примеры, задача Коши, свойства решений / С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман // Математика сегодня : Науч.-метод. сб. — Киев : Вища школа, 1987. — С. 74—82.
3. <http://www.personal-plus.net/459/8783.html>.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1955. — 667 с.

ПРО ГРУПИ, У ЯКИХ УСІ ПІДГРУПИ НЕСКІНЧЕННОГО СЕКЦІЙНОГО p -РАНГУ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНІ

С. М. Кучменко, Л. В. Скасків

Національний університет державної податкової служби України,

Ірпінь, Україна

kaf_vm@ukr.net

Групи з великими системами підгруп, близьких у тому чи іншому сенсі до нормальних, є досить давнім об'єктом дослідження у теорії груп. Наявність великої кількості нормальних підгруп і близьких до них типів підгруп дуже сильно впливає на структуру групи. Образно кажучи, чим більше має група нормальних і близьких до них підгруп, тим вона ближче до абелевої. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними, то неабелеві групи з такою властивістю мають дуже просту будову, як показують результати робіт [2, 3, 16—18]. Існує багато природних типів підгруп, що близькі до нормальних. Наприклад, в теорії груп важливу роль відіграють транзитивно нормальні підгрупи [6]. Підгрупа H групи G називається *транзитивно нормальною в G* , якщо H є нормальною у кожній підгрупі $K \geq H$, у якій H є субнормальною. Вплив транзитивно нормальних підгруп на властивості і структуру групи вивчався, наприклад, у роботах [1, 9, 10, 12, 14—16]. Виникнення й розвиток теорії груп з умовами скінченності привело до появи нових важливих типів підгруп, що близькі до нормальних. Такі типи підгруп розглянув Б. Нейман у своїй роботі [8], що вже стала класичною. Зокрема, він почав розглядати вплив на будову групи підгруп, що мають скінченний індекс у своєму нормальному замкненні. Б. Нейман не дав цим підгрупам ніякої спеціальної назви. Пізніше у роботі [12] такі підгрупи були названі скінченно-нормальними. Ця назва здається не зовсім вдалою. У роботах [5, 7] був використаний інший термін — *near normal subgroup*. Буквальний переклад цього терміну — *наближено нормальні підгрупи*, і цією назвою будемо далі користуватись.

Інтерес до системи всіх наближено нормальних підгруп групи виник досить недавно. У роботі Л. А. Курдаченка, М. Ф. Кузенного та М. М. Семка [12] розглядалися групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У статті С. Франціозі, Ф. де Жиованні та Л. А. Курдаченка [4] були розглянуті групи, у яких кожна підгрупа або наближено нормальна, або субнормальна. Відзначимо також роботи С. М. Кучменко [11, 13], де вивчалися групи з тими чи іншими системами наближено нормальних підгруп.

Таким чином, вивчення властивостей систем наближено нормальних підгруп та їх впливу на структуру усієї групи є актуальною задачею, що має свою історію та своє специфічне коло питань. До цієї тематики належить і дана робота. В ній розглядаються групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп складається з підгруп, що мають нескінченний секційний p -ранг.

Будемо говорити, що група G має скінченний секційний p -ранг $r_p(G) = r$, якщо кожна абелева p -секція групи G має порядок не вищий за p^r і існує така абелева p -секція U / V , що $|U/V| = p^r$.

Теорема 1. *Нехай G — локально майже розв'язна група, у якій усі підгрупи нескінченного секційного p -рангу наближено нормальні. Якщо G містить у собі періодичну підгрупу нескінченного секційного p -рангу, то G має скінченний комутант.*

Теорема 2. *Нехай G — радикальна група, всі підгрупи якої, що мають нескінченний секційний p -ранг, наближено нормальні. Якщо G має нескінченний секційний p -ранг, але всі періодичні підгрупи мають скінченні секційні p -ранги, то $G / O_{p'}(G)$ має скінченний комутант.*

Теорема 3. *Нехай G — розв'язна група, всі підгрупи якої, що мають нескінченний секційний p -ранг, наближено нормальні. Припустимо також, що кожна скінченно породжена підгрупа G є мінімаксною. Якщо G має нескінченний секційний p -ранг, то комутант групи G буде скінченним.*

Теорема 4. *Нехай G — локально нетерова радикальна група нескінченного секційного p -рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний секційний p -ранг, наближено нормальні, то G має скінченний комутант.*

Наслідок 1. *Нехай G — локально нільпотентна група нескінченного секційного p -рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний секційний p -ранг, наближено нормальні, то G має скінченний комутант.*

Наслідок 2. *Нехай G — FC-гіперцентральна група нескінченного секційного p -рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний секційний p -ранг, наближено нормальні, то G має скінченний комутант.*

Теорема 5. *Нехай G — радикальна група нескінченного секційного рангу. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний секційний ранг, наближено нормальні, то група G має скінченний комутант.*

Теорема 6. *Нехай G — група нескінченного спеціального рангу і припустимо, що G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні або локально скінченні. Якщо всі її підгрупи, що мають нескінченний спеціальний ранг, наближено нормальні, то група G має скінченний комутант.*

Список літератури

1. Artemovych O. D. Groups with many hypercentral subgroups / O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. — 2008. — No 2 (57). — P. 106—109.
2. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe / R. Baer // S.-B. Heidelberg Akad. — 1933. — 2. — S. 12—17.
3. Dedekind R. Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind / R. Dedekind // Math. Annalen. — 1897. — 48. — S. 548—561.
4. Franciosi S. Groups with restrictions on non-subnormal subgroups / S. Franciosi, F. de Giovanni, L. A. Kurdachenko // Ricerche di Matematica. — 1997. — 46, № 2. — P. 307—320.

5. Galoppo A. Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups / A. Galoppo // *Ricerche Mat.* — 2000. — **49**, №2. — P. 213—220.
6. Kurdachenko L. A. Transitivity of normality and pronormal subgroups / L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin // *AMS Special session on infinite groups. October 8—9, 2005, Bard College. "Combinatorial group Theory, discrete groups, and number theory. American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 2006.* — Vol. 421. — P. 201—212.
7. Musella C. Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups / C. Musella // *Note di Matematica.* — 2000/2001. — 20, № 1. — P. 43—52.
8. Neumann B. H. Groups with finite classes of conjugate subgroups / B. H. Neumann // *Math. Z.* — 1955. — **63**, № 1. — P. 76—96.
9. Otal J. On groups whose transitively normal subgroups are either normal or self-normalizing / J. Otal, N. N. Semko, N. N. (Jr.) Semko // *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* — 2013. — Vol. 192. — P. 901—915.
10. Semko N. N. (Jr.) Groups with many pronormal and transitively normal subgroups / N. N. (Jr.) Semko // *Algebra and Discrete Mathematics.* — 2013. — № 2. — P. 269—286.
11. Semko M. M. Groups, in which almost all subgroups are near to normal / M. M. Semko, S. M. Kuchmenko // *Algebra and Discrete Mathematics.* — 2004. — № 2. — P. 92—113.
12. Курдаченко Л. А. Группы с щільною системою нескінченних підгруп / Л. А. Курдаченко, М. Ф. Кузенний, М. М. Семко // *Доп. АН УРСР. Серія А.* — 1985. — № 3. — С.7—9.
13. Кучменко С. Н. Группы с приближенно нормальными подгруппами бесконечного ранга / С. Н. Кучменко // *Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук.* — 2004. — Вип. 1. — С. 21—33.
14. Пыпка А. А. Группы, имеющие только два типа пронормальных подгрупп / А. А. Пыпка, Н. Н. Семко (мл.) // *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.* — 2011. — Вип. 2. — С.36—41.
15. Пипка О. О. Про нескінченні групи, які мають тільки два типи пронормальних підгруп / О. О. Пипка, М. М. Семко (мол.) // *Доп. НАН України.* — 2012. — № 2. — С. 32—34.
16. Семко М. М.(мол.) Группы, що мають велику систему пронормальних і транзитивно нормальних підгруп / М. М. Семко (мол.) // *Доп. НАН України.* — 2013. — № 8. — С.17—20.
17. Семко М. М. Группы з великими системами узагальнено нормальних підгруп / М. М. Семко, С. М. Кучменко, Л. В. Скасків. — Київ : Інститут математики НАН України, 2014. — 105 с.
18. Скасків Л. В. (Йоник Л. В.) Группы з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних / Л. В. Скасків (Л. В. Йоник) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2006. — Т. 49, № 2. — С. 12—16.

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

О. В. Лєгунцова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
rililinx@gmail.com

Наразі важко поставити питання про актуальність дослідження нелінійних рівнянь та відображень, оскільки більшість динамічних систем є нелінійними та описуються саме цими рівняннями. Нас цікавить не тільки пошук розв'язків та законів цих задач, так і отримання загального уявлення про поведінку системи, яку ми вивчаємо.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \bar{a}, t) \quad (1)$$

$$x_{n+1} = M(x_n, a_i), i = \overline{1, k} \quad (2)$$

Виділимо дві моделі, які ми будемо досліджувати.

Модель (1) називається модель-поток (*flows* в англomовній літературі). Вона застосовується у випадках, коли час у системі вважаємо континуальним. Варто виділити декілька основних моментів, які треба дослідити в першу чергу при вивченні таких систем. Це: автономна чи неавтономна ця система, чи є вона консервативною або дисипаційною?

Модель (2) — це модель-відображення (*mapping*), яку ми можемо застосовувати у випадках, коли час вважається дискретним, тобто заміри показників робляться через якісь характерні для системи проміжки часу.

Сьогодні дослідження нелінійних динамічних систем зводиться до послідовного розв'язання декількох задач.

1. Задача Коші. Потрібно виділити два випадки, які обумовлюють вибір методів розв'язання цієї задачі.

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Ця задача у більшості випадків розв'язується за допомогою чисельних методів. Ці методи є найбільш поширеними.

Задача Коші для рівнянь у частинних похідних, яка розв'язується методами математичної фізики.

Усі ці методи можна розбити на три класи:

- точні (аналітичні), що дозволяють точно знайти шукані функції $y_i(x_i)$

Аналітичні методи, більш характерні для лінійних задач, та декількох типів нелінійних.

- наближені — цей клас методів дозволяє нам отримати розв'язок у квадратурах, але не дає точного виду закону

О метод Пікара.

Нехай є система:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Інтегруючи члени рівняння (1):

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0 \quad (2)$$

Рівняння (2) називають *інтегральним*. Якщо підставити в це інтегральне рівняння y_0 , то отримаємо нульове наближення, яке виглядає так:

$$y_1 = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx + y_0$$

Формуємо наступне наближення, замінюючи y_0 під знаком інтеграла на y_1 .

Ітеративно повторюємо цей процес. Таким чином можна отримати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$$

О узагальнені методи Ньютона (практично не застосовуються) оскільки квадратури, що дають ці методи мають значно складніший вигляд ніж ті, що знайдено методом Пікара.

- чисельні

- О метод Ойлера

Явний однокроковий метод першого порядку точності, що базується на апроксимації інтегральної кривої кусочно-лінійною функцією.

- О метод Рунге — Кутти.

Це модифікований метод Ойлера, що уявляє собою схему більшого порядку точності.

- О метод Адамса

Кінцево-різницевий багатокроковий метод. Використовує для розв'язків не одне, а декілька значень, що було обчислено в попередніх точках.

- О метод прогнозу та корекції.

Робиться прогноз по якомусь більш грубому методу (наприклад, метод Ойлера), а після цього робиться корекція по більш точним методам (наприклад, Адамса). Цей метод економніший за витратами часу, але дає достатню точність.

2. Задача дослідження стійкості. Потрібно знайти та проаналізувати види стійкості даної системи: стійкість за Ляпуновим, орбітна стійкість, структурна стійкість, глобальна стійкість, чи є ці стійкості (або нестійкості, це також важливий показник) експоненціальними або асимптотичними?

Можна виділити три найбільш поширених методи дослідження стійкості.

Найбільш поширений метод дослідження стійкості системи — прямий метод Ляпунова, який спирається на теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем. Але використання цього методу дещо обмежується через його складність.

Другий метод — це критерій Попова, що дає можливість встановити абсолютну стійкість системи в цілому. Але він не може застосовуватись до декількох часткових випадків.

Третій — метод фазового простору, що дозволяє досліджувати системи довільного вигляду. Але оскільки розмірність фазового простору така ж як порядок диференціальних рівнянь нелінійної системи, то виникають деякі труднощі при дослідженні систем, що описуються диференціальними рівняннями вище другого порядку.

3. Пошук біфуркацій та біфуркаційних значень. Неможливо виділити основні методи пошуку біфуркацій, оскільки в кожному випадку пошук відбувається індивідуально.

4. Дослідження фазового простору, пошук атракторів.

Варто зауважити, що питання розглянуті в цій статті, планується розглянути в дипломній роботі значно ширше та більше детально.

Список літератури

1. Демидович Б. П. Основные понятия теории устойчивости / Б. П. Демидович // Лекции по математической теории устойчивости. — Москва : Наука, 1967. — 472 с.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — Москва : Наука, 1966.
3. Strogatz S Non-linear Dynamics and Chaos: With applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering / S. Strogatz. — Perseus Books, 2000.
4. Баутин Н. Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — Москва : Наука, 1990. — 488 с.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. — Москва : Наука, 1978. — 512 с.

ЗАДАЧА ПРУЖНОГО РЕЖИМУ ФІЛЬТРАЦІЇ В ҐРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ З ВОДОВОДОМ В УМОВАХ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ

Н. В. Медвідь

Національний університет водного господарства та природокористування,
Рівне, Україна

natasha_medvid@mail.ru

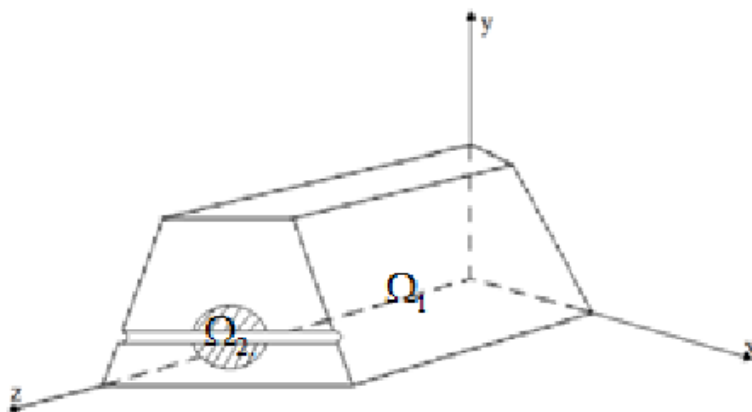


Рис. 1. Тіло ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Математична модель тривимірної задачі нестационарної фільтрації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву на непроникній основі з урахуванням впливу теплосолеперенесення, суспензії та рівнянь Нав'є — Стокса містить наступні рівняння [1—4]:

- рівняння пружного режиму фільтрації

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

- рівняння солеперенесення

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \nabla c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

- рівняння теплоперенесення

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

- закон фільтрації, в якому враховано залежність параметрів фільтрації від концентрації солей та температури, а також осмотичні явища [1]

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

- рівняння для суспензії

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \mathbf{u} \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_2,$$

• рівняння Нав'є — Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \nabla u + \nu \Delta u - g \nabla h, \mathbf{X} \in \Omega_2,$$

які доповнюються граничними та початковими умовами для відповідних функцій.

Значення коефіцієнтів вищенаведених рівнянь залежать від області Ω_1 або Ω_2 , в яку потрапляє точка $\mathbf{X}$.

Депресійна поверхня ґрунтової греблі описується співвідношенням $\phi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0$, і на ній задається кінематична гранична умова

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = n \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Для відшукування наближеного розв'язку відповідної крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ). Він полягає в тому, що апроксимуючі функції відмінні від нуля на окремих підобластях (скінченних елементах), на які розбивається вся область розв'язку. Алгоритми чисельного розв'язання програмно реалізовані в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь [5]. Проведено ряд чисельних експериментів. Досліджено вплив теплосолеперенесення та суспензії на розподіл напорів та швидкостей фільтрації в греблі. Отримані значення температури, концентрації солей та суспензії, надлишкових напорів на момент часу 360 діб, відображені на графіках 2—4.

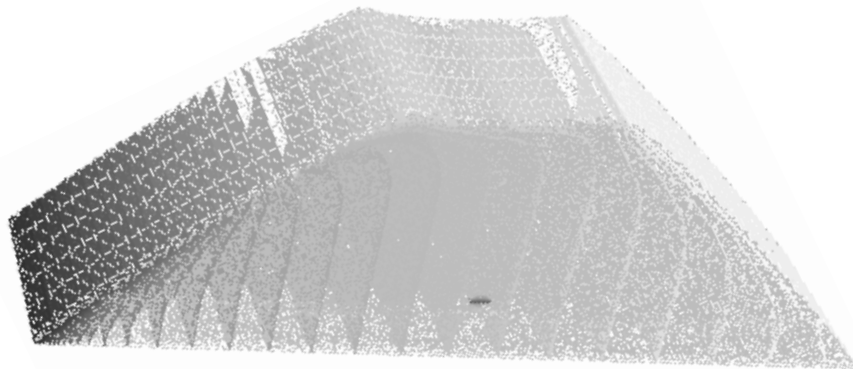


Рис. 2. Розподіл напорів в тілі греблі

Як видно з рис. 2, напори плавно збільшуються з 0,0078 м на низовій грані до 30 м на напірній. В зоні вимиву напори змінюються з 6 м до 22,78 м. Тобто, в зоні вимиву градієнти напорів досягають великих значень, що може призвести до подальшого розмиву ґрунту в областях пошкодження водоводу.

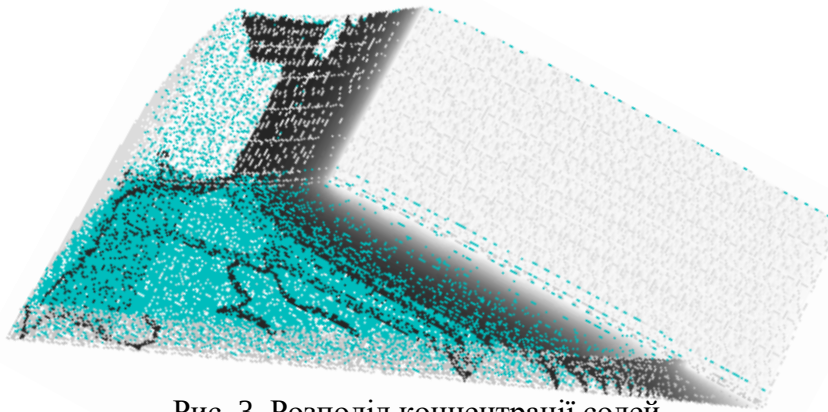


Рис. 3. Розподіл концентрації солей

З рис. 3 можна побачити характер розподілу концентрації солі в тілі греблі. Вона варіюється з 7,36 г/л на низовій грані та гребені до 160 г/л на напірній грані. В зоні вимиву значення концентрації змінюються з 8,35 г/л до 8,90 г/л.

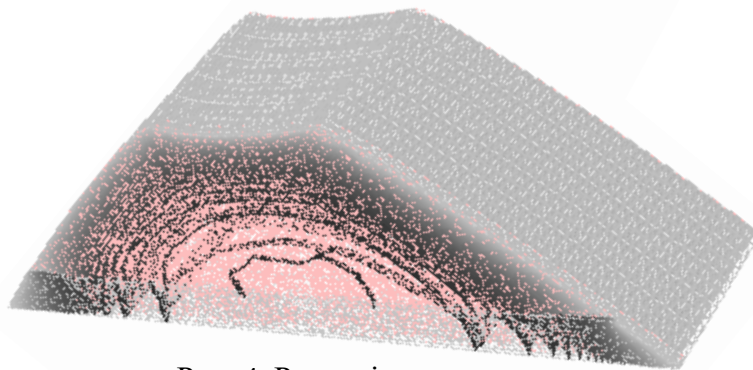


Рис. 4. Розподіл температури

Рис. 4 відображає розміщення ізоліній при розподілі температури, яка змінюється від підшови греблі з 4,10 °C до гребеня з температурою 30°C. В зоні вимиву — з 4,15 °C до 4,44 °C.

Розподіл концентрації суспензії в зоні вимиву змінюється від 0, в зоні пошкодження водоводу, до 0,6.

Список літератури

1. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2010. — 277 с.
2. Мартинюк П. М. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом / П. М. Мартинюк, Н. В. Медвідь // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів : Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції. — Рівне, 2013. — 105 с.
3. Медвідь Н. В. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2014. — Вип. 10. — С. 101—112.
4. Van Rijn L. C. Three-dimensional modeling of sand and mud transport in current and waves / L. C. Van Rijn, K. Meijer // Int. Symp. "The transport of suspended sediments and its mathematical modeling", Florence, Italy. — 1991. — P. 683—708.
5. FreeFem++ / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau, J. Morice, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka. — Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris. — 378p (режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>).

КАРЭКТОЎНЫ НЕЛІНЕЙНЫ НІЗКАХУТКІ КОД

А. І. Міцюхін

*Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыяэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by*

У наш час ідзе шырокае ўкараненне ў бесправодныя тэлекамунацыйныя сістэмы метадаў шырокапалоснага доступу да канцавых прылад, мабільных тэрміналаў. Прыкладам можа служыць сотавае тэлефанія другога пакалення IS-95 з кодавым падзелам каналаў CDMA (Code-Division Multiple Access). На гэтай платформе рэалізуюцца сучасныя праекты трэцяга пакалення CDMA2000 і WPAN (Wireless Personal Area Network) — бесправодныя персанальныя сеткі. Такія сеткі з'яўляюцца нізкахуткімі і маламоцнымі. Прыкладам, адмысловыя задачы аўтаматызацыі (маламоцная тэхналогія «разумны дом», збор інфармацыі і інш.) развязваюцца на хуткасці да 20 Кбіт/с.

Нізкахуткая перадача і апрацоўка дадзеных крыніц, сігналаў розных датчыкаў можа здзяйсняцца праз выкарыстанне стандарта IEEE 802.15.4 (ZigBee) [1]. Стандарт прадугледжвае ўжыванне перашкодаўстойлівай кодавай канструкцыі, што ўключае ў сябе 16 квазі артаганальных псеўдавыпадковых паслядоўнасцяў даўжынёй $n = 32$.

Для паляпшэння характарыстык, надзейнасці маламоцнай бесправоднай шырокапалоснай сеткі даследуецца магчымасць выкарыстання нелінейнага карэктоўнага кода той жа даўжыні, але з большай кодавай адлегласцю d і прымальнымі ўзаемнымі карэляцыйнымі ўласцівасцямі. Разглядаецца код, што фармуецца на мностве мажарытарных паслядоўнасцяў цыклічнай групы з аперацыяй дыёднага зруху на канчатковых інтэрвалах [2]. Такія паслядоўнасці апісваюцца выразам

$$G = a(t) = \text{sign} \sum_{j=1}^l \text{rad}(j, t) = \begin{cases} 1, \sum_{j=1}^l \text{rad}(j, t) \geq 0; \\ -1, \sum_{j=1}^l \text{rad}(j, t) < 0 \end{cases}, t = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

дзе $l = \log_2 n$, l — няцотны лік, $\text{rad}(j, t)$ — паслядоўнасць Радемахера, $j = (1, \dots, l)$ — нумар паслядоўнасці Радемахера. Доўжачы $l = 5$ вагавы спектр A_i паслядоўнасцяў складаецца з адной кампаненты, роўнай аб'ёму кода $M = A_{16} = 32$. Усе словы кода маюць аднолькавую вагу роўную $i = \frac{n}{2} = 16$. Гэты нелінейны код G [2] характарызуецца мінімальнай адлегласцю

$$d = 2 \binom{l-1}{l-1/2} = 2 \binom{4}{2} = 12.$$

Карыснай характарыстыкай як лінейных, так і нелінейных канструкцый кодаў з'яўляецца спектр кодавых адлегласцяў. Для кода аб'ёмам M спектр адлегласцяў вызначаецца лікамі B_s , якія ўваходзяць у суму [3] выгляду

$$M = B_1 + \dots + B_s + \dots + B_n,$$

дзе B_s — пазначае лік кодавых слоў, выдаленых ад некаторага слова на

адлегласць Хэмінга $d_x = s$. Для нелінейнага кода G з параметрамі (n, M, d) вагавы спектр і спектр адлегласцяў не супадаюць. Калі $x \in G, c \in G$ і $x \neq c$, адлегласць Хэмінга паміж двума вектарамі

$$\text{dist}(x, c) \geq d.$$

Тады ў прасторы кодавых слоў аб'ёмам M можна вылучыць падпрастору меншага аб'ёму M' , але з адлегласцю $d' > d$. Максімальнае значэнне d' для вызначанай даўжыні кода можна знайсці з выразу мяжы Сінглтана [3] для нелінейных кодаў над полем $GF(q)$

$$d' \leq n - \log_q M + 1.$$

У выпадку бінарных кодаў атрымліваецца $d' \leq 28$.

Для тэхнічных дадаткаў, звычайна, выпрацоўваецца кампрамісны развязак, адносна выбару значэнняў параметраў d' і M' . Вядома, што для лінейных і нелінейных кодаў максімальнае значэнне M' для зададзенага d' можна вызначыць, выкарыстоўваючы мяжу Плоткіна [3].

Тэарэма. Для (n, M, d) -кода G пры $n \leq 2d$ справядліва роўнасць

$$M \leq 2^{\lfloor \frac{d}{2d-n} \rfloor}.$$

Для $d' = 28$ атрымліваем найбольшы лік $M' = 2$. Гэта значэнне малапрыдатнае з-за рэзкага змяншэння хуткасці перадачы інфармацыі. Як і для артаганальных кодавых канструкцый, у якіх мінімальная адлегласць $d = \frac{n}{2}$ — цотны лік, пошук кампраміснага значэння M' пры ўмове $n < 2d$ здзяйсняецца на мностве велічынь адлегласцяў $\{d'\} = \{18, 20, 24, 26\}$. У агульным выпадку, такому мноству адлегласцяў кожнага нелінейнага кода адпавядае мноства лікаў аб'ёму кода $\{M'\} = \{8, 4, 2, 2\}$. Доўжачы $d' = 20$, атрымваем (32, 4, 20)-код.

Калі падаюцца павышаныя патрабаванні па перашкодаўстойлівасці ў сістэме, і дазволена параўнальна нізкая хуткасць абмена дадзенымі, ужыванне кодавай канструкцыі (1) дае выйгрыш у дакладнасці перадачы інфармацыі. Акрамя таго, рознае спалучэнне 32-х радкоў матрыцы кодавых слоў па 4 паслядоўнасці кода (1), дазволілі атрымаць 120 блокаў (32, 4, 20)-кода з падвышанай карэктоўнай здольнасцю.

Спіс літаратуры

1. IEEE Part 15.4: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications for Low-Rate Wireless Personal Area Networks (WPANs). Amendment 1: Add Alternate PHYs, 2007.
2. Міцюхін А. І. Усячэнне нелінейнага кода / А. І. Міцюхін // Матэматыка в сучасному тэхнічному універсітэ: Матэрыялы III міжнародной навукова-практычнай конф. 25—26 грудня 2014 р. — Київ: НТУУ «КПІ», 2015. — С. 84—85.
3. Мак-Вільямс Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. Мак-Вільямс, Н. Дж. А. Слоэн — Москва: Связь, 1979.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Н. В. Ногин

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

nvnogin@gmail.com

В соответствии с работами [1—3], уравнение нестационарного осесимметричного движения потока газа в полубесконечном цилиндре запишем для случая краевого условия Неймана, в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = f(t), \\ -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = f(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\frac{dp}{dz}$ — градиент давления, ρ — плотность, правая часть $f(t) = \frac{\Delta P}{\rho \alpha} \psi(t)$.

Данная работа посвящена случаю, когда поверхность трубы **изолирована** от внешней среды, т.е. выполняется граничное условие Неймана (2-го рода)

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2)$$

и задача Коши

$$w|_{t=0} = \frac{R^2 \Delta P}{\mu L} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2 \quad (3)$$

По методике [2, 3], решение краевой задачи (1)—(3) ищем в виде суммы

$$w(r, t) = \theta(r, t) + \Omega(r, t) \quad (4)$$

где $\theta(r, t)$ — вынужденное изменение движения газа от изменения градиента давления, а $\Omega(r, t)$ — изменение движения вызванное начальным условием (3).

В частности, $\Omega(r, t)$ определяется как решение однородного уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = 0 \quad (5)$$

с нулевым граничным условием 2-го рода и заданным начальным условием (3).

Решение методом Фурье, приводит, в частности, к необходимости решения трансцендентного уравнения от функции Бесселя вида

$$J'_0(\lambda R) = 0 \quad (6)$$

Окончательно, решение краевой задачи получено в виде функционального ряда, с учетом условия разрешимости задачи Неймана, с учетом того, что $\lambda_n R$ есть n -й положительный корень уравнения (6) ($n \in \mathbb{N}$):

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r) e^{-\gamma \lambda_n^2 t R^2} \quad (7)$$

причем постоянные B_n определяются в виде квадратур:

$$B_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(R\lambda_n)} \frac{\Delta P}{\mu L} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^3} \right) J_0(\lambda_n r) dr \quad (8)$$

Таким образом, решение краевой задачи дается функциональным рядом (7), причем коэффициенты B_n вычисляются по формулам (8).

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Москва : Наука, 1973. — 848 с.
2. Ногін М. В. Періодичний рух в'язкої нестисливої рідини в необмеженій циліндричній трубі / М. В. Ногін // Вісник НТУ «ХПІ». — 2013. — С. 46—54.
3. Ли Вей Решение задачи движения пульсирующего газа в полубесконечной среде / Вей Ли, В. П. Зинченко, С. В. Зинченко, Н. В. Ногин // Механіка гіроскопічних систем : зб. — Київ. — 2014. — Вип. 27. — С. 34—40.
4. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках / И. С. Громека // Собрание сочинений. — Москва : Изд. АН СССР, 1952. — С. 149—171.
5. Грэй Э. Функции Бесселя и их приложения в физике и механике / Э Грэй, Г. Б. Метьюз. — Москва : ИЛ, 1949. — 348 с.

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ НАТОВПУ
В ЗМІННОМУ НЕБЕЗПЕЧНОМУ ОТОЧЕННІ ЗА ДОПОМОГОЮ
МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ГЕЛБІНГА**

Р. А. Огоренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
romaogo@mail.ru

В сучасному світі все гостріше постає питання безпеки соціальних систем. Важливим окремим випадком такої системи є масові заходи, котрі є основною мішенню вороже налаштованих угруповань. Перед дослідниками постає ряд завдань: визначити способи запобігання створення небезпечної ситуації, способи скорішого урегулювання небезпечної ситуації та мінімізації втрат в разі виникнення такої ситуації. Саме останню задачу я хочу розглянути в своїй роботі.

На жаль, проведення експерименту з участю реального натовпу в екстремальній ситуації не видається можливим, тому для дослідження буде використана комп'ютерна модель панікуючого натовпу. В роботі використана молекулярно-динамічна модель Гелбінга [1]. За цим методом вважається, що на кожного індивіда в натовпі діють сили:

$$F^1_i = M_i \frac{U_i - V_i}{\Delta t} \quad (1)$$

де V_i — швидкість руху індивіда, а U_i — швидкість, з якою він хотів би рухатись, M_i — його маса, а Δt — час, коли індивід потрапив у натовп. Саме невідповідність бажаної і реальної швидкостей породжує силу (1). А також сила

$$F^2_{ij} = A n_{ij} e^{\frac{D_{ij}}{B}}, \quad (2)$$

де

$$D_{ij} \equiv R_i + R_j - |r_i - r_j| \quad (3)$$

R_i та R_j — радіуси індивідів, r_i та r_j — їх радіус-вектори, n_{ij} — одиничний вектор, направлений від індивіда i до індивіда j , A та B — параметри. Ця сила характеризує небажання двох індивідів вступати в надто тісний фізичний контакт і експоненційно зростає при зближенні індивідів. А в умовах тисняви ще вступає третя сила, що характеризує фізичну взаємодію між індивідами:

$$F^3_{ij} = D_{ij} H(D_{ij}) (k n_{ij} + K [(V_j - V_i) \tau_{ij}]) \tau_{ij} \quad (4)$$

де τ_{ij} — одиничний вектор, перпендикулярний лінії, що з'єднує індивідів i та j , K і k — параметри. За аналогією з (2, 4) можна записати взаємодії індивідів з перешкодами:

$$F^{2W}_{ij} = A^W n^W_{ij} e^{\frac{D^W_{ij}}{B^W}}, \quad (5)$$

$$F^{3W}_{ij} = D^W_{ij} H(D^W_{ij}) (kn^W_{ij} + K[(V_j - V_j)^\tau]^W_{ij})^\tau_{ij} \quad (6)$$

де D^W_{ij} — найкоротша відстань від індивіда до границі перешкоди, n^W_{ij} і τ^W_{ij} — одиничні вектори, паралельний і перпендикулярний відповідно, до лінії, що з'єднує індивіда і найближчу до нього точку перешкоди.

Враховуючи формули (1—6) маємо динамічну систему

$$\frac{dr_i}{dt} = V_i \quad (7)$$

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = F^1_i + \sum_{i \neq j} F^2_{ij} + \sum_{i \neq j} F^3_{ij} + \sum_{i \neq j} F^{2W}_{ij} + \sum_{i \neq j} F^{3W}_{ij} \quad (8)$$

Хоча така модель не враховує свободу волі індивіда, в умовах паніки свідомість поступається колективній несвідомій і людина починає діяти подібно автомату, рефлекторно відповідаючи на зовнішні подразники. Зловмисники нерідко обирають своєю ціллю приміщення, що мають досить складну внутрішню будову (метро, аеропорти, готелі, офісні приміщення), адже в таких умовах збільшується ризик додаткових втрат через погану орієнтацію потерпілих у не однозв'язному просторі. Через це, до молекулярно-динамічної моделі, додана модель індивідуальної просторової орієнтації в приміщенні з багатьма шляхами і кількома виходами, розглянута в роботі [2] і ґрунтується на ймовірнісному механізмі вибору індивідом між кількома можливими шляхами обминання перешкоди. При чому імовірності залежать від щільності натовпу, що вже просувається заданим шляхом (для індивіда менш привабливими є більш «завантажені» проходи).

Додаючи в досліджувані приміщення додаткові силові поля (осередки пожежі, конструкції, що руйнуються, спалахи, вибухи тощо) і вирішуючи ускладнену систему чисельно, на комп'ютері, отримуємо поведінку обраної соціальної системи не просто в умовах паніки, а в умовах змінного оточення під час дійсної небезпеки.

У даній роботі планується дослідити поведінку натовпу в ситуаціях, коли крім небезпечних умов оточуючого середовища на його поведінку здійснюється вплив ще з боку зацікавлених сил. Для цього в систему вводяться індивіди особливої поведінки, що моделюють загони рятувальників, охорони порядку чи зловмисників [3], що діють не підкоряючись загальному бажанню натовпу покинути приміщення, а за заздалегідь розробленим планом, який має на меті пришвидшити, убезпечити або організувати просування натовпу, зосередити його в певній області простору чи навпаки змусити триматись подалі від певної ділянки. Це дослідження може дати оцінку ефективності тих чи інших запобіжних заходів, що проводяться в подібних ситуаціях, або навіть допоможе розробити нові стратегії дій рятувальних підрозділів.

Список літератури

1. Helbing D. Social force model for pedestrian dynamics / Dirk Helbing, Peter Molnar // Phys. Rev. E. — 1995. — 51. — P. 4282—4286.
2. Аптуков А. М. Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении / А. М. Аптуков, Д. А. Брацуна, А. В. Люшнин // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 491—508.
3. Composite Agents / H. Yeh, S. Curtis, S. Patil, J. van den Berg, D. Manocha and M. Lin // Eurographics Symposium on Computer Animation, 2008. — P. 39—47.
4. Письмиченко Д. В. Мультиагентная модель поведения толпы / Д. В. Письмиченко, В. И. Божич // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2002. — Т. 26, № 3. — С. 19—22.

ПРО ВПЛИВ РІВНОМІРНОСТІ РОЗПОДІЛЕННЯ ВВЕДЕНОГО ВОЛОКНА В ПОЛІМЕРНИЙ МАТЕРІАЛ

Б. Г. Пелешенко, О. Д. Деркач, Д. О. Макаренко

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,

Дніпропетровськ, Україна

Fly-makd@yandex.ua

Вступ. Сучасне сільськогосподарське машинобудування випускає широкий спектр машин — у тому числі посівні, які мають складні системи функціонування. Якщо раніше створені машини не мали чіткої системи технічного обслуговування (ТО), через простоту конструкцій, то зараз в багатьох машинах вводиться регламентоване ТО.

Як показав аналіз конструкцій сучасних посівних машин — John Deere 1895, Агро-Союз Turbosem II 19-60, Вега — 16 [1—3] — рухомі з'єднання системи копіювання рельєфу повинні систематично обслуговуватись через строго визначену періодичність: від 100 га до 100 год. наробітку. Причиною цьому є використання в трибосистемах сталевих деталей — втулок, підшипників ковзання, які вкрай незадовільно функціонують за відсутності пластичних мастил.

Постановка проблеми. Одним з ефективних рішень створення трибосистем, що не потребують ТО або мають значно більшу періодичність обслуговування полягає у застосуванні композиційних пластиків конструкційного призначення.

Ефективними пластиками є ароматичні (фенілон С-1, С-2) та аліфатичні поліаміди, армовані вуглецевими, органічними чи іншими волокнами [4, 5]. Вони мають високі фізико-механічні та трибологічні властивості і можуть застосовуватися у вище вказаних машинах. Як показує досвід, на властивості композиційних матеріалів (КМ) впливає не тільки відсоток наповнювача, а і рівномірність його розподілення в полімерній матриці.

Основною задачею даної роботи є отримання КМ з рівномірно розподіленим наповнювачем.

Рівномірність розподілення волокон в суміші значно впливає на фізико-механічні та трибологічні властивості готової деталі.

Вирішення проблеми. Під час дослідження рівномірності розподілення введеного волокна в полімер використовували методи математичної статистики, а саме — вибіркового коефіцієнта кореляції, що показує на точність кореляційної залежності між ваговими долями волокна у взятій суміші та вагою взятій суміші. Суміш змішували в електромагнітному полі, що обертається з частотою 3500 хв^{-1} .

Для цього брали n проб вагою M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) з приготованої в електромагнітному полі, в кожній з яких вимірювали вагову частку волокна $\delta(M_i)$. Через $\bar{M}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) позначали сумарну вагу перших k проб, так

як $\bar{M}_k = \sum_{i=1}^k M_i$, а через $\delta(\bar{M}_k)$ позначали вагову складову волокна в $\bar{M}_k$. Далі

підраховували вибіркового коефіцієнта кореляції $r_b(\delta, M)$, що вказує на існування чи відсутність кореляційного зв'язку між ваговими складовими волокна в суміші та масою взятої суміші.

Вибірковий коефіцієнт кореляції розраховували за формулою [6]:

$$r_b(\delta, M) = \frac{\frac{1}{49} \sum_{i=1}^n \left(\delta(\bar{M}_k) - \frac{1}{49} \sum_{i=1}^n \delta(\bar{M}_k) \right) (\bar{M}_k - \frac{1}{49} \sum_{i=1}^n \bar{M}_k)}{\sigma_b(\delta) \sigma_b(M)},$$

де $\sigma_b(\delta)$ та $\sigma_b(M)$ — стандартні вибіркові середньоквадратичні відхилення випадкових величин $\delta(\bar{M})$ та $\bar{M}$, які набувають значення $\delta(\bar{M}_k)$ і $\bar{M}_k$ у вибірці, що розглядали.

Отримані значення вибіркового коефіцієнту кореляції $r = r_b(\delta, M)$, віддаленого від нуля, використовуємо його для визначення довірчих інтервалів для теоретичного коефіцієнту кореляції $\rho = \rho(\delta, M)$ між масою M суміші та часткою волокна в цій суміші $\delta(M)$.

Відомо, що величина $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ підпорядковується переважно нормальному закону розподілу із середнім значенням $\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$ зі стандартним відхиленням $\frac{1}{\sqrt{n-3}}$.

Отже величина

$$\lambda = \sqrt{n-3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)} \right) \right)$$

також нормально розподілена із середнім значенням рівним нулю та дисперсією 1.

При відомому значенні r з довірчою ймовірністю γ (з рівнем значимості

$\gamma_0 = \gamma + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}$) величина ξ буде знаходитись у межах

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \pm \frac{\lambda_{\gamma_0}}{\sqrt{n-3}},$$

де λ_{γ_0} — квантіль нормального розподілу. Тоді для ρ отримуємо при заданому γ довірчий інтервал (α, β) , де α, β — числові значення розв'язку рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{2(n-1)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{\lambda_{\gamma_0}}{\sqrt{n-3}}, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{\beta}{2(n-1)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{\lambda_{\gamma_0}}{\sqrt{n-3}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо α і β близькі до одиниці, то це означає, що кореляційна залежність між вмістом волокна в суміші даної маси та масою суміші є майже лінійною.

Запропонованим методом визначається вибіркового коефіцієнт кореляції між ваговими долями вуглецевого волокна (ВВ) та вагою суміші, взятої в пробах вуглепластика на основі фенілону. Одержане значення вибіркового коефіцієнту кореляції використовували для встановлення рівномірності розподілу вагової долі вуглецевого волокна в суміші. При цьому вага кожної із 39 проб склала 1 г, абсолютна нерівномірність вимірів була не більшою, ніж 0,0002 г. Частина фенілону була у вигляді кульок, а волокна ВВ використовувались у вигляді циліндрів діаметром на порядок менше діаметру кульок поліетилену з довжиною в 36 разів більшою, ніж діаметр кульок поліетилену.

Рівень значимості γ вибирається відповідним рівнем 0,95 та 0,98. З таблиці функції нормального розподілу [6] знаходимо $\lambda_{0,975} = 1,96$ та $\lambda_{0,99} = 2,33$ й інтервалами довіри визначаються з рівностей (1) наближено з потрібною точністю. Для довірчої ймовірності $\gamma_1 = 0,95$ $\alpha_1 = 0,99984$, $\beta_1 = 0,99995$, для довірчої ймовірності $\gamma_2 = 0,98$ $\alpha_2 = 0,99982$, $\beta_2 = 0,99996$. Одержані значення α_i та β_i близькі до одиниці, що свідчить про рівномірність розподілу вуглецевого волокна в суміші.

На основі отриманих теоретичних результатів виготовлені деталі для модернізації вузлів рухомих з'єднань механізму копіювання поверхні поля сошниками посівних комплексів типу «Агро-Союз Turbosem II 19-60». Під час сівби будь-яких відхилень в роботі модернізованих вузлів не зафіксовано. Дефектація модернізованих вузлів після відпрацювання повного сезону експлуатації не виявила відхилень від технічних вимог. Модернізований комплекс напрацював 9179,5 га без зупинки на технічні обслуговування, що дозволяє зробити висновок про адекватність теоретичних розрахунків.

Список літератури

1. Инструкция по эксплуатации и технического обслуживания сеялки Агро-Союз Turbosem II, 57 С.
2. <http://agrotek.in.ua/>.
3. <http://www.chervonazirka.com>
4. Burya A. I. Investigation of fullerence C₆₀ influence on tribotechnical and dynamical mechanical properties of composite material based on phenilon / A. I. Burya, O. Yu. Kuznetsova, A. D. Derkach [et al.] // WTC 2013, 5th world tribology congress, September, 8—13, 2013, Torino, Italy.
5. Burya A. I. The influence of nanocluster carbon materials on the structure and properties of polyamide nanocomposites / A. I. Burya, O. Yu. Kuznetsova, A. A. Konchits [et al.] // Materials Science Forum. — 2011. — V. 674. — P. 189—193.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман — Москва : Высшая школа, 1989. — 479 с.

МЕТОД РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ИЗ ПОДКОЛЕЦ ФАКТОРИЗАЦИОННОЙ ПАРЫ

Г. С. Полетаев

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,

Одесса, Украина

poletayev_gs@ukr.net

1. Мотивация. Обозначения, определения и общие положения

1.1. Проявление общих свойств в элементах теорий разных классов уравнений, а также разных постановок задачи разрешимости некоторых уравнений одного вида мотивирует изучение соответствующих уравнений — моделей в абстрактном кольце с факторизационной парой [1—5]. Это относится, в частности, к интегральным уравнениям типа Винера — Хопфа и иным типа свёртки; некоторым новым матричным с треугольными неизвестными и проекторами, допускающим важные интерпретации в механике; задаче нахождения пары рациональных функций с полюсами из полуплоскостей, родственной известной задаче типа Римана — Гильберта — Привалова теории аналитических функций. Их рассмотрение приводит к подтверждению мотивированности исследования, например, изучаемого ниже абстрактного уравнения с двумя неизвестными из подколец произвольного ассоциативного кольца с факторизационной парой и ряда других абстрактных уравнений.

1.2. Продолжая [1—5], через R обозначим произвольное, вообще, некоммутативное и, возможно, неассоциативное кольцо с единицей e . Пусть p^+, p^- — коммутирующие проекторы, т. е. аддитивные и идемпотентные отображения $R \rightarrow R$. Положим: $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$, $p_{\mp} := p^{\mp} - p^0$. Для любого подмножества $B \subseteq R$ обозначим $B^{\mp,0} := p^{\mp,0} B$; $B_{\mp} := p_{\mp} B$; $B^* = B^+ + B^-$; $B_* = B_+ + B_-$. Для любого элемента $x \in R$ полагаем $x^{\mp,0} := p^{\mp,0} x$; $x_{\mp} := p_{\mp} x$. Обратный в R для обратимого в R элемента $x \in R$ будем обозначать символом x' , снабженным, при необходимости, дополнительными. Для произвольных подмножеств $A, B \subseteq R$ определим множество [4] $\text{inv}(A, B) := \{x \in A : x' \text{ существует и принадлежит } B\}$. Положим $\text{inv}(A, A) := \text{inv } A$. Элемент u^+ (элемент v^0 , элемент w^-) назовем *правильным*, если $u^+ \in \text{inv } R^+$ [$v^0 \in \text{inv } R^0, w^- \in \text{inv } R^-$].

1.3. Пару подколец (R^+, R^-) [$\equiv (R^-, R^+)$] кольца R с единицей e будем называть его факторизационной парой (ФП), если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами $p^+, p^- : R^{\mp} = p^{\mp}(R)$, и выполняются следующие аксиомы (ср. [4]):

$$e \in R^0 (= R^+ \cap R^-); \quad (1)$$

$$p^0 (= p^+ p^-) — \text{кольцевой гомоморфизм } R^+ \text{ и } R^- \text{ в } R^0; \quad (2)$$

$$R^+ R^-, R^- R^+ \subseteq R^+ + R^- \quad (:= R^*). \quad (3)$$

Всякое кольцо R с единицей, рассматриваемое вместе с его фиксированной ФП называется кольцом с этой факторизационной парой.

2. Факторизация по подкольцам факторизационной пары

Будем говорить ([2, 5], ср.[4]), что элемент $a \in R$ допускает в R левую (правую) факторизацию ($l.f.$ ($r.f.$)) по паре подколец (R^+, R^-) , если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие что:

$$a = r^+ s^0 t^- \quad (a = t^- s^0 r^+) \quad (4)$$

Множители r^+, s^0, t^- в (4) называются плюс-, диагональным- и минус-факторами, соответственно. Если $(R^+, R^-) [\equiv (R^-, R^+)]$ ФП кольца R и имеет место как левая, так и правая факторизация (4), будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в R двустороннюю [6] факторизацию ($d.f.$) (4) по факторизационной паре подколец (R^+, R^-) . В случае, когда кольцо R коммутативное левая, правая и двусторонняя факторизации (4) совпадают. Левая (правая) факторизация (4) называется: правильной левой (правой) факторизацией ($n.l.f.$ ($n.r.f.$)), если r^+, s^0, t^- правильные элементы; нормированной левой (правой) факторизацией ($n.l.f.$ ($n.r.f.$)), если $t^0 = r^0 = e$; нормированной правильной левой (правой) факторизацией ($n.n.l.f.$ ($n.n.r.f.$)), если она является $n.l.f.$ ($n.r.f.$) и $t^0 = r^0 = e$.

3. Постановка задачи и главный результат

3.1. Рассматривается абстрактное уравнение относительно неизвестных

$x^+ \in R^+, x_- \in R_-$ вида:

$$ax^+ + x_- = b, \quad (5)$$

где $a, b \in R$ известные элементы. Уравнение (5), изучаемое в кольце R с ФП можно трактовать как подвид абстрактного двупроекторного двучленного первого порядка уравнения в кольце с ФП [1—3]. Это же уравнение возникает при исследовании первого уравнения (1) [2].

3.2. Уравнение (5) в кольце с ФП можно исследовать на основе результатов [1, 2] или указанными в этих работах методами, непосредственно. Имеет место

Теорема. Пусть $R = R^*$ — ассоциативное, вообще, некоммутативное кольцо с единицей e и ФП (R^+, R^-) ; коэффициент $a \in R$ имеет в R обратный

a' . Если при этом обратный элемент a' допускает в R нормированную правильную левую факторизацию (н.н.л.ф.) [2, 5] по ФП (R^+, R^-) :

$$a' = r^+ s^0 t^-, \quad (6)$$

тогда при любой правой части $b \in R$ уравнение (5) имеет в R одно и только одно решение $x^+ \in R^+, x_- \in R_-$. Его можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} x^+ &= r^+ s^0 [t^- b^+]^+, \\ x_- &= t^{-'} [t^- b]_- . \end{aligned} \quad (7)$$

Последнюю из формул (7) возможно преобразовать к виду:

$$x_- = b_- + t^{-'} [t^- b^+]_- . \quad (8)$$

3.3. В соответствующих кольцах с ФП, можно реализовать результат: для матричных уравнений с двумя неизвестными треугольными матрицами [7, 8]:

$$AX^+ + X_- = B;$$

для «родственной» типа Римана — Гильберта — Привалова задачи [9—12] с контурным условием на сомкнутой [11] вещественной оси

$$A(x)X^+(x) + X_-(x) = B(x), x \in \{-\infty; \infty\};$$

для интегрального уравнения типа свёртки:

$$x(t) - \int_0^\infty k(t-s)x(s)ds = f(t), -\infty < t < \infty,$$

связанного с интегральным типа Винера — Хопфа [10, 11, 2, 3].

Метод решения уравнения вида (5) в предположении выполнения условий теоремы может быть основан на проекторном подходе в кольце с факторизационной парой и состоять в следующем.

1. Установить соответствующее конкретное основное кольцо с факторизационной парой, в котором изучаемое уравнение допускает запись в форме (5). При этом неизвестные должны отыскиваться в соответствующих подкольцах, образующих факторизационную пару основного кольца.

2. Произвести требуемую факторизацию по подкольцам факторизационной пары и представить обратный коэффициенту a в основном кольце элемент a' в факторизованном виде (6). Выписать его факторы-множители.

3. По формулам (7), (8), реализованным в конкретном основном кольце, построить искомое решения.

Список литературы

1. Полетаев Г. С. // AMADE. Тез. докл. МНК посв. 100-л. ак. Ф. Д. Гахова. — Минск, 2006. — С. 100.
2. Полетаев Г. С. Об ур. и сист. одн. т. в кольц. с фактор. парами / Киев, 1988. — 20 с. — (Преп. / АН УССР. Ин-т матем.; 88.31) .

3. Полетаев Г. С. Подвид двучленных двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемыми по паре подколец коэффициентами / Г. С. Полетаев // XVII Intern. Conf. "DSMSI" Abstracts of Conference reports. Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. — Kiev, 2015. — С. 46.
4. McNabb A. Factorization of operators—I: Algebraic theory and examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Funct. Anal. — 1972. — 9, № 3. — P. 262 — 295.
5. Полетаев Г. С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г. С. Полетаев // Вісник Харківськ. національного університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». — 2003. — № 582, вип. 52. — С.143—149.
6. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния / Л. П. Нижник. — Киев : Наукова думка, 1973. — 182 с.
7. Войтик Т. Г. Уравнения с неизвестными треугольными матрицами, связанные с одно-проекторными второго порядка / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев // Шестнадцатая МНК им. акад. М. Кравчука : Материалы конференции. — Киев, 2015. — II . Алгебра. Геометрия. Математический анализ. — С. 82—84.
8. Войтик Т. Г. Матричные уравнения с двумя треугольными неизвестными / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев // Наукові нотатки : міжвуз. зб. — Луцьк : ЛНТУ, 2015. — В. 49.— С. 13—16.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — Москва : ГИФМЛ, 1963. — 640 с.
10. Гахов Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. — Москва : Наука, 1978. — 296 с.
11. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М. Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1958. — 13, вып. 5 (83). — С. 3—120.
12. Войтик Т. Г. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев, С. А. Яценко // Глушковські читання (10—11 вересня, Київ) : зб. матеріалів конференції. — Київ : НТУУ «КПІ», 2013. — С. 74—77.

EX-POST ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ РЕГРЕССИИ

А. В. Розанов, И. Л. Воротников, М. В. Котова

Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова,

Саратов, Россия

arosanov@yandex.ru

В условиях высокой волатильности цен на сельскохозяйственную продукцию, прогнозирование ценообразования с использованием традиционных (ex antik) моделей данных не позволяет на значительных временных периодах аппроксимировать фактический уровень цен монотонными функциями. Данная ситуация создает сложности для прогнозирования и экономико-математического моделирования, особенно при автоматической обработке данных, поступающих в реальном масштабе времени [1, 6].

В сложившейся ситуации целесообразно использовать адаптивные методы прогнозирования, позволяющие оперативно обрабатывать поступающие данные и применять экономико-математические модели, способные реагировать на изменение цен с учетом поступления новых данных и результатов, полученных на предшествующих периодах.

Одним из современных методов адаптивного прогнозирования является рекурсивное прогнозирование по реальным данным (ex post) на основе кусочно-линейных функций регрессии [2, 4, 6]. Исходные данные разделяют на две части: по одной части данных строится функция прогнозирования, а другая часть данных используется в качестве пробной, на которой проверяется применяемая функция прогнозирования. Это позволяет непосредственно в процессе прогнозирования оценить точность прогноза и адекватность используемой модели данных. В качестве тестовой части обычно выбирают несколько последних по времени получения точек данных (10—15 % всей выборки) [2].

Функция прогнозирования, построенная на основе выбранной модели данных, используется для вычисления ее параметров (коэффициент детерминации, средняя абсолютная ошибка основной части выборки или средняя абсолютная ошибка). Далее, в основной набор данных добавляется одна точка из тестового набора данных, и все вычисления вновь повторяются. Такая процедура последовательно выполняется для всех точек тестового набора данных. В результате получается набор данных, который демонстрирует динамику изменения параметров выбранной функции прогнозирования и всего прогноза в целом. Основное отличие рекурсивного прогнозирования от обычной проверки адекватности модели на реальных данных заключается в последовательном пересчете параметров модели при каждом добавлении в нее новой экспериментальной точки.

На рис. 1, в качестве примера, представлены результаты применения данного метода для анализа и прогнозирования динамики розничных цен на

гречневую крупу в Саратовской области в период 2009—2012 гг. [3]. Рис. 1 показывает, что в исследуемом временном ряде четко выделяются четыре подвыборки, в которых параметры регрессии заметно отличаются по знаку и величине.

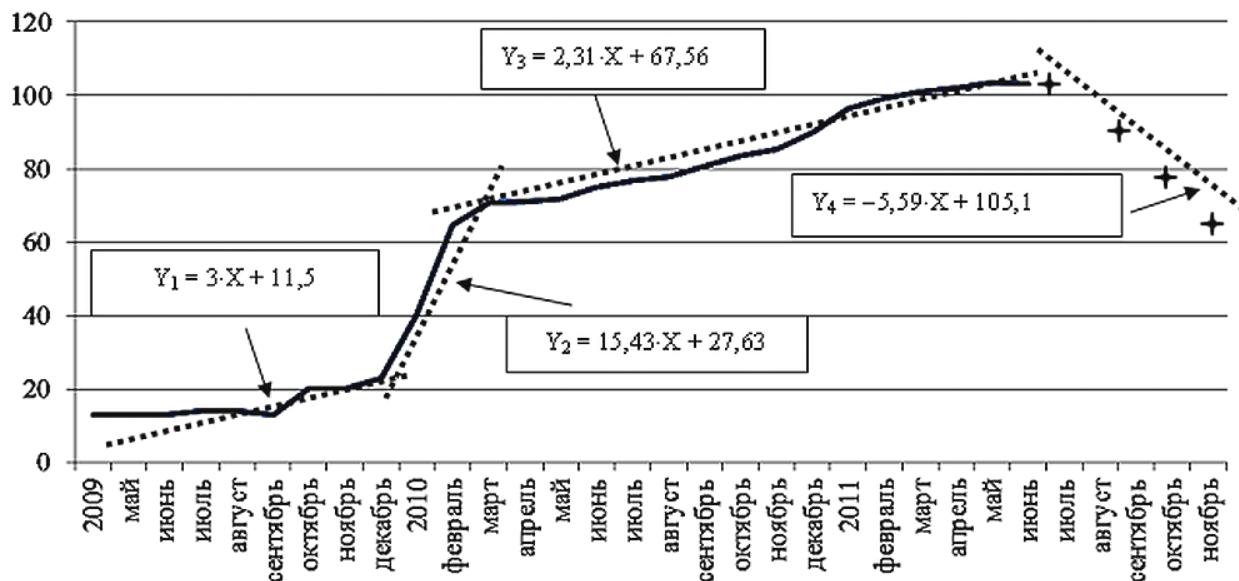


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация уровня цен на основе пошагового рекурсивного прогнозирования (— фактические уровни, расчетные уровни, +++ прогнозные значения)

Одной из проблем, возникающих при практической реализации рекурсивного прогнозирования, является надёжность определения положения точек начала изменения структуры данных, и, соответственно, выбора новой, более адекватной, модели данных. Обычно для установления факта изменения структуры данных проводят анализ остатков, поведения коэффициентов регрессии, а также показателей качества модели, например, коэффициента детерминации, среднего абсолютного отклонения или средней абсолютной ошибки. Это длительная и недостаточно надёжная процедура, слабо поддающаяся автоматизации.

В настоящей работе предложен более чувствительный и оперативный способ определения точек изменения структуры данных, основанный на критерии Чоу (J. Chow) [4]. Согласно этому критерию, гипотеза о том, что две подвыборки некоторого случайного процесса являются частями одной объединенной выборки, должна быть отвергнута, если параметр Чоу $T > F_{k_1, k_2}$, где F_{k_1, k_2} — значение критерия Фишера с числом степеней свободы $k_1 = k$, где k_1 — число независимых переменных в уравнении регрессии ($k_1 = 1$), и $k_2 = p - k - 1$.

$$T = \frac{S - (S_a + S_b) / (k + 1)}{(S_a + S_b) / (N_a + N_b - 2(k + 1))} \quad (1)$$

$$S_a = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^N (X_i - X_{cp})^2 \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^N (Y_i - Y_{cp})^2 \quad (2)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^N (X_i - X_{cp})(Y_i - Y_{cp}) \quad X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad Y_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (3)$$

Здесь N_a, N_b — число точек в соответствующей подвыборке, Y_i — текущее значение цены, руб./кг, Y_{cp} — среднее значение цены, руб./кг, X_i — текущее значение временного интервала, X_{cp} — среднее значение временного интервала, S, S_a, S_b — суммы квадратов остатков регрессии, полученных по объединенной выборке и по соответствующим подвыборкам, $p = N_a + N_b$ — количество точек в объединенной выборке.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Xcp	Ycp	Sxx	Syy	Sxy	S	
2	N	3,25	1,25	35,75	14,55	21,31	1,85	
3	7	2,00	0,37	7,00	0,41	1,41	0,12	
4	4	5,00	2,48	2,50	1,19	1,45	0,35	
5	14	9,50	77,59	17,50	90,70	39,51	1,50	
6	5	10,50	80,75	5,00	320,75	-39,50	8,70	
7								
8		Параметр Чоу (Т)		11,89		F-критерий	4,46	
9				16,33			4,46	
10				73,98			4,46	
11								
12		i	Xi	Yi	(Xi - Xcp)^2	(Yi - Ycp)^2	(Xi - Xcp)(Yi - Ycp)	
13		1	0,5	-0,04	7,56	1,67	3,55	
14		2	1,0	0,44	5,06	0,66	1,83	
15		3	1,5	0,15	3,06	1,21	1,93	
16		4	2,0	0,25	1,56	1,00	1,25	
17		5	2,5	0,57	0,56	0,46	0,51	
18		6	3,0	0,56	0,06	0,48	0,17	
19		7	3,5	0,68	0,06	0,33	-0,14	
20		8	4,0	2,12	0,56	0,76	0,65	
21		9	4,5	1,72	1,56	0,22	0,58	
22		10	5,0	2,67	3,06	2,02	2,49	
23		11	5,5	2,93	5,06	2,82	3,78	
24		12	6,0	2,96	7,56	2,93	4,71	

Рис. 2. Программная реализация теста Чоу

Как видно из рис. 3, для всех пар подвыборок значение параметра Чоу T превышает критическое значение F -критерия Фишера, т. е. тест Чоу подтверждает предположение о том, что кусочно-линейная аппроксимация реального уровня цен является более адекватной для мониторинга цен на основе пошагового рекурсивного прогнозирования. В целом, динамика прогнозных значений показывает устойчивую тенденцию снижения цен на гречневую крупу вследствие высокого урожая 2011 года. С учетом полученных прогнозных значений, розничная цена гречневой крупы в первой половине 2012 года должна составить в среднем 30—40 рублей за килограмм. Фактический

уровень цен на указанный продукт в апреле 2012 года в среднем по Саратовской области составил 37—38 рублей за 1 кг [5].

Таким образом, рекурсивное прогнозирование на основе кусочно-линейных функций регрессии является эффективным инструментом мониторинга цен, так как позволяет уже на начальном этапе обработки данных определить формирующуюся тенденцию розничных цен на высоковолатильном рынке сельскохозяйственной продукции, выявить периоды смены моделей данных, оценить их качество и указать направления совершенствования применяемых моделей данных для более точного прогнозирования.

Список литературы

1. Манелля А. И. Основные характеристики рядов динамики в сельском хозяйстве / А. И. Манелля // Системный анализ, экономико-математические методы и моделирование : Материалы Всероссийской научно-практической конференции. — Москва : Изд-во РГАУ — МСХА им. А. К. Тимирязева, 2008.
2. Норман Д. Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия / Д. Норман, С. Гарри. — 3-е изд. — Москва : Диалектика, 2007. — 912 с.
3. Интернет-сайт Министерства сельского хозяйства Саратовской области. Режим доступа: <http://www.mcx.ru/navigation/docfeeder/show/169.htm>
4. Rawlings J. O. Applied Regression Analysis : A Research Tool / J. O. Rawlings, S. G. Pantula, D. A. Dickey. — 2nd ed. — Springer, 2001. — 660 p.
5. Интернет-сайт Правительства Саратовской области. Режим доступа: <http://www.saratov.gov.ru/misc/prices.php>
6. Воротников И. Л. Мониторинг динамики и прогнозирование уровня потребительских цен на продукты питания в Саратовской области / И. Л. Воротников, А. В. Розанов, М. В. Котова // Аграрный научный журнал. — 2015. — № 7. — С. 71—75.

ПОВЫШЕНИЕ ТВОРЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ В ВИРТУАЛЬНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

А. В. Розанов, С. Н. Потемкина

*Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова,
Саратов,*

Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

arosanov@yandex.ru, s.potemkina@tltsu.ru

Широкое распространение систем дистанционного обучения и облачных технологий потребовало дальнейшего развития прикладных методов математического моделирования как концептуальной основы программного обеспечения для виртуальных физических лабораторий и практикумов, в том числе с удаленным доступом.

При разработке виртуальных лабораторий основное внимание, как правило, уделяется вопросам экранной 3D-визуализации физических процессов, максимально приближенной к реальности, т.к. именно для этого требуется наибольшее количество вычислительных ресурсов. Для моделируемых физических процессов выбираются менее ресурсоёмкие и, соответственно, более простые модели, что заметно ограничивает компетенцию и творческую активность обучаемых [1, 2].

Современные облачные технологии снимают остроту проблемы нехватки вычислительных мощностей и на основе поливариантного подхода позволяют расширить возможности виртуальных лабораторий в плане расширения круга изучаемых процессов и повышения творческой активности студентов.

При создании виртуальной физической лаборатории по курсу «Электростатика» на кафедре «Общая и прикладная физика» Тольяттинского государственного университета, г. Тольятти для обеспечения адекватности компьютерных моделей реальным физическим процессам, расширения круга изучаемых процессов и повышения творческой активности студентов, признано целесообразным встраивать в программное обеспечение системы дистанционного обучения не одну, а несколько различных математических моделей изучаемых физических процессов, выбираемых студентами в зависимости от специфики конкретной задачи [1—3].

Особенности поливариантного подхода продемонстрируем на простом примере расчёта напряженности электростатического поля однородно заряженной нити и определим наиболее рациональный для данной конфигурации метод расчета его характеристик.

Рассмотрим вертикально расположенную тонкую, бесконечно длинную нить, однородно заряженную с линейной плотностью заряда λ . Необходимо найти напряженность электростатического поля $E(r)$ на произвольном расстоянии r от нити.

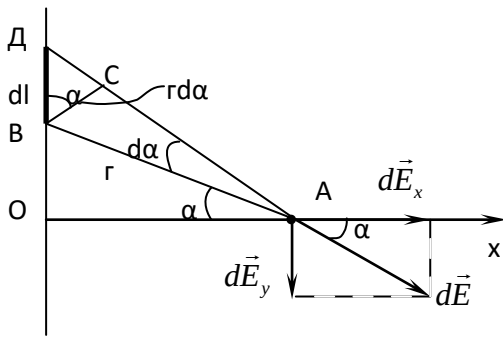


Рис. 1

Вариант 1. Нить несет не точечный заряд, поэтому здесь применим метод дифференцирования-интегрирования, представляющий собой расширение классического метода, основанного на законе Кулона [3]. В соответствии с этим методом распределенный заряд разбивают на малые (элементарные) части dq , такие, чтобы их можно было считать точечными, и, применяя закон Кулона, находят поле

всего заряда как векторную сумму полей, созданных каждой из этих частей.

Выделим бесконечно малый элемент длины проводника dl , который будет содержать заряд $dq = \lambda dl$ (рис. 1). Рассчитаем напряженность поля, созданного каждым элементом проводника в произвольной точке A , находящейся от нити на расстоянии a . Вектор $d\vec{E}$ будет направлен вдоль прямой, соединяющей точечный заряд с точкой наблюдения. Результирующее поле $\vec{E}$ получим по нормали к нити вдоль оси x . Необходимо найти величину dE_x , т. е. $dE_x = dE \cos \alpha$. Тогда

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \alpha.$$

По определению

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Величины dl, r , меняются согласованно при изменении положения элемента dl . Выразим их через величину угла α :

$$\frac{rd\alpha}{dl} = \cos \alpha, \quad dl \cos \alpha = \frac{a}{r},$$

где $d\alpha$ — бесконечно малое приращение угла α в результате поворота радиуса-вектора $\vec{r}$ относительно точки A при перемещении по нити на dl . Тогда

$$dl = \frac{r^2 d\alpha}{a}.$$

При перемещении dl от $-\infty$ до точки O угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

$$E_x = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int \cos \alpha d\alpha = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Ответ: $E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}.$

Следует иметь в виду, что если геометрия системы зарядов — сложная, то могут возникнуть трудности выбора пути и пределов интегрирования по области пространства, в котором находятся заряды, и его работа в виртуальной физической лаборатории может быть завершена некорректно.

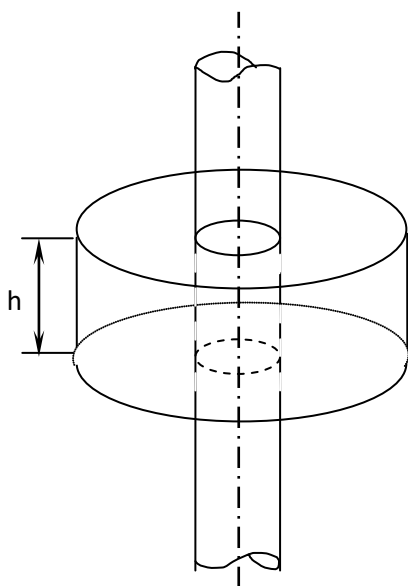


Рис. 2

Вариант 2. Нить изобразим в виде тонкого цилиндра. В силу аксиальной симметрии распределения заряда, все точки, расположенные на равном расстоянии от нити, эквивалентны и напряженность поля в них одинакова, т. е. $E(r) = \text{const}$, где r — расстояние от точки наблюдения до нити (рис. 2).

Поле нити обладает цилиндрической симметрией, и для расчета величины напряженности поля можно применить электростатическую теорему Гаусса. С этой целью выберем замкнутую поверхность простой формы и рассчитаем величину её площади. Поверхность выберем в виде цилиндра, коаксиального с нитью, с радиусом a и образующей h . Т. к. направление вектора $\vec{E}$ в этих точках всегда совпадает с направлением

нормали к нити, то линии напряженности поля пронизывают только боковую $S_{\text{бок}} = 2\pi ah$ поверхность замкнутой цилиндрической поверхности, охватывающей нить. Определим величину заряда Q , вырезанного замкнутой цилиндрической поверхностью из нити: $Q = \lambda h$. Величину интересующей нас напряженности поля найдем как отношение величины заряда, вырезанного замкнутой поверхностью из нити, к произведению $S_{\text{бок}} \epsilon_0$.

$$E_r = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S_{\text{бок}}} = \frac{\lambda h}{2\pi\epsilon_0 ah} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Ответ: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$

Необходимо помнить, что решение на основе теоремы Гаусса возможно в тех случаях, когда выражение для потока вектора $\vec{E}$ через воображаемую замкнутую поверхность, получается простым, например, когда вектор $\vec{E}$ во всех точках поверхности перпендикулярен или параллелен ей или пересекает поверхность под определенным углом. Это справедливо для сравнительно небольшого класса симметричных задач, т. е. в случае, когда поле создано системой точечных или неточечных зарядов, расположенных на телах правильной геометрической формы [4, 5].

Таким образом, применяя различные математические модели и методы расчета характеристик полей и выбирая из них наиболее приемлемые для конкретных условий, студенты получают возможность выработать и закрепить практические навыки, которые потребуются им при изучении специальных дисциплин в сфере их профессиональной деятельности.

Обдуманый выбор и рациональное решение поливариантных физических задач в процессе самостоятельной работы в виртуальной лаборатории выступает как модель научного исследования со всеми присущими ему атрибутами: обоснованным выбором степени идеализации изучаемого процесса, исследованием простых, частных и предельных случаев, поиском и разбором аналогий с другими задачами и явлениями.

Список литературы

1. Потемкина С. Н. Повышение эффективности модульно-рейтинговой системы обучения на основе передовых Internet-технологий / С. Н. Потемкина, А. В. Розанов // Экономико-математическое моделирование в инновационном развитии АПК : Материалы Международной научно-практической конференции. — Саратов : Изд-во ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ» им. Н. И. Вавилова, 2012. — С. 49—51.
2. Розанов А. В. Организация самостоятельной работы студентов с использованием информационных и сетевых технологий / А. В. Розанов, С. Н. Потемкина // Математика и моделирование в инновационном развитии АПК : Материалы II Международной научно-практической конференции». — Саратов : Буква, 2015. — С. 27—33.
3. Потемкина С. Н. Математические методы в преподавании курса физики / С. Н. Потемкина // XIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : Матеріали конференції. — Київ : НТУУ «КПІ», 2010. — Т. 3. — С. 240—241.
4. Беликов Б. С. Решение задач по физике. Общие методы / Б. С. Беликов. — Москва : Высшая школа, 2006. — 257 с.
5. Павлова Е. С. Использование рядов Маклорена и дифференциальных уравнений в изложении метода аналогий в колебательных и волновых явлениях / Е. С. Павлова, М. Г. Никитина // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. — 2009. — № 6. — С. 17—21.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ

Е. А. Сдвижкова, О. В. Бугрим, С. Е. Тимченко
Днепропетровский национальный горный университет,
Днепропетровск, Украина
bugrim@yahoo.com

Традиционные информационно-описательные методы обучения становятся неэффективными, так как не создают условий для активной учебной деятельности студентов. Повысить интерес студентов к обучению, выработать у них творческий подход при изучении математики, вызвать желание самостоятельно приобретать знания можно только сделав их активными участниками учебного процесса. В этой связи большое значение имеет обращение к задачам прикладного характера. Задачи прикладного характера играют существенную роль в подготовке инженеров, они оживляют учебный процесс и вызывают интерес к углубленному изучению математики

Основным методом привлечения студентов к самостоятельному поиску, эффективным способом развития их познавательной активности и творчества является введение в учебный процесс проблемного обучения. Можно сформулировать такие основные формы проблемного обучения [1]:

1. Проблемное изложение учебного лекционного материала. Здесь преподаватель ставит проблемные вопросы и сам на них отвечает, приглашая студентов подключиться к поиску решений.

2. Проблемное изложение материала в режиме диалога преподаватель-студент или студент-студент. В этом случае студентам заранее выдается материал для усвоения, а затем проводится соответствующее диалоговое занятие.

3. Частично поисковая деятельность в процессе выполнения индивидуального задания с последующим собеседованием.

Проблемный подход изменяет роль преподавателя, превращая его из традиционного лектора в преподавателя-консультанта.

Одним из разделов курса высшей математики, при изучении которого можно эффективно использовать методику проблемного обучения является раздел «Дифференциальные уравнения». Один из способов повысить мотивацию к изучению этого раздела — дать индивидуальные задания, связанные с изучением другой дисциплины студентами данной специальности [2]. Такой дисциплиной для студентов инженерных специальностей может быть теоретическая механика, которая изучается на втором курсе. Проведена корректировка во времени изложения дифференциальных уравнений и теоретической механики. Разработаны совместно с кафедрой теоретической механики соответствующие задачи.

При подготовке специалистов и магистров направления «Горное дело» одной из основных фундаментальных дисциплин является механика горных

пород, которая в свою очередь основана на положениях механики твердого деформируемого тела. Классической задачей механики горных пород есть задача о распределении напряжений в породной среде в окрестности горизонтальной протяженной горной выработки круглого поперечного сечения. В наиболее простой постановке эта задача решена в предположении однородности породной среды, деформирования ее в пределах упругости под воздействием гидростатического поля начальных напряжений, создаваемых весом вышележащих горных пород [3]. В результате рассмотрения равновесия бесконечно малого объема породной среды и гипотезы о неразрывности деформаций получают довольно простую систему уравнений вида:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0,$$

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 2\gamma H,$$

где σ_θ и σ_r — тангенциальный и радиальный компоненты напряжений, $r = R / R_0$ — безразмерный радиус, играющий роль единственной переменной системы координат, R_0 — радиус выработки, R — текущий радиус, γ — объемный вес породы, H — глубина.

Эта система может быть приведена к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 2\frac{\gamma H - \sigma_r}{r} = 0$$

с граничными условиями

$$\sigma_r = \gamma H \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

$$\sigma_r = p_0 \text{ при } r \rightarrow 1.$$

Поскольку решение этого уравнения достигается несложными преобразованиями, целесообразно предложить его студентам при изучении темы «Дифференциальные уравнения» в дисциплине «Высшая математика» в качестве примера, непосредственно связанного с их профессиональной деятельностью. Учебный план соответствующих специальностей построен так, чтобы данная тема предшествовала непосредственно чтению дисциплин «Механика горных пород» и «Строительная механика», также оперирующих с дифференциальными уравнениями.

Учитывая, что величина $p_0 / \gamma H$ при достаточно большой глубине заложения выработки близка к нулю и ею можно пренебречь, получим следующие выражения

$$\sigma_r = \gamma H \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \gamma H \left(1 + \frac{1}{r^2}\right).$$

Эти уравнения в точности соответствуют решению Ламе для определения напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внешним и внутренним давлением.

Анализ вышеприведенных выражений показывает, что возмущающее влияние выработки на породный массив носит локальный (местный) характер, и на расстоянии (5—6) R_0 от контура напряжения в массиве незначительно отличаются от начальных.

Графики распределения напряжений вокруг выработки показаны на рис. 1.

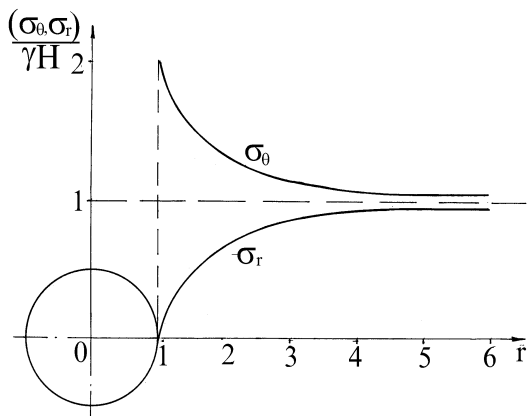


Рис. 1. Распределение напряжений вокруг выработки в упругом массиве

Из рисунка следует, что на контуре выработки имеет место одноосное напряженное состояние:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 0, \\ \sigma_\theta &= 2\gamma H.\end{aligned}$$

Для активизации учебного процесса приведенная задача выносится на семинарское занятие с приглашением представителей из других групп, имеющих отношение к данному направлению обучения. Семинарское занятие разбивается на три этапа.

Первый — выделяются докладчики, которые корректно и достаточно подробно представляют постановку задачи и обоснование граничных условий.

Второй — студенты другой подгруппы проводят решение соответствующего дифференциального уравнения с использованием граничных условий.

Третий — проводится обсуждение количественных и качественных результатов решения, и делаются соответствующие заключения.

Преподаватель направляет занятие в нужное русло, активизируя слушателей наводящими вопросами. Как показывает практика, подобные семинары вызывают у студентов большой интерес. Круг рассматриваемых задач может быть существенно расширен.

Список литературы

1. Сдвижкова Е. А. Некоторые особенности применения инновационных технологий при изучении высшей математики / Е. А. Сдвижкова, О. В. Бугрим // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск XI : в 3-х томах. — Кривий Ріг : Видавничий відділ КМІ, 2013. — Т. 1. Теорія та методика навчання математики. — С. 114—120.
2. Бугрим О. В. Некоторые аспекты активизации познавательной деятельности студентов с использованием межпредметных связей / О. В. Бугрим // Стратегия качества в промышленности и образовании : Материалы VII Международной конференции : в 3-х томах. — Варна, 2011. — Т. 1. — С. 285—287.
3. Шашенко А. Н. Геомеханические процессы в породных массивах / А. Н. Шашенко, Т. Майхерчик, Е. А. Сдвижкова. — Днепропетровск : НГУ, 2005. — 319 с.

РОЛЬ КОНГРУЕНЦІЇ ПРЯМИХ У ПРОБЛЕМІ КОМП'ЮТЕРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Н. П. Селезньова, С. В. Селезньов

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Koniwa@yandex.ua

Серед задач розпізнавання образів за допомогою комп'ютерів задачі розпізнавання поверхонь займають особливе ще малодосліджене місце. Розв'язання проблеми розпізнавання поверхонь має широке застосування при дешифруванні аерографічних, аерогеодезичних даних. Цей напрямок математичних досліджень також має самостійне наукове і технічне значення.

Пропонуємо розглянути можливість побудови такого підходу до поставленої проблеми, яка з одного боку, є достатньо загальною для зображень більшості різних видів поверхонь, а з другого — враховує специфіку зображення об'єкта розпізнавання. Описана нижче пропозиція є спробою утворити такий підхід до поставленої задачі.

Основне положення методологічного характеру, прийнятого в цій роботі (як і в більшості опублікованих праць з цієї тематики), полягає в тому, що для отримання додаткової інформації треба відмовитись від підходу до зображення як до чогось первинного, заданого у вигляді готової функції, і розглянути питання про виникнення зображення. У цьому процесі можна виділити два складових елементи: зображувані об'єкти і метод проектування [2, 3]. Практично, більшість відомих досліджень розпізнавання матеріальних об'єктів проводились за допомогою методу проектування заданого об'єкту на площини. Таким способом здійснювалась заміна більш складного об'єкта вивчення на простіші. Отже, задачам розпізнавання об'єктів можна надавати точного теоретико-множинного змісту. Для цього визначають «класи еквівалентності», тобто правила, за якими необхідно розміщати задані зображення в різні класи, так, щоб ці правила забезпечували б можливість опису нескінченних (незліченних) множин у скінченних термінах. Один з підходів до побудови таких правил базується на інтуїтивному асоціюванні понять «схожість» і «близкість» і визначається в пропозиції про правомірність зіставлення міри схожості зображень з мірою близькості відповідних точок множини.

Інтерпретація задачі розпізнавання зображень містить дві основні частини розв'язання: перша частина — вибір підходящого простору, точки якого б відображали розглядувані в задачі зображення, і друга частина — опис у термінах цього простору точкових множин, що відображають задані класи.

Отже, у літературі [1] є цілком визначений підхід до проблеми опису зображень і їх класів у задачах розпізнавання зображень: він полягає у зведенні цієї проблеми до проблеми опису відповідних неперервних перетворень та їх множин. Звідси випливає, що потрібно описати власне самі перетворення і після цього вказати інваріанти цих перетворень. Основним інструментом опису класів моделі, яку потрібно вивчати повинні бути групи Лі (на площині чи у

просторі), точніше одна з форм їх задання: у вигляді формули або ж у вигляді системи інваріантів.

Пропонуємо для розв'язання згаданих вище задач застосувати не метод проектування заданого об'єкту на площини, а *заданій поверхні ставити у відповідність, за допомогою певного виду конгруенції прямих, поверхню, що буде другою фокальною поверхнею в заданій конгруенції, якщо першу поверхню взяти за фокальну поверхню конгруенції*. У геометрії вже давно існує струнка теорія конгруенцій як у евклідовому, так і в інших просторах. Ця теорія дає можливість знайти чіткий критерій віднесення певних поверхонь до одного класу еквівалентності. Тобто *дві поверхні можна вважати віднесеними до одного класу еквівалентності, якщо вони є фокальними поверхнями однієї і тієї ж конгруенції*. При цьому мають місце всі припущення, що були наведені вище. Слід відмітити, що особливо цікаво зіставляти фокальні поверхні нормальної конгруенції, так як при згинанні однієї фокальної поверхні конгруенція залишається нормальною [4].

Наприклад, конгруенції прямих біаксіального простору еліптичного виду W зображуються двопараметричним сімейством турбін, і конформна теорія таких сімейств є еквівалентною геометрії конгруенцій біаксіального простору. Особливо просто влаштовані «нормальні» конгруенції [4] або «паралельні конгруенції», що належать одному з комплексів абсолютного пучка. Фактично їхня теорія зводиться до конформної геометрії двопараметричних сімейств кіл конформної площини, тобто до геометрії поверхонь в ідеальній області простору Лобачевського [2]. Р. Г. Бухараєв [3] прямій біаксіального простору ставив у відповідність сферу ідеальної області простору Лобачевського. Але застосування «турбін» є значно простішим і наочнішим, бо дозволяє поставити лінійчатую геометрію біаксіального простору фактично на рівень нарисної геометрії.

Також цікавими в цьому плані є інші види конгруенцій, наприклад такі, як W конгруенції, у яких зберігається відповідність асимптотичних ліній на фокальних поверхнях.

Список літератури

1. Файн В. С. Оpozнaвание изображений / В. С. Файн. — Москва : Наука, 1970. — 299 с.
2. Конева Н. П. Нормальные конгруэнции в биаксиальном пространстве гиперболического типа / Н. П. Конева. — Киев, 1983. — 26 с. — (Препринт / Институт математики ; 83.49).
3. Бухараев Р. Г. Отображение биаксиального пространства прямых на множество сфер пространства Лобачевского / Р. Г. Бухараев // Изв. вузов. Матем. — 1958. — № 6. — С.36—47.
4. Селезньова Н. П. Нормальні конгруенції в контексті конформної геометрії / Н. П. Селезньова // International Conference to M. A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary (31 Oktober — 3 November, Kiev) : Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics, 2000. — P. 67—70.

ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ РЕГІОНІВ

В. Ю. Сивак

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

vasya06@mail.ru

Прогнозування — процес передбачення майбутнього стану предмета чи явища на основі аналізу його минулого і сучасного, систематична інформація про якісні й кількісні характеристики розвитку цього предмета чи явища в перспективі. Результатом прогнозування є прогноз — знання про майбутнє і про ймовірний розвиток сьогочасних тенденцій [1].

Система прогнозування вимагає певного рівня формалізації, тобто описана процедурами й інструкціями. У бізнес-прогнозуванні процесом займаються та за нього відповідають підрозділи продажу та маркетингу, які відповідають за збут у компаніях: відділ збуту, відділ маркетингу, відділ з роботи з клієнтами, товарознавців. Проте, досить поширеною є практика коли короткострокове прогнозування здійснюється працівниками планових відділів логістики.

Актуальність розроблення методів і алгоритмів кластеризації обумовлена тим, що вони дозволяють досягти великої гнучкості у багатоваріантному розрахунку кластерів. До недоліків цих методів можна віднести необхідність задання початкової кількості та числа кластерів і задання умови зупинки роботи алгоритмів.

Кластерний аналіз — це багатовимірна статистична процедура, що виконує збір даних, що містять інформацію про вибірку об'єктів, сортування об'єктів у порівняно однорідні групи (кластери) (Q-кластеризація, або Q-техніка, власне кластерний аналіз) [2].

Для прогнозування було використано метод кластеризації, а саме: деревовидна кластеризація та метод К-середніх [3]. Усі райони було розділено на три кластери. Дані були отримані від Академії Наук України.

При дослідженні прогнозування розвитку регіонів Закарпатської області до уваги бралися усі райони, а також міста обласного підпорядкування.

Було встановлено, що найбільш перспективними районами в плані подальшого розвитку є Ужгородський, Мукачівський, Виноградівський і Тячівський райони, а також міста обласного підпорядкування Ужгород та Мукачево.

Дані дослідження

Район/Критерій	Харч ова пром ислов ість	Лісове господар ство	Деревооб робна промисло вість	Мебельна промисло вість	Тури зм	Сільське господар ство
Берегівський	3	3	3	3	1	1
Великобerezнянський	3	3	1	3	2	2
Виноградівський	1	1	1	1	1	1
Воловецький	3	3	3	3	1	3
Іршавський	3	3	3	2	2	1
Міжгірський	2	3	3	2	1	2
Мукачівський	3	1	1	1	1	1
Перечинський	3	3	3	2	1	2
Рахівський	3	3	3	3	3	2
Свалявський	3	3	3	2	2	2
Тячівський	3	2	2	2	1	2
Ужгородський	1	1	1	1	1	1
Хустський	3	3	3	3	2	3
Ужгород	1	3	1	1	1	2
Мукачево	2	2	2	1	2	2
Берегове	1	3	3	3	2	2
Хуст	1	2	2	3	2	2
Чоп	2	3	2	1	3	2

Список використаних джерел

1. Присенко Г. В. Прогнозування соціально-економічних процесів / Г. В. Присенко, Є. І. Равікович. — Київ : КНЕУ, 2005. — 385 с.
2. Мандель И. Д. Кластерный анализ / И. Д. Мандель. — Москва : Финансы и статистика, 1988. — 176 с.
3. Олдендерфер М. С. Кластерный анализ / Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / М. С. Олдендерфер, Р. К. Блэшфилд. — Москва : Финансы и статистика, 1989. — 215 с.

ТЕСТУВАННЯ ЧИСЕЛ НА ПРОСТОТУ МЕТОДОМ СОЛОВЕЯ — ШТРАССЕНА

В. В. Соколенко, магістрант, науковий керівник Л. Я. Васильєва
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна
pilgrim.ya@outlook.com

На сучасному етапі розвитку інформаційного суспільства застосування простих чисел набуло широкого поширення в області захисту інформації, перш за все, це викликано винаходом криптографії з асиметричним ключем, що застосовується в алгоритмах електронного цифрового підпису, що є одним з основних областей, де знайшли практичне застосування прості числа. На даний момент розмір простих чисел використовуються при формуванні цифрового підпису з використанням еліптичних кривих складає 160, 254, 512 тощо біт (пропонується використання 512 бітних ключів). Визначити простоту чисел з такою розрядністю, за допомогою використання простих способів знаходження початкового списку простих чисел аж до деякого значення, не надається можливим, внаслідок низької швидкості роботи даних алгоритмів і використання не малих обчислювальних ресурсів системи.

Втім, на практиці замість отримання списку простих чисел найчастіше потрібна перевірити, чи є дане число простим. Алгоритми, що вирішують цю задачу, називаються тестами простоти.

Серед усіх тестів ми хочемо виділити імовірнісний тест Соловея — Штрассена. Імовірнісні тести, дозволяють визначити простоту числа з деякою досить низькою ймовірністю помилки.

Тест Соловея — Штрассена - імовірнісний тест простоти, відкритий у 1970-х роках Робертом Мартіном Соловеєм спільно з Фолькером Штрассеном. Тест завжди коректно визначає, що просте число є простим, але для складених чисел з певною ймовірністю він може дати невірну відповідь. Основна перевага тесту полягає в тому, що він, на відміну від тесту Ферма, розпізнає числа Кармайкла як складені [2]. А отже тест Соловея — Штрассена кращий за тест Ферма.

У 17 столітті Ферма довів твердження, назване пізніше *малою теоремою Ферма*, що служить основою тесту Ферма на простоту:

Якщо n просте і a не ділиться на n , то
$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ця перевірка для заданого n не вимагає великих обчислень, однак твердження, зворотне цьому, невірне. Так, існують числа Кармайкла, які є складеними, для яких твердження, наведене в малій теоремі Ферма, виконується для всіх цілих чисел взаємнопростих із заданим числом [3]. 1994 року було показано, що таких чисел нескінченно багато. У зв'язку з виявленим недоліком тесту Ферма, актуальності набуло завдання збільшення достовірності

імовірнісних тестів. Перший тест, що відсіює числа Кармайкла як складені, запропонував Леманн.

Незалежно один від одного Д. Лемер в 1976 році і Р. Соловей спільно з Ф. Штрассеном в 1977 році довели, що аналогів чисел Кармайкла, що є складеними і одночасно ейлеровими псевдопростими, немає. На основі цього і був запропонований тест Соловея — Штрассена на простоту, він був опублікований в 1977 році, доповнення до нього в 1978 році [1].

Тест Соловея — Штрассена спирається на малу теорему Ферма і властивості символу Якобі: якщо n непарне складене число, то кількість цілих чисел a , взаємнопростих з n і менших за n , що задовольняють рівність

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n} \right) (\bmod n),$$

не перевищує $\frac{n}{2}$.

Складені числа n , що задовольняють дану рівність називають *псевдопростими Ейлера — Якобі* за основою a [1].

Алгоритм Соловея — Штрассена. Алгоритм Соловея — Штрассена параметризується кількістю раундів k . У кожному раунді випадковим чином обирається число $a < n$. Якщо $\text{НСД}(a, n) > 1$, то виноситься рішення, що n складене. Інакше перевіряється справедливість рівності

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n} \right) (\bmod n).$$

Якщо рівність не виконується, то виноситься рішення, що n — складене. Якщо дана рівність виконується, то a є свідком простоти числа n . Далі вибирається інше випадкове a і процедура повторюється. Після знаходження k свідків простоти в k раундах виноситься висновок, що n є простим числом з імовірністю $1 - 2^{-k}$. Така точність хоч і може бути великою, проте на практиці частіше користуються тестом Міллера — Рабіна, який має ще більшу точність результату.

Текст програми:

```
long k;  
int j;  
long pow;  
Random random=new Random();  
MPower mp=new MPower();  
Jacoby jacoby=new Jacoby();  
ArrayList<Integer> numbers = new ArrayList<Integer>();  
boolean isPrimeN(int n, double p) {  
    k=(long) (Math.log(1-p)/Math.log(0.5))+1;
```

```

for(int i=0;i<k;i++){
    int a=random.nextInt(n-2)+2;
    while(numbers.contains(a)||((a%2==0))
        a=random.nextInt(n-2)+2;
    numbers.add(a);
    if(nod(a,n)>1)
        return false;
    j=jacoby.getJacoby(a, n);
    pow=mp.power(a, (n-1)/2, n);
    if(j==1){
        if(pow==j||((pow-n)==j))
            return true;
    }
    else
        return pow==j||((pow+n)==j);

}
return true;
}

```

де метод `getJacoby(a, n)` повертає символ Якобі для заданих двох чисел.

Отже, володіючи знаннями з математики, можна досить швидко та досить точно тестувати числа на простоту.

Список використаних джерел

1. Ишмухаметов Ш. Т. Математические основы защиты информации [Электронное учебное пособие] / Ш. Т. Ишмухаметов, Р. Г. Рубцова. — Казань, 2012. — 138 с. Режим доступа: <http://kpfu.ru/docs/F366166681/mzi.pdf>
2. Нестеренко А. Ю. Введение в современную криптографию. Теоретико-числовые алгоритмы / А. Ю. Нестеренко. Москва : Моск. гос. ин-т. электроники и математики— 2012. — 224 с.
3. Черемушкин А. В. Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии / А. В. Черемушкин. — Москва : МЦНМО, 2001. — 104 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ У ТОНКИХ ОБОЛОНКАХ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко, І. Б. Руденко, С. Б. Харенко
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
stevan@ukr.net

Тонкі оболонки, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в різних областях техніки. В більшості випадків ці елементи по конструктивним або технологічним міркуванням мають отвори і вирізи самої різноманітної форми. При значних рівнях діючих навантажень в тонкостінних елементах конструкцій виникають пластичні деформації, а властивості їх матеріалів характеризуються нелінійними діаграмами деформування.

Постановка задачі і основні рівняння. Розглянемо тонку оболонку товщини h , послаблену декількома отворами і навантаженою поверхневими $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ та крайовими $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ силами. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. Оболонка виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу.

Вирази для компонент мембранної (ε_{ij}) і згинної (μ_{ij}) деформацій запишемо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа — Лява [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \\ \mu_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad 2\mu_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \phi_1 = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \\ e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12} \quad (1 \rightarrow 2), \end{aligned} \quad (1)$$

де A_1, A_2 — параметри Ламе; $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{n}$ — вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ — орти криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$; $\vec{\phi} = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2$ — вектор кутів повороту нормалі.

При дослідженні пружнопластичного деформування оболонок з отворами будемо користуватися співвідношеннями теорії текучості з ізотропним зміцненням, в якій прийнято умову пластичності Мізеса, а прирости пластичних деформацій визначаються згідно асоційованого закону текучості [3]:

$$de_{11}^p = \frac{3de_i^p}{2\sigma_i} S_{11} \quad (1 \rightarrow 2); \quad de_{12}^p = \frac{3de_i^p}{\sigma_i} S_{12}. \quad (2)$$

Тут S_{11}, S_{22}, S_{12} — компоненти діватора напружень; $\overline{\sigma_i}, \overline{de_i^p}$ — інтенсивності напружень і приростів пластичних деформацій.

Вважаємо, що при деформуванні матеріалу за межею пружності приріст повної деформації (de_{ij}) складається із суми пружної (de_{ij}^y) і пластичної (de_{ij}^p) частин

$$de_{ij} = de_{ij}^y + de_{ij}^p \quad (i, j = 1, 2). \quad (3)$$

Прирости напружень ($d\sigma_{ij}$), які пов'язані з приростами пружних деформацій (de_{ij}^y) законом Гука, подамо у вигляді суми лінійної ($d\sigma_{ij}^0$) і нелінійної ($d\sigma_{ij}^p$) частин:

$$\begin{aligned} d\sigma_{11} &= \frac{2G}{1-\nu} (de_{11}^y + \nu de_{22}^y) = d\sigma_{11}^0 + d\sigma_{11}^p; \quad d\sigma_{12} = Gde_{12}^y = d\sigma_{12}^0 + d\sigma_{12}^p; \\ d\sigma_{11}^0 &= \frac{2G}{1-\nu} (de_{11} + \nu de_{22}); \quad d\sigma_{12}^0 = Gde_{12}; \\ d\sigma_{11}^p &= -\frac{2G}{1-\nu} (de_{11}^p + \nu de_{22}^p); \quad d\sigma_{12}^p = -Gde_{12}^p \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (4)$$

де G, ν — модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Використовуючи рівності (1)—(4), у виразах для приростів внутрішніх зусиль і моментів також виділимо лінійні та нелінійні складові:

$$\begin{aligned} dT_{ij} &= dT_{ij}^0 + dT_{ij}^p; \quad dM_{ij} = dM_{ij}^0 + dM_{ij}^p; \\ dT_{ij}^p &= \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{ij}^p d\gamma; \quad dM_{ij}^p = \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{ij}^p \gamma d\gamma \quad (i, j = 1, 2); \\ dT_{11}^0 &= \frac{2Gh}{1-\nu} (d\varepsilon_{11} + \nu d\varepsilon_{22}); \quad dT_{12}^0 = Gh d\varepsilon_{12}; \\ dM_{11}^0 &= \frac{Gh^3}{6(1-\nu)} (d\mu_{11} + \nu d\mu_{22}); \quad dM_{12}^0 = \frac{Gh^3}{6} d\mu_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (5)$$

Методика чисельного розв'язання пружнопластичних задач для оболонок з декількома отворами. Ураховуючи суттєву нелінійність фізичних співвідношень (2)—(5) і з метою відслідкування історії процесу деформування оболонки з отворами, при побудові системи розв'язувальних рівнянь використана процедура покрокового навантаження і подання вихідних рівнянь в інкрементальній формі. Така система отримана з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і методу скінченних елементів (МСЕ) [3, 4].

У результаті лінеаризації задачі методом додаткових напружень приходимо до такого функціоналу:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\text{ЛН}} = & \frac{1}{2} \iint_{(\Sigma)} \{\Delta \varepsilon\}^T [D] \{\Delta \varepsilon\} d\Sigma + \iint_{(\Sigma)} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\Delta m^P\} d\Sigma - \\
& - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u\}^T \{\Delta p\} d\Sigma - \\
& - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\}^T \{\Delta m_k\} ds + \iint_{(\Sigma)} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\bar{m}\} d\Sigma - \\
& - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u\}^T \{\bar{p}\} d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\}^T \{\bar{m}_k\} ds
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$, $\{u_k\} = \{u_m, u_\tau, u_3, -\phi_m\}^T$ — вектори переміщень точок серединної поверхні і контуру оболонки; $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$ — вектор деформацій; $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ — вектор внутрішніх силових факторів; (Σ_p) — частина області (Σ) , на якій задані поверхневі сили; (Γ_k) — частина контуру серединної поверхні оболонки, на якій задані крайові сили; символами Δf і f позначено приріст функції f на n -му кроці навантаження і її значення в кінці попереднього кроку навантаження; $[D]$ — матриця жорсткостей оболонки.

Ероботі для розрахунку оболонок даного класу використано варіант МСЕ, в якому для вектора переміщень вводиться бікубічна апроксимація з невідомими у вершинах скінченного елемента (СЕ) переміщеннями і їх першими похідними, а для вектора кутів повороту нормалі — біквадратична апроксимація серендипового типу. Складаються умови, які еквівалентні геометричним гіпотезам Кірхгофа — Лява у вузлах СЕ: а) рівність нулю деформацій поперечного зсуву у кутових вузлах (8 рівнянь); б) рівність нулю дотичної складової деформації поперечного зсуву в середині сторін елемента (4 рівняння). Також приймається, що кут повороту нормалі навколо дотичної до контуру елемента змінюється уздовж сторони за лінійним законом (4 рівняння). В сукупності отримується 16 рівнянь, із яких вузлові значення кутів повороту виражаються через вузлові значення переміщень і їх перших похідних. Побудований таким чином СЕ задовольняє умовам неперервності векторів переміщень і кутів повороту при переході через сторони елемента і має 36 ступенів свободи.

З умов екстремуму дискретного аналогу функціоналу (6) отримаємо систему розв'язувальних рівнянь для пружнопластичної оболонки з отворами, яка в матричній формі для n -го кроку навантаження має вигляд:

$$[K] \{\Delta q\} = \{\Delta P\} - \{\Delta \Omega\} + \{\Delta \Psi\}, \tag{7}$$

де $[K]$ — матриця жорсткості; $\{\Delta q\}$ — вектор приростів вузлових ступенів свободи; $\{\Delta P\}$ — вектор навантажень; $\{\Delta \Omega\}$ — вектор нелінійностей, які враховують деформації пластичності матеріалу; $\{\Delta \Psi\}$ — вектор нев'язок рівнянь рівноваги в кінці $(n - 1)$ -го кроку навантаження.

При розв'язанні конкретних задач до рівнянь (7) потрібно приєднати відповідні крайові умови.

Пружнопластичний стан сферичної оболонки з двома круговими отворами. Як числовий приклад, розглянемо задачу про напружено-деформований стан сферичної оболонки радіуса R , послабленої двома однаковими круговими отворами радіуса r_0 . Оболонка виготовлена з сплаву АМг-6 і знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності $p_3 = \tilde{p}_3 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Дослідження проведені при таких значеннях геометричних параметрів оболонки:

$$R / h = 400; r_0 / h = 30; d / h = 12; 15; 60,$$

де d — довжина перемички.

При розрахунках прийнято, що отвори закриті кришками, які передають на їх контури лише дію перерізувальних зусиль, а на достатній віддалі від контурів отворів має місце безмоментний напружений стан.

Конкретні числові результати розв'язання лінійних і нелінійних задач отримані для внутрішнього тиску інтенсивності $\tilde{p}_3 = 2, 5$.

В табл. 1 наведені значення кругових напружень ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^0 \cdot 10^5 \text{ Па}$) в декількох точках контуру отвору ($r = r_0$; $0 \leq \theta \leq \pi$, де полярному куту $\theta = \pi$ відповідає точка контуру, яка належить перемичці) на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки ($\tilde{\gamma} = \gamma / h = \pm 0, 5$). Дані представлені для трьох значень довжини перемички ($d / h = 12; 15; 60$) як для лінійної задачі (ЛЗ), так і фізично нелінійної (ФНЗ).

Таблиця 1

θ	$\tilde{\gamma}$	$d/h = 12$		$d/h = 15$		$d/h = 60$	
		ЛЗ	ФНЗ	ЛЗ	ФНЗ	ЛЗ	ФНЗ
0	0,5	3228	1761	3225	1759	3127	1699
	- 0,5	1683	1538	1685	1551	1655	1559
$\pi / 2$	0,5	3148	1766	3147	1760	3026	1700
	- 0,5	2007	1714	1974	1670	1962	1641
π	0,5	4410	2617	3754	2333	3121	1730
	- 0,5	2832	2521	2344	2181	1738	1620

З наведених даних випливає, що для оболонки з двома однаковими круговими отворами при невеликій довжині перемички ($d/h = 12; 15$) і даному навантаженні найбільш небезпечними є точки контурів отворів, які розташовані на найменшій віддалі одна від одної, тобто в перерізі ($r = r_0; \theta = \pi$) на зовнішній поверхні оболонки ($\tilde{\gamma} = 0,5$). Врахування пластичних деформацій матеріалу оболонки приводить до вирівнювання напружень як по товщині оболонки, так і на контурах отворів, а також до зменшення максимальних напружень у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв'язку на 41 % для $d/h = 12$, на 38 % для $d/h = 15$ і на 45 % для $d/h = 60$.

Список літератури

1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. — Киев: Наук. думка, 1980. — Т. 1. — 636 с. — (Методы расчета оболочек : В 5 т.).
2. Maksimyuk V. A. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.— 2012. — **48**, № 6. — P. 613—687.
3. Guz A. N. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells / A. N. Guz, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. — 2003. — **39**, № 6. — P. 679—687.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — Москва : Мир, 1975. — 541 с.

ПРО КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Н. І. Турчина

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

nataturchina@gmail.com

1. Параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні реальних процесів (наприклад, у задачах теорії випадкових процесів, статистичної радіотехніки та ін.). Так, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера — Планка — Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [1, с. 177—179]. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$(Lu)(t, x) := (\partial_t - \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \partial_{x_j} \partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \partial_{x_j} - a_0)u(t, x) - b \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (x_j u(t, x)) = f(t, x), \quad (1)$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

в якому n — задане натуральне число, a_{jl} , a_j , a_0 і b — задані дійсні числа,

$A = (a_{jl})_{j,l=1}^n$ є симетричною і додатно визначеною матрицею.

2. Для рівняння (1) розглядаються такі дві крайові задачі:

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), (t, x) \in \Pi_T^+, \quad (2)$$

$$(B^{(s)}u)(t, x)|_{x_n=0} = g(t, x'), (t, x') \in \Pi'_T, \quad (3_s)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (4)$$

де $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$,

$$\Pi_T^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^n \mid t \in (0, T], x \in \mathbb{R}_+^n\},$$

$$\Pi'_T := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0, T], x' \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

$s \in \{1, 2\}$,

$$B^{(1)} = 1 \text{ (умова Діріхле),}$$

$$B^{(2)} = \partial_{\vec{v}_A}((x', 0)) := -\sum_{l=1}^n a_{nl} \partial_{x_l} \text{ (умова Неймана).}$$

3. Вектор-функцією Гріна задачі (2), (3_s) , (4) називається така вектор-функція $(G_0^{(s)}, G_1^{(s)}, G_2^{(s)})$, що для довільних досить гладких і фінітних функцій f, g і φ розв'язок цієї задачі зображаються у вигляді

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(s)}(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(s)}(t - \tau, x, \xi') g(\tau, \xi') d\xi' + \int_{\mathbb{R}_+^n} G_2^{(s)}(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, (t, x) \in \Pi_T^+,$$

де $G_0^{(s)}$ називається однорідною функцією Гріна, функція $G_1^{(s)}$ — ядром Пуассона, а функція $G_2^{(s)}$ — функцією впливу початкового миттєвого точкового джерела задачі (2), (3_s), (4).

4. Для задач (2), (3_s), (4) з $s \in \{1, 2\}$ побудовано вектор-функції Гріна та досліджено їх властивості. Зауважимо, що для модельного випадку, коли $a_{jl} = a^2 \delta_{jl}$, $a > 0$, δ_{jl} — символ Кронекера, $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$, $a_j = 0$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, у статті [2] функції $G_0^{(s)}$, $G_1^{(s)}$ і $G_2^{(s)}$ знайдено в явному вигляді.

Для знаходження ядра Пуассона $G_1^{(1)}$ використовується потенціал подвійного шару

$$v(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\vec{v}_A((\xi', 0))} Z(t - \tau, x, \xi) \Big|_{\xi_n=0} \mu(\tau, \xi') d\xi', (t, x) \in \Pi_T^+, \quad (5)$$

а для $G_1^{(2)}$ — потенціал простого шару

$$w(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z(t - \tau, x, \xi) \Big|_{\xi_n=0} \eta(\tau, \xi') d\xi', (t, x) \in \Pi_T^+. \quad (6)$$

У формулах (5) і (6) Z — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), який побудовано й досліджено в праці [3].

5. Так само, як для модельних задач у статті [4], для задач

$$Lu = 0 \text{ в } \Pi_T^+, B^{(s)}u \Big|_{x_n=0} = 0, u \Big|_{t=0} = \varphi \quad (7)$$

означено спеціальні вагові простори Φ_p^a , $p \in [1, \infty]$, функцій чи узагальнених мір φ , які будучи взяті за початкові дані в (7), забезпечують коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задач (7) у сімействах вагових L_p -просторів функцій, які при $|x| \rightarrow \infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку із залежним від t типом. При цьому охарактеризовано розглянуті класи розв'язків як множини значень операторів Пуассона, які

породжені однорідними функціями Гріна та областями визначення яких є простори Φ_p^a .

Список літератури

1. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — Москва : Сов. радио, 1977. — 488 с.
2. Турчина Н. І. Вектор-функції Гріна крайових задач для модельного рівняння Фоккера — Планка — Колмогорова нормального марковського процесу / Н. І. Турчина, С. Д. Івасишен // Буковинський мат. журн. — 2014. — 2, № 1. — С. 118—125.
3. Заболотько Т. О. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер. : математика: зб. наук. пр. — 2012. — 2, № 2—3. — С. 81—89.
4. Івасишен С. Д. Характеризація розв'язків крайових задач для модельного рівняння Фоккера — Планка — Колмогорова нормального марковського процесу / С. Д. Івасишен, Н. І. Турчина // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2015. — № 4. — С. 63—68.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ НАПІВНЕСКІНЧЕНИХ ПЛАСТИНОК

К. Г. Хорошев, Ю. А. Глущенко

Національний транспортний університет, Київ, Україна

k.g.khoroshev@gmail.com

1. *Півплощина.* Розглядається нижня півплощина з п'єзоелектричного матеріалу, яка має отвори та тріщини та знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані. В серединній площині пластинки маємо область S , обмежену прямолінійною границею L^+ і контурами отворів L_l ($l = \overline{1, L}$) та віднесена до системи декартових координат Oxy (рис. 1). Контури отворів та тріщин L_l не підкріплені та позбавлені електромеханічного навантаження. На прямолінійній границі нанесено тонкі електроди та задано значення φ^+ електричного потенціалу, прямолінійна границя не підкріплена та не завантажена. На нескінченості $E_y^\infty = a$, $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = \omega_3^\infty = 0$.

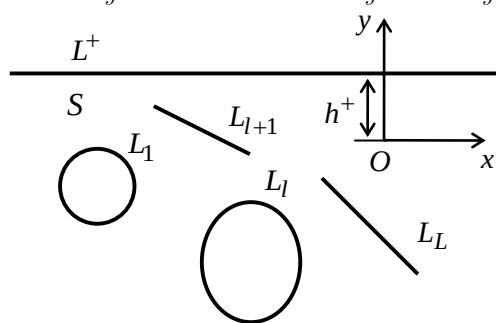


Рис. 1. Область S

Як відомо [1], задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$), визначених в нижніх півплощинах S_k , які утворені з півплощини S афінними перетвореннями $z_k = x + \mu_k y$, де μ_k ($k = \overline{1, 3}$) — корені характеристичного рівняння [2]. При цьому прямолінійній границі L^+ та контурам отворів L_l відповідають прямолінійні границі L_k^+ та контури отворів L_{kl} .

Використовуючи [1, 2], для функцій $\Phi_k(z_k)$ запишемо

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \Phi_{k1}(z_k).$$

Тут Γ_k — сталі, що визначаються з системи рівнянь

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, q_k - \mu_k p_k \right) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, a, 0);$$

$\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, r_k^0, p_k, q_k$, — відомі сталі, що залежать від фізико-механічних властивостей матеріалу [2]; c_{k0} — невідомі сталі; $\Phi_{k0}(z_k)$ — функції, голоморфні в нижніх півплощинах областей S_k ; $\Phi_{k1}(z_k)$ — функції, голоморфні в багатозв'язних областях, що утворені точками, які лежать поза еліпсами L_{kl} , причому $\Phi_{k0}(\infty) = \Phi_{k1}(\infty) = 0$.

На прямолінійній границі L^+ механічні та електричні граничні умови мають вигляд [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 2}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 \Phi_k(t_k) = \varphi^+.$$

Тут g_{ki}^0 — відомі сталі, що визначаються з умов навантаження [2].

Ці рівняння в нескінченній точці прямолінійної границі вироджуються у

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 c_{k0} = 0 \quad (i = \overline{1, 2}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 c_{k0} = \varphi^+ + a h.$$

З урахуванням останньої системи, отримано граничні умови на прямолінійній границі для визначення функцій $\Phi_{k0}(z_k), \Phi_{k1}(z_k)$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 [\Phi_{k0}(t_k) + \Phi_{k1}(t_k)] = 0 \quad (i = \overline{1, 2}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 [\Phi_{k0}(t_k) + \Phi_{k1}(t_k)] = 0. \quad (1)$$

Для граничних умов на контурах отворів запишемо [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k [\Gamma_k + \Phi'_{k0}(t_k) + \Phi'_{k1}(t_k)] = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

де $\delta_k = dz_k / ds$, s — дугова координата контуру.

Граничним умовам (2) будемо задовольняти точно, методом інтегралів типу Коші, який ретельно описаний для такого типу задач в роботі [1]. Отже, якщо контури L_l не перетинають лінію L^+ та не торкаються її, то із рівнянь (1) методом інтегралів типу Коші знаходимо

$$\Phi_{k0}(z_k) = -\bar{r}_k \bar{\Phi}_{k1} \left(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ \right) - \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}_{k+1,1} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k) h^+ \right) -$$

$$- \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}_{k+2,1} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k) h^+ \right).$$

Тут $\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}$ — відомі сталі [1].

Отже, задача звелась до знаходження функцій $\Phi_{k1}(z_k)$. Вигляд функцій $\Phi_{k0}(z_k)$, при якому точно задовольняються граничні умови на L^+ визначається останньою формулою. Відобразимо зовнішність одиничного круга $|\zeta_{kl}| > 1$ на зовнішність контурів L_{kl} . Використовуючи розвинення функцій у ряди Лорана у відображених областях, для функції $\Phi_{k1}(z_k)$ маємо [2]

$$\Phi_{k1}(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \zeta_{kl}^{-n} (z_k)$$

де a_{kln} — невідомі константи, що визначаються з граничних умов на контурах отворів (2). Для функцій $\Phi_{k0}(z_k)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}(z_k) = & - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\zeta}_{kl}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ \right) + \right. \\ & + \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{\zeta}_{k+1,ln}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k) h^+ \right) + \\ & \left. + \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{\zeta}_{k+2,ln}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k) h^+ \right) \right). \end{aligned}$$

Невідомі сталі a_{kln} визначатимемо з граничних умов на контурах отворів (2) чисельним методом найменших квадратів, що добре описаний в роботі [2]. Для цього оберемо систему точок на контурах всіх отворів, складемо відповідний функціонал та, мінімізуючи його, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення a_{kln} . Після розв'язання цієї системи комплексні потенціали будуть повністю визначеними, і за відомими формулами [2] можна буде знаходити значення напружень в будь-якій точці півплощини, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, напруженості й індукції (далі КІНІН) для кінців тріщини.

2. *Задача для смуги.* У випадку, якщо досліджується багатозв'язна п'єзоелектрична смуга (рис. 2), що знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані в умовах дії різниці електричних потенціалів, прикладеної до прямолінійних границь, вигляд комплексних потенціалів можна отримати, скориставшись розв'язком розглянутої вище задачі для півплощини. Як і в попередній задачі, контури отворів та тріщин L_l не підкріплені та позбавлені електромеханічного навантаження. На прямолінійних границях нанесено тонкі електроди та задано значення $\varphi^{\pm}$ електричного потенціалу, прямолінійні границі не підкріплені та не завантажені,

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = \omega_3^\infty = 0.$$

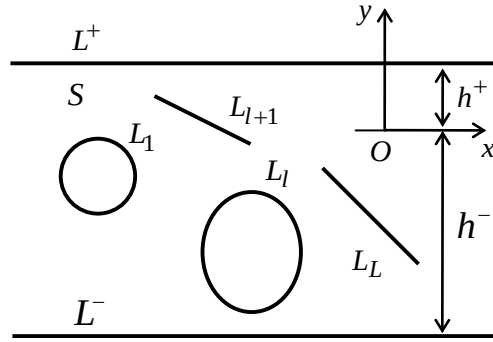


Рис. 2. Область S для смуги

Значення проекції вектора напруженості електричного поля на нескінченності

$$E_y^\infty = a = -(\varphi^+ - \varphi^-) / (h^+ + h^-).$$

Використовуючи отримані вище формули та результати досліджень [2], для комплексних потенціалів $\Phi_k(z_k)$ запишемо

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & c_{k0} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \zeta_{kl}^{-n}(z_k) + \\ & - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{r}_k \bar{b}_{kln} \bar{\zeta}_{kl}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ \right) + \right. \\ & + \bar{s}_{k+1} \bar{b}_{k+1,ln} \bar{\zeta}_{k+1,ln}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k) h^+ \right) + \\ & + \bar{e}_{k+2} \bar{b}_{k+2,ln} \bar{\zeta}_{k+2,ln}^{-n} \left(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k) h^+ \right) \Big) - \\ & - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{r}_k \bar{c}_{kln} \bar{\zeta}_{kl}^{-n} \left(z_k - (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^- \right) + \right. \\ & + \bar{s}_{k+1} \bar{c}_{k+1,ln} \bar{\zeta}_{k+1,ln}^{-n} \left(z_k - (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k) h^- \right) + \\ & + \bar{e}_{k+2} \bar{c}_{k+2,ln} \bar{\zeta}_{k+2,ln}^{-n} \left(z_k - (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k) h^- \right) \Big). \end{aligned}$$

На відміну від задачі для півплощини, невідомі стали a_{kln} , b_{kln} , c_{kln} визначатимемо з граничних умов як на контурах отворів, так і на прямолінійних границях чисельним методом найменших квадратів [2].

Список літератури

1. Калоеров С.А. Электроупругое состояние многосвязной пьезоэлектрической полуплоскости с отверстиями и трещинами / С. А. Калоеров, Ю. А. Глущенко // Дин. системы. — 2000. — Вып. 16. — С. 107—116.
2. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. — Донецк : Юго-Восток, 2007. — 268 с.

КЛАСИЧНІ ОРТОГОНАЛЬНІ ПОЛІНОМИ В MAPLE

В. В. Хорошун

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна, Харків, Україна

khoshun_vv@ukr.net

Ортогональні поліноми широко застосовуються у різних математичних розрахунках. Зокрема, вони широко використовуються в алгоритмах інтерполяції, екстраполяції та апроксимації різних функціональних залежностей, де їх ортогональність забезпечує оцінку похибки наближення і зведення її до мінімуму — аж до нуля [1].

Враховуючи те, що на даний час відсутні посібники по вивченню математичних пакетів *Maple* версій 16—18, будемо використовувати дані, наведені в довіднику [1] стосовно версій *Maple* 10—14 включно, оскільки зміст пакету ***orthopoly*** істотно не змінився. Змінимо лише порядок розташування поліномів за алфавітом, прийнятий в [1], на такий, що враховує їх узагальненість, а саме: $P(n, a, b, x)$ — поліном Якобі; $G(n, a, x)$ — поліном Гегенбауера; $P(n, x)$ — поліном Лежандра; $T(n, x)$ — поліном Чебишова першого роду; $U(n, x)$ — поліном Чебишова другого роду. Друга група поліномів може бути представлена так: $L(n, a, x)$ — узагальнений поліном Лагера; $L(n, x)$ — поліном Лагера; $H(n, x)$ — поліном Ерміта. Нагадаємо, що в [1] в розділі 5.4.1. під назвою «Склад пакету ***orthopoly***» це виглядає інакше, а саме: ***with(orthopoly); [G,H,L,P,T,U]***.

Переходимо безпосередньо до показу деяких можливостей математичного пакету ***orthopoly*** [1, с. 370], починаючи з розділу 5.4.2. «Обчислення ортогональних поліномів». Тут доцільно діяти за такими двома схемами відповідно до обсягу часу, відведеного на вивчення даної теми, а саме:

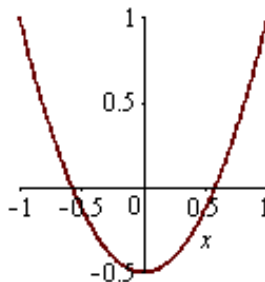
Перша схема дає загальне уявлення про конкретний поліном; його значення для $\forall x \in [-1, 1]$; його графік; графіки поліномів даного типу різних порядків, а також дає змогу порівнювати значення поліномів різного типу шляхом побудови їх графіків на одному малюнку. Наведемо приклади:

> ***restart : with (orthopoly);*** ***[G, H, L, P, T, U]***

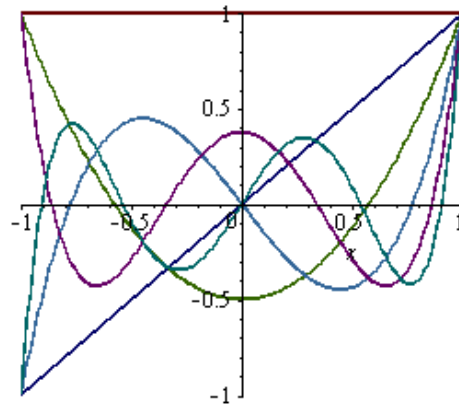
> ***P(2, x);***

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$$

> ***plot(P(2, x), x = -1 .. 1);***



> `plot( [ P(0, x), P(1, x), P(2, x), P(3, x), P(4, x), P(5, x) ], x=-1 ..1);`



На цих малюнках представлені: список поліномів; вираз і графік для полінома Лежандра $P_2(x)$, а також графіки перших шести поліномів Лежандра $P_n(x), n = 0 \dots 5$. Порядок полінома дорівнює числу вузлів (нулів) полінома. Аналогічним чином можна одержати дані стосовно інших поліномів із вказаного списку. Незважаючи на те, що за цією схемою, тобто при першому знайомстві з ортогональними поліномами неперервної змінної це нагадує цікаву комп'ютерну гру, ми можемо повністю відмовитися від друкованих таблиць та графіків, наведених, наприклад, в [2,3] та інших. Також це може бути використане як графічний матеріал в роботах типу [4,5]. Зазначимо, що в межах цієї схеми тестування математичного пакету **orthopoly** не є обов'язковим.

За другою схемою слід розпочинати розгляд з поліномів Якобі $P_n^{(a,b)}(x)$, як найбільш узагальнених, з метою тестування програми, тобто:

> `P(0, a, b, x);`

1

> `P(1, a, b, x);`

$$a + 1 + \frac{(a + 1)(2 + a + b)(x - 1)}{2a + 2} \quad (1)$$

Використовуючи команду **simplify**, спростимо вираз (1):

> `simplify(P(1, a, b, x));`

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + x + \frac{1}{2}bx \quad (2)$$

Вираз (2) збігається зі значенням полінома $P_1^{(\lambda, \mu)}(x)$, наведеному в [6, с.190] при умові, що $a \equiv \lambda, b \equiv \mu$. Аналогічно, для полінома Якобі другого порядку маємо: $P(2, a, b, x) \equiv P_2^{(\lambda, \mu)}(x)$ (на тій самій сторінці). При $a = b = \sigma - 1/2$ має місце тотожність $P(n, a, b, x) \equiv G(n, \sigma, x)$, де $G(n, \sigma, x) \equiv P_n^{(\sigma)}(x)$ — поліном Гегенбауера (ультрасферичний поліном) [6, с. 195].

При $a = b = 0$ маємо $P(n, 0, 0, x) \equiv P_n(x)$, де $P_n(x)$ — поліном Лежандра. Зробимо перевірку для $n = 3$:

> $P(3, 0, 0, x)$;

$$-5 + 6x + \frac{15}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2}(x-1)^3$$

> $\text{simplify}(P(3, 0, 0, x))$;

$$-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3 \quad (3)$$

> $G\left(3, \frac{1}{2}, x\right)$;

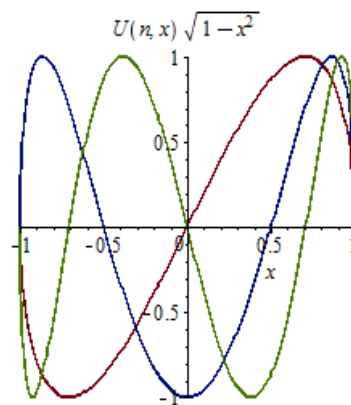
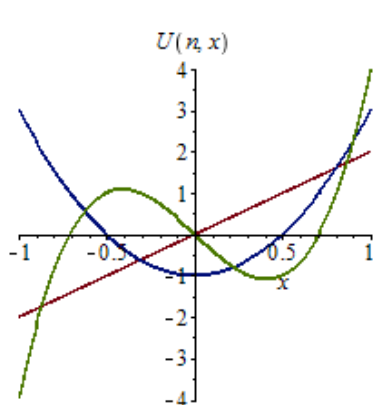
$$\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (4)$$

> $P(3, x)$;

$$-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3 \quad (5)$$

Як бачимо, вирази (3)—(5) повністю збігаються. Тестування інших поліномів з наведеного вище списку можна здійснити шляхом порівняння їх значень з тими, що є, наприклад, в [7—10]. Зауважимо при цьому, що в [1] в розділі 5.4.1. термін «обобщенный» стосовно поліномів Чебишова першого та другого роду має бути знятий, оскільки в даному випадку мова йде про звичайні $T_n(x)$ і $U_n(x)$. Для поліномів Лагера із згаданого списку цей термін має бути. Відносно узагальнених поліномів Лежандра для семінарських занять можна рекомендувати поліноми Полачека (F. Pollaczek) [9, 11, 12], а також [13].

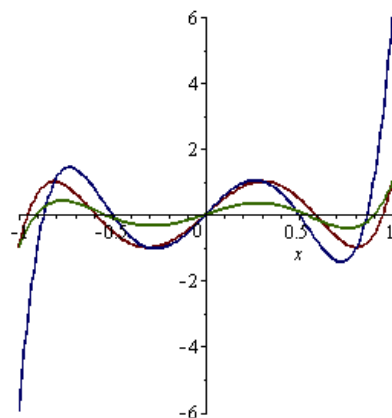
Проводячи тестування класичних ортогональних поліномів, слід звернути увагу на те, що в роботі [4, с. 60] поліноми Чебишова другого роду $U_n(x)$ введені інакше, ніж звичайно, а саме, як $\sqrt{1-x^2}U_n(x)$. Нижче на малюнках



для порівняння наведено по три перших графіка для поліномів $U_n(x)$ та $\sqrt{1-x^2}U_n(x)$. Очевидно, що на кінцях інтервалу $[-1, 1]$ останні з цих поліномів дорівнюють нулеві. Як відомо, на кінцях інтервалу $[-1, 1]$ класичні

ортогональні поліноми в нуль не обертаються. Цю властивість мають поліноми $\mu_n(x)$, що були введені в роботі [14], а пізніше розглянуті в роботі [15].

Як зазначалось вище, математичний пакет **orthopoly** дає змогу порівнювати значення поліномів різного типу шляхом побудови їх графіків на одному малюнку. Як приклад, зображено графіки поліномів Чебишова першого $T_5(x)$ та другого $U_5(x)$ роду, а також поліному Лежандра $P_5(x)$.



Для роботи із рядами ортогональних поліномів в Maple є пакет **OrthogonalSeries**, в якому є такий набір функцій:

> *restart : with (OrthogonalSeries);*

*[Add, ApplyOperator, ChangeBasis, Coefficients,
ConvertToSum, Copy, Create, Degree, Derivate,
DerivativeRepresentation, Evaluate, GetInfo,
Multiply, PolynomialMultiply, ScalarMultiply,
SimplifyCoefficients, Truncate]*

Список літератури

1. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах / В. П. Дьяконов. — Москва : ДМК Пресс, 2011. — 800 с.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — Москва : Наука, 1979. — 832 с.
3. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. — Москва : Наука, 1968. — 344 с.
4. Кампе де Ферье Ж. Функции математической физики / Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель. — Москва : Физматгиз, 1963. — 102 с.
5. Загороднюк С. М. Ортогональные многочлены на радиальных лучах в комплексной плоскости : Метод. указания к лекц. и практ. занятиям для студентов 4-го курса мех.-мата / С. М. Загороднюк. — Харьков : ХНУ, 2014. — 30 с.
6. Кузнецов Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. — Москва : Высшая школа, 1962. — 249 с.
7. Никифоров А. Ф. Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. — Москва : Наука, 1984. — 384 с.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. — Москва ; Ленинград : Физматгиз, 1963. — 358 с.

9. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. — Москва : Физматгиз, 1962. — 500 с.
10. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — Москва : Наука, 1979. — 416 с.
11. Pollaczek F. Sur une généralisation des polynômes de Legendre / F. Pollaczek // C. R. Acad. Sci. Paris — 1949. — **228**. — P. 1363—1365.
12. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Москва : Наука, 1966. — 295 с.
13. Хорошун В. В. К теории обобщенных полиномов Лежандра / В. В. Хорошун // Укр. мат. жур. — 1971. — Т. 23, № 6. — С. 837—839.
14. Агранович З. С. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках / З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов // ЖТФ. — 1962. — **32**, № 4. — 1962. — С. 381—394.
15. Хорошун В. В. О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала $[-1,1]$ / В. В. Хорошун // XVI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука : Матеріали конференції. — Київ : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 258—259.

МІНІМІЗАЦІЯ ЕНЕРГІЇ (МАХ, +) ЗАДАЧІ МЕТОДОМ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГРАДІЄНТНОГО СПУСКУ

С. М. Шульга

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

semensan@ukr.net

На сьогодні питання мінімізації енергії є наріжним каменем для деякого класу задач. У першу чергу, це задачі сегментації та класифікації зображень, а також розпізнавання образів. Розв'язання задачі мінімізації енергії дозволить вирішити безліч питань, що виникають у цих класах, наприклад, обробка кардіограм, рентгенограм, фото фіксація правопорушень на дорозі, та інше. Отже, розв'язання задачі мінімізації є актуальним на сьогодні.

Нехай T – множина об'єктів (наприклад пікселі зображення). На множині T задана множина $\mathfrak{Z}$ неупорядкованих пар об'єктів. Вираз $tt' \in \mathfrak{Z}$ означає що об'єкти t і t' сусіди. $N(t)$ — сусіди t . Граф, побудований відношенням $\mathfrak{Z}$ — зв'язний. Нехай K — скінченна множина, елементи якого назвемо *мітками*. Для кожної мітки k і об'єкту t задане число $q_t(k)$. Для кожної пари $tt' \in \mathfrak{Z}$ сусідніх об'єктів і для кожної пари міток k і k' задане число $g_{tt'}(k, k')$. Ці числа назвемо *якістю* чи *вагою*.

Розміткою називають функцію $\bar{k}: T \rightarrow K$, яка кожному об'єкту ставить у відповідність мітку $k(t)$. Множину всіх можливих функцій такого виду позначимо K^T . Якість $G(\bar{k})$ розмітки $\bar{k}: T \rightarrow K$ визначається як

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \mathfrak{Z}} g_{tt'}(k(t), k(t')) + \sum_{t \in T} q_t(k(t)) \quad (1)$$

Задача (max, +)-розмітки полягає у відшуванні розмітки $\bar{k}^* \in K^T$ з максимальною якістю

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} G(\bar{k}) \quad (2)$$

Було запропоновано алгоритм, що дозволяє розв'язати цю задачу з достатньою точністю [1, 2].

Позначимо Φ масив потенціалів $\varphi_{tt'}$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, $k \in K$. Визначимо послідовність $\gamma_i, i = 1, 2, \dots$ чисел так, що

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0, \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty.$$

Виберемо довільний масив Φ_0 і визначимо послідовність $\Phi_i, i = 1, 2, \dots$ так, що

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i - \gamma_i \nabla E(\Phi_i) \quad (3)$$

де $\nabla E(\Phi_i)$ — довільний узагальнений градієнт опуклої функції E у точці Φ_i . Суть узагальненого градієнтного спуску полягає в тому, що при довільному початковому масиві Φ_0 послідовність $E(\Phi_0), E(\Phi_1), \dots$ має границю, рівну $\min_{\Phi} E(\Phi)$.

Відомо, що узагальнений градієнт випуклої функції не завжди може бути визначений однозначно [3]. Один з узагальнених градієнтів енергії E у точці Φ_i може бути отриманий за наступною схемою:

1. Для кожного об'єкту $t \in T$ вибрати мітку $k^*(t)$, для якої $q_t(k^*(t)) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}^i(k^*(t)) = \max_{k \in K} (q_t(k) - \sum_{t' \in N(t)} \varphi_{tt'}^i(k))$.
2. Для кожної пари сусідніх об'єктів $tt' \in \mathfrak{Z}$ вибрати дві мітки $k_{tt'}^*(t)$ і $k_{tt'}^*(t')$ для яких

$$g_{tt'}(k_{tt'}^*(t), k_{tt'}^*(t')) + \varphi_{tt'}^i(k^*(t)) + \varphi_{t't}^i(k^*(t')) \\ = \max_{k \in K, k' \in K} g_{tt'}(k, k') + \varphi_{tt'}^i(k) + \varphi_{t't}^i(k')$$

Визначити компоненти $\nabla \varphi_{tt'}(k)$ узагальненого градієнту як

$$\nabla \varphi_{tt'}(k) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k_{tt'}^*(t) = k, k^*(t) \neq k \\ -1, \text{ якщо } k_{tt'}^*(t) \neq k, k^*(t) = k \\ 0 \text{ інакше} \end{cases}$$

Розглянутий у цій статті алгоритм планується модифікувати та покращити в моїй дипломній роботі, а також впровадити його в життя.

Список літератури

1. Schlesinger M. I. Solution to Structural Recognition (MAX,+)-problems by their Equivalent Transformations. Part 1 / M. I. Schlesinger, V. V. Giginyak // Control Systems and Computers. — 2007. — № 1. — Р. 3—15.
2. Schlesinger M. I. Solution to Structural Recognition (MAX,+)-problems by their Equivalent Transformations. Part 2 / M. I. Schlesinger, V. V. Giginyak // Control Systems and Computers. — 2007. — № 2. — Р. 3—18.
3. Энциклопедия кибернетики / Отв. ред. В. М. Глушков. — Киев : Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1974. — Т. 2. — 624 с.

ДЕЯКІ СИСТЕМИ ГІБРИДНИХ ПАРНИХ ТА ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г. О. Южакова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Ефективним апаратом для розв'язання змішаних крайових задач математичної фізики, теорії електростатики, теорії дифракції та ін. є парні та потрійні інтегральні рівняння та їх системи. Методи розв'язання цих систем різноманітні, оскільки вибір методу суттєво залежить від складу і властивостей функцій, що утворюють ядра рівнянь системи [1—3 та ін.].

Системи *гібридних* парних та потрійних інтегральних рівнянь, які виникають при розв'язанні змішаних крайових задач у *кусково-неоднорідних середовищах*, дотепер вивчені мало, тому розв'язання таких систем нині є актуальним питанням.

У [4] розглянуто системи саме гібридних парних та потрійних інтегральних рівнянь зі спеціальними функціями складного вигляду в ядрах — функцією Бесселя ν -го порядку 1-го роду $J_\nu(x\tau)$ і узагальненою приєднаною функцією Лежандра 1-го роду $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch} x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \tau^{-\nu} J_\nu(x\tau) \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_k(\tau) d\tau = p_i(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ \int_0^\infty \tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch} x) \sum_{k=1}^n b_{ik} \varphi_k(\tau) d\tau = q_i(x), \quad x_0 < x < \infty, \end{array} \right. \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

та

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \tau^{1-\nu} J_\nu(x\tau) \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_k(\tau) d\tau = f_i(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ \int_0^\infty \tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch} x) \sum_{k=1}^n b_{ik} \varphi_k(\tau) d\tau = g_i(x), \quad x_1 < x \leq x_2, \\ \int_0^\infty \sin(x\tau) \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k(\tau) d\tau = h_i(x), \quad x_2 < x < \infty, \end{array} \right. \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

У цих системах праві частини рівнянь є відомими функціями, визначеними на відповідних проміжках; x_0, x_1, x_2 — дійсні додатні числа; коефіцієнти a_{ik} , b_{ik} та c_{ik} ($i, k = \overline{1, n}$) — відомі, причому кожна з матриць (a_{ik}) , (b_{ik}) та (c_{ik}) має розмірність $n \times n$ і є невинудженою; $J_\nu(x\tau)$ — функція Бесселя ν -го порядку 1-го роду; $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch} x)$ — узагальнена приєднана функція Лежандра 1-го роду;

$|m| < \frac{1}{2}$, $n < \frac{3}{2}$; $p_i(x) = O(x^{-\alpha})$, $f_i(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \rightarrow 0$, де $\alpha < \frac{3}{2}$; $\nu > 0$.

Шуканими є невідомі функції $\varphi_k(\tau)$, $k = \overline{1, n}$, визначені на області $\tau \in [0, \infty)$.

Використання формули [5], яка відображає зв'язок між узагальненою приєднаною функцією Лежандра $P_k^{m,n}(\text{ch } x)$ і тригонометричним косинусом:

$$\begin{aligned} \cos \xi \tau = & \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - m) \cos \pi m}{\sqrt{\pi} 2^{(n-m+1)/2}} \frac{d}{d\xi} \left\{ (\text{ch } \xi + 1)^{\frac{n-m}{2}} \int_0^\xi (\text{ch } \xi - \text{ch } x)^{m-1/2} (\text{ch } x + 1)^{\frac{m-n}{2}} \times \right. \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{n-m}{2}, \frac{1+m-n}{2}; \frac{1}{2} + m; \frac{\text{ch } \xi - \text{ch } x}{1 + \text{ch } \xi}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\text{ch } x) (\text{sh } x)^{1-m} dx \Big\}, \end{aligned} \quad (3)$$

і подібної властивості, що має місце і для функції Бесселя ν -го порядку 1-го роду $J_\nu(x\tau)$ [6]:

$$\cos(\xi \tau) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - \nu) \tau^\nu} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{x^{\nu+1} J_\nu(x\tau)}{(\xi^2 - x^2)^{\nu+1/2}} dx, \quad (4)$$

дає можливість звести систему гібридних парних інтегральних рівнянь (1) до косинус-перетворення Фур'є від невідомих функцій $\varphi_k(\tau)$, $k = \overline{1, n}$. Далі, використовуючи формулу обернення для косинус-перетворення Фур'є [7], одержимо розв'язок системи (1) у векторній формі.

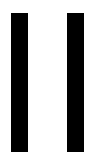
Для розв'язання системи гібридних потрійних інтегральних рівнянь (2) проінтегруємо (3) і (4) по ξ від 0 до ξ і одержимо вирази для $\sin(\xi \tau)$ через $J_\nu(x\tau)$ і $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\text{ch } x)$:

$$\begin{aligned} \sin(\xi \tau) = & \frac{2^\nu \sqrt{\pi} \tau^{1-\nu}}{\Gamma(1/2 - \nu)} \int_0^\xi \frac{x^{\nu+1} J_\nu(x\tau)}{(\xi^2 - x^2)^{\nu+1/2}} dx, \quad \tau > 0, \quad \xi > 0, \\ \sin(\xi \tau) = & \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - m) \cos \pi m}{\sqrt{\pi} 2^{(n-m+1)/2}} \tau (\text{ch } \xi + 1)^{\frac{n-m}{2}} \int_0^\xi (\text{ch } \xi - \text{ch } x)^{m-1/2} (\text{ch } x + 1)^{\frac{m-n}{2}} \times \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{m-n}{2}, \frac{1+m-n}{2}; \frac{1}{2} + m; \frac{\text{ch } \xi - \text{ch } x}{1 + \text{ch } \xi}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\text{ch } x) (\text{sh } x)^{1-m} dx. \end{aligned}$$

Відзначимо, що розглянуті системи гібридних парних та потрійних інтегральних рівнянь, що містять в ядрах вказані функції Бесселя $J_\nu(x\tau)$ та узагальнені приєднані функції Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch} x)$, можуть бути використані при розв'язанні змішаних крайових задач у випадках кусково-неоднорідних середовищ тощо.

Список літератури

1. Климик Я. Л. Розв'язок системи парних інтегральних рівнянь спеціального виду / Я. Л. Климик // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. — 2000. — № 5. — С. 26—30.
2. Пономаренко С. П. Операторный метод решения систем парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Мелера — Фока / С. П. Пономаренко // Укр. мат. журн. — 1982. — **34**, № 3. — С. 316—321.
3. Yang J. H. Penny-shaped crack in a piezoelectric cylinder under electro-mechanical loads / J. H. Yang, K. Y. Lee // Arch. Appl. Mech. — 2003. — **73**, № 5—6. — P. 323—336.
4. Южакова Г. О. Новый тип систем интегральных рівнянь / Г. О. Южакова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 1. — С. 150—154.
5. Virchenko N. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / N. Virchenko, I. Fedotova. — Singapore : World Scientific, 2001. — 195 p.
6. Южакова Г. О. Про системи гібридних парних інтегральних рівнянь / Г. О. Южакова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2005. — № 1. — С. 152—156.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — Москва : Физматлит, 2005. — Т.3. — 728 с.



МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ

COGNITIVE APPROACH TO TEACHING STUDENTS SOLVING PRACTICAL TASKS IN MATHEMATICS

K. Vlasenko

Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

vlasenkov@ukr.net

The basis of the mechanisms of information and information-search heuristic that promote cognitive decision-making for future engineers while learning mathematics is a structural analysis of received information. It requires a structured presentation of information in the learning activities of students which goal is to develop a method for solving mathematical problems.

The nature of the object properties are displayed, mathematical models are divided into structural and functional.

Structural mathematical models designed to reflect the structural properties of the object. Functional mathematical model designed to display information or physical processes occurring in the facility during its operation or manufacture [2]. Such processes often underlie the content of professionally oriented tasks in mathematics.

Construction of mathematical models opens a new mathematical method for solving method cognitive development professionally oriented tasks by applying mathematical relationships and in our study is four closely interrelated, stages.

Overlay components of mathematical model to the terms of engagement that is summing up the conditions, requirements and objectives desired solution for components in the model.

Solving professionally oriented tasks often requires knowledge of various topics of mathematics or different sections, including non-interconnected during training. Therefore, the structure of the mathematical model is a system of linear algebraic equations, and has three components as a matrix whose elements help to point out the various relationships between mathematical concepts.

Let's consider the task from the training manual "Higher Mathematics for future engineers" [1], topic Vector and mixed product of vectors.

Task. Find the linear speed of whirligig points lying on a circle of large diameter (Fig. 1), equal to 20 if the vector $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ is attached in the center of the large circle.

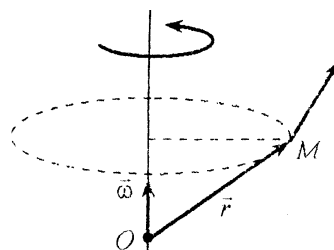


Fig. 1 Model-speed circuit point M of solids, rotating with angular velocity

Hence:

- matrix Y — output refers to the object that is represented in the requirements of the task, in this case it is to find the linear velocity of rotation points whirligig;
- matrix X — the input signal is correlated with the object that is presented in terms of the engagement, in this case it's a whirligig range of large diameter, equal to 20 and the angular velocity $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ applied at the center of a large circle;
- matrix K — the operator that affects the input signal and converts it into an output signal, in this case it's the additional construction, concepts and formulas for their determination.

After switching to a new task structure is the transfer to it of new laws and changes to the next stage.

Moving task basis of mathematical models is to establish new characteristics by three matrices. Matrix elements are specified in square or round brackets, corresponding marking matrices:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Hence:

$$Y = \begin{pmatrix} \text{portray whirligig} \\ \text{calculation of the coordinates } \vec{r} \\ \text{formula for calculating the } \vec{v} \\ \text{calculation } v \end{pmatrix},$$

where $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ — vector connecting the fixed point O axis point lying on the circle of large diameter M — velocity vector points whirligig;

$$K = \begin{pmatrix} 1^{\text{st}} \text{ action} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\text{nd}} \text{ action} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{\text{rd}} \text{ action} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{\text{th}} \text{ action} \end{pmatrix},$$

where action — is known techniques for constructing images whirligig, calculate the coordinates $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, the choice of the formula and its calculation, respectively;

$$X = \begin{pmatrix} \text{whirligig, rotating around the axis} \\ \text{length } r \\ \text{angular velocity } \vec{\omega} \\ \text{coordinates of the vectors } \vec{r} \text{ and } \vec{\omega} \end{pmatrix},$$

where $\vec{\omega}$ — the angular velocity vector, attached in the center of the large circle.

During carrying on a mission basis of mathematical models to establish new characteristics, the question of the number of procedures (in this case, actions) solving problems and their formal relationship with the number of components or structural elements and transition to the next stage appears.

Transfer the link between three matrices to the task of establishing relationships between an unknown way of solving the problem and known phenomena in its conditions and requirements.

Linkages of three matrix models presented signs “=” and multiplication “•”, “×” or “*” should be considered at the micro-level model in the expanded matrix form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

and in separate equations system $y_1 = k_{11} \bullet x_1$, $y_2 = k_{22} \bullet x_2$, $\dots$, $y_n = k_{nn} \bullet x_n$.

Hence:

• in expanded matrix form

$$\begin{pmatrix} \text{portray whirligig} \\ \text{calculation of the coordinates } \vec{r} \\ \text{formula for calculating the } \vec{v} \\ \text{calculation } \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{\text{st}} \text{ action} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\text{nd}} \text{ action} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{\text{rd}} \text{ action} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{\text{th}} \text{ action} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{whirligig, rotating around the axis} \\ \text{length } \vec{r} \\ \text{angular velocity } \vec{\omega} \\ \text{coordinates of the vectors } \vec{r} \text{ and } \vec{\omega} \end{pmatrix},$$

• in separate equations system

- $\text{portray whirligig} = 1^{\text{st}} \text{ action} \bullet \text{whirligig, rotating around the axis,}$
- $\text{calculation of the coordinates } \vec{r} = 2^{\text{nd}} \text{ action} \bullet \text{length } \vec{r},$
- $\text{formula for calculating the } \vec{v} = 3^{\text{rd}} \text{ action} \bullet \text{angular velocity } \vec{\omega},$
- $\text{calculation } \vec{v} = 4^{\text{th}} \text{ action} \bullet \text{coordinates of the vectors } \vec{r} \text{ and } \vec{\omega}.$

Mathematical equations containing interactions between unknown objects known in the task, allow move on to the next stage.

Construction method of solving problem by solving a system of linear algebraic equations for finding the unknown matrix elements

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

where $k_{11} = x_1^{-1} \bullet y_1$, $k_{22} = x_2^{-1} \bullet y_2$, $\dots$, $k_{nn} = x_n^{-1} \bullet y_n$.

All members of the equality with index (-1) should be understood as inverse elements “removed” or replaced by others derived from previous actions.

Then the unknown steps in the task shall include:

1st action = whirligig, rotating around the axis⁻¹(“removed”) $\times$ portray whirligig,

2nd action = length $\vec{r}^{-1}$ (“removed”) $\times$ calculation of the coordinates $\vec{r}$,

3rd action = angular velocity $\vec{\omega}^{-1}$ (“removed”)

$\times$ formula for calculating the $\vec{v}$,

4 reception = coordinates of the vectors $\vec{r}$ and $\vec{\omega} \vec{r}$ and $\vec{\omega}^{-1}$ (“removed”) $\times$ calculation $\vec{v}$.

As result we solve the task:

1st action — put the whirligig in a rectangular Cartesian coordinate system so that the center of a large circle coincide with the origin where α, β, γ — angles that the vector $\vec{r}$ makes with the coordinate axes Ox, Oy, Oz , respectively (Fig. 2);

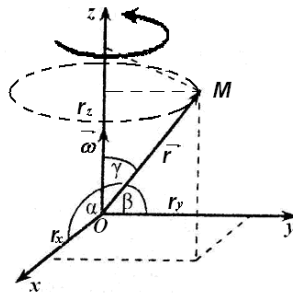


Fig. 2 Model diagram for the coordinates of the vector $\vec{r}$

2nd action — as the coordinate vector — a projection of the vector $\vec{r}$ on the coordinate axes, then

$$\begin{aligned} r_x &= \text{pr}_x \vec{r} = |\vec{r}| \cos \alpha, \\ r_y &= \text{pr}_y \vec{r} = |\vec{r}| \cos \beta, \\ r_z &= \text{pr}_z \vec{r} = |\vec{r}| \cos \gamma, \end{aligned}$$

as result $\vec{r} = \{10 \cos \alpha; 10 \cos \beta; 10 \cos \gamma\}$;

3rd action — the speed of $\vec{v}$ point of a rigid body rotating with angular velocity about a fixed axis is given by Euler

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

where $\vec{r} = \{10 \cos \alpha; 10 \cos \beta; 10 \cos \gamma\}$;

4th action — for vectors

$$\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}, \vec{r} = \{10 \cos \alpha; 10 \cos \beta; 10 \cos \gamma\},$$

given its coordinates in Cartesian coordinates, vector product is given by

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 4 \\ 10 \cos \alpha & 10 \cos \beta & 10 \cos \gamma \end{vmatrix} = \\ &= 10 \times [(2 \cos \gamma - 4 \cos \beta) \cdot \vec{i} + (3 \cos \gamma + 4 \cos \alpha) \cdot \vec{j} - (3 \cos \beta - 2 \cos \alpha) \cdot \vec{k}]. \end{aligned}$$

After receiving the task solution method is its application to the system professionally oriented tasks topic for which learning takes place.

References

1. Власенко К. В. Теоретичні й методичні аспекти навчання вищої математики з використанням інформаційних технологій в інженерній машинобудівній школі : Монографія / К. В. Власенко ; наук. ред. : О. І. Скафа. — Донецьк : НОУЛІДЖ, 2011. — 408 с.
2. Калошина И. П. Психология творческой активности : уч. пособие для университетов / И. П. Калошина. — Москва : Юнити — Дана, 2003. — 431 с.

**РОЛЬ ОЛІМПІАД
У РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ СТУДЕНТІВ**
А. А. Андронатій, магістрант, науковий керівник Л. Я. Васильєва
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна
andronaty@outlook.com

У сучасних умовах одним з найважливіших питань підготовки майбутнього фахівця в будь-якій галузі є питання формування та розвитку його творчої особистості, його професійних здібностей. Для студентів математичних спеціальностей особливо гостро стоїть проблема розвитку їхніх математичних здібностей, логічного мислення. Досягти цього можна проводячи студентські математичні олімпіади, що допоможуть студентові розкрити весь спектр своїх можливостей, проявити себе, як гідного фахівця, який може творчо підійти до розв'язання як стандартних, так і нестандартних проблем.

Основним завданням вищої школи є задоволення соціально-економічних потреб суспільства у кваліфікованих фахівцях, здатних швидко адаптуватись до сьогоденних вимог ринку. Формування сучасного покоління конкурентоспроможних кадрів вимагає постійного підвищення якості підготовки фахівців та їх професійної мобільності. В зв'язку з цим набуває особливої актуальності активне проведення студентських олімпіад.

Студентські олімпіади слід розглядати не тільки як одну з форм підвищення якості навчання, а також як одну з провідних форм змагань студентів з творчим застосуванням накопичених професійних знань. «Студентська олімпіада — це система масових очних змагань студентів, що навчаються у вищому навчальному закладі. Вона проводиться з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, інтенсифікації та удосконалення навчального процесу, стимулювання потреб у творчому оволодінні знаннями, з метою розвитку і реалізації творчих здібностей студентів, виявлення науково-обдарованої, по справжньому талановитої молоді. [2]

Предметні олімпіади — це змагання студентів у творчому застосуванні теоретичних знань з однієї конкретної загальноосвітньої чи спеціальної дисципліни в умінні вибрати оптимальні шляхи і методи розв'язання предметних задач. У них беруть участь, як правило студенти, які на час проведення олімпіади вивчають відповідну дисципліну або закінчили її вивчати.

Олімпіади зі спеціальності — це очний конкурс майстерності студентів випускних курсів, які вивчали комплекс дисциплін, що формують систему знань, умінь і навичок, необхідних для майбутньої професійної діяльності» [3].

Можна виділити такі завдання студентських математичних олімпіад:

- підвищення інтересу студентів до вивчення математики;
- виявлення і розвиток математичних здібностей;

- виявлення студентів, здібних до математики з метою подальшого залучення їх до наукової роботи;
- стимулювання творчого самовдосконалення учнів;
- надання їм допомоги у подальшому навчанні та працевлаштуванні;
- підвищення теоретичної підготовки молоді;
- пропаганда досягнень науки, техніки та новітніх технологій;
- формування творчого покоління молодих науковців та практиків для різних галузей суспільного життя.

На олімпіадах зазвичай пропонуються задачі, які рівнем складності й нестандартністю відрізняються від звичайних навчальних задач. Найчастіше розв'язання математичної олімпіадної задачі ґрунтується на одній несподіваній ідеї. З точки зору журі, яке складає завдання для олімпіади, чим оригінальнішою є ідея, тим кращою є задача. Але навіть при цьому абсолютно оригінальних задач з'являється небагато. В основу переважної більшості олімпіадних задач покладено певні відомі прийоми і методи. Досить часто для їх розв'язання необхідно або бажано, з метою відшукування більш раціонального, більш «красивого», «вишуканого» розв'язання, бути обізнаним із теоретичним матеріалом, що виходить за рамки навчальної програми. Знайомство з такими найбільш поширеними методами бажано для кожного учасника олімпіади. Однак, на сучасному етапі більша частина абітурієнтів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів не є випускниками класів з поглибленим вивченням математики чи з певних причин не була зацікавлена вивченням математики у школі, хоча й має здібності. Це є значною проблемою. Прогалини у знаннях не дають студентові можливості творчо підійти до рішення навіть стандартних задач, обмежують науковий кругозір, не дають можливості прийти до більш оптимального рішення. І у такого студента не буде можливостей потрапити на олімпіаду з математики у вищому навчальному закладі.

Тому викладачам необхідно на заняттях давати цікаві математичні задачі чи, наприклад, задачі шкільних олімпіад. Можна зауважити, що не на кожному занятті, оскільки не всі студенти мають хист до розв'язання нестандартних, творчих задач. Але математично обдарований студент, особливо майбутній вчитель математики, має вміти не лише розв'язувати задачі математичних олімпіад, володіти різноманітними методами та способами їх розв'язання, але й підбирати та складати такі завдання самостійно. Так як у майбутній педагогічній практиці вони можуть зіштовхнутися з великою низкою проблем у процесі підготовки власних учнів до олімпіад з математики.

Прикладом олімпіадної задачі, що стимулює дослідницький підхід може служити наступна задача:

«Нехай $(X, \rho), (Y, \sigma)$ — метричні простори, кожен із яких містить принаймні дві точки. Чи завжди існує неперервна за сукупністю змінних дійсна функція $f(x, y), x \in Y$, яку можна подати у вигляді суми $g(x) + f(y)$, де g, h — деякі дійсні функції?» [2], оскільки під час її розв'язання студент повинен

дослідити задачу, проаналізувати графіки функцій, які утворюються якщо метричні простори складаються лише з 2 елементів, і лише після цього досліджувати функції на неперервність.

Систематичне виконання завдань на кмітливість, для розв'язання яких мають спрацьовувати інтуїція, уява, здатність прогнозувати, як свідчить аналіз практики і результатів експериментального навчання, надає можливість більш ефективно розвивати якості творчого мислення, що спрацьовують у процесі вирішення математичних завдань [1]. На заняттях з елементарної математики також доцільним є розв'язування прикладних задач, які представлені в шкільних олімпіадах з математики, що сприяє розвитку творчого та оперативного мислення учнів.

Не слід абсолютизувати роль олімпіад у вихованні дослідника-теоретика. Але як засіб, що мотивує студента на творче, поглиблене оволодіння математикою, її методологією та ідеологією, олімпіади переоцінити неможливо.

Математичні олімпіади відіграють значну роль при формуванні творчого, оперативного мислення, є запорукою різнобічного підходу до вирішення стандартних та нестандартних завдань, що постають не тільки в період навчання перед студентами, а й по завершенні університету вже перед молодими фахівцями. Розв'язання олімпіадних задач активно стимулює студентів до самопізнання, саморозвитку власних математичних здібностей та талантів.

Список літератури

1. До проблеми формування у майбутнього вчителя математики здібностей дослідника [Текст]: збірник / О. С. Чашечникова // Педагогічні науки: Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Сумський держ. пед. ун-т ім. А. С. Макаренка. — Суми, 2002. — Ч. 1. — С. 342—349.

2. Завдання відкритої студентської олімпіади механіко-математичного факультету для студентів I—V курсів Київського національного університету імені Тараса Шевченка. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
<http://mechmat.univ.kiev.ua/dload/olympiad/KyivMechmat2012.pdf>

3. Положення про проведення внутрішньоколеджних олімпіад у Коломийському економіко-правовому коледжі Київського національного торговельно-економічного університету. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
<http://www.kepk.com.ua/studentu/olimpiadi>

ВКАЗІВКИ ЯК ВИД НАВЧАЛЬНОГО ВПЛИВУ У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ

П. П. Баришовець, М. М. Білоцький

*Національний авіаційний університет,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Київ, Україна,*

pbar@ukr.net, mikbil@ukr.net

Сучасна наука і техніка з кожним роком підвищують вимоги до математичної підготовки майбутнього інженера. Якщо зовсім недавно в інженерній практиці можна було обійтися нескладними математичними розрахунками, то сьогодні ставить перед системою вищої освіти нові виклики: майбутнім інженерам треба не лише глибше знати традиційні математичні дисципліни, а й навчитись застосовувати нові математичні теорії.

У системі навчання математиці особливе місце серед дидактичних впливів займають виклад навчального матеріалу та навчальні задачі. При цьому роль останніх весь час зростає. В багатьох посібниках з математики частина задач має досить детальні розв'язки й пояснення, частина — короткі вказівки, до решти є відповіді. При роботі з цими посібниками студенти, що оволоділи матеріалом, з допомогою вказівок можуть упоратись з нерозв'язаними задачами при мінімальній допомозі викладача. Значення таких вказівок для підвищення математичного рівня більш підготовлених студентів важко переоцінити. На жаль, у зв'язку зі скороченням загальної кількості годин на математику в вищих навчальних закладах і зниженням рівня математичної підготовки, що спостерігається у випускників середніх навчальних закладів збільшується відсоток студентів, яким ці вказівки все таки недоступні.

Оскільки скорочувати матеріал всередині розділів не дозволяє внутрішня логіка навчальної дисципліни, то викладач повинен шукати додаткові можливості співпраці зі студентами для активізації їх продуктивної діяльності. Подібну роль можуть виконувати такі види дидактичного впливу як питання та усні вказівки (надалі — просто «вказівки»).

Вказівки, як і питання, можуть бути: мотиваційними, змістовними, явними чи неявними, конкретними чи загальними. Вони можуть стосуватися теоретичних моментів: означень, теорем, окремих математичних формул, властивостей об'єктів та їх структури. З їх допомогою можна допомогти студенту (чи групі студентів) усвідомити загальний план розв'язку задачі, спосіб контролю правильності процесу розв'язку і перевірки отриманого результату. Водночас вони можуть бути більш конкретними стосовно розглядуваних відношень і більш індивідуальними за обсягом впливу.

Спільним у цих впливів є необхідність точного визначення часу, саме в який слід задати питання, чи дати вказівку. Ця необхідність диктується індивідуальними психологічними особливостями кожного студента, його рівнем математичної підготовки, здатністю розуміти, запам'ятовувати і

застосовувати нові поняття й факти. При цьому це досить часто треба поєднувати з повторенням елементарної математики.

Основна відмінність між питаннями і вказівками, на наш погляд, полягає в тому, що перші часто мають діагностичну функцію: встановлюють об'єм попередніх знань студента, мотивацію до навчання, наявність навчальних засобів і т. і. В подальшому ця інформація сприятиме вирішенню проблеми встановлення необхідного рівня навчального впливу в наступній співпраці зі студентом. Що стосується вказівок, то їх сукупність повинна бути достатньою для надання допомоги до розв'язання конкретної задачі, а також сприяти формуванню у студентів певних знань, вмінь, навичок, тобто бути навчальною. Для цього вказівки, або, інакше, поради, мають бути простими і природними. В іншому разі вони будуть важко сприйматись.

Необхідно допомогти студенту виявити такі особливості нових понять, які органічно поєднують новий матеріал з попереднім.

Перші вказівки при розв'язуванні нової задачі можуть бути просто організаційними. Наприклад, під час обчислення подвійних чи потрійних інтегралів доцільно нагадати студенту про необхідність зробити рисунок, вибрати для обчислень найбільш ефективну систему координат і т. п. Подальші поради залежать від активності студента; як правило, вони змінюються від загальних до більш конкретних.

Так звані мотиваційні вказівки повинні стимулювати студентів до більш уважної (або свідомої) роботи. Вони нерідко повторюються для різних задач і навіть на різних етапах розв'язування однієї задачі, наприклад: «самостійно», «перевірте обчислення», «будьте уважними».

Алгоритмічні вказівки містять покрокові дії, що доступні розумінню студентів і є частиною загального плану розв'язування задачі. Наприклад: «зробіть підстановку», «якобіан», «інтегруйте частинами». Такі поради можуть бути лише індивідуальними і не повинні стримувати творчу ініціативу студента.

Вказівки, що направлені на змістовну сторону навчальної діяльності (або так звані евристичні вказівки) допомагають студенту зробити крок у зіставленні або поєднанні різних фактів, що є у його розпорядженні і, таким чином, зробити якийсь висновок (невеличке відкриття). Бажано, щоб такі вказівки були загальними, стосувались більшого кола задач. Тоді вони розвиватимуть здібності студентів.

Викладач може регулювати рівень самооцінки студента, змінюючи рівень загальності вказівок. Важливо, щоб вказівки (поради) надавали достатню, але не надмірну допомогу; були мотивованими і давали можливість міркувати самостійно.

ВИДАЛЕННЯ ВНУТРІШНІХ ТОЧОК ТА ПОБУДОВА ОПУКЛОГО ПОЛІГОНУ (ДЛЯ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ)

В. В. Березка

Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,

Миколаїв, Україна

berezkavv@outlook.com

Постановка проблеми. Обчислювальна геометрія сприяє підвищенню математичної культури за рахунок поглиблення знань в області вищої математики. Вона допомагає підвищити отримання навичок побудови обчислювальних алгоритмів та їх аналізу. Зазвичай задачі обчислювальної геометрії реалізуються за допомогою мов програмування високого рівня [3, 5, 8, 9, 11]. Для реалізації алгоритмів необхідно знати мови програмування на достатньому рівні. У багатьох студентів виникає багато труднощів з розв'язанням задач з обчислювальної геометрії через низький рівень знань мов програмування. Це підштовхнуло до пошуку підходів реалізації методів обчислювальної геометрії без використання мов програмування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У статті [10] було розглянуто побудову зірчастого полігону та його триангуляцію за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Це дало змогу розробити підходи для реалізації задач з обчислювальної геометрії без використання мов програмування.

Метою дослідження є видалення внутрішніх точок та побудова опуклого полігону за допомогою табличного процесора Microsoft Excel [1].

Основні результати дослідження. Область на площині називається опуклою, якщо для будь-яких двох точок в середині області можна провести відрізок прямої лінії, який буде лежати в цій області.

Для побудови випуклого полігону необхідно видалити усі внутрішні точки. Це можна зробити за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Після видалення внутрішніх точок побудувати випуклий полігон дуже легко [10].

Побудову випуклого полігону в табличному процесорі Microsoft Excel можна звести до наступної послідовності дій:

1. Записуємо довільні значення x_i і y_i точок, наприклад в діапазоні A3:B16, табличного процесору.

2. Визначимо внутрішні точки полігону. Для цього, беремо будь які три точки і перевіряємо всі інші точки чи належить трикутнику, утвореного цими точками. Візьмемо три точки діапазону A3:B5.

3. Якщо виконується рівність:

$$\begin{aligned} & \left| (p_2 - p_0)(p_1 - p_0) \right| + \left| (p_3 - p_0)(p_2 - p_0) \right| + \left| (p_3 - p_0)(p_1 - p_0) \right| = \\ & = \left| (p_2 - p_1)(p_3 - p_1) \right|, \end{aligned}$$

то точка є внутрішньою. При чому, для координат ця рівність записуватиметься так:

$$\left| (p_2 - p_0)(p_1 - p_0) \right| = \left| (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) \right|;$$

$$\begin{aligned} |(p_3 - p_0)(p_2 - p_0)| &= |(x_3 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_3 - y_0)|; \\ |(p_3 - p_0)(p_1 - p_0)| &= |(x_3 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_3 - y_0)|; \\ |(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)| &= |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|. \end{aligned}$$

Трансформуємо попередні формули для наших даних. Для цього в стовпці C3 вводиться формула

=ABS((A\$4-A6)*(B\$3-B6)-(A\$3-A6)*(B\$4-B6))+ABS((A\$5-A6)*(B\$4-B6)-(A\$4-A6)*(B\$5-B6))+ABS((A\$5-A6)*(B\$3-B6)-(A\$3-A6)*(B\$5-B6))

і копіюється на діапазон C6:C16.

Тепер у стовпці D вводимо формулу

=ABS((\$A\$4-\$A\$3)*(\$B\$5-\$B\$3)-(\$A\$5-\$A\$3)*(\$B\$4-\$B\$3))

і копіюється на діапазон D6:D16.

4. Якщо значення в стовбці C і D збігаються, то точка є внутрішньою, ми виключаємо її з подальших перевірок (Рисунок 1).

	A	B	C	D
1	P			
2	x	y		
3	-9	-17		
4	-18	0		
5	-5	20		
6	-10	-8	401	401
7	-6	-7	543	401
8	-15	-5	401	401
9	14	-4	1999	401
10	11	-15	1865	401
11	14	2	1951	401
12	2	6	1031	401
13	16	8	2051	401
14	-7	9	401	401
15	15	19	1889	401
16	-1	-13	961	401

Рис. 1. Знаходження внутрішніх точок

5. Копіюємо точки, які залишились у стовбці F і G та повторюємо пункти 2—5, поки не переберімо всі можливі комбінації, у таблиці залишаються точки за допомогою яких і побудуємо опуклий полігон.

6. Відсортувати значення за спаданням за двома критеріями: за абсцисою та за ординатою. Остання точка буде початковим полігоном q .

7. У наступних двох стовпцях обчислюються проекції векторів $\overrightarrow{qp_i}$. Для цього у комірку C21 потрібно ввести формулу

= A21 — A\$27,

а потім скопіювати її на діапазон C21:D27.

8. У стовпчику E обчислюється довжина вектора $\overrightarrow{qp_i}$ — у комірку E3 вводиться формула

=КОРЕНЬ(C21^2+D21^2)

і копіюється на діапазон E21:E26 (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F
19	Р		Проекції		Довжина	Косинус
20	x	y	dx	dy		
21	-18	0	-34	-8	34,9285	-0,22904
22	-9	-17	-25	-25	35,35534	-0,70711
23	-5	20	-21	12	24,18677	0,496139
24	11	-15	-5	-23	23,5372	-0,97718
25	14	-4	-2	-12	12,16553	-0,98639
26	15	19	-1	11	11,04536	0,995893
27	16	8				

Рис. 2. Знаходження косинусів кутів

9. Копіюються координати точок і косинуси кутів φ_i з діапазонів A21:B26 і F21:F26. До діапазону H21:J26 вставляються тільки значення (без формул) скопійованих даних.

10. Отримані дані сортуються за останнім стовпцем (J) в порядку спадання.

11. Початкова точка q полігону вставляється попереду діапазону та в його кінці (рис. 3).

	H	I	J
19			
20	16	8	
21	15	19	-0,22904
22	-5	20	-0,70711
23	-18	0	0,496139
24	-9	-17	-0,97718
25	11	-15	-0,98639
26	14	-4	0,995893
27	16	8	

Рис. 3 Додавання початкової точки

12. Для діапазону H20:I27 будується опуклої оболонки (рис. 4) за допомогою точкової діаграми табличного процесора.

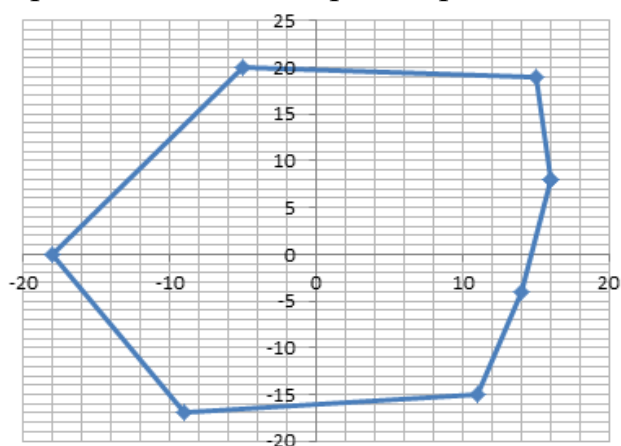


Рис. 4. Побудова опуклої оболонки

Висновки й перспективи подальших досліджень. Задача на побудову опуклої оболонки досить просто розв'язується якщо мати достатній рівень знань мов програмування. У зв'язку з недостатнім рівнем знань студентів мов програмування побудову опуклої оболонки було спрощено за допомогою табличного процесора Microsoft Excel.

Список літератури

1. Веденеева Е. А. Функции и формулы Excel 2007. Библиотека пользователя / Е. А. Веденеева. — Санкт-Петербург : Питер, 2008. — 384 с.
2. Веселовська Г. В. Основи комп'ютерної графіки: навч. посіб. / Г. В. Веселовська, В. Є. Ходаков, В. М. Веселовський; ред. В. Є. Ходаков. — Київ : Центр навчальної літератури, 2004. — 392 с.
3. Гардан П. Машинная графика и автоматизация конструирования / П. Гардан, М. Люка. — Москва : Мир, 1987. — 272 с.
4. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. — Москва : Физматлит, 2002. — 472 с.
5. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++ / М. Ласло; пер. с англ. — Москва : БИНОМ, 1997. — 304 с.
6. Маценко В. Г. Комп'ютерна графіка: навч. посіб. / В. Г. Маценко. — Чернівці : Рута, 2009 — 343 с.
7. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос; пер. с англ. — Москва : Мир, 1989. — 478 с.
8. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. — Москва : Машиностроение, 1980. — 239 с.
9. Тихомиров Ю. Программирование трехмерной графики / Ю. Тихомиров. — Санкт-Петербург: BHV-Санкт-Петербург, 1998. — 246 с.
10. Устенко С. А. Побудова зірчастого полігону та його тріангуляції (для студентів математичних спеціальностей) / С. А. Устенко, В. В. Березка // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. — №19. — 2015. — С. 246-250
11. Ammeral L. Programming Principles in Computer Graphics / L. Ammeral. — New York: John Wiley and Sons, 1992. — 233 p.

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ»

С. В. Горленко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Вступ. У дійсному аналізі поряд з аналітичним представленням функції неабияке значення відіграє її графік, адже він висвітлює нові, якісні характеристики функції, які не завжди легко з'ясувати з її аналітичного виразу. Так само, в комплексному аналізі геометричні характеристики функції дозволяють поглянути на неї з точки зору відображення, яке вона здійснює. Особливе значення має вивчення геометричних властивостей конформних відображень, що реалізуються аналітичними функціями. У прикладних задачах досить часто використовують *метод конформних відображень*, який дозволяє задачу, поставлену в деякій області, переформулювати для простішої області, що є конформним образом попередньої. Класичним прикладом такого застосування є виведення Жуковським формули для підйомної сили крила [1]. Цікавий приклад такого застосування можна знайти у [2].

Починати вивчати цю тему логічно з вивчення геометричних властивостей найпростіших елементарних функцій.

Теоретична частина. Щодо цього, на лекції має бути встановлено такі результати.

1. Ціла лінійна функція $w = az + b$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$) будь-який вектор z перетворює так:

- а) розтягує в $k = |a|$ разів;
- б) повертає на кут $\alpha = \arg a$;
- в) переносить паралельно на величину $|b|$ у напрямі вектора b ;

Ціла лінійна функція конформно відображує всю комплексну площину Z саму на себе.

2. Дробово-раціональна функція $w = \frac{az + b}{cz + d}$ має наступні геометричні властивості:

а) будь-яке коло (пряму) переводить також у коло (пряму), причому якщо точка $z = -\frac{d}{c}$ лежить на прообразі, то образом буде пряма, інакше — коло (*колова властивість* дробово-лінійної функції);

б) точки z_1, z_2 , які симетричні відносно деякого кола (прямої) переводить у точки w_1, w_2 , які симетричні відносно образу цього кола (прямої) (*властивість симетрії* дробово-лінійної функції);

в) якщо $w(z_1) = w_1, w(z_2) = w_2, w(z_3) = w_3$, то існує єдина дробово-лінійна функція, така що справджує ці умови, яку визначає формула

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

(властивість інваріантності (збереження) подвійного (ангармонічного) відношення чотирьох точок).

Дробово-лінійна функція здійснює конформне відображення в будь-якій точці $z \neq -\frac{d}{c}$.

3. Функція $w = \frac{1}{z}$. Це окремий випадок дробово-лінійної функції, отожд має всі її геометричні властивості. Оскільки її досить часто використовують для побудови конформних відображень, то варто розглянути її окремо.

Ця функція реалізує конформне відображення в кожній точці $z \neq 0$, а точки $z = re^{i\varphi}, r < 1$, переводить у точки $w = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$, з

$$|w| = \frac{1}{r} > 1, \arg w = -\arg z.$$

Розглянуті вище елементарні функції здійснюють взаємно-однозначне відображення на комплексну площину W . Важливим тут є поняття *однолистості*: функцію $w = f(z)$ називають однолистою в області $D \subset Z$, якщо в різних точках цієї області вона набуває різних значень (обернена до неї функція є однозначною). Під *областю однолистості* функції $f(z)$ розумітимемо найширшу область, у якій $f(z)$ однолиста. Значення, які набуває $f(z)$ в області однолистості — це всі її можливі значення. Геометричні властивості взаємно-обернених функцій є сенс вивчати разом.

4. Функції $w = e^z$ та $z = \operatorname{Ln} w$. Областю однолистості функції $w = e^z$ є будь-яка горизонтальна смуга $\alpha < y < \alpha + 2\pi$ завширшки 2π . Цю смугу вона взаємно-однозначно відображує на всю комплексну площину W з розрізом уздовж променя $\arg w = \alpha$. Точніше, кожна горизонтальна пряма $z = x + i\varphi$ ($-\infty < x < +\infty, \varphi = \text{const}$) переходить у промінь $\arg w = \varphi$, причому півпряма $z = x + i\varphi$ ($x < 0$) переходить у частину цього променя $0 < |w| < 1$, а півпряма $z = x + i\varphi$ ($x \geq 0$) переходить у частину цього променя $1 \leq |w| < +\infty$.

Очевидно, обернена функція $w = \operatorname{Ln} w$ є багатозначною і відображує комплексну площину W з розрізом уздовж променя $\arg w = \alpha$ на одну з горизонтальних смуг $\alpha + 2\pi n < y < \alpha + 2\pi(n + 1)$ залежно від вибору однозначної гілки логарифмічної функції. Наприклад, смугу $-\pi < y < \pi$ функція $w = e^z$ відображує на всю комплексну площину W з розрізом уздовж

променя $\alpha = \pi$, а одна з нескінченної кількості обернених функцій $z = \ln w$ (головний логарифм) взаємно-однозначно відображує цю комплексну площину з указаним розрізом на горизонтальну смугу $-\pi < y < \pi$.

5. Функції $w = z^n$ та $z = \sqrt[n]{w}$. Областю однолистості функції $w = z^n$ є будь-який кут $\alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}$ розхилу $\frac{2\pi}{n}$. Цей кут вона взаємно-однозначно відображує на всю комплексну площину W з розрізом уздовж променя $\arg w = n\alpha$. Будь-який кут $\alpha < \arg z < \beta$ розхилу $\varphi = \beta - \alpha < \frac{2\pi}{n}$ функція $w = z^n$ переводить взаємно-однозначно в кут $n\alpha < \arg w < n\beta$ з розхилом $n\beta - n\alpha = n(\beta - \alpha) = n\varphi$ в n разів більшим. Обернена функція $z = \sqrt[n]{w}$ є n -значною і здійснює обернене відображення. Вказані вище геометричні властивості має і функція $w = (z - z_0)^n$ та обернена до неї, але щодо кутів з вершиною в точці z_0 .

6. Функція Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Ця функція однолиста в будь-якій області, які не містить одночасно точок z_1 та z_2 таких, що $z_1 z_2 = 1$. Стандартними областями однолистості функції Жуковського є внутрішність або зовнішність одиничного круга, верхня або нижня півплощина комплексної площини. Будь-яке коло $|z| = r > 1$ функція Жуковського відображує зі збереженням орієнтації на еліпс

$$\frac{u^2}{a^2(r)} + \frac{v^2}{b^2(r)} = 1$$

з півосями $a(r) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b(r) = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$ і фокусами в точках $w = \pm 1$. На

той самий еліпс відображується і коло $|z| = \frac{1}{r} < 1$, але орієнтація при цьому змінюється на протилежну. Отже, області однолистості $|z| > 1$ та $|z| < 1$ відображуються на всю комплексну площину W з розрізом на відрізок $[-1; 1]$, який є образом кола $|z| = 1$ і обходиться двічі в протилежних напрямках. Верхню та нижню півплощину площини Z функція Жуковського відображує на всю комплексну площину W з розрізами на променях $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$.

При цьому кожен промінь $z = re^{i\alpha}$ ($0 < r < \infty$) відображується на гіперболу

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$$

з фокусами в точках $w = \pm 1$ та асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg} \alpha$. При переході до променів нижньої півплощини орієнтація гіпербол змінюється на протилежну. Промені $\arg z = 0$ та $\arg z = \pi$ переходять у промені $[1; +\infty)$ та $(-\infty; -1]$, що обходяться двічі в протилежних напрямках.

7. Функції $\cos z, \sin z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ є суперпозиціями експонент:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right); \\ \operatorname{tg} z &= -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}; & \operatorname{ctg} z &= -\operatorname{tg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Тому геометричні властивості відображень цими функціями можна отримати з вивчених. Це стосується і гіперболічних функцій.

Завдяки дослідженням геометричним властивостям елементарних функцій можна вивчати геометричні властивості їх суперпозицій. Вивчення та побудова складніших конформних відображень, скажімо, за формулою Кристофеля — Шварца, тут не розглядається.

Перш ніж перейти до практичної частини, є сенс навести теорему [3], що є наслідком теореми Рімана, яка вказує на принципову можливість побудови конформного відображення однозв'язних областей.

Теорема. Нехай межі однозв'язних областей D та G складаються більш ніж з однієї точки. Тоді існує одна й лише одна функція $w = f(z)$, яка конформно відображує область D на G (зі збереженням орієнтації при відображенні їх меж) так, що

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha,$$

де $z_0 \in D, \alpha$ — дійсне число.

Останні дві умови називають умовами *нормування конформного відображення*. Вони містять три дійсних параметри — координати u_0, v_0 точки w_0 та кут α . Їх можна замінити на три інших дійсних параметри, наприклад, задати образ однієї внутрішньої та однієї межової точки, або образи трьох межових точок. Якщо умови нормування відсутні, то конформних D на G існує безліч.

Практична частина. Практичні задачі з цієї теми можна розділити на два типи:

1) пряма задача: маємо однозв'язну область D та аналітичну функцію $w = f(z)$, яка задана в цій області. Треба знайти образ G області D при конформному відображенні $w = f(z)$;

2) обернена задача: маємо дві однозв'язні області D та G . Треба знайти (побудувати) конформне відображення області D на G .

Очевидно, що пряма задача простіша, адже розкладаючи $w = f(z)$ у суперпозицію елементарних функцій з відомими геометричними

властивостями, можна знайти і область $G = f(D)$. Тому вивчення геометричних властивостей конформних відображень рекомендується починати саме з таких задач. Розв'язування обернених задач складніше і потребує деякого хисту, адже треба з відображень з відомими геометричними властивостями скласти ланцюг (суперпозицію), що здійснює потрібне відображення.

Приклад 1. Знайти область G , на яку функція $w = \operatorname{tg} z$ відображує смугу $D : 0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

Відповідь. Область $G = f(D)$ є всією комплексною площиною W з розрізом уздовж відрізка $[-i; i]$.

Приклад 2. Відобразити на верхню півплощину одиничний круг з розрізом уздовж відрізка $[0; 1]$.

Відповідь.
$$w = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{1 - \sqrt{z}} \right)^2.$$

Список літератури

1. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — Москва : Наука, 1973. — 736 с.
2. Левицкий А. С. Расчет коэффициента преобразования планарной системы электродов с гребенчатой геометрией / А. С. Левицкий, М. П. Медведенко, Д. А. Михаль // Технічна електродинаміка. — 2006. — № 5. — С. 9—16.
3. Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. — Москва : Наука, 1989. — 480 с.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДЕННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

А. Л. Гречко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

and.grechko@gmail.com

Формула Тейлора належить до одного з найбільш важливих математичних результатів. Існує декілька варіантів доведення формули залишкового члена та декілька видів залишкового члена (Коші, Лагранжа, Пеано тощо [1]). Деякі доведення вимагають теореми Роля або теореми про середнє і за розміром та складністю стає важким для сприйняття більшістю студентів інженерних спеціальностей. Варіант викладення формули Тейлора без форми залишкового члена, що можна зустрінути в деяких підручниках, на нашу думку не є прийнятним. Так в більшості застосувань формули Тейлора конкретний вигляд залишкового члена не є важливим, але є два принципово важливих моменти, де конкретний вигляд залишкового члена є важливим:

розклад основних функцій в ряд Тейлора — Маклорена
та різноманітні оцінки похибки при використанні степеневих рядів.

Натомість пропонується інший підхід. Конкретний вигляд залишкового члена замінюється оцінкою часткової суми степеневих рядів на довільному відрізьку збіжності. Такий варіант, на нашу думку, не тільки простіший за доведення, але в наведених двох темах його застосування значно зручніше залишкового члена.

Теорема. Припустимо для деякого $n \geq 0$ функції $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ є неперервними на $[a, b]$ та існує $f^{(n+1)}(x)$, причому

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq N \quad x \in (a, b),$$

тоді на $[a, b]$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O_n(x) \quad (1)$$

де

$$|O_n(x)| \leq \frac{N}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}. \quad (2)$$

Доведення. Нехай без обмежень загальності $a < b$. Позначимо

$$W_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

та відзначимо виконання рівностей

$$f(a) = W_n(a), \quad f'(a) = W'_n(a), \dots, \quad f^{(n)}(a) = W_n^{(n)}(a). \quad (3)$$

Зважаючи, що W_n є многочленом степені n маємо

$$W_n^{(n+1)}(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (4)$$

Залишок $O_n(x)$ означений в (1), тому

$$O_n(x) = f(x) - W_n(x).$$

Зважаючи на (3) маємо

$$O_n(a) = O'_n(a) = \dots = O_n^{(n)}(a) = 0, \quad (5)$$

та враховуючи (4) отримаємо

$$f^{(n+1)}(t) = O_n^{(n+1)}(t), \quad t \in (a, x). \quad (6)$$

З урахуванням (5) зінтегруємо (6)

$$W_n^{(n)}(x) = W_n^{(n)}(a) + \int_a^x W_n^{(n+1)}(t)dt = \int_a^x f_n^{(n+1)}(t)dt,$$

та враховуючи умови теореми маємо

$$\left| W_n^{(n)}(x) \right| \leq \int_a^x \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq N(x-a).$$

Диференціюємо вдруге

$$W_n^{(n-1)}(x) = W_n^{(n-1)}(a) + \int_a^x W_n^{(n)}(t)dt = \int_a^x W_n^{(n)}(t)dt,$$

$$\left| W_n^{(n-1)}(x) \right| \leq \int_a^x \left| W_n^{(n)}(t) \right| dt \leq \int_a^x N(t-a)dt = \frac{N}{2}(x-a)^2.$$

Продовжуючи далі за індукцією для $k = 0, 1, 2, \dots, n$ отримаємо остаточно

$$\left| W_n^{(n-k)}(x) \right| \leq \frac{N}{(k+1)!} (x-a)^{k+1}, \quad x \in [a, b]. \quad (7)$$

Бажана оцінка (2) негайно випливає з (7) при $k = n$.

Список літератури

1. Бесов О. В. Курс лекцій по математическому анализу. Ч. 1. / О. В. Бесов. — Москва : МФТИ, 2004.

ІНОЗЕМНЕ СЛОВО «КОЛОКВІУМ»

В. В. Дрозд

Національний технічний університет України, Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Будь-який процес навчання у вищому навчальному закладі складається як мінімум з двох складових. Одна з них — це транспортування деяких знань, методів, навичок від викладача до студента. Інша складова — це контроль знань студента. Контроль того, що він засвоїв, зрозумів. Контроль того, що він запам'ятав. Контроль того, що він занотував у своєму конспекті. Нарешті, контроль того, наскільки вірно чи адекватно сам викладач виклав студентам якийсь розділ програми. Часто подібний контроль виявляє помилки в головах, рідше — в студентських конспектах, а іноді буває й так, що помилки знаходять у деяких посібниках. Як би там не було, все закінчується користю для навчального процесу.

Безпосереднє викладання знань викладачем відбувається на лекціях, практичних заняттях, консультаціях тощо. Різних форм контролю знань студентів теж достатньо. Це і контрольні роботи, і домашні індивідуальні розрахункові завдання, і реферати. Доволі специфічною формою контролю знань є колоквіум. Що таке колоквіум? Дивимось у словник іншомовних слів: «колоквіум — це збори, на яких заслуховують і обговорюють наукові доповіді.» Щось не те. Читаємо далі: «колоквіум — це вид екзамену». Тепліше. Але... Читаємо ще далі: «колоквіум — це одна з форм навчання, бесіда викладача із студентом з метою оцінки та підвищення знань». Це саме воно.

По-перше, колоквіум — це **не** екзамен. Як казав Сарафанов у п'єсі «Старший син», спорт — це спорт, а наука — це наука. Екзамен — це екзамен, а колоквіум — це колоквіум. Що таке екзамен, чітко задокументовано у численних циркулярах, положеннях, наказах тощо. Там ви знайдете, наприклад, форму екзаменаційного білету, або список літератури, яку дозволено використовувати на екзамені, та ще багато того, чого не знає пересічний екзаменатор. А дарма. Як кажуть, незнання закону не звільняє... ну і так далі. Коротше кажучи, екзамен — це екзамен. А от слово «колоквіум» ви навряд чи зустрінете у навчальних планах чи інших офіційних документах. Автор за п'ять років навчання у Київському державному університеті складав колоквіум всього один раз. Таке враження, що викладачі, які проводять колоквіуми, займаються якоюсь самодіяльністю. Проводять те, чого не повинно існувати. Роблять це як правило після занять, затримуючи студентів часто до самого вечора. Задають їм при цьому безліч підступних питань. А чи мають вони на це юридичне право? «Вопрос, конечно, интересный». І знову на знання «матчасті». Таким чином, колоквіум — це **зовсім** не екзамен. Це по-перше.

По-друге, колоквіум — це «бесіда викладача із студентом». Зупиніться. Прислухайтесь до цього слова «бесіда». Не допит, не знушання, а бе-сі-да. Хтось скаже: екзамен — це теж бесіда. Шановний, ознайомтесь з інструкцією. Прочитали? Питань нема. І слава богу, що колоквіум — це не екзамен. Саме

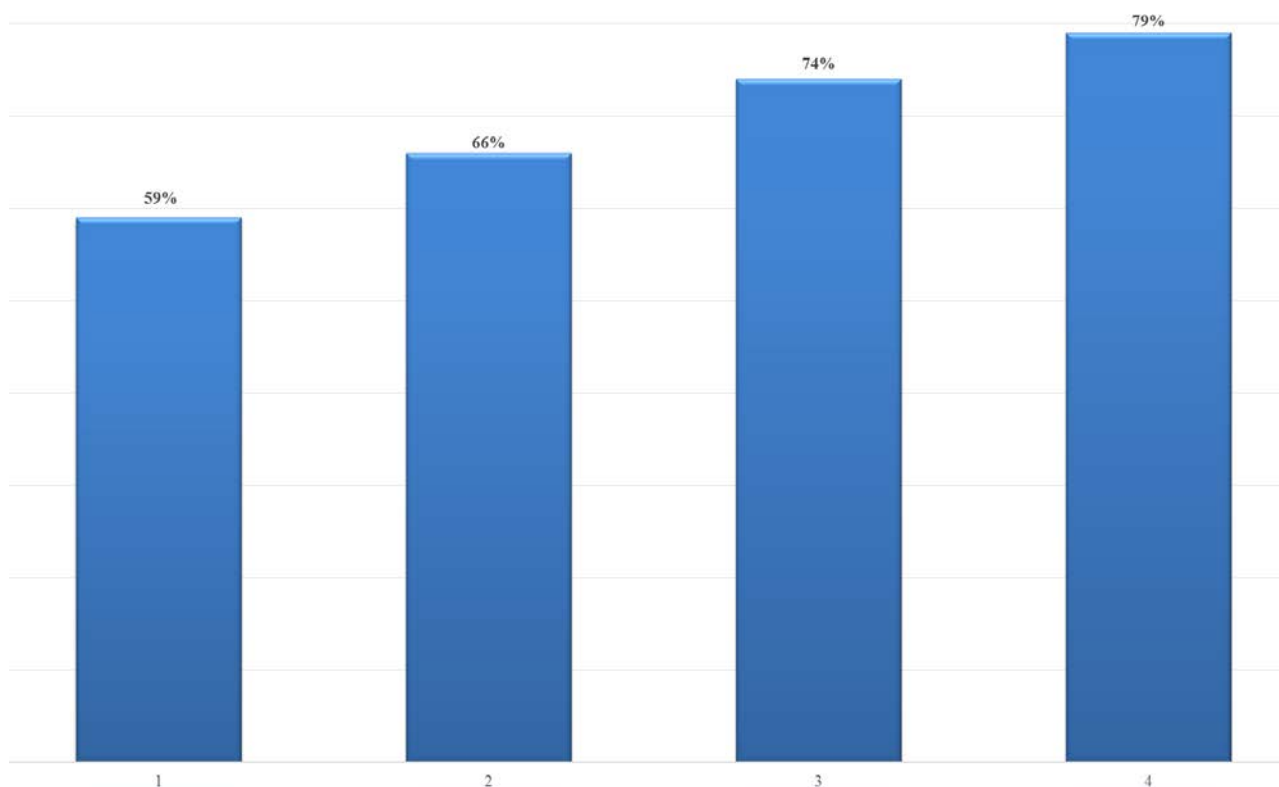
через це і має сенс розмовляти далі. Про те, що ж таке колоквіум і навіщо він потрібен. Допоки така форма контролю як колоквіум не стала вщент зарегламентованою, слід користуватись нею якомога ширше і розкутіше. Тому що бесіда, діалог — це найкращий, найпродуктивніший метод спілкування викладача із студентом. Звичайно, не простого спілкування, а спілкування з метою надання йому нових знань. Таких форм спілкування існує багато: консультації, гуртки, семінари, конференції. Але більшість з них не є чіткою, регулярною та однозначною формою контролю, якою є колоквіум.

Це як у звичайному житті: кожна гарна мати хоче бути подругою для своєї доньки. І це чудово. Але кожний раз така «гра у подруги» закінчується єдиним словом «треба». Що ви кажете? Ваша гра не закінчилась? Тоді дякуйте своїй доньці. Вона зрозуміла, що таке «треба», але продовжує підігравати вам. Я пишаюся нею. Я пишаюся нашими студентами, які розуміють слово «треба», не дивлячись ні на що. Не дивлячись ні на що вони ходять на лекції, працюють на практичних заняттях, роблять домашні завдання, готуються до колоквіумів, хоча в цей самий час вони могли б... *(і тут можна вставити безліч варіантів, один цікавіше іншого)*.

Але повернімось до наших баранів. Виявляється, що колоквіум — це якась золота середина між екзаменами, про які більшість адекватних людей згадує як про страшний сон у своєму житті (будемо відвертими), та грою в КВК між командами студентів та викладачів (не будьмо занадто бундючними). З одного боку, колоквіум повинен бути чимось обов'язковим. Як екзамен. Колоквіум повинен бути чимось необхідним. Як екзамен. Колоквіум повинен бути чимось об'єктивним. Як екзамен. (Колись Сталін казав: «Комуніст повинен бути чесним. Як Ленін. Комуніст повинен бути сміливим. Як Ленін.» і так далі разів з десять). А з іншого боку, колоквіум — це вільне спілкування викладача із студентом. **Вільне!** Безпосереднє. Неопосередковане. Звичайне. Серйозне? Безумовно. З гумором? Не без цього. Це діалог, в якому стріли можуть летіти в обидва боки. Це розмова, в якій нема переможця чи переможеного. Поганий студент, виходячи з колоквіуму, вигукує «Пронесло!!!», а гарний студент каже: «Нарешті я зрозумів теорему Кронекера — Капеллі». Поганий викладач, закінчуючи колоквіум, видихає: «Нарешті це скінчилось», а гарний викладач... Стоп. Невже є гарні викладачі? Я таких не бачив. І це по-друге.

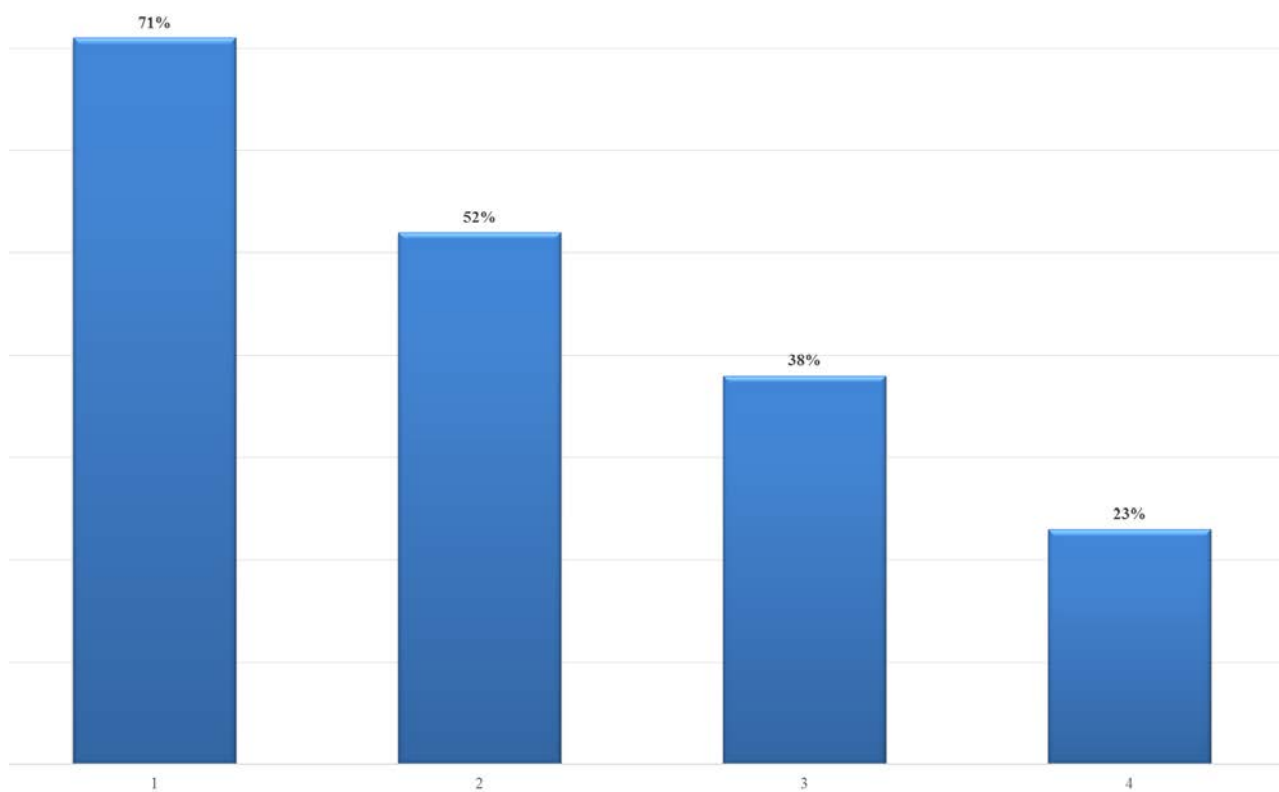
Нарешті по-третє. «Колоквіум — це бесіда ... з метою оцінки та **підвищення знань**». Так, оцінювати знання необхідно, але підвищувати їх — ось головна мета колоквіуму. Тільки обговорюючи з викладачем доведення складної теореми, студент може побачити якусь свою помилку.

Студентам ФМФ НТУУ «КПІ» було запропоноване анонімне опитування: «готуючись до складання теоретичної частини програми на екзамені (колоквіумі) я:» і далі було два варіанти продовження: «вчу всі питання та покладаюсь тільки на свою пам'ять», або: «роблю щось інше». Ось яка кількість студентів обрала другий варіант щодо екзамену (по горизонталі — номер курсу):



Результат доволі природний — досвід (і гарний, і поганий) з роками тільки накопичується. І будемо реалістами: вивчити за три дні 60—65 теоретичних питань, що виносяться на екзамен, дуже непросто.

Зовсім іншу картину ми спостерігаємо стосовно підготовки студентів до колоквіуму (той же самий другий варіант):



І це теж природньо — розкутіша атмосфера колоквіуму порівняно з екзаменом, невдала відповідь на колоквіумі не є такою катастрофою, як на екзамені. Нарешті, той же досвід підказує: вивчити 15—17 питань (якщо колоквіуми проводити раз на місяць) може найслабкіший студент. Як кажуть, «без шума и пыли», тобто без авралу та стресів, притаманних будь-якій сесії.

Нарешті, ще про одну корисну функцію колоквіуму. Він допомагає виявляти помилки викладача. І значно краще, коли це відбувається на протязі семестру, а не після його закінчення. Іноді помилки виявляються і в друкованих виданнях. На одному з колоквіумів майже всі студенти на питання «що таке верхня границя послідовності?» відповідали: «це найбільша з її граничних точок». З'ясувалось, що це означення вони знайшли в посібнику, яким користуються мабуть 90 % усіх студентів молодших курсів КП.

Список літератури

1. Вірченко Н. О. Нариси з методики викладання вищої математики. — Київ, 2006.
2. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики. — Київ, 2003.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА» ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧАСОВИХ РЯДІВ

А. В. Енгель

Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,

Миколаїв, Україна

alina10011994@mail.ru

Постановка проблеми. Дисципліна «Математична статистика» є однією з основних і фундаментальних дисциплін у системі математичної освіти. Вона відіграє провідну роль у формуванні висококваліфікованого фахівця, оскільки озброює його знанням базових методів математичної статистики, які дозволяють правильно проаналізувати та проінтерпретувати результати спостережень, зробити висновки, виходячи з випадкових даних. У сучасній статистичній теорії існує багато різноманітних методів прогнозування інформації. Значна їх частина відноситься до прогнозування часових рядів, особливістю якого є те, що аналізуються лише дані спостережень без додаткової інформації, без урахування впливу зовнішніх сил [2]. Головним завданням цієї статті як складової частини нашого дослідження є аналіз проблеми підготовки майбутнього викладача математики до викладання дисципліни «Математична статистика» із застосуванням часових рядів та визначення шляхів її розв'язання в сучасних умовах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різним аспектам математичної освіти у вищій школі присвячено праці В. О. Грищенко, В. В. Корнєщук, О. І. Матяш, О. І. Скафи, З. І. Слєпкань та Ю. В. Триус. Питання методики викладання математичної статистики розглядаються у працях Ю. А. Галайко, Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитого, Л. С. Пуханової.

Мета статті — розкрити особливості підготовки майбутніх викладачів математики до викладання дисципліни «Математична статистика» із застосуванням часових рядів.

Виклад основного матеріалу.

Такі науковці, як Працьовитий М. В. та Гончаренко Я. В., відзначають, що основними завданнями навчання математичної статистики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів є:

- 1) формування цілісного уявлення про математичну статистику як теоретичну науку, розуміння її основних задач і методів;
- 2) формування уявлення про математичну статистику як прикладну науку, методи якої використовують дослідники з різних галузей наук;
- 3) надання майбутнім викладачам ґрунтовної системи знань сучасних статистичних методів;
- 4) ознайомлення студентів із деякими проблемами теоретичних досліджень та прикладних застосувань сучасної статистики [1].

Про значну роль математичної статистики у ґрунтовній професійній підготовці молоді свідчить і те, що згідно з постановою Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 року № 266 «Про затвердження переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти», яка набирає чинності з 1 вересня 2015 року, виокремлено таку галузь знань, як «Математика і статистика» (шифр галузі 11) та спеціальності «Математика» (код спеціальності 111), «Статистика» (112) та «Прикладна математика» (113) [3].

Застосування імовірнісних і статистичних методів базується на знаннях певних розділів курсу вищої математики і дає можливість вивчати на науковій основі як діяльність окремих підприємств торгівлі, так і соціально-економічні процеси в суспільстві в цілому. Усі задачі теорії ймовірностей, які розв'язують на заняттях, мають професійне спрямування. Студентам при вивченні дисципліни «Математична статистика» доцільно пропонувати провести дослідження статистичної вибірки, що одержано при проходженні виробничої практики на підприємствах торгівлі, яке полягає у побудові статистичного розподілу вибірки, висуванні гіпотези про відповідність статистичного розподілу певному теоретичному закону, перевірці правильності висування цієї гіпотези, а також проведенні кореляційно-регресивного аналізу статистичних взаємозалежностей випадкових величин [5].

Основне завдання, яке ставить перед собою дослідник, працюючи із сукупністю даних різної природи, є прогнозування майбутньої поведінки показників, що характеризують дану сукупність. Динаміка чисельності населення, темпів інфляції, курсів акцій або валют є предметом детального вивчення економістів. Детально вивчають динаміку зростання чисельності популяції екологи та біологи. Ряд динаміки, впорядкований за часом, або сукупність спостережень економічної величини в різні моменти часу називається *часовим рядом* [4]. Методи математичної статистики, зокрема кореляційний аналіз, є основними методами аналізу часових рядів.

Прогнозування майбутніх значень часових рядів застосовується з метою ефективного прийняття рішень фахівцями різних галузей діяльності. Вирішальну роль у статистичному підході до прогнозування часових рядів відіграє вибір відповідної моделі, яка після наповнення числовими параметрами стає безпосереднім інструментом прогнозування — предиктором. За допомогою побудованої моделі ряду можна проаналізувати поведінку ряду та одержати варіанти прогнозу, що відповідають визначеним гіпотезам і умовам, врахованим при його побудові [2]. Аналіз часових рядів може стати цікавим прикладом застосування методів математичної статистики у практиці працюючих виробництв. Також прогнозування часових рядів має низку особливостей, з якими доцільно ознайомити студентів при викладанні дисципліни «Математична статистика».

Зрозуміло, що математична статистика є фундаментом для статистики прикладної та багатьох інших дисциплін, але для того, щоб вона насправді

стала фундаментальною основою освіти, в її навчанні мають бути дотримані наступні принципи:

1) зміст дисципліни має охоплювати основні факти, моделі та методи, що складають теоретичну основу для подальших досліджень і застосувань;

2) при вивченні статистичних моделей та методів необхідно вказувати (досліджувати) їх межі та умови застосовності, основні типи прикладних задач, для яких даний клас методів є найбільш ефективним;

3) необхідно встановити тісні міжпредметні зв'язки між курсами «Теорія ймовірностей і математична статистика» та «Статистика» (або «Загальна теорія статистики»)[1].

Нами було розроблено *показники готовності* майбутніх викладачів математики до викладання математичної статистики із застосуванням часових рядів, за допомогою яких можна визначити ступінь сформованості певного критерію.

<i>Компонента</i>	<i>Критерій</i>	<i>Показники</i>
Мотиваційна	Мотиваційно-пізнавальний	Сформованість свідомої потреби у самовдосконаленні. Пізнавальний інтерес до вдосконалення методики проведення занять з математичної статистики та використання новітніх засобів навчання. Наполегливість та систематичність у процесі формування професійних якостей.
Когнітивно-операційна	Діяльнісно-змістовний	Знання предмету, мети, завдань дисципліни «Математична статистика» та логіки побудови навчального процесу. Уміння прогнозувати поведінку економічних показників із використанням трендових моделей. Знання іноземних мов на освітньо-науковому професійному рівні.
Результативно-креативна	Діяльнісно-творчий	Уміння знаходити нестандартні рішення педагогічних задач. Здатність створювати і впроваджувати нововведення під час проведення навчально-виховного процесу. Апробація власних розробок та методик з математичної статистики у межах України (написання статей, тез, участь у конференціях) та на міжнародному рівні.

Висновки дослідження. Швидка зміна інформаційного простору зумовлює пошук оригінальних ідей та підходів до викладання математичних дисциплін, зокрема «Математичної статистики». На сучасному етапі доцільно збільшити кількість годин на практичні заняття для того, щоб показати студентам можливості прикладного застосування статистичних методів. Зокрема, вивчення аналізу часових рядів, який спирається на застосування методів математичної статистики, розв'язує це завдання. Також треба зазначити, що у сучасних умовах підвищення інтенсивності навчального процесу на перший план виходить самостійна робота студентів. Майбутній викладач повинен бути готовим до внесення змін до методики викладання дисципліни «Математична статистика», розроблення навчально-методичного комплексу, який дозволив би підвищити ефективність навчання студентів на аудиторних заняттях та у поза аудиторний час.

Список літератури

1. Гончаренко Я. В. Деякі проблеми навчання математичної статистики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитий // *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*. — Issue # 35. — 2011.
2. Осипчук М. М. Аналіз часових рядів. Навчальний посібник / М. М. Осипчук. — Івано-Франківськ, 2009. — 84 с.
3. Постанова Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 року № 266 «Про затвердження переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти»
4. Присенко Г. В. Прогнозування соціально-економічних процесів: Навч. посіб. / Г. В. Присенко, Є.І. Равікович. — Київ : КНЕУ, 2005. — 378 с.
5. Щетиніна О. К. Проблеми викладання математики при підготовці майбутніх фахівців в області економіки і торгівлі / О. К. Щетиніна // *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*. — Issue # 38. — 2012. — С. 26—32

ПРИНЦИП ІСТОРИЗМУ В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

В. Я. Ілляшенко

Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки,

Луцьк, Україна

ira_form@mail.ru

З падінням тоталітарного режиму в Україні почалась боротьба за гуманізацію освіти.

Гуманістична орієнтація оголошує людину вищою цінністю на Землі і повинна розв'язати проблеми: людина і світ, людина і природа, людина і суспільство, людина і людина на основі загальнолюдських цінностей. Замість такого підходу до розв'язання проблеми гуманізації освіти поступово гуманізацію почали підмінювати ідеями гуманітаризації, яку розуміють як посилення гуманітарної складової освіти на шкоду природничо-математичної. Скорочення годин на вивчення математики як в школі, так і у вузах приводить до зниження якості природничої і математичної освіти.

Видатні математики Ф. Клейн, А. Колмогоров, О. Александров відстоювали рівноправність гуманітарної і природничо-математичної освіти, вказували на її вагомість, як елемента загальної культури сучасної людини.

Безсумнівний інтерес і актуальність мають і сьогодні ідеї Фелікса Клейна стосовно загальних педагогічних підходів до організації і методів математичної освіти. Особливо слід відзначити прихильність Клейна принципу природо доцільності при навчанні математики, генетичному розвитку основних її ідей і методів. «Ми повинні пристосовуватись до природних схильностей молоді людини — повільно вести їх до вищих питань і лише на закінчення ознайомити їх з абстрактними ідеями; викладання повинно йти тим же шляхом, яким все людство, починаючи зі свого наївного первісного стану, дійшло до вершин сучасного знання! Необхідно завжди повторювати цю вимогу, так як завжди знаходяться люди, які за прикладом середньовічних схоластів починають своє викладання з найзагальніших ідей і захищають цей метод, як ніби-то єдиний науковий. А між тим це неправильно: науково навчати — значить вчити людину науково думати, а не приголомшувати її з самого початку холодною, науково напруженою систематикою. Істотна перешкода до поширення такого природного і воістину наукового методу навчання є, без сумніву, недолік у знайомстві з історією математики...» [1].

Сьогодні ще немає єдиної концепції гуманітаризації, яка повинна забезпечити можливість одержання знань, що відповідає умовам і вимогам сучасності

Гуманітаризація — це комплексне засвоєння світової культурної спадщини на основі інтеграції, системності та історизму.

Елементи історизму, використання історичного потенціалу, історико-генетичний метод відіграють величезну роль у навчанні математики, особливо

при введенні нових понять, позначень, завершенні тем, при розгляді іменних теорем.

Наприклад, в процесі вивчення курсу математичного аналізу досить важливо прослідковувати в історичному і світоглядному планах формування і розвиток таких фундаментальних понять, як функція, границя, похідна, інтеграл і т.д.

Методика навчання геометрії повинна спиратись на природні шляхи і методи пізнання, характерні цій науці. Зміст курсів аналітичної, диференціальної геометрії, доповнений історико - науковим аналізом генезису ключових аспектів, дозволяє ілюструвати розвиток наукового мислення, пов'язаного із введенням нового методу дослідження, наприклад, координатного методу, методу рухомого репера. Крім того, персоналістична лінія сприяє формуванню уявлення про роль особистості в математиці та вклад в історію науки видатних математиків і математичних шкіл. Не менш важливий аспект вивчення геометрії є її змістовно-гуманітарний та абстрактно-теоретичний рівні. Перший з них припускає змістовну трактовку понять, використання генетичних означень і методів доведень, широке залучення правдоподібних міркувань. На другому — навчальний предмет вивчається як деяка замкнута в собі галузь знань зі своїм колом абстрактних понять.

Виклад матеріалу, який складається з різних дрібних, не пов'язаних між собою частин, не викликає інтересу. При висвітленні окремих питань, корисно вказувати ті загальні ідеї, які пов'язують їх в одне ціле. Студенти з інтересом знайомляться хоча би з коротким викладом спроб різних вчених розв'язати розглядуване питання, з короткою характеристикою їх досягнень і невдач. Виклад історії в «особах» досить корисний. Розповідати про все це тим більше важливо, бо студенти ще не звикли бачити в науці одночасно і її історію, і тих живих людей, які її творять.

Автор цієї доповіді, маючи піввіковий стаж педагогічної роботи, і сьогодні пригадує, які позитивні емоції викликали у першокурсників лекції з математичного аналізу Педагога з великої літери професора С. І. Зуховицького, який піднесено розповідав про вчених — математиків, наводив цікаві факти з їх життя. Не можна не згадати також захоплюючі лекції з диференціальної, проективної геометрії, геометричні спецкурси лицаря геометрії професора М. І. Кованцова, який не тільки досконало знав історію математики, але і спонукав слухачів бачити в ній романтику, відчувати її духовну красу, гармонійну витонченість, її своєрідну душу, яка зливається з образами тих хто її творив і хто нею жив.

Великий інтерес для студентів представляє собою вивчення прогресивних педагогічних ідей класиків математики (Л. Ейлер, М. І. Лобачевський, М. В. Остроградський, А. М. Колмогоров, О. В. Погорелов та ін.).

Оригінальні формулювання старовинних задач самі викликають прагнення подумати над ними. Історико-наукові відомості сприяють розумінню

студентами методологічних проблем математики, формуванню уявлення про математику як частину загальнолюдської культури.

Невеликі спецкурси (або завдання для проблемної групи) з історії розвитку математичних теорій, методів по розв'язанню історичних задач підвищують інтерес до вивчення математики. Спецкурс «Знамениті задачі математики» передбачає не тільки вивчення історії виникнення і спроб розв'язання п'яти класичних задач математики, але і знайомство з найбільш відомими задачами, які увійшли в історію разом з іменами їх авторів.

При розв'язанні таких задач студенти не тільки знайомляться з біографією авторів, але і виконують завдання, важливі для професійної підготовки: відновити доведення за рисунком (теорема Піфагора), провести реконструкцію авторських розв'язків (задачі Птолемея, Архімеда), знайти різні методи розв'язання (задачі Регіомонтана, Архімеда).

Для забезпечення цілісності процесу навчання математики елементи історизму, історико-генетичний метод все ж не дають відповіді на питання, чому і як вчити в конкретний період розвитку математичної освіти.

Видатні психологи, математики, методисти визначають, що провідним фактором процесу навчання математики потрібно вважати принцип історизму, який відповідає філософському вченню про закони розвитку систем.

Видатні математики Г. Лейбніц, А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Г. Вейль, А. Колмогоров, досліджуючи закони психології творчості, причини і закономірності розвитку математики, підкреслювали, що для виявлення рис мистецтва відкриття досить корисно пізнати істинне походження відкриття, що кращий метод передбачення майбутнього розвитку математичних наук полягає у вивченні історії і сучасного стану цих наук.

Прикладом стратегії навчання математики у вузі, що передбачає реалізацію принципу історизму, є концепція, в основу якої покладені математичні структури з аксіоматичним методом.

Список літератури

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. — Москва : Наука, 1987. — 416 с.
2. Вейль Г. Математическое мышление / Г. Вейль. — Москва : Наука, 1989. — 400 с.
3. Пуанкаре А. О науке / А. Пуанкаре. — Москва : Наука, 1983. — 560 с.
4. Фискович Т. Т. К вопросу о сущности принципа историзма и стратегии его реализации в обучении математики / Т. Т. Фискович // Труды Всероссийского научного семинара преподавателей математики, МГПУ, 2000. — С. 62—70.
5. Ілляшенко В. Я. Філософський та історичний підхід до математичної освіти / В. Я. Ілляшенко, В. М. Кремін'я // Сучасні проблеми науки та освіти. Матеріали 10-ї Міжнародної міждисципл. н-п школи-конф. — Харків : УАЖНО, ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2010. — С. 187.

ПРО ВАРІАЦІЙНЕ ТРАКТУВАННЯ КРИВИЗНИ МНОГОВИДІВ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Формула кривизни плоскої кривої

$$\kappa(x) = y'' / (1 + y'^2(x))^{3/2} \quad (1)$$

є диференціальний вираз рівняння Ейлера для функціонала [1]

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b (\kappa(x)y + \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

З рівності (1) при заданій функції y маємо кривизну $\kappa(x)$ відповідної їй кривої, а при заданій функції κ маємо рівняння для відповідної функції y (зокрема, при $\kappa(x) \equiv 0$ маємо криву найкоротшої відстані між точками на площині — пряму, що з'єднує ці точки, а при $\kappa(x) \equiv \text{const}$ — розв'язок задачі Дідони).

Рівняння мінімальної поверхні [2]

$$(1 + z_y'^2)z_{xx}'' - 2z_x'z_y'z_{xy}'' + (1 + z_x'^2)z_{yy}'' = 0$$

трактовано як рівняння Ейлера — Остроградського для функціонала

$$z \mapsto J(z) = \iint_D ds = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

Отже, як варіаційну кривизну $\kappa(x, y)$ поверхні $(x, y) \mapsto z(x, y)$ можна трактувати як ліву частину (диференціальний вираз) рівняння Ейлера — Остроградського

$$\frac{\partial}{\partial x} (z_x' / \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (z_y' / \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}) = \kappa(x, y)$$

для функціонала

$$z \mapsto L(z) = \iint_D (\kappa(x, y)z + \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}) dx dy = \iint_D \kappa(x, y)z dx dy + J(z). \quad (2)$$

Якщо це узагальнити на випадок функціоналів виду (2) довільної вимірності, то матимемо поняття кривизни $\kappa(X)$, $X = (x_1 \dots x_n)$, многовидів довільної кількості змінних, а при заданій кривизні — рівняння мінімального многовиду.

Список літератури

1. Калайда О. Ф. Деякі узагальнення та модифікації задачі Дідони // Третя Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 25—26 грудня 2014 року, Київ : Матеріали Конференції. — С. 166 // matan.kpi.ua/uk/mvstu3.html.

2. Бернштейн С. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа. — Харьков : Типография и Литография М. Зильберберг и С-вья. — 1908. — 168 с.

ПРО ПРОСТЕ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА ТА ЧОТИРИКУТНИКА

О. Ф. Калайда

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Доведення формули Герона площі трикутника використовує теорему косинусів, а тому досить складне (див. в інтернеті). Разом з тим цю формулу можна більш просто добути за допомогою лише теореми Піфагора. Тут викладено таке доведення та подано більш виразний вигляд формули Герона.

Трикутник ABC можна зорієнтувати на площині так, щоб його кути при основі AB були гострими (від цього площа трикутника, очевидно, не зміниться). Позначимо основу трикутника (права точка основи є вершина A) через a , а бічні сторони (за годинниковою стрілкою), відповідно, b та c . Тоді для площі S трикутника маємо відому рівність

$$S = ah / 2,$$

де h — висота трикутника (невідома). Висота поділяє основу трикутника на від-різки x та $a - x$. З прямокутних трикутників з сторонами, відповідно x (основа), b , h та $a - x$ (основа), h , c за теоремою Піфагора маємо рівності

$$h^2 = a^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2.$$

Звідси дістаємо

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (c^2 - (a^2 + b^2))^2}}{2a},$$

а отже,

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (c^2 - (a^2 + b^2))^2} = \frac{1}{4} \sqrt{((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)}.$$

Зауважимо, що формулу Герона теж безпосередньо можна звести до цього ж вигляду (але, нагадаємо, її доведення значно складніше).

За допомогою побудованої формули для трикутника (формули Герона) легко побудувати просту формулу площі довільного чотирикутника (а не чотирикутника, вписаного в коло, як у випадку формули Брахмагупти, вона подібна до формули Герона, оскільки трикутник завжди вписується в коло) за його сторонами a, b, c, d та протилежними кутами ϕ та ψ . Дійсно, розбивши чотирикутник $ABCD$ на два трикутники ABC та CDA і виразивши їх спільну діагональ CA (її довжину позначимо через l) за теоремою косинусів та за формулою Герона для площ двох трикутників, дістанемо просту формулу для площі чотирикутника ($S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{CDA}$)

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(ab \sin \phi + cd \sin \psi)$$

(як бачимо, у випадку прямокутника за цією формулою маємо $S = ab$).

ПРОСТИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОГО ІНТЕГРАЛА РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Для рівняння в повних диференціалах

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

$$\gamma(x, y) = P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) \equiv 0 \quad (2)$$

існує три методи побудови його загального інтеграла: за допомогою криволінійного інтеграла, за допомогою невизначених інтегралів та допоміжного диференціального рівняння і за допомогою лише невизначених інтегралів з наступним викреслюванням одного з двох однакових доданків у одержаному при цьому результаті [1, 2]. Однак вони практично не зовсім зручні.

Тут подамо найбільш простий метод інтегрування даного рівняння за допомогою невизначених інтегралів. Для цього запишімо рівняння (1) у вигляді $(Q(x, y) = \tilde{Q}(x, y) + q(y))$

$$P(x, y)dx + (\tilde{Q}(x, y) + q(y))dy = 0. \quad (1')$$

Умова (2) для нього, очевидно, виконується. Тоді

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \int q(y)dy = C, \quad \forall C, \quad (3)$$

є загальний інтеграл даного рівняння (функція U в (3), з врахуванням (2), задовольняє рівняння (1)).

Аналогічно, якщо рівняння (1) подати у вигляді

$$(\tilde{P}(x, y) + p(x))dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1'')$$

(умова (2) тут теж виконується), то аналогічно (3) матимемо його загальний інтеграл у вигляді

$$U(x, y) = \int p(x)dx + \int Q(x, y)dy = C \quad (3')$$

(функція U в (3'), з врахуванням (2), теж задовольняє рівняння (1)).

Список літератури

1. Ляшко И. И. Математический анализ (в 3 частях), Ч. 3. Интегрирование дифференциальных уравнений / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. — Киев : Головное изд-во Издательского объединения «Вища школа». 1987. — 344 с.
2. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. — Київ : Техніка. — 1997. — 288 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ОКРЕМИХ РОЗДІЛІВ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Н. В. Калашнікова

Дніпропетровський національний університет, Дніпропетровськ, Україна
natalja_kn@ukr.net

Теорія графів тісно пов'язана з багатьма розділами математики. Вона застосовується в теорії автоматів, теорії кодування, теорії ігор, при розв'язуванні різних задач на обчислювальних машинах, у фізиці, хімії, соціології та лінгвістиці. Родоначальником теорії графів вважають Леонарда Ейлера. В 1736 році в одному зі своїх листів він формулює і пропонує розв'язання задачі про сім кенігсберзьких мостів, що стала згодом однією з класичних задач теорії графів.

Розглянемо розділ «Термінологія, пов'язана з графом». Позначимо через V непорожню скінченну множину, а через R позначимо множину, яка складається з неупорядкованих пар різних елементів із V . Пару $G = (V, R)$ називають *графом*. Множину V при цьому називають *множиною вершин графа G* , а множину R — *множиною ребер цього графа*. Множину вершин графа G також позначають VG . *Простим* графом називається граф, множина ребер якого не містить петель і кратних ребер. Далі будемо розглядати тільки прості графи. Вершини графа, поєднані ребром, називають *суміжними*. Кількість ребер, які виходять із вершини v графа G , називають *степенем вершини v* і позначають $\deg v$. Вершину степеня 0 називають *ізолюваною*. *Порожнім графом* порядку n називають граф, який складається з n ізолюваних вершин. *Повний граф* — це граф, будь-які дві вершини якого поєднані ребром. *Регулярним графом* степеню d називають граф, усі вершини якого мають степінь d . На довільному графі можна виконати такі операції: видалення вершини, видалення ребра графа і підрозбиття ребра. *Підграфом* графа $G = (V, R)$ називається граф $G_1 = (V_1, R_1)$, такий що $V_1 \subseteq V$ і $R_1 \subseteq R$. Якщо підграф G_1 графа G отримують із G тільки видаленням вершин, то G_1 називають *підграфом, породженим множиною залишившихся вершин*.

Теоретичний матеріал цього розділу можна ілюструвати такими задачами.

Задача 1. Довести, що будь-який граф G порядку 6 містить або повний підграф порядку 3, або порожній підграф, породжений трьома вершинами.

Розв'язання. Припустимо, що степені всіх вершин графа G не перевищують числа два. Нехай $v_1 \in VG$. Тоді в графі G є три вершини (позначимо їх v_2, v_3, v_4), які не пов'язані з v_1 . Якщо всі три вершини v_2, v_3, v_4 пов'язані між собою ребрами, то підграф, породжений множиною вершин v_2, v_3, v_4 повний. Якщо якісь дві з трьох вершин (наприклад, v_2, v_3) не суміжні, то підграф, породжений множиною вершин v_1, v_2, v_3 порожній. Розглянемо тепер випадок, коли граф G має вершину v_1 , степінь якої більший числа два.

Тоді в G є три вершини (позначимо їх v_2, v_3, v_4), які пов'язані з v_1 . Якщо ніякі з цих трьох вершин не суміжні, то підграф, породжений множиною вершин v_2, v_3, v_4 , порожній. Якщо якісь дві з трьох вершин (наприклад, v_2 і v_3), пов'язані ребром, то підграф, породжений множиною вершин v_1, v_2, v_3 повний.

Задача 2. Нехай G — граф порядку 50, в якому серед кожних чотирьох вершин знайдеться хоча б одна, суміжна з усіма іншими. Довести, що граф G має вершину степеню 49.

Розв'язання. Із умови задачі виходить, що граф G має вершину, степінь якої не менша числа 3. Нехай u — вершина максимального степеню. Припустимо, що в G є вершини, не пов'язані ребрами з u . Тоді $3 \leq \deg u \leq 48$. Позначимо множину вершин, суміжних з u , через $G(u)$. Оскільки $\deg u \leq 48$, то в G є вершина v , не пов'язана ребром з u . Нехай $u_1, u_2 \in G(u)$. Якщо припустити, що вершини u_1 і u_2 не суміжні, то отримаємо, що четвірка u, v, u_1, u_2 не задовольняє умові задачі. Отже, вершини u_1 і u_2 суміжні (а також попарно суміжні й усі вершини множини $G(u)$). Розглянемо чотири вершини u, v, u_1, u_2 . В цій четвірці є вершина, пов'язана ребрами з усіма іншими. Цією вершиною не може бути ні u , ні v , оскільки вони несуміжні. Отже, або вершина u_1 , або u_2 суміжна з усіма іншими. Але тоді $\deg u_1 > \deg u$, або $\deg u_2 > \deg u$, що неможливо, оскільки u має максимальний степінь. Отримана суперечність доводить твердження.

Задача 3. Нехай G — граф порядку 8, $VG = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ і $\deg v_1 = 1$, $\deg v_2 = 7$, $\deg v_3 = 6$, $\deg v_4 = \deg v_8 = 3$, $\deg v_5 = \deg v_6 = \deg v_7 = 4$. Вказати вершини G , з якими поєднана ребрами v_3 . **Відповідь.** $v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$.

Задача 4. Довести, що коли граф G порядку n ($n \geq 2$) має k ізольованих вершин, то він не має вершин степеню $n - k$.

Задача 5. На площині є шість точок, причому кожна точка поєднана відрізками рівно з двома іншими і серед будь-яких трьох точок хоча б дві поєднані відрізком. Довести, що знайдуться три відрізка, які утворюють трикутник.

Розглянемо деякі задачі, які допоможуть засвоєнню теми «Зв'язні графи». Граф G називають зв'язним, якщо існує маршрут із будь-якої його вершини до будь-якої іншої. Будь-який незв'язний граф G є об'єднанням зв'язних підграфів — компонент зв'язності графа G .

Задача 6. У казковій країні 25 островів, і кожний острів поєднаний мостами не менше, ніж з дванадцятьма іншими островами. Довести, що з будь-якого острова можна перейти по мостах на будь-який інший острів.

Розв'язання. Розглянемо граф G , вершини якого відповідають островам, а дві вершини поєднані ребром, якщо між відповідними островами є міст. Покажемо, що граф G зв'язний. Припустимо супротивне. Нехай граф G — незв'язний і G_1 — його компонента зв'язності найменшого порядку. Тоді $|G_1| \leq 12$, а, значить, степені всіх вершин підграфа G_1 не перевищують число 11. Але за умовою задачі з кожної вершини виходить не менше, ніж 12 ребер. Отримана суперечність доводить, що граф G зв'язний, а, значить, існує маршрут між будь-якими двома вершинами.

Задача 7. Чи є зв'язним граф G порядку $n \geq 3$, який має дві вершини степеня 1, які пов'язані ребром? **Відповідь.** Ні.

Задача 8. Нехай G — граф порядку 9, який має вершину v_1 степеню 8 і вершину v_2 степеню 1. Чи є зв'язним підграф $G - v_1$? **Відповідь.** Ні.

Задача 9. В групі людей із шістнадцяти чоловік кожна людина розмовляє тільки на одній із мов: англійській, німецькій або французькій, причому кожний член групи розмовляє на одній мові не менше, ніж з вісім'ю іншими. Довести, що всі шістнадцять чоловік розмовляють на одній мові.

Задача 10. Довести, що коли в графі G порядку n степені всіх вершин не менші, ніж $\frac{n-1}{2}$, то граф G зв'язний.

Важливою теоремою теорії графів є теорема «про рукостискання». Вона стверджує, що сума степенів вершин графа G дорівнює подвоєній кількості ребер. Цю теорему можна ілюструвати такими задачами.

Задача 11. Чи може в країні, в якій з кожного міста виходить рівно сім доріг, бути рівно двісті доріг між містами?

Задача 12. У футбольному турнірі беруть участь дев'ятнадцять команд і кожна команда повинна провести гру з усіма іншими рівно по одному разу. Довести, що в будь-який момент турніру знайдеться команда, яка зіграла до цього моменту парну кількість матчів (можливо ні одного).

Розглянемо ще одну теорему теорії графів.

Теорема. У всякому графі G порядку n , де $n \geq 2$, не менше двох вершин мають однаковий степінь.

Для закріплення цієї теореми можна розглянути нижчеподані задачі.

Задача 13. Спортивні змагання проводять за коловою системою. Це означає, що кожна пара учасників зустрічається рівно один раз. Довести, що в кожен момент знайдуться хоча б два гравці, які провели однакове число зустрічей.

Задача 14. Нехай M — скінченна множина точок площині і деякі точки цієї множини поєднані відрізками. Довести, що знайдуться хоча б дві точки з M , із яких виходить однакове число відрізків.

Список літератури

1. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов : Учеб.-метод. пособие / О. И. Мельников. — Минск : «ТетраСистемс», 2001. — 144 с.
2. Москалева Ю. П. Введение в спектральную теорию графов : Учебное пособие / Ю. П. Москалева, Ю. С. Самойленко. — Киев : Центр учебной литературы, 2007. — 114 с.

**ПРО ВИКЛАДАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ
ГЕОМЕТРІЇ В НАЦІОНАЛЬНОМУ АВІАЦІЙНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
В РАМКАХ ОСВІТИ АНГЛІЙСЬКОЮ**

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

У Національному авіаційному університеті іноземні студенти можуть за їх вибором навчатися українською, англійською або російською мовою. Вибір мови навчання здійснюється іноземними студентами залежно від їхньої мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. Можливість навчання російською мовою є особливо важливою для студентів з країн СНД, більшість яких достатньо добре володіє цією мовою. Можливість навчання англійською мовою є привабливою для іноземних студентів, які її знають, але ще не встигли як слід опанувати російську та українську мову. Відмітимо, що значна частина іноземних студентів обирає навчання українською мовою.

Слід зауважити, що оскільки англійська мова є однією з офіційних мов ІКАО (Міжнародна організація цивільної авіації), для майбутніх фахівців у галузі авіації дуже важливою є можливість отримання професійної освіти англійською мовою. Існування Проекту англослов'янської освіти НАУ дає можливість залучати до навчання як іноземних студентів, які знають англійську мову, але ще не встигли як слід опанувати російську та українську, так і українських студентів, які добре володіють англійською мовою і зорієнтовані на наступне працевлаштування в авіаційних компаніях, що здійснюють міжнародні перевезення. При цьому іноземні студенти мають можливість навчатися в нашому університеті без проходження мовної підготовки на підготовчому відділенні.

Кафедра вищої та обчислювальної математики починаючи з 1999 року в рамках Проекту англослов'янської освіти забезпечує викладання низки математичних дисциплін за окремими напрямками навчання Аерокосмічного інституту, Інституту комп'ютерних інформаційних технологій, Інституту інформаційно-діагностичних систем і Інституту аеронавігації студентам, для яких викладання всіх предметів здійснюється англійською мовою.

Починаючи з 2007 року нами проводилися дослідження з методики викладання математичних дисциплін іноземним та українським студентам в рамках Проекту англослов'янської освіти. Зокрема, ми досліджували певні особливості викладання англійською мовою деяких розділів дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» і відповідних модулів дисципліни «Вища математика» (див. [1—4]).

Відмітимо перш за все, що в англослов'янських групах навчаються студенти з багатьох країн (в тому числі й України) з різним рівнем знань англійської мови, які не в повному обсязі володіють математичною термінологією. Тому при викладанні математичних дисциплін англійською мовою перш за все потрібно

враховувати, що англійська мова не є рідною як для іноземних, так і для українських студентів.

Також слід враховувати, що більшість вищезгаданих студентів навчалися в середній школі рідною для них мовою. Крім того необхідно пам'ятати про деякі особливості викладання математики в середніх школах відповідних країн. Необхідно також пам'ятати, що значна частина іноземних студентів є носіями мов, для яких є характерними або відмінний від звичного для нас напрямок написання тексту або ієрогліфічна писемність. Крім того, дуже важливим як для викладача, так і для студентів є різноманітність мовної підготовки у мультилінгвальних групах.

Розглянемо основні, на наш погляд, проблеми, що постають при викладанні питань, що відносяться до лінійної алгебри та аналітичної геометрії, студентам англomовних груп.

Зауважимо, що студентам, які навчаються за більшістю технічних напрямів, питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії викладаються в рамках відповідних розділів синтетичної дисципліни «Вища математика». Проте для студентів, що навчаються за напрямами, які вимагають глибшої математичної підготовки, ці питання викладаються в рамках дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». В англomовний проект входять напрями обох типів.

При формулюванні проблем, що постають перед викладачами кафедри вищої та обчислювальної математики під час роботи з іноземними студентами, перш за все слід відмітити певну відмінність у підходах до оцінки значущості різних тем та їх взаємозв'язків, що практикувалися при навчанні цих студентів ще в середній школі в інших країнах і, як наслідок, специфічність їхньої теоретичної і практичної підготовки з деяких питань.

Значна частина проблем, що постають під час викладання іноземним студентам дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» та відповідного розділу дисципліни «Вища математика», пов'язана як із слабким рівнем шкільної підготовки цих студентів саме з геометрії, так і з достатньо поверховим рівнем сприйняття більшістю з них абстрактних питань лінійної алгебри.

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» складається з двох модулів: «Елементи лінійної та векторної алгебри» та «Елементи аналітичної геометрії».

Під час вивчення іноземними студентами модуля «Елементи лінійної та векторної алгебри» в цілому непогано засвоюється мікромодуль «Елементи векторної алгебри», оскільки вони непогано знають векторну алгебру, причому деякі з них підготовлені краще значної частини українських студентів. Зауважимо, що при цьому вони достатньо ефективно використовують теоретичні знання для розв'язування задач. Дещо складнішим для багатьох іноземних студентів є засвоєння мікромодуля «Елементи лінійної алгебри». Відмітимо, що більшість іноземних студентів непогано оперують з визначниками і матрицями. Як правило, рівень сприйняття ними більш

абстрактних питань є набагато нижчим. Значні труднощі у них починаються при вивченні мікромодуля «Лінійні простори та лінійні оператори. Білінійні та квадратичні форми», як на рівні розуміння теоретичного матеріалу, так і при розв'язуванні навіть простих задач. Українські студенти, особливо ті, що навчалися в середній школі в класах з поглибленим вивченням математики, показують дещо кращі результати.

Основні проблеми, що постають під час викладання іноземним студентам модуля «Елементи аналітичної геометрії», пов'язані з слабким рівнем шкільної підготовки цих студентів саме з геометрії і особливо із стереометрії. Тому в більшості іноземних студентів практично відсутнє просторове мислення. Відмітимо, що засвоєння мікромодулів «Пряма на площині» та «Криві другого порядку» є відносно непоганим. Набагато складнішими для засвоєння цими студентами є мікромодулі «Площина і пряма у просторі» та «Поверхні другого порядку». Особливо важкими для вивчення іноземними студентами (на жаль, і українськими також) є мікромодулі «Дослідження алгебричних рівнянь кривих другого порядку» та «Дослідження алгебричних рівнянь поверхонь другого порядку». Ці складнощі, як правило, є наслідком недостатнього рівня навичок оперування квадратичними формами, низького рівня аналітичних навичок при застосуванні квадратичних форм і поганим відчуттям геометричної суті розв'язуваної задачі.

Зауважимо, крім того, що оскільки для українських студентів (і для іноземних також) є важливим володіння і українською термінологією, то при викладанні саме цих питань слід також підкреслювати певну специфіку термінів (канонічні рівняння прямої — *symmetric equations of the straight line*, рівняння прямої у відрізках — *intercept equations of the straight line* і т. д.). При роботі в таких групах викладачам також потрібно пам'ятати, що бажано значну увагу приділяти виробленню навичок розпізнавання основних форм рівнянь прямої на площині, площини і прямої в просторі. Відмітимо при цьому, що при чіткому викладі викладачем алгоритму розпізнавання найпростіших їх типів значна частина іноземних студентів достатньо добре засвоює і застосовує ці навички. Особливо хороші результати дає використання різноманітних опорних конспектів.

Слід відмітити також більшу готовність іноземних студентів порівняно з українськими студентами використовувати системи комп'ютерної математики і певний рівень навичок застосування цих систем. Тому для хоча б часткової компенсації недоліків загальної математичної підготовки цих студентів ми рекомендуємо їм активне використання систем комп'ютерної математики.

У цілому необхідно відмітити, що іноземні студенти, як правило, достатньо добре організаційно підготовлені для навчання за кредитно-модульною системою.

Особливо важливим для іноземних студентів, що не володіють або володіють дуже погано російською та українською мовами, є наявність доступних для них підручників, що містять необхідний теоретичний матеріал з

великою кількістю розв'язаних прикладів і необхідну термінологію з перекладом.

Відмітимо, що у зв'язку з упровадженням англомовної освіти постала нагальна потреба щодо забезпечення навчального процесу навчально-методичною літературою, написаною англійською мовою для студентів, що не є носіями цієї мови. В останні роки групою викладачів кафедри вищої та обчислювальної математики створено навчальний посібник англійською мовою в чотирьох частинах, який повністю забезпечує супровід курсу вищої математики для навчання за кредитно-модульною системою студентів усіх технічних спеціальностей, зокрема розділи, пов'язані з лінійною алгеброю та аналітичною геометрією викладено в [5, 6]. Крім того, для повного забезпечення викладання дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» проводиться робота по створенню навчального посібника, що є аналогом посібника [7] для англомовних студентів.

Список літератури

1. Карупу О. В. Про деякі особливості викладання математичних дисциплін англомовним студентам / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки. — 2011. — Вип. 83. — С. 76—79.
2. Карупу О. В. Деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — № 2/2 (56). — Харьков : Технологический центр, 2012. — С. 11—14.
3. Карупу О. В. Про деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. — 2013. — № 8 (261). — С. 52—57.
4. Карупу О. В. Аналіз практики викладання вищої математики українським та іноземним студентам в Національному авіаційному університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. Vol.5. — Budapest: Society of Cultural and Scientific Progress in Central and Eastern Europe, 2013. — P. 88—92.
5. Grebeniuk M.F., Karupu O.W. Bilinear and quadratic forms in geometry. Manual. — Kyiv : NAU, 2004. — 74 p.
6. Higher mathematics. Part 1: Manual / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta.— Kyiv: NAU, 2006. — 268 p.
7. Денисюк В. П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник / В. П. Денисюк, М. Ф. Гребенюк, О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. К. Репета. — Київ : НАУ (подано до друку).

РГР ЯК ВИД ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Т. І. Клімова, Т. М. Сапронова

Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна

klimtativ@yandex.ru

У зв'язку з реформуванням вузівського освітнього процесу, що полягає в переході на багаторівневу систему «бакалавр — магістр — дипломований фахівець», виникає ряд проблем, зокрема це змістова проблема навчального процесу в аспекті ефективного розподілення та подальшого використання часу на самостійну роботу.

На даний час у викладанні вищої математики у виші явно є видимим протиріччя, що вимагає нагального вивчення і розв'язання. З одного боку, державні стандарти спеціальностей зобов'язали розширювати кількість розділів, що викладалися, з вищої математики та поглиблювати їх зміст, а також вводити додаткові розділи для окремих спеціальностей. З іншого боку, різко скорочується кількість годин на аудиторну роботу; базова підготовка курсантів з вищої математики неухильно погіршується. Тому об'єктивно актуальною стає самостійна робота курсантів, починаючи з першого дня занять у виші. Студент повинен засвоїти курс вищої математики в необхідному обсязі незалежно від кількості прослуханих лекцій та аудиторних занять. Причому кожен курсант повинен отримати конкретне завдання. Рекомендації типу «читайте підручники самостійно» не є дієвими під час розв'язання проблеми підвищення ефективності самостійної роботи.

У вирішенні цієї проблеми представляються доцільними наступні дії:

— наявність конспекту лекцій, написаних власноруч, а також можливість відновити пропущену лекцію, скориставшись роздрукованим її варіантом з електронного носія;

— набір зразків і завдань для самостійного розв'язання.

Зміст набору завдань визначається програмними вимогами і можливою на даному етапі мірою складності. Ця робота виконується курсантами за настановою викладача, але без його безпосередньої участі. Кафедрою вищої математики НУ ОМА практикується видавання розрахунково-графічних робіт (РГР) в якості самостійної роботи, створеної для поглиблення та систематизації теоретичного матеріалу з основних тем курсу. Суть РГР полягає у виконанні найбільш типових розрахунків. Основна мета роботи — закріплення теоретичних знань з дисципліни. Працюючи над РГР, курсант формує вміння і здібності, які будуть важливими в майбутньому під час розв'язання складніших завдань (дипломної роботи, дисертації, наукового дослідження тощо).

Кожен курсант отримує окремий варіант РГР, який містить по одному завданню з кожної теми і виконує його за межами навчального розкладу. Упродовж семестру викладач проводить зустрічі — обговорення щодо

написання РГР. Якщо курсант має слабку підготовку, то за індивідуальною вказівкою викладача зміст РГР може бути спрощено.

РГР на першому курсі в другому семестрі навчального плану судномеханічного факультету містить 25 практичних завдань з різних розділів програми (робоча програма, на жаль, не передбачає наявності РГР в першому семестрі), включаючи цілий ряд прикладних завдань, орієнтованих на професію. Трудомісткість цієї РГР для курсантів на першому курсі СМФ складає 12 годин. В якості рекомендацій ми пропонуємо курсантам короткий зміст теоретичної частини і зразок виконаної РГР.

Високий рівень математичної підготовки — необхідна умова успішності й затребуваності випускника на ринку праці. Працедавці чекають від молодих фахівців відповідальності, здатності логічно мислити, аналізувати і прогнозувати результати своєї діяльності. І математика якомога краще сприяє формуванню цих здібностей. На заняттях в процесі розв'язку поставлених завдань у студентів формується системність мислення і дій, здібність до аналізу, абстрагування, систематизації. Проте, нерідко студенти задаються питанням, навіщо їм математика, як вона знадобиться їм у подальшому житті, як знання формул і теорем допоможуть в обраній спеціальності? Відповісти на ці питання, а також показати студентам зв'язок математики з їх майбутньою професією, змінити їх емоційно-почуттєве ставлення до предмету дозволяють завдання прикладного характеру. Прикладні завдання — це завдання з різних сфер життя, не пов'язаних з математикою, але розв'язувані за допомогою математичних методів.

Завдання повинні відповідати меті та завданням курсу вищої математики. Наприклад, тема «Похідна і диференціал» займає одне з центральних місць у цьому курсі. Але її вивчення дається курсантам насилу. Для відпрацювання використання табличних значень похідних і правил диференціювання, знаходження найбільшого і найменшого значень, можна використовувати наступні завдання:

1. Сигнал з судна можна відстежити в морі на відстані 1 милі. Судно А прямує на південь зі швидкістю 6 миль на годину та в теперішній час знаходиться із заходу від судна В, що прямує на захід зі швидкістю 7 миль на годину. Чи будуть судна на достатній відстані для приймання сигналу?

2. Судно рухається зі швидкістю 8 км на годину та кидає якір. Глибина моря 1 км. Якір дістається дна, та ланцюг іде від нього до судна по прямій. Як швидко скочується ланцюг тоді, коли під водою його вже буде 2 км?

У дослідницьких завданнях диференціальних рівнянь прикладної математики морського флоту розглядаються: циркуляція руху морського судна; динамічний стан троса такелажу; локальна статична поведінка навігаційного супутника; динамічна поведінка вітрового навантаження на корпус судна; процес постановки судна на якір та інші дослідницькі завдання на морському флоті.

Під час вивчення даної теми можна використовувати завдання такого типу:

1. Динамічний стан газової суміші в судновому двигуні внутрішнього згоряння визначається диференціальним рівнянням

$$y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}.$$

Визначити кінематичний стан газової суміші відносно постійних параметрів.

2. Динамічне рівняння сигнальної ракети представляється диференціальним рівнянням $y' = 10^{x+y}$. Визначити кінематичне рівняння сигнальної ракети відносно постійних параметрів.

Залучення курсантів до активної навчальної діяльності, пов'язаної із самостійним пошуком знань, є ефективним шляхом активізації їхнього навчання та інтелектуального розвитку. Але під час планування питань для самостійного опрацювання викладачеві слід насамперед звертати увагу на наявність методичних рекомендацій за даними темами та відповідної літератури.

Список літератури

1. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; За заг. ред. П. П. Овчинникова; Пер. з рос. П. М. Юрченка. — 3-те вид., випр. — Київ : Техніка, 2007. — 600 с.

2. Вища математика, Збірник завдань і прикладів виконання розрахунково-графічних робіт / Попов В. Г. та ін. : у 2-х ч. — Одеса, 2012.

МАТЕМАТИЗАЦІЯ. НЕБЕЗПЕКИ НА МІСЦЯХ

С. М. Лапач

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

lapach@ukr.net

«Для математизации новой отрасли знания оказывается необходимым и соответствующее развитие математического аппарата»

М. А. Розов [10]

«Когда мы ставили перед собой какую-нибудь задачу, я всегда прежде всего стремился понять ее физический и даже инженерный смысл...»

Норберт Винер [12]

Проблема: відсутність розуміння особливостей взаємодії математичних дисциплін з галузевими науками у середнього науковця.

Мета. Означити небезпеки в процесі протікання математизації, які стосуються широких кіл дослідників, і вказати на можливі напрямки боротьби з ними.

Стан. Розвиток сучасної науки зокрема і цивілізації в цілому нерозривно зв'язано з принципом математизації пізнання. Це не поминуло навіть сферу розваг: сучасні фільми і комп'ютерні ігри неможливо створювати без використання різноманітних математичних моделей.

Пуанкаре вважав, що повна математизація є ідеальною фазою розвитку будь-якої наукової концепції [8]. Зрозуміло, що повна математизація всього знання неможлива, але окремі області можуть приймати закінчену математичну форму.

Слід пам'ятати, що математична формалізація ні в якому разі не може бути самоціллю: це тільки інструмент пізнання і організації наукового знання. Формалізація не повинна вихолощувати смисловий зміст. Без конкретного емпіричного значення рівняння не є теорією в конкретній науці. Вважається, що математизація в науці грає ту саму роль, що стандартизація в техніці, приводячи до формалізованих схем розв'язання досить складних проблем. Особливості процесу математизації розглядаються в численних роботах, зокрема в [2, 11].

Математизація і математизатори. Розвиток науки і специфіка змін у наукових парадигмах має свої особливості [3, 9], які деформують цей процес відносно ідеально бажаного протікання. Розглянемо деякі негативні тенденції цього процесу, які заважають ефективному використанню математичних методів.

Одночасно розвиваються дві негативні тенденції в застосуванні математики і технічних наук, розміщені на протилежних кінцях спектру її сприйняття. З одного боку, математика сприймається універсальним інструментом придатним для використання в будь-якій науці. При цьому її засоби сприймаються без будь-яких застережень, пристосувань, урахування особливостей задачі, де вона використовується. У багатьох випадках не

враховуються ті передумови і обмеження, які дають право взагалі використовувати ці методи. Чи варто казати, що це в багатьох випадках приводить до необґрунтованих або й помилкових висновків. Проблеми цієї негативної тенденції буде розглянуто в окремій роботі.

З другого боку, математика вважається абсолютно непотрібною наукою, а її застосування слугує просто для «прикраси» наукової роботи, чи для задоволення якихось формальних вимог. Ця тенденція досить давня, широко розповсюджена, добре описана в [1]. У технічних науках теж зустрічається досить часто, хоча в більшості випадків приймає дещо завуальовану форму. Носії цієї тенденції спокійнісінько собі користуються алгеброю, інтегральним і диференціальним численням. Але, все, що виходить за вказані межі категорично не сприймається, вважається нікчемними вигадками. При цьому автору доводилося зустрічатися з особами, які в категорію «нікчемних вигадок» заносили такі досить старі науки як математична статистика, теорія ймовірностей і теорія графів.

Аналізуючи процес математизації недостатню увагу приділяють особливостям самого процесу проникнення математики в спеціальні науки. У цьому процесі найбільше суперечностей викликають два питання. Перше, як застосовувати математичні засоби і друге, хто буде займатися їх застосуванням. Справа в тому, що навіть застосування відомого математичного методу до нової прикладної задачі є науковою задачею на погляд академіка АН СРСР (зараз РАН) Є. П. Велихова. Крім того, з підвищенням складності процесів, які вивчаються, все частіше формують задачі, які потребують не простого використання існуючого математичного апарату, а його видозміни, або й створення нового [10].

На жаль, більшість дослідників у спеціальних науках вважають, що всі необхідні окремим наукам методи і засоби в математиці вже існують, їх просто треба взяти і застосувати для конкретної задачі. Крім того, вони, як правило, не звертають увагу на умови застосування методу, що робить отримані висновки необґрунтованими або й помилковими.

Насправді в спрощеному вигляді процес використання математичних методів проходить наступні етапи: пряме запозичення існуючого методу; пристосування методу до умов конкретного використання; розроблення власних методів; виникнення спеціалізованих наук чи підрозділів наук.

Як правило, на першому етапі при прямому запозиченні в процесі формалізації приходиться пристосовувати задачу до методу, що може привести до вихолощування суті задачі, заміни розв'язку задачі застосуванням методів. Така ситуація розглядається в [5] на прикладі регресії Лонглі, коли замість визначення конкретної структури рівняння намагаються отримати стійкі, хоча і зміщені оцінки для погано обумовленої матриці.

Часто це приводить до відмови використання методів, або до бездумного відкидання умов їх застосування. В обох випадках дослідник залишається в програвші. Та й розвиток методу математиками з орієнтацією на внутрішні

потреби і вимоги без урахування потреб практики може привести в кінцевому результаті до віддалення конкретного методу від дослідників і зменшення ареалу його застосування. Як приклад, можна привести ситуацію з теорією планування експериментів. Виникнувши з практичних потреб у зв'язку з необхідністю в експериментальних багатофакторних дослідженнях отримувати при обмежених ресурсах гарантований і надійний результат наука почала швидко поширюватись. Проблеми при використанні в реальних задачах потребували розвитку. Але основна тенденція розвитку відбувалася в теоретичних інтересах математики, а не експериментальних досліджень, що привело до різкого скорочення ареалу використання теорії планування експериментів. У результаті значну частину експериментальних досліджень не можна вважати відповідними сучасному науковому рівню. Потреба прикладних наук реалізувалась у розвитку робастного планування експериментів і відповідного його поширення [6], але вже без участі теоретиків.

Також можна вказати на протиріччя при використанні класичного регресійного аналізу в задачах технології машинобудування, які змусили замінити концепцію «чорного ящика» концепцією «сірого ящика» і перейти до оцінки адекватності моделі за межами математичної статистики [4, 7].

Крім того, просте запозичення не дає можливості розвитку конкретної науки за рахунок підвищення рівня абстрагування і розвитку теорії при виконанні процесу формалізації.

На думку Розова займаються процесом математизації особливі люди: «Математизация породила в науке, если не особую профессию, то особую роль, особую фигуру, фигуру математизатора. Это человек, работающий на стыках наук, математик, ставший биологом, геологом или гуманитарием и в то же время сохранивший установки и принципы математического мышления. Он призван как бы сидеть на двух стульях, согласуя то, что, вообще говоря, трудно согласуется; нередко это роль конфликтная, требующая большой разносторонности и этической или аксиологической культуры».

Дійсно, до такого типу математизаторів можна віднести Норберта Вінера, який часто скаржився на нерозуміння колег: «Боюсь, что моя готовность застрелить математического зверя в тех случаях, когда я не мог затравить его по всем правилам, шокировала и его, и некоторых других моих английских друзей» [12].

Перший завідувач кафедри прикладної математики НТУУ «КПІ» Є. Н. Вавілов вважав, що завданням кафедри є підготовка саме таких математизаторів.

Але є й другий клас математизаторів: вони походять з конкретної науки, але для успішної роботи в ній оволодівають математикою в достатній мірі для її застосування і розвитку. До таких належить кораблебудівник А. М. Крилов.

Положення цих людей досить складне, вони часто стають чужинцями в обох середовищах.

Висновки. Процес математизації часто стикається з труднощами, викликаними нерозумінням особливостей його протікання і ролі математизатора в ньому. Успішне застосування математики вимагає пристосування математичних засобів до потреб конкретної науки і наявності осіб, які будуть цим займатись. На особливості процесу математизації необхідно звертати увагу в тих курсах, які мають відношення до процесу пізнання, а саме курс філософії і курс «Основи наукових досліджень» для магістрів, а також у відповідних курсах для аспірантів. Майбутні науковці мають бути ознайомлені з процесом застосування математичних методів у спеціальних науках, правильним вибором методів, небезпеками, які можуть виникнути при неправильній формалізації чи не врахуванні умов застосування. Вони мають розуміти, що можливе виникнення необхідності розвитку певного математичного методу чи навіть розробки нового, виходячи з потреб конкретної прикладної науки.

Список літератури

1. Арнольд В. И. Что такое математика? / В. И. Арнольд. — 2-е изд., стереотип. — Москва : МЦНМО, 2008. — 104с.
2. Кедровский О. И. Методы построения теоретических систем знания: диалог математика и философа / О. И. Кедровский. — Киев : Вища школа. — 1982. — 166с.
3. Кун Т. Структура научных революций / Томас Кун. — Москва : Изд. АСТ, 2001. — 608с.
4. Лапач С. М. Регресійні моделі процесів різання: специфікація і адекватність / С. М. Лапач // Друга міжнародна науково-практична конференція «Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем» : Тези доповідей. — Чернігів, 2012. — С. 34—35.
5. Лапач С. М. Проблеми визначення структури рівняння регресії в множинному регресійному аналізі / С. М. Лапач, С. Г. Радченко / Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 1 (51). — С.150—155.
6. Лапач С. Н. Основные проблемы построения регрессионных моделей / С. Н. Лапач, С. Г. Радченко // Математичні машини і системи. — 2012. — № 4. — С. 125—133.
7. Лапач С. М. Проблеми побудови регресійних моделей процесів різання металів / С. М. Лапач // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Машинобудування». — 2014. — № 3 (72). — С. 40—47.
8. Пуанкаре А. О науке / Анри Пуанкаре. — Москва : Наука, 1983. — 560 с.
9. Поппер К. Р. Предположения и утверждения: рост научного знания / К. Р. Поппер. — Москва : АСТ, 2004. — 638 с.
10. Розов М. А. Проблемы эмпирического анализа научных знаний / М. А. Розов. — Новосибирск : Наука, 1977. — 221 с.
11. Рузавин Г. И. Математизация научного знания / Г. И. Рузавин. — Москва : Мысль, 1984. — 207 с.
12. Винер Н. Я — математик / Норберт Винер. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 336 с.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ФИЗИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

Т. В. Маловичко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Для физиков теоретическая подготовка является не менее важной, чем умение решать задачи. При этом специалист должен не только знать определения и формулировки теорем, но и уметь их доказывать, глубоко понимать логические связи между основными объектами. Таким образом, контрольных работ и типовых расчётов, направленных, прежде всего, на контроль умений и навыков решения задач, недостаточно для текущего контроля подготовки специалистов физических специальностей. Особую важность в этом свете приобретает устный коллоквиум – собеседование со студентом по теоретическому материалу.

Коллоквиум не только позволяет учесть степень владения теоретическим материалом при допуске к экзамену, но и позволяет студенту заблаговременно понять, что именно от него будет требоваться на экзамене, выявить пробелы в теоретической подготовке и недостаточное понимание материала. Не секрет, что многие студенты путают понимание теории с её бездумным заучиванием. Устное собеседование с преподавателем позволяет бороться с этим, позволяет студенту глубже понять материал, обратить внимание на основные взаимосвязи и тонкости доказательств. Что немаловажно для подготовки будущих преподавателей, именно регулярное проведение коллоквиумов развивает также устную речь, борется с косноязычием. Ведь преподаватель должен не только сам понимать материал, но и уметь его связно, образно и живо объяснить слушателям. Эти навыки отлично развиваются в ходе устной беседы с преподавателем.

Часто устный коллоквиум заменяют письменным. Это позволяет многократно ускорить процедуру проведения коллоквиума. Безусловно, коллоквиум даже в письменной форме более полезен, нежели его отсутствие. Но зачастую студенты либо списывают, либо вызубривают материал, совершенно не вдумываясь в его смысл. Часто можно видеть хорошую работу, автор которой едва ли ориентируется в написанном. Часто для выявления подобной ситуации достаточно всего лишь спросить студента об использованных обозначениях. Увы, многие студенты даже не понимают, что означают символы в их работе. Таким образом, письменный коллоквиум никоим образом не может заменить устный, ибо никак не борется с бездумным заучиванием материала.

Если время позволяет, то целесообразно разбить материал на несколько коллоквиумов. Это позволяет студенту при подготовке к следующему коллоквиуму учесть выводы, сделанные им при сдаче предыдущего коллоквиума. Он уже лучше представляет, что именно от него хочет

преподаватель, более тщательно разбирает материал, обращает внимание на более тонкие связи внутри изучаемого материала. Более того, регулярные беседы с преподавателем и наблюдение за ответами других студентов, позволяют развить устную речь. К сожалению, проведение устного коллоквиума занимает очень много времени. Поэтому проведение нескольких коллоквиумов за семестр хоть и желательно, но не всегда осуществимо на практике. Таким образом, можно рекомендовать проводить устные коллоквиумы на физических специальностях не реже раза в семестр [1].

При изложении теоретического материала следует всячески подчёркивать общие идеи, показывать не только, как именно доказываются отдельные теоремы, но и зачем они нужны, какие вопросы возникают перед исследователем и какие ответы на них даёт теория. Всё это развивает логическое мышление и готовит студентов к самостоятельным исследованиям.

К сожалению, физические специальности вузов в настоящее время не пользуются высокой популярностью у абитуриентов, в связи с чем отмечаются как недоборы и низкое качество математической подготовки набранных студентов, так и их низкая мотивация. Однако, количество часов на изучение математического анализа выше, чем на технических специальностях, что даёт возможность выделить на первых занятиях время на повторение необходимого школьного материала. Особое внимание при этом рекомендуется уделить тригонометрии, так как необходимость в её использовании возникает на протяжении всего курса математического анализа. Для этого рекомендуется отдельную лекцию уделить рассмотрению наиболее часто используемых тригонометрических формул, показать, как одни из них выводятся из других, научить студентов пользоваться единичной окружностью для вычисления значений основных тригонометрических функций. Также рекомендуется уделить внимание повторению числовых и рациональных дробей, степеней, логарифмов, построению графиков элементарных функций, преобразованию графиков.

Особое внимание следует обращать на иллюстрирование теории уместными физическими примерами. Студенты должны видеть, что математический анализ является не оторванной от жизни дисциплиной, а совершенно необходимым инструментом для физика. Совершенно необходимо показывать, что как неопределённый интеграл Римана, так и кратные и криволинейные интегралы возникают из таких прикладных задач, как вычисление пути по известной скорости, определение массы тела, центра масс тела, моментов инерции, статических моментов, работы силы по перемещению материальной точки. Чем более сложным и абстрактным является рассматриваемый объект, тем большим откровением для студентов становится его связь с физикой. Например, использование преобразования Фурье для решения уравнения колебаний струны зачастую является неожиданностью для студентов, склонных считать его сложным и бесполезным.

Список литературы

1. Маловичко Т. В. О пользе коллоквиума для физико-математических специальностей вузов / Т. В. Маловичко // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ : Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — Київ : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 198—199.
2. Копылов А. Н. Коллоквиум как средство контроля над результатами обучения в высшей школе / А. Н. Копылов // Аспирант и соискатель. — 2011. — №2. — С.108—112.
3. Буланова-Топоркова М. В. Педагогика и психология высшей школы: учебное пособие / М. В. Буланова-Топоркова. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. — 544 с.

ГОТОВНІСТЬ І КУРСУ ДО ВИВЧЕННЯ ПРЕДМЕТІВ У БІЛІНГВАЛЬНОМУ РЕЖИМІ ЗА ДАНИМИ СОЦІАЛЬНОГО ОПИТУВАННЯ

Г. В. Мамонова, О. А. Шараєнко

Національний університет державної податкової служби України,

Ірпінь, Україна

olia1209.os@gmail.com

У третьому тисячолітті, з розвитком інформаційних технологій і їх глобальним поширенням у всі сфери життя людини, володіння інформацією стало важливим аспектом у становленні успішної людини. «Інформація, як вода, завжди тече згори донизу — від того, хто знає більше, до того, хто знає менше» — писав японський письменник Кодзі Судзукі у своєму романі «Дзвінок» [1].

Навчання у білінгвальному режимі завжди було і залишається перспективним. У всьому освітньому просторі, і Україні зокрема, використовують міжнародну мову — англійську — у діловому мовленні та в повсякденному житті. Таким чином, студенти автоматично готують себе до опанування магістерських програм англійською мовою. При визначенні пріоритетів вступу у вищі навчальні заклади абітурієнти та їх батьки приділяють увагу тим навчальним закладам та тим напрямкам підготовки, для яких є перспектива отримання диплому міжнародного зразка. Важливим є можливість навчання у закордонних вишах-партнерах. Міжнародна співпраця Національного університету державної податкової служби України (далі — НУДПСУ) дає можливість студентам навчатись у таких Європейських ВНЗ: Академія фінансів у Варшаві (Польща); Університет у м. Ополе (Польща); Університетський коледж Салесіан де Сарріа (Іспанія); Російський університет дружби народів; АВЕQ Академія у м. Кельн (Німеччина); Університет Париж XIII (Франція); Університет у м. Анже (Франція) [2].

Одним з важливих кроків, що дозволить студентам адаптуватись до міжнародних навчальних програм є навчання в білінгвальному режимі — викладання навчальної дисципліни двома мовами (англійською та українською). НУДПСУ вже понад 10 років має досвід такого навчання.

Задля визначення готовності студентів до навчання у двомовному режимі між студентами, які навчаються на 1-му курсі Навчально-наукового інституту економіки, оподаткування та митної справи НУДПСУ в групах з поглибленим вивченням англійської мови, було проведено анкетування. Опитування було проведено з метою аби визначити, наскільки допомагають знання, отримані в школі, навчатися в білінгвальному режимі. Обсяг вибірки становить 50 осіб. Серед респондентів: хлопців — 40%, дівчат — 60%, українців — 100%. Вік опитуваних від 17 до 19 років.

Першим запитанням, яке ми задали першокурсникам, було: «Чи допомагають Вам знання з іноземної мови, отримані у школі, під час навчання в університеті?» Були отримані такі відповіді: 55 % опитуваних задоволені, що вивчали іноземну мову в школі, 22,5 % — шкодують, що не вивчали іноземну мову у школі і 22,5 % — не шкодують, що не вивчали іноземну мову у школі.

Звідси ми бачимо, що більше половини студентів ще в школі свідомо підходили до цього питання.

Проте, з огляду на рівень набутих раніше знань з іноземної мови, з вивченням предмету технічного характеру у білінгвальному режимі виникали певні труднощі, тому 50 % студентів вважають, що починати проводити навчання у такому режимі необхідно з 2 курсу, 22,5 % — з 1-го курсу, 27,5 % — з 3-го курсу.

У порівнянні із звичайною дисципліною, студенти 1-го курсу на підготовку домашнього завдання з предмету, що вивчається у білінгвальному режимі, витрачають більше сил та енергії. 72,5 % опитаних потребують удвічі більше часу, лише 16,5 % витрачаються однакову кількість годин на підготовку.

Запитуючи студента першого курсу «Чи знадобляться Вам знання, які ви отримали у групі з поглибленим вивченням іноземної мови, у Вашому майбутньому?» Відповідь була одноголосна : «Так, звичайно, оскільки я маю перевагу перед студентами, що навчаються у звичайній групі».

На першому курсі у I навчальному семестрі в студентів НУДПСУ в білінгвальному режимі викладається 1 дисципліна — «Вища математика для економістів». Наявність навчально-методичних матеріалів є необхідною складовою вивчення (табл. 1).

Таблиця 1

Чи виникали у Вас труднощі в пошуку літератури, підручників, за допомогою яких Ви готувались до пари?

Ні, інформації вистачало у підручниках та мережі Інтернет	66 %
Ні, вистачало лекційного матеріалу	16,5 %
Так, важко було знайти необхідні матеріали	16,5 %

Опитування свідчить, що учні, які складали державний іспит для вступу до вищого навчального закладу — Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) — з англійської мови, приділяють більшу увагу до самостійного вивчення іноземних мов, що збільшує їхні шанси у майбутньому навчанні. Отже, варто відзначити важливість здачі ЗНО з англійської мови у формуванні майбутніх спеціалістів України.

Зрозуміло, що для більшості першокурсників двомовність є новацією, тому не дивно, що більша частина опитаних не мають жодних пропозицій щодо поліпшення викладання предметів у білінгвальному режимі. Але студенти зрозуміли, що необхідно самовдосконалюватись, а саме:

- 1) розв'язувати більшу кількість практичних завдань самостійно;
- 2) читати не тільки наукову, але й художню літературу англійською мовою;
- 3) переглядати відеоматеріали корінних носіїв англійської мови.

Список літератури

1. Офіційний сайт електронної бібліотеки «ЛитМир» книга Кодзі Судзукі «Дзвінок» [Електронний ресурс]. Режим доступу : <http://www.litmir.co/br/?b=116075>
2. Офіційний сайт Національного університету державної податкової служби України [Електронний ресурс]. Режим доступу : <http://asta.edu.ua/>

ДО ПИТАННЯ ПРО ІНТЕГРАТИВНІ ЗВ'ЯЗКИ МАТЕМАТИКИ ТА СПЕЦДИСЦИПЛІН

А. З. Мохонько, Л. С. Васіна, В. Д. Мохонько

Національний університет «Львівська політехніка»,

Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка»,

Львів, Україна

ludavhome@gmail.com

Курс Вищої математики у технічних вишах традиційно належить до базових теоретичних дисциплін. Тим не менше, кількість годин у навчальних програмах все зменшується. А перед викладачем стоїть проблема дати студентам знання і виробити вміння на рівні прикладного математичного забезпечення спеціальних дисциплін.

Для практичної реалізації цієї задачі пропонуємо підхід, який починається з формування прикладних математичних знань і включає такі три етапи:

1-й — об'єднання окремих понять, зв'язків, концепцій у певну взаємопов'язану і взаємозумовлену структуровану систему, у якій ураховано результати аналізу діючих програм, дослідження досвіду викладачів, аналіз текстів підручників, внутрішню логіку навчального матеріалу тощо;

2-й — відбір таких прикладних задач зі спеціальних дисциплін, у яких використовуються спеціальні поняття або вже відомі студентам, або такі, що легко означаються й відповідають математичним моделям і методам розв'язування, доступним студентам;

3-й — вивчення ефективних підходів до комп'ютерної реалізації технічних розрахунків, зокрема, можливостей використання прикладних математичних програм, візуалізації графічних побудов, використання електронних підручників тощо.

Результатом є методика роботи, яка спирається на структурні схеми та дидактичні таблиці інтегративних зв'язків знань з математики і спеціальних дисциплін. Приклад структурної схеми інтеграційних зв'язків знань з «Лінійної алгебри» та спеціальних дисциплін:



Також приклад таблиці інтегративних зв'язків для розділу «Диференціальні рівняння» на прикладі електротехнічних спецдисциплін, які аналізуються за допомогою пакету MathCAD:

<i>Математичні знання</i>	<i>Знання із спеціальних дисциплін</i>
ДР процесів на основі їх опису та законів, яким ці процеси підпорядковуються. Лінійні ДР 1-го порядку.	Знаходження закону зміни сили струму в колі з синусоїдальною ЕРС.
ЛОДР та ЛНДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходження коренів характеристичних рівнянь. Залежність вигляду загального розв'язку від коренів характеристичного рівняння. Диференціальні рівняння коливань. Наближене розв'язування задачі Коші (методи Ейлера і Рунге — Кутти). Операційний метод.	Вільні та вимушені коливання в ідеальному та реальному коливальному контурі (резонансний і нерезонансний випадок, згасальні коливання). Метод комплексних амплітуд при розв'язуванні диференціальних рівнянь коливань. Аналіз лінійних пристроїв: модель задачі на визначення структури вихідного сигналу при заданих параметрах вхідного сигналу й відомій схемі лінійного пристрою.
Системи диференціальних рівнянь. Метод Ейлера розв'язування систем лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами. Визначення характеру точки спокою.	Аналіз нелінійних аналогових пристроїв (автономні системи нелінійних ДР).
<i>Використання прикладних комп'ютерних програм (MathCAD)</i>	
Побудова графіків коливань. Розв'язування ДР 2-го порядку (опис роботи автогенератора) за допомогою різних функцій MathCAD: табличне і графічне представлення результату. Розв'язування рівнянь коливань (зведення до системи двох рівнянь першого порядку, аналітичний розв'язок, чисельний розв'язок, графічне представлення результату) на прикладі задачі про гармонічний осцилятор. Знаходження аналітичного розв'язку ДР за допомогою перетворення Лапласа.	
Лінійна однорідна система трьох ДР (стохастичні коливання в детермінованих автономних динамічних системах): розв'язування методом Рунге — Кутти з побудовою графіків перехідного процесу і фазових траєкторій.	
Побудова фазових кривих лінійних автономних систем (графічна ілюстрація). Визначення характеру точки спокою (знаходження власних значень матриці системи) та побудова фазових кривих в околі точки спокою. Графічна ілюстрація векторних полів автономних систем.	

Проілюструємо методи реалізації інтегративних зв'язків на прикладі одного із завдань практичної роботи.

Завдання 1. Вільні електричні коливання описуються диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0,$$

де δ — коефіцієнт затухання, ω_0 — циклічна частота вільних коливань. Змодельовати коливання за часовий проміжок $t \in [0, T]$ при початкових умовах $I(0) = I_{0,0}$, $I'(0) = I_{0,1}$ при заданих в індивідуальних варіантах чотирьох наборах значень параметрів задачі, використовуючи функцію **odesolve** пакету MathCAD і побудувати графіки розв'язків. Провести аналіз результатів.

N інд. завд.	Варіант набору значень параметрів	δ	ω_0	$I_{0,0}$	$I_{0,1}$	T
00	I	2,56	2,18	0,05	10	5
	II	2,56	2,56	0,05	10	5
	III	2,56	7,68	0,05	10	2
	IV	0	1,34	0,05	10	20

Приклад виконання завдання 1

Для того, щоб за допомогою функції **odesolve** знайти розв'язок задачі Коші для даного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку необхідно:

- ввести ключове слово **Given** для використання блока розв'язку;
- Задати диференціальне рівняння $\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$ або

$I''(t) + 2\delta \cdot I'(t) + \omega_0^2 \cdot I(t) = 0$ і початкові умови $I(0) = I_{0,0}$, $I'(0) = I_{0,1}$;

- Для знаходження розв'язку ввести **<I:= >** та викликати вбудовану функцію **odesolve (t,b)**;

- Побудувати графік отриманого розв'язку [курсор на місце графіка, кнопка відображення панелі інструментів **Graph** (Графіки), **X-Y Plot** (двовимірний декартів графік)];

- після натискання на **ОК** на екрані з'являється графік розв'язку.

На рис. 1, 2, 3, побудовано графіки розв'язків ЛОДР, які описують вільні коливання в реальному контурі (при наявності опору) при однаковому значенні коефіцієнта затухання δ , а на рис. 4 — графік розв'язку диференціального рівняння коливань в ідеальному контурі (без втрат):

Given
 $\Gamma''(t) + 5.12 \cdot \Gamma'(t) + 4.75 \cdot I(t) = 0$
 $I(0) = 0.05 \quad \Gamma(0) = 10$
 $I := \text{odesolve}(t, 5)$

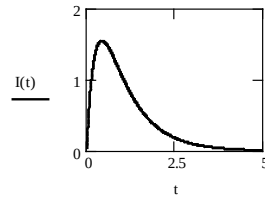


Рис. 1

Given
 $\Gamma''(t) + 5.12 \cdot \Gamma'(t) + 6.5536 \cdot I(t) = 0$
 $I(0) = 0.05 \quad \Gamma(0) = 10$
 $I := \text{odesolve}(t, 5)$

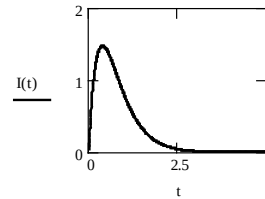


Рис. 2

Given
 $\Gamma''(t) + 5.12 \cdot \Gamma'(t) + 59 \cdot I(t) = 0$
 $I(0) = 0.05 \quad \Gamma(0) = 10$
 $I := \text{odesolve}(t, 2)$

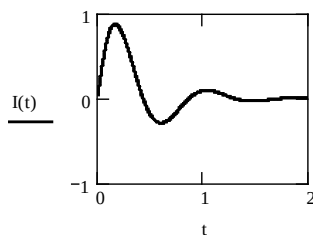


Рис. 3

Given
 $\Gamma''(t) + 1.8I(t) = 0$
 $I(0) = 0.05 \quad \Gamma(0) = 10$
 $I := \text{odesolve}(t, 20)$

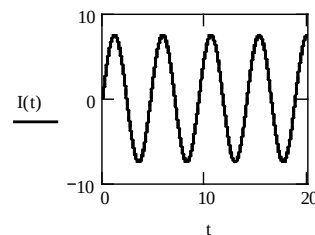


Рис. 4

Аналізуючи графіки розв'язків робимо **висновки**:

→ при умові, що $\delta \geq \omega_0$, коливання в реальному контурі не виникають, за часовий проміжок $t \in [0; 5]$ коливання аперіодично затухають;

→ при умові, що $\delta < \omega_0$, в реальному контурі виникають гармонічні коливання, за часовий проміжок $t \in [0; 2]$ вони затухають; такі коливання називають згасальними гармонічними коливаннями;

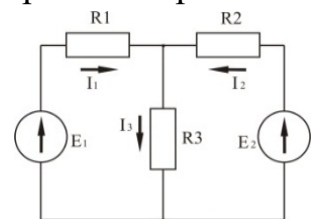
→ при умові, що $\delta = 0$ (опір відсутній), в ідеальному контурі виникають гармонічні коливання.

Наведемо також зразок завдань комплексної контрольної роботи, яка містить прикладні задачі, які розв'язуються методами Вищої математики (не обов'язково з використанням комп'ютера) для спеціальностей «Конструювання, виробництво та технічне обслуговування радіотехнічних пристроїв», «Виробництво, обслуговування та ремонт електронної побутової апаратури».

Теми роботи: Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Комплексні числа. Функція та її властивості. Вступ до аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Завдання 1. Використовуючи закони Кірхгофа визначити значення постійних струмів I_1, I_2, I_3 в колі,

зображеному на схемі, якщо $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 7 \text{ Ом}$, $E_1 = 1 \text{ В}$, $E_2 = 2 \text{ В}$.



Завдання 2. Дано комплексну амплітуду струму $\dot{I}_m = 3,14e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Записати миттєве значення сили цього струму в момент t , якщо його частота дорівнює ω .

Завдання 3. Знайти усталений режим коливань точки, якщо вона коливається відносно середнього положення за законом $x = 5e^{-\pi t} \sin(\omega t + 0,56)$.

Завдання 4. При заряджанні конденсатора зв'язок між його зарядом і напругою визначається за формулою: $q = 0,3 \cdot 10^{-4}U^4 - 10^{-12}U^2$, де q — заряд в кулонах, U — напруга на конденсаторі у вольтах. Визначити динамічну ємність конденсатора $C = dq / dt$ при напрузі 50 кВ.

Завдання 5. Струмopовідний кабель складається з мідного дроту і ізоляції. Якщо через x позначити відношення радіусу мідного дроту до товщини ізоляції, то швидкість телеграфування визначається за формулою $v = Ax \ln \frac{1}{x}$, де A — стала. При якому значенні x швидкість буде найбільшою?

Завдання 6. Обчислити активну потужність $P = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}$ змінного струму $i = I_m \cos \omega t$ за один період T (I_m — амплітудне значення струму).

Ефективне співробітництво в зонах дотику спеціальних дисциплін та математики, систематичне навчання студентів застосуванню математичних методів до розв'язування адаптованих до навчального процесу прикладних задач не тільки якісно покращує професійну підготовку, але формує такі складові майбутньої діяльності фахівця, як самостійне перенесення математичних знань, умінь і навичок в умови практичної діяльності, технологічність мислення, готовність до неперервної професійної освіти.

Список літератури

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / Андре Анго. — Москва : Наука, 1967. — 778 с.
2. Васіна Л. С. Інтеграція знань з математики та спеціальних дисциплін у підготовці майбутніх радіотехніків: методичний посібник / Л. С. Васіна. — Львів : ВМС, 2005. — 48 с.
3. Каганов В. И. Радиотехника+Компьютер+MathCAD / В. И. Каганов. — Москва : Горячая линия-Телеком, 2001. — 413 с.

РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Р. В. Ненька

*Уманський національний університет садівництва, Умань, Україна
ruslana66@i.ua*

Нині математична підготовка являється однією з провідних ліній у професійній освіті майбутніх фахівців. Сучасний курс математики орієнтований на досягнення одночасно декількох цілей: математика для повсякденної практичної діяльності, математика як елемент системи знань про навколишній світ, математика як апарат інших навчальних дисциплін.

Для підвищення ефективності навчання математики студентів аграрного університету, зокрема інженерів-механіків, потрібно було розробити методику, що забезпечує свідоме і міцне засвоєння студентами знань і оволодіння відповідними практичними навичками. Завдання полягає в тому, щоб навчити молодих людей творчо мислити, підготувати їх до життя, до практичної роботи, прищепити їм любов до предмета.

Міжпредметні зв'язки (МПЗ) є відображенням об'єктивних міжнаукових зв'язків. Вони виступають засобом інтеграції наукового пізнання, систематизують та узагальнюють уявлення студентів про закономірності навколишньої дійсності.

Математична статистика відіграє важливу роль в аналізі та подальшому практичному застосуванні. Тому ознайомлення з елементами математичної статистики важливе не тільки для тих, хто стане в майбутньому математиком чи фізиком, воно необхідне також майбутньому агроному, інженеру, підприємцю, економісту.

До основних шляхів реалізації прикладної спрямованості навчання статистики в контексті МПЗ математики й фізики відносимо:

- використання експериментальних даних лабораторних робіт з фізики при вивченні вищої математики;
- побудова елементарних статистичних моделей явищ і процесів стохастичної природи, які мають місце під час вивчення теоретичного матеріалу, у ході розв'язування задач та виконання лабораторних робіт при вивченні фізики;
- розв'язування стохастичних задач прикладного й міжпредметного змісту як при вивченні математики, так і на заняттях з фізики;
- організація та проведення елементарних статистичних досліджень при виконанні студентами індивідуальних дослідних завдань (ІНДЗ).

Реалізація МПЗ при вивченні дисциплін «Фізика» та «Вища математика», які враховують специфіку роботи майбутнього спеціаліста технологічного профілю, є орієнтація їх на професійну спрямованість та інтеграційні процеси в навчанні фізики й математики. Аналізуючи програми дисциплін «Вища математика» та «Фізика», можна виділити ряд взаємопов'язаних тем, спільних

проблем, загальних питань, що є умовою для реалізації інтеграції, на основі якої відбувається взаємопроникнення цих предметів.

При вивченні розділу «Механіка» студенти зустрічаються із задачами, у яких потрібно обчислювати середнє значення швидкості руху тіла. А виконуючи лабораторні роботи, їм доводиться обчислювати середні значення величин.

Знайомлячи студентів з основними напрямками досліджень молекулярно-кінетичної теорії, необхідно звернути увагу на те, що кількісно теорію молекулярних процесів побудовано завдяки методам математичної статистики. При спробі аналізу молекулярних систем методами механіки виникали труднощі. Тому для кращого сприйняття загальних положень молекулярно-кінетичної теорії необхідно, щоб на початку в студентів уже були сформовані уявлення про основні методи математичної статистики, її базові поняття, поняття про середні величини, їх види, властивості та методи знаходження.

Статистичні закономірності широко застосовують під час вивчення розділу «Фізика атома і атомного ядра», зокрема, виконуючи лабораторну роботу «Дослідження радіоактивного випромінювання за допомогою газорозрядного лічильника».

При вивченні математичної статистики розглядаються можливості застосування сучасної інформаційної підтримки. Така підтримка полягає, зокрема, у спрощенні і пришвидшенні розрахунків, візуалізації математичних об'єктів, можливості їх динамічно змінювати тощо. Наразі існує велика кількість математичних комп'ютерних програм (системи комп'ютерної математики типу *Maple*, *Mathematica*, *Maxima*, *Sage* тощо, програми динамічної математики типу *Geometer's Sketchpad*, *Cabri*, *Geonext* тощо), які дозволяють швидко розв'язувати задачі різних розділів математики, починаючи від простих побудов до складних аналітичних розрахунків. Розмаїття таких комп'ютерних програм слугує допоміжним інструментом фахівцям у різних галузях природничо-математичних наук, зокрема, і тим, хто навчає математиці.

Залучення математичних комп'ютерних програм до розв'язування задач теорії ймовірностей і математичної статистики для наочного пошуку розв'язків, візуальна підтримка випробувань та достатня їх кількість дозволяють продемонструвати шляхи використання інформаційних технологій та спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язування ймовірнісних задач. Через візуалізацію експерименту з випадковими величинами формувати асоціативні зв'язки між формальною математикою і життєвими ситуаціями.

Використання МПЗ під час вивчення математичної статистики дає змогу сформувати в студентів певну систему ймовірнісно-статистичних знань і вмінь, необхідних для вивчення загально технічних і спеціальних дисциплін.

Подальші дослідження можуть бути пов'язані з пошуком шляхів удосконалення методичних прийомів вивчення стохастики на основі використання міжпредметних зв'язків математики та навчальних дисциплін.

ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Ольга Островська, Іван Юрик

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

i.yu@ukr.net

Тема неперервності функції в точці і на відрізку вимагає достатньої уваги з методичної сторони. Починати її потрібно з означення умов існування границі функції в точці. Для цього спочатку дається поняття лівої і правої границі функції в точці. Потім після відповідних міркувань, рисунків, вказується, що функція має границю в точці $x = x_0$, якщо: в околі точки x_0 функція визначена; існує ліва і права границя в цій точці й обидві границі рівні між собою. У студентів виникають сумніви щодо користі лівої і правої границі, оскільки вони часто рівні і більш того, вони пропонують, що простіше порахувати значення функції в даній точці. Усі ці уявлення природні, оскільки в свідомості початківців функція уявляється як неперервна функція. Цю ситуацію бажано використати і відразу показати, що насправді є глибокий сенс у тому, щоб відрізнити ліву і праву границі. На відповідних прикладах розривних функцій студенти повинні побачити, що в особливих випадках $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ або, що одна з цих границь, а може й обидві не існують, що і визначає, так званий, розрив функції.

Конкретний фізичний приклад розриву функції можна показати на графіку теплоємності тіла під час нагрівання. Цей графік розірваний у точках, які відповідають переходам тіла з твердого стану в рідкий і з рідкого в газоподібний. Слід навести також приклад розриву функції, яка виражає закон розподілу нерівномірного навантаження вздовж довжини стрижня у випадку, коли одна частина стрижня несе одне навантаження, а друга частина інше.

Після прикладів викладач звертає увагу на те, що в закономірному процесі зміни функції розриви займають особливе місце, оскільки в точках розриву різко порушується хід зміни функції. Природно, тому поставити питання про умови при яких функція $f(x)$ в заданій точці $x = x_0$ буде неперервною. Такі умови зручно виразити такими вимогами:

1) функція повинна бути визначена не тільки в деякому околі точки $x = x_0$, але і в самій точці;

2) вимагається, щоб ліва і права границі функції існували і в точці x_0 були рівними між собою, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$;

3) вимагається, щоб $f(x_0) = A$. Перерахуванням цих умов слід і обмежитись. Наводити додатково означення неперервності функції за Коші не має змісту в умовах технічного вузу. Вказані вимоги чітко виражають характеристику неперервної функції. Ці вимоги зручні також для визначення характеру розриву. Особливу увагу потрібно звернути на першу умову, оскільки точками розриву елементарних функцій як раз є ті точки, в яких функція невизначена.

Дослідженням випадків, коли перша і третя умови не виконуються приводять до поняття усувного розриву: шляхом переозначення функції (поверненням вилученої точки на графік), якщо не виконується тільки третя умова; шляхом доозначення функції, тобто приписуванням їй значення A при $x = x_0$, якщо не виконується тільки перша умова. На практиці важливо виразити ці умови в термінах нескінченно малих приростів Δx і Δy аргументу і функції. Зручно ці умови виразити так: функція $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, якщо вона визначена не тільки в деякому околі цієї точки, але й в самій точці і також нескінченно малому приросту Δx аргументу x відповідає нескінченно малий приріст Δy самої функції, незалежно від того, яким чином приріст аргументу наближається до нуля. Умова незалежності способу наближення приросту аргументу до нуля суттєва. Нею визначаються умови наявності у неперервної функції двосторонньої границі. Тому не згадати цю добавку, як це інколи роблять, неможна. Також неможна не згадати і першу умову, що часто зустрічається. Умови неперервності функції в точці в термінах лівої і правої границі приводять до важливої властивості функції, яка виражається рівністю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Важливість цієї властивості стає зрозумілою після того, як тільки студентам показано, що вона застосовується до всіх елементарних функцій. Звичайно, показавши, що всі основні елементарних функцій неперервні. Далі доводяться теореми про неперервність суми, добутку і частки неперервних функцій, а також про неперервність складеної функцій. Наслідком цього є така теорема: *«Усі елементарні функції неперервні в точках, де вони визначені»*.

Далі слід зупинитись на властивостях неперервних функцій на проміжку, дати чітке означення неперервної функції на інтервалі і відрізку. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі (a, b) , якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція називається неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці цього відрізку і крім того, $f(a) = f(a + 0)$, $f(b) = f(b - 0)$. Після цього сформулювати теореми Вейерштрасса і Больцано — Коші: неперервна функція на відрізку обмежена і досягає свого найбільшого і найменшого значення; якщо неперервна функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ набуває на його кінцях значення $f(a)$ і $f(b)$, то вона набуває будь-яке значення між ними; якщо неперервна на $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває на його кінцях значення різних знаків, то в середині проміжку знайдеться точка, в якій функція дорівнює нулеві. Рекомендуємо всі ці твердження проілюструвати на графіках функцій, оскільки їх доведення в загальному випадку є складним. Нарешті, слід відмітити, що неперервна функція не обов'язково гладка, тобто її графік не всюди має дотичну. Вона може бути кусково-гладкою, графік її складається з декількох гладких дуг і може мати злами.

ПРО РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В РОЗВИНЕННІ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНЬОГО СПЕЦІАЛІСТА

Н. М. Панасюк

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

nataly-panasyuk@yandex.ru

У нашому глобалізованому світі, із стрімким розвитком науки й сучасних технологій гостро постає потреба не тільки отримання фундаментальних знань, а, і в першу чергу, навчитись творчо сприймати інформацію, вміти самовдосконалюватись та розвиватись. Необхідною умовою цього є вміння творчо мислити, аналізувати й виробляти самостійні підходи. Розвиток людини починається з перших кроків життя і її подальший успіх багато в чому залежить від основ закладених з дитинства. Ми, в вищій школі, отримуємо дорослу за віком і, багато в чому, на щастя, ще не зовсім сформовану людину. Якщо оцінювати знання з якими приходять до нас студенти першого курсу, їх вміння мислити, критично оцінювати інформацію, прагнення внести щось своє, ґрунтовно і логічно писати пояснення і мотивації до розв'язків, то, на жаль, з кожним роком потенціал падає. У більшості своїй, студент прагне отримати зразок розв'язку, вимагає типових задач та хапається за електронні пристрої, намагаючись знайти щось подібне або, взагалі, готовий розв'язок. Все це стосується більшості інженерних спеціальностей. Інколи, якщо вимагаєш писати пояснення, то студенти навіть дивуються и запитують: «Нащо, це?». Хоча усім нам зрозуміло, що саме вибудовування логіки розв'язання, основаної на теоретичному підґрунті й раціональності отримання результату, розвиває мислення і творчість. Краса й коректність математичних викладок приносить задоволення й відчуття перемоги, що стимулює і надихає на наступні творчі дослідження. Прогресуюче застосування тестування в навчальному процесі школи (підкреслюю — саме в процесі), яке спрямоване, передусім, на натаскування учнів для отримання високих рейтингових балів на іспитах-тестуваннях, приводить до описаних вище проблем. Тому перед нами стоїть, прямо скажемо, непроста задача не тільки розвивати студента, а і, в першу чергу, підняти його шкільний рівень математичної підготовки, при зменшенні, останніми роками, числа аудиторних годин. Тому це треба робити одночасно.

На жаль, деякі спеціальні кафедри часто не розуміють того, що математика не тільки формує базу для подальшого навчання, а і просто є «гімнастикою розуму», розвиває мислення, тобто працює на їх спеціаліста в подальшому. Війна годин приводить до падіння рівня підготовки і розвитку майбутнього спеціаліста.

Перейдімо до деяких досить легких задач, які не потребують багато аудиторного часу, базуються на основних означеннях і поняттях курсу, використовують також апарат елементарної математики і, на мою думку, сприяють розвитку самостійного мислення.

1. Знайти проекції вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, якщо

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}.$$

2. Вектор $\vec{a}$ складає з осями Ox і Oy відповідно кути 60° і 120° . Знайти його координати x, y, z , якщо його модуль дорівнює 6.

На жаль, далеко не всі студенти відчують поняття функції та її використання. Так $f(2)$ для заданої функції вони обчислюють, а $f(\cos x)$ чи $f(-\cos x)$ уже в декого викликає труднощі. Тому пропоную наступні задачі.

3. Знайти $f(\cos x) - g(-\sin x)$, якщо $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^2$.

4. Скільки дійсних коренів має рівняння $f^2(x-1) = f(x-1)$, якщо $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

5. Знайти інтервали монотонності функції:

а) $f\left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x}\right)$, якщо $f(x) = 2x$; б) $f\left(\frac{1}{x}\right)$, якщо $f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{4}$.

У наведених вище задачах студенти не тільки глибше відчують поняття функції, а й з однієї сторони повторюють елементарну математику, розв'язуючи задачі курсу, з іншої сторони задача 3 готує до перевірки функції на непарність чи навпаки відносно тригонометричних функцій, що використовується в методах інтегрування.

Розставимо акценти на поняттях визначника і матриці, які студенти часто плутають, а також функції, що все разом приводить нас до задачі:

6. Знайти $\det(f(A))$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 4$, а $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Оскільки розділи «Диференціювання функції однієї змінної» та «Невизначений інтеграл» на багатьох факультетах знаходяться в програмі першого переважаного сукупністю матеріалу різних математичних курсів і тему «Невизначений інтеграл» читаємо у високому темпі одразу після «Застосування похідної» в кінці семестру, у студента, що погано ще засвоїв поняття диференціалу, а, інколи, і техніку диференціювання, виникають складнощі з таким елегантним методом інтегрування, як внесення під знак інтегрування. Тому для засвоєння теми, на мою думку, корисно розв'язувати наступні задачі: знайти функцію $f_2(x)$ (по можливості декілька варіантів), щоб

$$\int f_1(x)f_2(x)dx$$

можна було обчислити методом внесення під знак диференціалу, якщо $f_1(x)$:

$$\frac{3}{2}e^{\sin^3 x} \sin x, \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}, \frac{x \arctg^5 x^3}{1 + x^6}, \frac{\cos \arctg 2x}{1 + 4x^2}, \sqrt[3]{\arcsin^5 \frac{x}{2}},$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt[3]{3 + \cos^3 x}}, \frac{1}{1 + \sin^2 x}, 3 \sin(1 - x^3), \frac{x^3}{\sin^2 x^4}, \ln^4(\operatorname{ctg} x), \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

АКТИВІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ Й ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ІНОЗЕМНИМИ СТУДЕНТАМИ ОМА

Г. О. Петропавловська

Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна

petropavlovskiy@ukr.net

Активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів — це цілеспрямована діяльність викладача, яка потребує розроблення й використання такого змісту, форм, методів, прийомів і засобів навчання, які сприяють підвищенню пізнавального інтересу, активності, творчої самостійності студентів у засвоєнні знань, формуванні навичок і вмінь застосовувати їх в професійній діяльності [1, с. 46].

Питання активізації навчально-пізнавальної діяльності іноземними студентами (курсантами) і організація самостійної роботи стоять дуже гостро. У більшості іноземних студентів, що приїжджають на навчання в ОМА, низький рівень знань з елементарної математики, тригонометрії, погані вміння будувати графіки тригонометричних і складних функцій, недостатньо навичок з техніки диференціювання й інтегрування і дуже слабе бажання опановувати ці навички. Викладачі технічних ВНЗ констатують [2], що існує велика кількість проблем, пов'язаних із засвоєнням іноземними студентами загальних питань диференціального та інтегрального числення, оскільки цей розділ є достатньо складним для сприйняття. Як наслідок, ускладнюється сприйняття визначеного інтеграла, особливо розуміння його застосувань. Більшість іноземних студентів має певний рівень навичок застосування комп'ютерів, що дає можливість хоча б частково компенсувати недоліки загально-математичної підготовки.

Іноземні студенти охоче працюють з підручниками й посібниками, що містять велику кількість прикладів розв'язання типових задач. Для покращення ситуації необхідно повністю забезпечити навчальний процес методичною літературою для самостійної роботи студентів. Для вивчення розділу «математичний аналіз» були розроблені і широко використовуються методичні вказівки, що містять стислий теоретичний матеріал і велику кількість (приблизно 130 задач) прикладів розв'язання задач розділів: «Функції. Границі функцій», «Неперервність функції. Точки розриву та їх класифікація», «Похідні і диференціали функції одної змінної», «Частинні похідні», «Вектор-функції скалярного аргументу», «Скалярні поля. Похідна за напрямком. Градієнт. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні», «Правило Лопітала», «Формули Тейлора й Маклорена», «Дослідження функцій одної змінної», «Екстремум функції двох змінних», «Комплексні числа».

Відомо [3], що процес засвоєння математичних знань буде більш ефективним, якщо відбуватиметься в три етапи:

- Початковий (запровадження нових понять, усвідомлення суті понять, проведення зв'язків із вже відомими поняттями, означеннями, усвідомлення значення нових понять);

- Базовий (дії з новими поняттями: здобуття практичних навичок, розвиток вміння швидко аналізувати ситуацію);
- Творчий (дослідницька діяльність: власне бачення процесу розв'язання, прийняття нестандартних рішень).

Тому в методичних вказівках усі завдання поділені на три рівня складності, де підбір задач базується на принципах поступового нарощування складності. Спочатку пропонується велика кількість завдань з розгорнутим, обґрунтованим розв'язанням, а потім — завдання для самостійної роботи (їх близько 200) з відповідями. Завдання для самостійної роботи також поділені на три рівня складності. Наявність заголовків (розділів, параграфів), шрифтових виділень, рисунків, графіків полегшує візуальне сприйняття цього матеріалу. Ці методичні вказівки існують в електронному вигляді, що сприяє їх легкому розповсюдженню серед курсантів. Зараз, коли викладачі потерпають від невідповідності об'єму нових програм і реального часу для їх виконання, дуже гостро встає питання організації, планування і керівництва самостійною роботою студентів і контроль за її виконанням (співбесіда, перевірка конспектів, проведення контрольних робіт, перевірка домашніх завдань, виконання розрахункових робіт з використанням комп'ютерної техніки). Важливо здійснювати постійний контроль за виконанням завдань і проводити коротку перевірку, наприклад за допомогою тестів.

Тести, що використовуються в процесі навчання, можна умовно розділити на тренувальні й підсумкові. За допомогою тренувальних тестів можна виявити рівень сформованості необхідних навичок, вмінь користуватися техніками диференціювання та інтегрування і багатьох інших задач математичного аналізу. Підсумкові тести включають завдання на перевірку знань певного розділу математичного аналізу. Зміст тестів близький до змісту завдань, відповідних традиційним контрольним роботам.

Зразок 1. Установити відповідність між функціями (1—4) та їх похідними (А—Д):

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $y = \sin 2 + e^2$ | А. $y' = 2(\sin 2x + e^{2x})$ |
| 2. $y = \sin 2x + e^2$ | Б. $y' = \cos 2x$ |
| 3. $y = \sin 2 + e^{2x}$ | В. $y' = 2e^{2x}$ |
| 4. $y = \sin 2x + e^{2x}$ | Г. $y' = 2 \cos 2x$ |
| | Д. $y' = 0$ |

Зразок 2. Установити відповідність між функціями (1—4) та точками максимуму цих функцій (А—Д):

- | | |
|--|------|
| 1. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ | А. 0 |
| 2. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ | Б. 1 |

$$3. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

В. -1

$$4. y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Г. $-1; 0$

Д. $-1; 1$

Зразок 3. Установити відповідність між функціями (1—4) та їх первісними (А—Д):

$$1. y = \frac{4 - \sin 4x}{\cos^2 4x}$$

$$А. -\frac{1}{8 \sin^2 4x} + c$$

$$2. y = \frac{16}{\cos^2 4x}$$

$$Б. \frac{4}{\cos^2 4x} + c$$

$$3. y = \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}$$

$$В. 4 \operatorname{tg} 4x + c$$

$$4. y = \frac{4}{\sin^2 4x}$$

$$Г. -\operatorname{ctg} 4x + c$$

$$Д. \operatorname{tg} 4x - \frac{1}{4 \cos 4x} + c$$

Зразок 4. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y = f(x); x = a; x = b$ і віссю Ox (1—4) і встановити відповідність з її значеннями (А—Д):

$$1. y = x^2; \quad x = 1; \quad x = -1 \quad А. 4$$

$$2. y = \sin x; \quad x = 0; \quad x = \pi \quad Б. 2$$

$$3. y = 2 \cos x; \quad x = 0; \quad x = \pi \quad В. \frac{1}{2}$$

$$4. y = x^3; \quad x = -1; \quad x = 1 \quad Г. 0$$

$$Д. \frac{2}{3}$$

Українські студенти вже знайомі з такими завданнями (мається на увазі підготовка до ЗНО), і для іноземних студентів спроба використання таких завдань є досить вдалою.

Самостійну роботу обов'язково треба оцінювати і надавати «бонусні» бали за проявлення творчого пошуку і нестандартного мислення. Це підвищує зацікавленість результатами цієї роботи і сприяє активізації процесу навчання.

Складно охопити всі можливі ефективні та інноваційні підходи до підвищення якості викладання вищої математики. Дані підходи потрібно використовувати разом з традиційними, класичними, кожного разу враховуючи рівень математичної освіти та особисті можливості студентів. Головне, щоб ця

робота біла спрямована на активізацію процесу навчання, підвищення мотивації студентів, заохочення їх до творчості та аналітичного мислення [4].

З метою мотивації навчальної діяльності студентів, підвищення їх інтересу до вивчення математики на практичних заняттях разом з класичними задачами потрібно розглядати задачі прикладного характеру, зокрема ті, що безпосередньо використовуються в професійній діяльності. Так, викладачі намагаються це робити, але враховуючи ту кількість годин, що залишається на вивчення математики, можливостей для цього дуже мало.

Студенти вже на першому курсі повинні розуміти, що відсутність необхідного рівня математичних знань відгукнеться при вивченні спеціальних дисциплін. Як наслідок, не буде наступності між курсом фундаментальної математики і профільюючими дисциплінами і професійна спрямованість буде вкрай ускладнена.

Професійну спрямованість для студентів першого курсу, які починають вивчення дисципліни «Вища математика», можна формувати на вмінні бачити можливості застосування математики в реальному житті, в навчальному процесі і професійній діяльності, розумінні змісту і методів математичного моделювання, вмінні будувати математичну модель, досліджувати її математичними методами, аналізувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [5]. Попереду вивчення курсу «Математичні основи судноводіння», «Морехідна астрономія», спецкурси з математичного моделювання і ще багато предметів і дисциплін, які потребують досить високого рівня володіння матеріалом курсу вищої математики. Студентам першого і другого курсів треба дати розуміння того, що математика — це та наука, вивчення якої сприяє всебічному розвитку студента і як компетентного фахівця, і як високоосвіченої особистості, що здатна до самоосвіти, постійного самовдосконалення і прийняття креативних рішень.

Список літератури

1. Слепкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу в вищій школі. Конспект лекцій / З. І. Слепкань. — Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1999. — 150 с.
2. Карупу О. В. З досвіду викладання деяких питань математичного аналізу іноземним студентам у рамках англomовного проекту НАУ / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Матеріали III міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті». — Київ : НТУУ «КПІ», 2014. — С.184—187.
3. Лейко С. В. Поетапність при вивченні курсу «Вища математика» / С. В. Лейко // Матеріали Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті». — Київ : НТУУ «КПІ», 2013. — С.181—183.
4. Вірченко Н. О. Методика проведення занять з вищої математики / Н. О. Вірченко // Теорія та методика навчання математик, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск VI. — Кривий Ріг: Видавничий відділ НМет АУ. 2006 — Т. 1.: Теорія та методика навчання математики. — С.268-273.
5. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія / С. А. Раков. — Харків : Факт, 2005. — 360 с.

ДИДАКТИЧНИЙ ТА ЗМІСТОВНИЙ КОНТЕКСТ АДАПТАЦІЇ СТУДЕНТІВ НА ПРИКЛАДІ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

І. В. Рассоха, Л. М. Блажко

Полтавський національний технічний університет

імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна

innaolha@mail.ru, lblazhko@ukr.net

Навчання у вищому навчальному закладі (ВНЗ) стає більш складним за формою і змістом. Більшість студентів, які вступають до ВНЗ, зазвичай наражаються на цілу низку проблем, серед яких перше місце займають ті, що пов'язані з недостатньою шкільною підготовкою і, як наслідок цього, складнощами під час адаптації до навчання.

Дослідженню проблем наступності у навчанні та адаптації студентської молоді у вищих навчальних закладах приділялась увага таких дослідників як О. Панькович, Г. П. Левківська, В. С. Сорочинська, В. С. Штифурак, С. С. Ізбаш, Н. Б. Павлюк, І. Н. Личагіна та ін.

Наступність у навчанні — це актуальна проблема переходу особистості на якісно новий ступінь розвитку завдяки створенню комфортних умов для розкриття її потенціалу під час переходу з одного типу організації освітнього процесу в інший. Принцип наступності в навчанні означає погодженість і взаємозв'язок усіх ступенів навчально-виховного процесу. Реалізація принципу наступності виступає гарантом цілісності і єдності освітнього процесу.

Сучасні зміни в системі національної освіти вимагають її реформування на засадах наступності та неперервності. Значимість ідеї неперервності навчання є беззаперечною оскільки дозволяє людині протягом усього життя творчо і професійно розвиватися, підвищувати свою компетентність [1].

У сучасній педагогіці відсутній єдиний підхід до вирішення проблеми наступності в навчанні та для розроблення її загальної концепції. Тому, наступність у навчанні залежно від наукових поглядів учених-педагогів розглядається з найрізноманітніших позицій: і як нормативна функція дидактики, і як закономірність розвитку педагогічного процесу, і як загально дидактичний принцип та ін. [2—5].

Очевидно, що наступність у навчанні є багатограним поняттям. Його реалізація можлива в декількох площинах: змісту освіти та мети, форм і методів навчання. Якщо по змісту матеріалу питання узгодженості є відносно вирішеним, то по методичним аспектам залишається ще відкритим. Саме відірваність окремих ланок освіти одна від одної сприяють неузгодженості у формах і методах навчання на різних його етапах.

Взаємозв'язок між навчанням у середній школі та вищих навчальних закладів досліджували такі науковці, як В. М. Алфімов, В. І. Костенко, Л. О. Філатова та інші. Як зазначає Л. О. Філатова [6], у системі неперервної професійної освіти між кожними взаємозалежними компонентами має бути здійснена наскрізна і вертикальна, і горизонтальна інтеграція, яка

забезпечуватиме послідовність, системність та цілісність процесу формування особистості, наступність її загальної й різнорівневої професійної освіти.

Розглянемо реалізацію принципу наступності у навчанні на прикладі викладання вищої математики у ВНЗ технічної спрямованості.

Наступність у вивченні курсу вищої математики у ВНЗ можна реалізувати за двома напрямками:

- 1) формах і методах організації навчальної діяльності;
- 2) змісту навчального матеріалу, який розглянемо детальніше на конкретних прикладах.

Розглядаючи проблему адаптації студентів першого курсу, необхідно виділити так звану дидактичну адаптацію студентів, яка пов'язана з готовністю студента опанувати нові порівняно зі шкільними форми організації та методи навчання, збільшенням обсягу навчального матеріалу, наукового стилю мовлення й мислення тощо. У вищому навчальному закладі значно збільшується обсяг самостійної навчальної роботи (конспектування першоджерел, складання тез, написання рефератів тощо), з'являються нові форми організації навчання (лекції, семінарські, практичні та лабораторні заняття, колоквиуми тощо). Новизна дидактичної обстановки, з якою зустрічається першокурсник, часто знецінює надбані ним у школі способи засвоєння навчального матеріалу. Минає немало часу, поки студент виробить нові шаблони, опанує нові засоби, адекватні новим вузівським умовам навчання. Все це може породжувати своєрідний негативний ефект, що має назву «дидактичного бар'єру» між викладачами та студентами, подолання якого стає одним з важливих завдань у процесі навчання. Саме нездатність подолати дидактичний бар'єр часто є гальмівним моментом адаптації студентів першого курсу.

Багаторічний педагогічний досвід роботи у ВНЗ засвідчує, що першокурсники не завжди успішно оволодівають знаннями не тому, що отримали слабку шкільну підготовку, а через несформованість якостей, які визначають готовність до навчання у вищій школі:

- здатність навчатися самостійно;
- уміння контролювати й оцінювати себе;
- врахування індивідуальних особливостей власної пізнавальної діяльності;
- уміння правильно розподіляти свій час для самостійної навчальної підготовки й відпочинку;
- самодисципліна тощо.

Як бачимо, значну частину перелічених факторів складають ті, що пов'язані з організацією самостійної роботи студентів першого курсу, оскільки однією з головних задач ВНЗ є навчити вчитися. Вміння самостійно працювати повинно формуватися ще під час одержання середньої освіти. Життям доведено, що тільки ті знання, які людина здобула самостійно, завдяки власному досвіду, думці і дії, будуть насправді міцні. Якщо навчальний матеріал опрацьовується власноручно, самостійно (індивідуально) виконується

завдання від його постановки до аналізу отриманих результатів, то засвоюється не менше 90 відсотків інформації.

Одним з основних завдань у роботі викладача є організація та керівництво самостійною навчальною роботою, розробка і запровадження шляхів її раціоналізації та оптимізації.

З точки зору діяльнісного підходу самостійна робота — це сукупність дій студента в певних умовах, що передбачають відсутність безпосереднього керівництва та допомоги з боку викладача, з використанням наявних індивідуальних рис особистості, спрямованих на отримання продукту, відповідного заданій меті, внаслідок чого має бути сформована самостійність як риса особистості та засвоєна певна сукупність знань, умінь та навичок [7].

Найчастіше під самостійною роботою розуміють позааудиторну роботу, але самостійна робота може здійснюватись і під час аудиторних занять. Оскільки, особливо на перших курсах, де вивчаються фундаментальні дисципліни, навчання часто носить характер запам'ятовування з елементами розуміння, то організація самостійної роботи ускладнюється і вимагає від викладача ґрунтовної підготовки до такого виду роботи. Але вироблення навичок самостійної роботи є необхідною складовою успішної адаптації студентів до навчання у ВНЗ.

Реалізацію принципу наступності в контексті змістовного наповнення навчального матеріалу розглянемо на прикладі викладання вищої математики.

Курс вищої математики є прямим продовженням курсу елементарної математики. Вища математика, як відомо, є математикою змінних величин, а елементарна — математикою сталих.

Наприклад, проаналізувавши навчальні програми за напрямком 6.060101 — «Будівництво» можна зробити висновок, що значну частину розділів та окремих тем можна розпочати з розгляду задач, розв'язання яких вивчається в курсі середньої школи, поступово ускладнюючи їх. Наприклад, для виведення формул Крамера можна використати задачу, де пропонується розв'язати систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь із двома невідомими методом додавання. При цьому одержують формули Крамера для квадратної системи даної розмірності, які потім можна поширити на системи вищих розмірностей. Як опорні задачі для ілюстрації теоретичного матеріалу, на нашу думку, корисно взяти задачі, при розв'язанні яких виводяться вже відомі з курсу елементарної математики формули. Наприклад, при вивченні застосування визначених інтегралів у геометрії можна розглянути задачі виведення формул довжини кола, площі круга, площі поверхні сфери, об'єму кулі та інші.

На нашу думку, корисним також буде використання міжпредметних зв'язків, наприклад, з курсом фізики. Так при вивченні функції багатьох змінних в якості ілюстрації можна взяти, наприклад, фізичні величини, що виражають залежність однієї величини від інших (сила струму як функція напруги та опору та ін.). Залежно від рівня підготовки студентів розв'язання таких задач можна винести на самостійну роботу.

Таким чином, наступність у навчанні є потужним засобом адаптації студентів першого курсу до навчання у ВНЗ. Її реалізація може бути здійснена за рахунок узгодженості форм і методів організації навчальної діяльності та її змісту між середньою та вищою ланками освіти. Безумовно, такий підхід до викладання потребує від викладачів ВНЗ не тільки високого рівня знань з предмету, який ними викладається, а й досконального володіння формами і методами навчання, які використовуються в середній школі та, безумовно, вільної орієнтації в змістовному наповненні середньої освіти з даного предмету. На нашу думку, ретельніший підхід до даного питання зміг би не тільки полегшити адаптацію студентів першого курсу, а й підвищити їх успішність, що є однією з вимог, яка ставиться перед кожним викладачем.

Список літератури

1. Старикова Л. Д. Современная трактовка непрерывности образования / Л. Д. Старикова // Современная трактовка непрерывности образования. — 2008. — № 11. — С. 76—79.
2. Гегель Г. Ф. Наука логики / Г. Ф. Гегель // Соч.: В 9 т. — Т. 6. — Москва : Госполитиздат, 1939. — 388 с.
3. Грибанова О. К. Методика формування елементарних математичних уявлень у дітей / О. К. Грибанова, К. Й. Щербакова, С. Ф. Белова, К. В. Назаренко. — Київ : Вища школа, 1987. — 134 с.
4. Зимняя И. А. Педагогическая психология / И. А. Зимняя. — Москва : Логос, 1999. — 384 с.
5. Теоретические основы непрерывного образования / Под ред. В. Г. Онушкина : Монография. — Москва : Педагогика, 1987. — 208 с.
6. Филатова Л. О. Развитие преемственности школьного и вузовского образования в условиях введения профильного обучения в старшем звене средней школы / Л. О. Филатова // Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2005. — 192 с.
7. Буковська О. І. Особистісний аспект та особливості організації самостійного вивчення теоретичного матеріалу з математики старшокласниками та студентами ВНЗ / О. І. Буковська, В. І. Стогній // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи : Всеукр. наук.-практ. конф., 13—20 квітня 2008 р. : тези доповіді. — Полтава, 2008. — С. 38.

ПІДСУМОВУВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

В. К. Репета, Л. А. Репета

*Національний авіаційний університет,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна*
RepetaLA@bigmir.net

Серед задач, що розглядаються в теорії числових рядів, важливою є задача знаходження суми (точної чи наближеної) збіжного ряду. У курсі вищої математики для технічних ВНЗ підсумовуванню рядів приділяється незначна увага. Так, для ілюстрації означення збіжності числового ряду зазвичай досліджують суму геометричної прогресії і доводять, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad a \neq 0, \text{ коли } |q| < 1$$

або знаходять суму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ тощо.}$$

Складніші ряди здебільшого досліджують на збіжність. До таких рядів звичайно належать числові ряди вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{Q_m(n)},$$

де $P_l(n)$ та $Q_m(n)$ — многочлени l -го та m -го степеня відповідно.

У випадку $m - l > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{Q_m(n)}$ є збіжним. Проте точну суму цього

ряду можна знайти лише для певних реалізацій виразу $\frac{P_l(n)}{Q_m(n)}$. Існують різні

підходи до обчислення суми такого ряду. Зокрема, використовуючи розвинення в ряд Фур'є 2π -періодичної функції

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x-2\pi) = f(x),$$

отримують добре відому рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{Q_m(n)},$$

де $Q_m(n) = (n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \dots (n + \alpha_m)$ — многочлен m -го степеня, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — цілі невід'ємні числа, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$; $P_l(n)$ — многочлен l -го степеня. Вважатимемо, що $m - l > 1$. За такої умови ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{Q_m(n)}$$

є збіжним, тому природно постає питання знаходження його суми.

Сформулюємо кілька тверджень.

Нехай потрібно знайти суму

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

де $u_k = g(k)$.

Твердження 1. Якщо $f(k)$ — функція натурального аргументу k така, що

$$u_1 = f(1) - f(2), \quad u_2 = f(2) - f(3), \quad \dots, \quad u_n = f(n) - f(n+1), \quad (1)$$

тоді

$$S_n = f(1) - f(n+1).$$

У загальному випадку представлення (1) дістати досить непросто, оскільки для цього часто потрібно проявити певну міру інтуїції, винахідливості, виконати нестандартні дії тощо. Проте таке представлення завжди існує.

Твердження 2. Нехай $f(k)$ — функція натурального аргументу k така, що

$$u_1 = f(1) - f(1+m), \quad u_2 = f(2) - f(2+m), \quad \dots, \quad u_n = f(n) - f(n+m),$$

де m — деяке натуральне число, більше за одиницю.

Тоді

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(m) - f(n+1) - f(n+2) - \dots - f(n+m).$$

Користуючись твердженнями 1, 2 можна показати, що сума збіжного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{(n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \dots (n + \alpha_{m-1})(n + \alpha_m)},$$

де $l = 0, 1, 2, \dots, m-2$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — цілі невід'ємні, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$, дорівнює

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{(n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \dots (n + \alpha_{m-1})(n + \alpha_m)} \\ &= A_1 \sum_{i=1}^{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{i + \alpha_1} + (A_1 + A_2) \sum_{i=1}^{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{1}{i + \alpha_2} + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-2}) \sum_{i=1}^{\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2}} \frac{1}{i + \alpha_{m-1}} + \\
& + (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1}) \sum_{i=1}^{\alpha_m - \alpha_{m-1}} \frac{1}{i + \alpha_m},
\end{aligned}$$

де коефіцієнти

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{P_l(-\alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_m - \alpha_1)}, \\
A_2 &= \frac{P_l(-\alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2) \dots (\alpha_m - \alpha_2)}, \dots, \\
A_m &= \frac{P_l(-\alpha_m)}{(\alpha_1 - \alpha_m)(\alpha_2 - \alpha_m) \dots (\alpha_{m-1} - \alpha_m)},
\end{aligned}$$

і справджують умову:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0.$$

ПРО ТАБЛИЧНИЙ ЗАПИС ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

В. Трофіменко, Л. Б. Федорова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

trofimenko180297@ukr.net

1. Студент технічного вишу досить часто стикається з проблемою знаходження інтегралів. Існують різні методи, способи і прийоми знаходження інтегралів.

2. Одним з ефективних є *метод інтегрування частинами*, що базується на формулі

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

або на узагальненій формулі інтегрування частинами [1], яка реалізує n -кратне інтегрування частинами

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx. \quad (1)$$

Якщо позначити $u(x) = f(x)$, а $v^{(n+1)} = g(x)$, то формулу (1) можна переписати ще так:

$$\int f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(-k-1)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}g^{(-n-1)}(x)dx, \quad (2)$$

де $f^{(k)}(x)$ — похідна k -го порядку функції $f(x)$, а $g^{(-k)}(x)$ — первісна k -го порядку від $g(x)$:

$$g^{(-1)}(x) = \int g(x)dx, g^{(-2)}(x) = \int g^{(-1)}(x)dx, \dots, g^{(-k-1)}(x) = \int g^{(-k)}(x)dx.$$

3. Знаходження послідовних похідних і первісних зручно оформлювати в *табличному* вигляді, що водночас зменшить і кількість можливих помилок.

Почережні		$f(x)$		$g(x)$
знаки		та її похідні		та її первісні
+	→	$f(x)$	↘	$g(x)$
—	→	$f'(x)$	↘	$g^{(-1)}(x)$
+	→	$f''(x)$	↘	$g^{(-2)}(x)$
...	...			...
$(-1)^n$	→	$f^{(n)}(x)$	↘	$g^{(-n)}(x)$
$(-1)^{n+1}$	→	$f^{(n+1)}(x)$	→	$g^{(-n-1)}(x)$

Цей метод запису інтегрування був запропонований у статті [2] і широко використовується в англomовній навчальній літературі, приміром [3, 4].

Приклад 1. Запишімо в табличному вигляді формулу для інтеграла $\int f(x)e^{ax} dx$.

$$\begin{array}{llll}
 + & \rightarrow & f(x) & g(x) = e^{ax} \\
 - & \rightarrow & f'(x) & \searrow g^{(-1)}(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \\
 + & \rightarrow & f''(x) & \searrow g^{(-2)}(x) = \frac{1}{a^2} e^{ax} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (-1)^n & \rightarrow & f^{(n)}(x) & \searrow g^{(-n)}(x) = \frac{1}{a^n} e^{ax} \\
 (-1)^{n+1} & \rightarrow & f^{(n+1)}(x) & \rightarrow g^{(-n-1)}(x) = \frac{1}{a^{n+1}} e^{ax}
 \end{array}$$

Отже, дістаємо формулу [1]:

$$\begin{aligned}
 \int f(x)e^{ax} dx = & \frac{e^{ax}}{a} \left(f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \dots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{a^n} \right) + \\
 & + \frac{(-1)^{n+1}}{a^{n+1}} \int f^{(n+1)}(x)e^{ax} dx.
 \end{aligned}$$

Також у підручнику [1] подано формули для $\int f(x) \sin bxdx$ та $\int f(x) \cos bxdx$. Так само можна було б одержати формули для $\int f(x) \operatorname{sh} bxdx$ та $\int f(x) \operatorname{ch} bxdx$.

4. У разі якщо $f(x) = P_n(x)$ — многочлен n -го порядку, то формула (2) набуде простішого вигляду:

$$\int f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(-k-1)}(x),$$

оскільки $(P_n(x))^{(n+1)} = 0$.

Приклад 2. Запишімо у табличному вигляді двократне інтегрування частинами в інтегралі $\int (x^2 + 1) \sin 2xdx$.

$$\begin{array}{llll}
 + & \rightarrow & f(x) = x^2 + 1 & g(x) = \sin 2x \\
 - & \rightarrow & f'(x) = 2x & \searrow g^{(-1)}(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \\
 + & \rightarrow & f''(x) = 2 & \searrow g^{(-2)}(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x \\
 - & \rightarrow & f'''(x) = 0 & \searrow g^{(-3)}(x) = \frac{1}{8} \cos 2x
 \end{array}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \int (x^2 + 1) \sin 2x dx = \\ & = (x^2 + 1) \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x - 2x \left(-\frac{1}{4} \sin 2x \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cos 2x \right) + C = \\ & = \left(-x^2 - \frac{1}{4} \right) \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

5. Підставляючи $f(x) = P_n(x)$ у формули п. 3 можна одержати явні формули для інтегралів:

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \sin bxdx, \int P_n(x) \cos bxdx, \int P_n(x) \operatorname{sh} bxdx, \int P_n(x) \operatorname{ch} bxdx.$$

Інтеграл $\int x^k \ln^m x dx, k \neq -1$, підстановкою $t = \ln x$ зводиться до вигляду $\int t^m e^{(k+1)t} dt$ [1].

Табличне інтегрування частинами може бути ефективно застосоване й до інтегралів вигляду $\int \frac{P_n(x)}{(ax+b)^r} dx$ [5].

6. За допомогою інтегрування частинами можна одержувати також рекурентні формули.

Приклад 3. Використовуючи табличний запис інтегрування частинами, знайдемо рекурентну формулу для інтеграла

$$\begin{aligned} I_n &= \int \operatorname{sh}^n x dx = \int \operatorname{sh}^{n-1} x \cdot \operatorname{sh} x dx. \\ + \rightarrow f(x) &= \operatorname{sh}^{n-1} x & \searrow g(x) &= \operatorname{sh} x \\ - \rightarrow f'(x) &= (n-1) \operatorname{sh}^{n-2} x \operatorname{ch} x & \rightarrow g^{(-1)}(x) &= \operatorname{ch} x \\ I_n &= \operatorname{sh}^{n-1} x \cdot \operatorname{ch} x - \int (n-1) \operatorname{sh}^{n-2} x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx. \end{aligned}$$

Оскільки $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, то:

$$\begin{aligned} I_n &= \operatorname{sh}^{n-1} x \cdot \operatorname{ch} x - (n-1) \int \operatorname{sh}^{n-2} x \cdot (1 + \operatorname{sh}^2 x) dx = \\ &= \operatorname{sh}^{n-1} x \cdot \operatorname{ch} x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \\ I_n &= \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{n-1} x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

Одержимо окремі випадки цієї формули:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \operatorname{sh}^0 x dx = \int dx = x + C; \\ I_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} x + C; \\ I_4 &= \frac{1}{4} \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{4} \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{3}{8} \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x + \frac{3}{8} x + C. \end{aligned}$$

7. Приклад 4. Використовуючи табличний запис інтегрування частинами знайдемо інтеграл $I = \int \operatorname{ch} ax \sin bx dx$ [6].

$$\begin{aligned} + & \rightarrow f(x) = \operatorname{ch} ax & \searrow & g(x) = \sin bx \\ - & \rightarrow f'(x) = a \operatorname{sh} ax & \searrow & g^{(-1)}(x) = -\frac{\cos bx}{b} \\ + & \rightarrow f''(x) = a^2 \operatorname{ch} ax & \rightarrow & g^{(-2)}(x) = -\frac{\sin bx}{b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= -\operatorname{ch} ax \cdot \frac{\cos bx}{b} + a \operatorname{sh} ax \cdot \frac{\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx dx; \\ \frac{a^2 + b^2}{b^2} I &= -\operatorname{ch} ax \cdot \frac{\cos bx}{b} + a \operatorname{sh} ax \cdot \frac{\sin bx}{b^2} + C; \\ I &= \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

Так само можна знайти інтеграли вигляду

$$\int f(ax)g(bx)dx,$$

де $f(x) \in \{e^x, \cos x, \sin x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$, $g(x) \in \{\cos x, \sin x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$.

Зауважимо, що інтеграли від добутку двох тригонометричних чи двох гіперболічних функцій можна знайти також за допомогою відповідних перетворень підінтегральної функції.

Список літератури

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — Москва : Физматлит, 2001. — Т. 2. — 800 с.
2. Folley K. W. Integration by Parts / K. W. Folley // The American Mathematical Monthly. — 1947. — Vol. 54, No. 9. — P. 542—543.
3. Larson R. Calculus / R. Larson, B. Edwards. — 10 ed. — Brooks Cole, 2013. — 1280 p.
4. Anton H. Calculus : Early transcendentals / H. Anton, I. Bivens, S. Davis. — 10 ed. — Wiley Publishing, Inc, 2013. — 1312 p.
5. Horowitz D. Tabular Integration by Parts / D. Horowitz // The College Mathematics Journal. — 1990. — Vol. 21, No. 4. — P. 307—311.
6. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2-х т. / Р. Курант. — Москва : Наука, 1967. — Т. 1. — 4-е изд., перераб. и доп. — 704 с.

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ З КУРСУ «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

О. Б. Чернобай

Національний університет державної податкової служби України,

Ірпінь, Україна

chernobai.olga@gmail.com

Сучасне суспільство вимагає від вищих навчальних закладів України підготовки таких фахівців, які можуть швидко адаптуватись до практичної діяльності, набувати нові знання та вміння, вдало їх застосовувати, творчо мислити, визначати головні проблеми і шукати ефективні методи їх розв'язання. Всебічне удосконалення структури системи вищої освіти спрямовано на те, щоб дати нашим студентам таку освіту, яка б забезпечила найкращі можливості для застосування їх знань.

Покращення математичних знань майбутніх спеціалістів у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування», розширення знань про нові методи сучасної математики відрізняється від методів, які застосовувались раніше.

Програма навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів галузі знань «Менеджмент і адміністрування», затвердженої у 2010 р.

На базі програми навчальної дисципліни розроблено робочу програму вказаного курсу, де вказано, що метою навчальної дисципліни є підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки з підсиленням її прикладної спрямованості та формування в студентів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають у процесі управління.

Весь курс навчальної дисципліни поділено на три модулі та десять змістових модулів, а саме:

МОДУЛЬ 1

Змістовий модуль 1. *Лінійна алгебра.*

Змістовий модуль 2. *Векторна алгебра та аналітична геометрія.*

Змістовий модуль 3. *Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.*

Змістовий модуль 4. *Функції кількох дійсних змінних.*

Змістовий модуль 5. *Інтегральне числення функції однієї змінної.*

МОДУЛЬ 2

Змістовий модуль 6. *Елементи теорії ймовірностей.*

Змістовий модуль 5. *Математична статистика.*

Змістовий модуль 8. *Елементи дисперсійного, регресійного та кореляційного аналізу.*

МОДУЛЬ 3

Змістовий модуль 9. *Математичне програмування.*

Змістовий модуль 10. *Дослідження операцій.*

У робочій програмі навчальної дисципліни відображено також критерій оцінювання навчальної діяльності студентів.

Важливу роль при оцінюванні знань студентів в процесі вивчення навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» відіграє поточний та підсумковий контроль. Контроль та оцінювання результатів навчання повинні відображати рівень засвоєних знань, умінь та навичок, набутих студентами під час навчання у вищому навчальному закладі.

Поточний контроль здійснюється після засвоєння студентами одного чи кількох змістових модулів даного курсу. Викладачі кафедри проводять його у вигляді традиційних самостійних чи контрольних робіт, тестових завдань, колоквиумів та інших методів перевірки знань студентів.

Такий контроль дає можливість аналізувати процес навчання, виявляти успіхи та поразки студентів при вивченні кожного змістового модуля вищої та прикладної математики. Він також дає можливість своєчасно звернути увагу на рівень засвоєних студентами знань, допущені помилки, недоліки та неточності.

Важливо після проведення поточного контролю зробити аналіз виконаної роботи студентів, вказати на допущені помилки і повідомити отримані результати.

Після засвоєння студентами навчального матеріалу деякого модуля проводяться модульні контрольні роботи. Так при вивченні курсу «Вища та прикладна математика» весь навчальний матеріал поділено на три модулі, отже студенти виконують три модульні контрольні роботи.

Для оцінювання поточного та модульного контролю розроблено критерії оцінювання виконаних навчальних та творчих завдань, тестів.

Шкала оцінювання поточної та модульної контрольної роботи доводиться до відома студентів перед її проведенням. Студентам варто чітко пояснити вимоги до виконання контрольної роботи, критерії оцінювання. Важливо також звернути увагу на складні ділянки виконання роботи. Після перевірки контрольних робіт варто проаналізувати їх результати та обґрунтувати виставлені бали.

Інформацію про отриману кількість балів за виконані письмові роботи студент повинен мати можливість дізнатися в будь-який період протягом навчального семестру.

Список літератури

1. Журавський В. С. Болонський процес: головні принципи входження в Європейський простір вищої освіти / В. С. Журавський, М. З. Згуровський. — Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2003. — 200 с.
2. Чернобай О. Б. Про деякі особливості викладання курсу «Вища та прикладна математика» / О. Б. Чернобай // Математика в сучасному технічному університеті (25—26 грудня, Київ) : Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції. — Київ: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 513—514.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ІНТЕРНАЦІОНАЛЬНИХ ГРУПАХ СТУДЕНТІВ

І. Л. Шинковська, І. П. Заєць

Національна металургійна академія України, Дніпропетровськ, Україна

Вища освіта в Україні стає все більш інтернаціональною. За останні роки значно зросла кількість іноземних студентів, що здобувають освіту в вищих навчальних закладах нашої країни за технічними спеціальностями. Створення умов для успішної адаптації в новому академічному, національному, соціокультурному та мовному середовищі та інтеграції в нього, підвищення мотивації та ефективності навчання, рівня комунікативної компетенції іноземних студентів, підготовка їх до наукової діяльності, а також розроблення та використання сучасних навчально-методичних ресурсів, впровадження нових освітніх технологій та методик — це основні задачі, що постають перед викладачами, які працюють з іноземними студентами у вищому навчальному закладі.

Робота викладача в інтернаціональній аудиторії має свою специфіку та пред'являє підвищені вимоги до його педагогічної майстерності, стиля спілкування зі студентами. Лектор повинен пам'ятати про те, що слухачі є представниками різних культур та різних систем освіти, тому процес навчання на нерідній для студентів мові, необхідно будувати з врахуванням особливостей міжкультурної взаємодії. Встановлення контакту та взаєморозуміння зі слухачами — це основа успішного навчання.

Викладач, як вихователь, забезпечує в інтернаціональній групі атмосферу рівності, справедливості, чуйності, співпраці, щоб кожний студент мав змогу висловити свої думки стосовно матеріалу, відчуваючи на собі доброзичливе ставлення з боку викладача та сокурсників.

У технічному ВНЗ більшість студентів навчаються за спеціальностями, що потребують достатньо глибокої математичної підготовки. Математичні дисципліни, поряд з іншими дисциплінами фундаментального блоку, вивчаються одними з перших у планах інженерних освітніх програм. Тому саме на них лягає завдання адаптації іноземного слухача до вивчення нового матеріалу на нерідній мові.

Метою навчання дисциплінам математичного циклу є формування фундаментальних математичних знань, умінь та навичок, що забезпечують міцне та свідоме оволодіння студентами матеріалу з вищої математики та суміжних дисциплін у системі вищої освіти. Студент повинен оволодіти математичним обчислюваним апаратом, методами доказу та обґрунтування рішень, ідеальними поняттями та абстрактними структурами. Для цього необхідно розвивати лексичні навички та вміння, удосконалювати знання російської мови. Студенти-іноземці повинні читати та розуміти прочитане, сприймати на слух предметну інформацію, коментувати розв'язання задач та доказів, викладати свої думки, використовуючи математичну термінологію.

Навчаючись спочатку на підготовчому факультеті, іноземні слухачі мають можливість систематизувати наявні та заповнити відсутні математичні знання, оволодіти математичною термінологією, розвинути загальнонавчальні вміння та навички самостійної роботи. Усе це допоможе їм навчатися на першому курсі: читати наукову та учбову літературу, слухати лекції, брати участь в роботі на практичних заняттях.

Іноземні студенти, що пройшли довишівську підготовку, цілком задовільно висловлюють свої думки на загальні теми в соціально-побутовій та соціально-культурних сферах. Водночас вони погано сприймають інформацію на слух під час проходження лекції, що призводить до проблем конспектування та засвоєння матеріалу.

В більшості випадків іноземні студенти не в змозі швидко та грамотно записати ключові положення матеріалу, що викладається. В кращому випадку вони механічно переписують інформацію з дошки, на осмислення почутого не залишається часу. Лектор повинен зменшувати темп викладання, спрощувати мовні конструкції, обмежувати лексичні та термінологічні структури, сприяючи кращому усвідомленню матеріалу іноземними студентами, тим самим втрачаючи час і, що більш важливо, інтерес іншої частини аудиторії, для якої мова викладання є рідною. Щоб уникнути цієї проблеми, бажано на початку навчання ознайомити іноземних студентів з програмою і надати в електронному та друкованому вигляді повний курс лекцій для самостійного опрацювання. При такому оснащенні на лекції студенти мають змогу слухати, усвідомлювати почуте, ставити свої питання і відповідати на запропоновані викладачем, включатися до обговорення теми (зауважимо, що більшість знайомиться з матеріалом лекції заздалегідь). В результаті об'єм розглянутого на лекції матеріалу збільшується, залишається час на його закріплення, здійснення зворотнього зв'язку.

Зауважимо, що викладання навчального матеріалу з вищої математики повинно бути координоване з програмами навчання споріднених дисциплін (інженерна графіка, фізика та ін.) та адаптовано з урахуванням поетапного оволодіння студентами лексиною та конструкціями наукового стиля мовлення. Застосовуючи міжпредметні зв'язки, слід виявляти загальні лексичні конструкції та використовувати їх для нарощування і активування термінологічного запасу. Доцільна попередня робота з термінами, розбір означень, робота з прикладами. Вправи, що пропонуються іноземним студентам, обов'язково повинні містити алгоритм управління (систему завдань зі зворотним зв'язком) та алгоритми функціонування (зразки предметних та речових дій).

Прищеплення іноземним слухачам вміння узагальнювати та систематизувати поняття є однією з головних задач викладача математики. Доцільно представляти матеріал у вигляді таблиць та схем, що сприяє наочності, систематизації і, відповідно, кращому сприйняттю та засвоєнню. Заняття з вищої математики повинні мати комунікативну направленість, що

пов'язано з необхідністю мотивації: студенту необхідні наявність цілі, мотиву, проблеми, які йому цікаві.

Щоб допомогти іноземному студенту якісно засвоїти матеріал викладач повинен підготувати навчально-методичне забезпечення дисципліни саме для цієї категорії слухачів. Література, що нині є в наявності, в більшості перевантажена великими пояснювальними текстами, зміст яких, не зважаючи на науковість, не є доступним для опанування іноземними студентами, особливо на перших етапах навчання. Тому навчальний матеріал слід подавати невеликими порціями, стисло, з мінімальним обсягом математичної лексики, використовуючи графічні та символні ілюстрації, схеми, таблиці. Тобто, методологічною основою підручника чи посібника є ідея пояснювально-ілюстративного типу навчання. При цьому пізнавальна діяльність студентів має в цілому репродуктивний характер. Уміння та навички формуються на основі конкретних правил, алгоритмів та готових зразків, великої кількості розв'язаних прикладів. У пригоді стануть і лексико-термінологічні словники, що забезпечать суттєву стабілізацію міжмовного спілкування. Переклад базових математичних термінів та стійких словосполучень з мови навчання на рідну і навпаки робить процес засвоєння матеріалу свідомим і формує основи його системного сприйняття. Застосування словників значно полегшує розуміння та засвоєння предмету, сприяє більш активній роботі студентів, особливо на заняттях, розширює математичну лексику та запас мовних конструкцій. Видання запитань до іспитів з вищої математики зі зразками заліково-екзаменаційних білетів (на мові навчання), з прикладами їх розв'язання та критеріям оцінювання, надає іноземному студенту змогу якісно підготуватися до сесії.

Таким чином, для підвищення ефективності навчання математики іноземних студентів, навчальний процес повинен базуватися на наступних методичних принципах:

- принцип цілісності (поєднання мовного, предметного та адаптаційного компонентів для досягнення мети навчання);
- принцип системності і послідовності (створення оптимальних умов для формування комунікативної компетенції з одночасною корекцією системи предметних знань);
- принцип диференційованості (процес навчання є багаторівневим, поетапним, розрахованим на різний рівень математичних знань і ступінь готовності студентів до сприйняття нового матеріалу на нерідній мові);
- принцип особистісно-орієнтованого підходу (методичні рішення приймаються з урахуванням потреб, здібностей та активності студентів);
- принцип наступності та перспективності (опора на сформовані знання, вміння і навички та орієнтація навчання на майбутню професійну діяльність).

Важливо пам'ятати, що тільки комбіноване використання викладачем цих принципів призводить до досягнення високих результатів у навчанні іноземних студентів.

**АРГАНІЗАЦЫЯ САМАСТОЙНАЙ ПРАЦЫ СТУДЭНТАЎ
ПА МАТЭМАТЫЧНЫМ АНАЛІЗЕ
Ў ПЕДАГАГІЧНЫМ УНІВЕРСІТЭЦЕ**

У. А. Шылінец, І. М. Гуло

*Беларускі Дзяржаўны Педагагічны Ўніверсітэт імя Максіма Танка,
Мінск, Беларусь*

shilinet@bspu.unibel.by

Удасканаленне методыкі выкладання і метадаў навучання ва УВА непарыўна звязана з пытаннямі самастойнасці студэнтаў. Менавіта ў развіцці самастойнасці захоўваюцца вялікія магчымасці паляпшэння ўсяго педагагічнага працэсу ў вышэйшай навучальнай установе, павышэння яго эфектыўнасці. Заснавальнік педагагічнай навукі Ян Амос Каменскі пісаў: «Кіруючай асновай нашай дыдактыкі няхай будзе: даследаванне і адкрыццё метаду, пры якім навучэнцаў менш бы вучылі, навучэнцы больш бы вучыліся...».

Высвятленне пытання аб тым, што сабою ўяўляе самастойная праца студэнтаў, у многім вызначае методыку яе арганізацыі і ўдасканалення. Аналіз наяўнай літаратуры метадычнага характару дазваляе зрабіць выснову аб тым, што існуюць разнастайныя пункты гледжання на сутнасць самастойнай працы.

Шэраг аўтараў разглядаюць самастойную працу як асобны від разумовай дзейнасці, якая ўключае ў сябе ўмельства слухаць і запісваць лекцыю, самастойна аналізаваць выступленні сваіх сяброў на занятках. Пры такім падыходзе самастойная праца разглядаецца як асобны від мысліцельнага працэсу, пры якім у навучэнца працуе памяць і рэпрадукцыйнае мысленне, на падставе іх студэнт атрымлівае гатовыя веды, запамінае гатовыя вывады, формулы, фармулёўкі і рэпрадуцыруе іх у вуснай ці пісьмовай форме. Хаця самастойную працу можна і трэба разглядаць як асобны мысліцельны працэс, аднак пры такой інтэрпрэтацыі не высветляецца яе асноўная сутнасць, бо самастойнасці мыслення тут амаль няма.

Існуе і другі від разумовай дзейнасці, якая характарызуецца тым, што чалавек здабывае веды ў працэсе інтэлектуальнага пошуку і самастойна можа скарыстаць іх пры аналізе тых ці іншых практычных задач.

Некаторыя педагогі разглядаюць самастойную працу студэнтаў як такую форму навучальнага працэсу, якая ажыццяўляецца ў пазааўдыторны час, у ходзе якой студэнты ажыццяўляюць напружаную разумовую дзейнасць па авалодванні сутнасцю той ці іншай вучэбнай дысцыпліны як па заданні навучальнай установы, так і па ўласнаму пачыну без пабочнай дапамогі.

Нельга згадзіцца з сцвярдженнем, што самастойная праца студэнтаў адзелена ў прасторы і часе ад іншых формаў навучальнага працэсу. У наяўнасці атрымліваецца разрыў яго на асобныя ізаляваныя стадыі, што вядзе да страты яго цэласнасці і адзінства. Што тычыцца другога моманту, то ён не зусім удала характарызуе сутнасць самастойнай працы, бо творчая напружаная інтэлектуальная дзейнасць у значнай ступені праяўляецца і пры праблемным, і

пры маналогавым выкладанні лекцыйнага матэрыялу, не кажучы ўжо пра практычныя заняткі, гэта значыць і ў аўдыторны час, а не толькі паза яго.

І апошняе, ні адна форма вучэбнага працэсу, у тым ліку самастойная праца, не можа ажыццяўляцца без пабочнай дапамогі, без кантролю з боку выкладчыкаў у тым або іншым выглядзе.

Трэба згадзіцца з тымі аўтарамі, якія лічаць, што самастойная праца ўяўляе сабою пэўны від пазнавальна-практычнай дзейнасці, і як усялякі від такой дзейнасці яна ўяўляе сабою дыялектычнае адзінства знешняга і ўнутранага, разрыўнага і непарыўнага. Да ўнутранага боку гэтай дзейнасці адносяцца прыёмы самаактывізацыі, самаарганізацыі, самкантролю, самарэгулявання працэсаў увагі, волі, памяці, мыслення, маўлення, уяўлення, пачуццяў і г. д., да знешняга — прыёмы арганізацыі працоўнага месца, тэхніка чытання і запамінання прачытанага, спосабы фіксавання тэксту выступлення і т. п. Разрыўнасць самастойнай працы заключаецца ў тым, што як асобны від навучальнага працэсу яна мае адносную самастойнасць у дачыненні да іншых яго відаў і апрача таго сама распадаецца на шэраг адносна самастойных актаў. Як непарыўны працэс яна ўяўляе сабою адзінства адносна ізаляваных актаў і ўключана ў адзіны цэласны навучальны працэс, шчыльна звязана з іншымі яго формамі.

Зыходзячы з вышэй пададзенага, можна даць наступнае азначэнне самастойнай працы студэнтаў: самастойная праца студэнтаў — пэўны від мэтанакіраванай пазнавальна-практычнай дзейнасці, якая ажыццяўляецца на працягу ўсяго перыяду навучання, якая характарызуецца адноснай незалежнасцю ад іншых формаў і відаў навучальнага працэсу і працякае пры дапамозе і кантролі выкладчыка.

Галоўная мэта дадзенай працы заключаецца ў тым, каб паказаць некаторыя канкрэтныя шляхі павышэння эфектыўнасці навучання ў працэсе выкладання матэматычнага аналізу, якія прыводзілі б да выхавання пазнавальнай актыўнасці і развіцця творчай самастойнасці мыслення студэнтаў.

Аптымальная эфектыўнасць самастойнай працы студэнтаў у вучэбным працэсе залежыць ад правільнай яе арганізацыі на ўсіх этапах навучання. Асаблівай ўвагі патрабуе арганізацыя самастойнай працы студэнтаў на першым курсе. Ва УВА студэнт з першых дзён сутыкаецца з іншымі ўмовамі, з іншай арганізацыяй вучэбнага працэсу ў параўнанні са школай.

Негледзячы на тое, што ў яго маюцца некаторыя ўменні самастойнай працы, студэнт не заўсёды можа правільна размеркаваць свае сілы, аптымальна планаваць свой час. У студэнта ўзнікае супярэчнасць паміж дачыненнем да самастойнай працы і ўмовамі арганізацыі вучэбнага працэсу. Гэта ў канчатковым выніку з'яўляецца адным з фактараў, якія зніжаюць эфектыўнасць яго працы.

На наш погляд, было б мэтазгодна чытаць студэнтам-першакурснікам курс «Аптымальная арганізацыя самастойнай працы» з разглядам у ім наступных пытанняў: канспектавенне лекцый; праца з матэматычнай літаратурай;

падрыхтоўка да лекцый, практычных заняткаў, кансультацый; падрыхтоўка да залікаў і экзаменаў; збор і апрацоўка матэрыялу для напісання дакладаў, рэфератаў, курсавых і дыпломных прац.

Навучанне ва УВА пачынаецца, як правіла, з лекцыі. Задача лектара заключаецца не толькі ў перадачы інфармацыі, але і ў мабілізаванні слухачоў на самастойную працу, на прадуктыўнае творчае мысленне, асноўнымі паказнікамі якога з'яўляюцца самастойнасць, гібкасць, усвядомленасць, глыбіня, устойлівасць.

Пры выкладанні матэматычнага аналізу найлепшыя вынікі па выхаванні пазнавальнай актыўнасці і развіцці творчай самастойнасці мыслення, на наш погляд, можа даць выкарыстанне наступных форм і метадаў самастойнай працы:

- 1) метады контрпрыкладаў;
- 2) метады проціпастаўлення;
- 3) памылковыя разважанні;
- 4) выключэнне лішняй умовы;
- 5) аднаўленне ўмовы;
- 6) самастойнасць у падыходзе да доказу тэарэм;
- 7) высвятленне істотнасці ўмоў тэарэм.

Адной з асноўных праяўленняў самастойнасці мысліцельнай дзейнасці студэнтаў з'яўляецца засваенне імя навуковых паняццяў. Для актыўнай працы па засваенні навуковых паняццяў мы прапануем выкарыстоўваць метады контрпрыкладаў, якія дазваляць студэнтам самастойна вылучыць істотныя прыметы вызначаемага паняцця, глыбока асэнсавыць і правільна раскрыць змест дадзенага паняцця.

Прціпастаўленнем мы называем прыклад, які ўзгадняецца з адмаўленнем азначэння. Пры працы над азначэннем навуковага паняцця неабходна прапаноўваць студэнтам прыводзіць прыклады і проціпастаўленні. Прапаноўваючы студэнту прывесці або растлумачыць проціпастаўленне, мы даём яму разумовую нагрузку, якая заключаецца ў праверцы выканання кожнага пункта, кожнага слова азначэння і спрыяе больш глыбокаму і асэнсаванаму засваенню атрыманых ведаў.

Будучы настаўнік павінен будзе займацца ацэначнай дзейнасцю, якая патрабуе ўмення апэратыўна знаходзіць памылкі і іх крыніцы, аргументавана даказваць сваю думку, абвяргаць недакладныя меркаванні. З гэтай мэтай можна прапаноўваць студэнтам заданні тыпу: «Знайсці памылку ў разважаннях», «Выключыць лішнюю ўмову», «Аднавіць умову».

Значная ўвага надаецца прывіццю студэнтам навыкаў працы з вучэбнай і навуковай літаратурай. Хаця лекцыя застаецца вядучай формай перадачы вучэбнага матэрыялу слухачам, але частку вучэбнага матэрыялу можна не пераказваць у час лекцыі, а вынесці для самастойнага вывучэння. З гэтай мэтай вызначаны тэмы па матэматычным аналізе, якія рэкамендаваны студэнтам для самастойнага вывучэння.

Адным з метадаў, які дазваляе актывізаваць самастойную працу студэнтаў з’яўляецца метада індывідуалізацыі, які заключаецца ў выкананні студэнтамі: 1) розных індывідуальных заданняў у час вучэбных заняткаў і час індывідуальных кансультацый; 2) у выдачы і прыёме індывідуальных хатніх кантрольных работ.

Практыка паказвае, што любыя формы самастойнай працы студэнтаў даюць аддачу толькі ў выпадку строгага кантролю. Кантроль за працай студэнтаў над вучэбнай дысцыплінай «Матэматычны аналіз» ажыццяўляецца намі як традыцыйным спосабам (кантрольныя працы), так і на падставе выкарыстання тэставай тэхналогіі, якая прадугледжвае камп’ютэрную апрацоўку дадзеных тэсціравання і падачу вынікаў апрацоўкі.

Перавагі тэставага кантролю наступныя:

- аб’ектыўнасць ацэнкі;
- дакладнасць інфармацыі аб аб’ёме засвоенага матэрыялу і аб узроўні яго засваення;
- эфектыўнасць і магчымасць дыферэнцыяцыі;
- рэалізацыя індывідуальнага падыходу ў навучанні;
- параўнальнасць вынікаў тэсціравання для розных груп студэнтаў.

Распрацаваны і ўкараняюцца ў навучальны працэс тэсты па матэматычным аналізе [1—3].

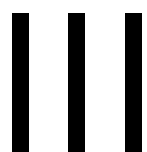
Нягледзячы на эфектыўнасць сістэмы, заснаванай на выкарыстанні тэставых тэхналогій, нельга абмяжоўвацца толькі тэставай формай праверкі ведаў. Недахоп тэставага кантролю — у адсутнасці інфармацыі аб ходзе разважанняў студэнта.

Для матывацыі студэнтаў да працы над вучэбнай дысцыплінай «Матэматычны аналіз» вынікі іх кіруемай самастойнай працы ўлічваюцца пры правядзенні экзаменаў. Студэнты, паспяхова выканаўшыя індывідуальныя заданні, вызваляюцца ад рашэння прыкладаў у час экзамену.

Неабходна адзначыць, што апісаная намі методыка арганізацыі самастойнай працы студэнтаў па матэматычным аналізе значна павысіла ўзровень іх матэматычных ведаў.

Спіс літаратуры

1. Тэсты па матэматычным аналізе, алгебры і геаметрыі / Б. Т. Турскі, У. А. Шылінец, С. І. Васілец. — Мінск : БДПУ, 2004. — 45 с.
2. Турскі Б. Т. Матэматычны аналіз, алгебра і геаметрыя ў тэстах : дапаможнік / Б. Т. Турскі, У. А. Шылінец. — Мінск : БДПУ, 2007. — 32 с.
3. Шилинец В. А. Математика в тестах : пособие / В. А. Шилинец, П. И. Кибалко, Е. С. Гацуро. — Минск : БГПУ, 2006. — 63 с.



ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

**МИХАЙЛО ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЕНКО: 190 РОКІВ
(ВІРТУАЛЬНА ВИСТАВКА ПЕДАГОГІЧНОГО МУЗЕЮ УКРАЇНИ
ДО ЮВІЛЕЮ ВЧЕНОГО)**

В. Бондаренко, В. Гайдей

Педагогічний музей України,

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

v_bondarenko87@ukr.net

Педагогічний музей України щорічно організовує та проводить виставки, семінари, круглі столи, присвячені діяльності видатних українських вчених, педагогів, організаторів освіти в Україні. Мета таких заходів — музейними засобами та на матеріалах музейних колекцій вшанувати пам'ять, представити творчий доробок діяча, популяризувати його творчу спадщину. Для реалізації вищезазначеної мети музейні працівники також активно використовують можливості мережі Інтернет, яка нині є невід'ємною частиною культурного життя, особливо молоді. Тому, окрім традиційних методів презентації музейних колекцій, Педагогічний музей використовує також новий метод поширення інформації — *віртуальні виставки*.

Саме віртуальна виставка дає змогу показати фонди музею широкому колу відвідувачів та розв'язати низку проблем, які важко вирішити традиційними методами: можливість дистанційного перегляду виставки в будь-який час без відвідування музею, необмеженість терміну експонування, розкриття змісту представлених на виставці документів за допомогою анотацій, представлення документів, які відсутні у фондах музею, але мають важливе значення для розкриття теми, можливість перегляду змісту окремих документів, зокрема збірників наукових праць та ілюстрацій з використанням можливостей комп'ютерної техніки. Відвідувачі віртуальної виставки можуть отримати інформацію за темою, що їх цікавить, без поспіху, часових або географічних обмежень і витрат, наочно ознайомитися з інформаційним ресурсом та одержати іншу додаткову інформацію [15]. Наукова цінність цього виду виставок Педагогічного музею України полягає в тому, що вони містять повнотекстові електронні копії праць того чи іншого педагога, а це, часто, рідкісні видання кінця XIX — поч. XX ст. та книги, що входять до наукового об'єкту «Колекція стародруків Педагогічного музею України (рукописи, стародруки, рідкісні видання 1477 — 1923 pp.)», що становлять національне надбання.

Сайт Педагогічного музею щорічно поповнюється новими віртуальними виставками, присвяченими ювілеям видатних педагогів, навчальних закладів та періодичних видань. Особливе місце серед них посідають виставки ювілеїв видатних учених-математиків. Так, на сайті музею вже діють віртуальні виставки, що висвітлюють творчий доробок таких відомих українських математиків, як Тимофій Лубенець, Олександр Астряб, Костянтин Лебединцев, Олена Дубинчук.

У листопаді 2015 року на веб-сайті Педагогічного музею України було представлено віртуальну виставку до 190-річчя від дня народження відомого київського вченого, математика-методиста Михайла Єгоровича Ващенко-Захарченка.

Народився вчений 12 листопада 1825 року в селі Маліївка Золотоніського повіту колишньої Полтавської губернії в сім'ї нащадка запорізького козака. Середню освіту здобув у Золотоніському повітовому училищі, потім у Київській другій гімназії. Два роки провчився на математичному відділі філософського факультету Київського університету, потім — у Колеж де Франс у Парижі. У 1862 році захищає магістерську дисертацію, в якій уперше систематично описує операційне числення і застосовує його до розв'язання диференціальних рівнянь. У 1866 році захищає докторську дисертацію на тему: «Ріманова теорія функцій комплексної змінної», яка викликала великий інтерес у науковому математичному світі того часу. Це була одна з найперших монографій з теорії аналітичних функцій у Російській імперії.

Уся наукова й педагогічна діяльність М. Ващенко-Захарченка була пов'язана з Київським університетом, де він працював протягом 40 років, читав різні математичні курси, зокрема вищу алгебру, аналітичну геометрію двох та трьох вимірів, теорію визначників, теорію чисел, теорію ймовірностей, варіаційне числення й теорію аналітичних функцій. Він з року в рік удосконалював ці курси, видаючи відповідні друковані рекомендації, написав 12 навчальних посібників, за якими навчалися декілька поколінь студентів. Особливо цінними підручниками, які витримали декілька перевидань, були підручники з алгебричного аналізу, аналітичної геометрії двох та трьох вимірів, варіаційного числення, проективної геометрії.

Михайло Ващенко-Захарченко захоплювався також історією педагогіки і був першим у Київському університеті істориком математики. У 1883 році виходить друком його історичний нарис розвитку геометрії, який називався «Історія математики». Це праця обсягом майже 700 сторінок, у якій автор «об'єднав» роботи 74 учених Давнього світу та 42 математиків Середньовіччя. У 55 років Михайло Єгорович почав вивчати грецьку мову, щоб прочитати Евкліда в оригіналі, вивчав праці європейських математиків. Результатом цього стало видання у М. Ващенком-Захарченком у 1880 році перекладу «Елементів» Евкліда з пояснювальним вступом і вагомими тлумаченнями. У новому виданні було виправлено недоліки попередніх перекладів, його було редаговано з погляду останніх відкриттів, зроблених у XIX столітті щодо природи принципів елементарної геометрії. Цей переклад став дуже корисним тогочасному студентству, а також цікавим з погляду науки.

Окрім Київського університету Св. Володимира, ім'я Михайла Єгоровича Ващенко-Захарченка було також пов'язане з іще одним навчальним закладом міста Києва — першою Київською приватною гімназією А. Т. Дучинської, заснованою дружиною професора — Вірою Миколаївною Ващенко-Захарченко. Сам професор клопотав про відкриття закладу, допомагав фінансово,

запрошував викладачів, здебільшого своїх колег з університету Св. Володимира, сам викладав курс математики. У 1881—1896 рр. Михайло Єгорович входив до складу Опікунської ради гімназії [3].

Михайло Ващенко-Захарченко увійшов в історію української педагогіки як методист-математик, талановитий педагог. Його наукова школа стала міцною основою тогочасної математичної науки. Серед учнів М. Є. Ващенко-Захарченка були такі відомі вчені, як Б. Букресєв, В. Вельмін, В. Єрмаков.

Окрім біографічних відомостей про вченого віртуальна виставка вміщує також портрет педагога, перелік його праць, що зберігаються у фондах музею та відскановані титульні сторінки цих книг. Серед них: «Начала Евклида съ пояснительнымъ введением и толкованіямъ» (1880), «Елементарная геометрия въ объеме гимназическаго курса» (1883), «Аналитическая геометрия двухъ и трехъ измерений» (1883). Також подано бібліографію публікацій вченого в періодиці та електронну копію тексту статті «Исторический очерк развития аналитической геометрии» («Университетские известия», 1883, № 9).

Загалом у віртуальній виставці

http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/190_rokiv_vachenko_zaharchenko/

використано 12 експонатів, які входять до наукового об'єкту «Колекція стародруків Педагогічного музею України (рукописи, стародруки, рідкісні видання 1477—1923 рр.), що становить національне надбання.

Таким чином, використання віртуальних виставок як нових методів демонстрації музейних колекцій дає можливість перейти на якісно новий рівень збереження, вивчення та популяризації історичної спадщини нашого народу. Крім того, віртуальні виставки з їх повнотою інформації, солідним науковим апаратом, цікавим ілюстративним матеріалом — це ще один додатковий спосіб зробити відвідування сайту музею більш привабливим та інформативним для користувачів.

Список використаних джерел та літератури

1. Боярська-Хоменко А. В. М. Є. Ващенко-Захарченко та його вплив на розвиток Київської математичної школи [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://nauka.hnpu.edu.ua/>
2. Грацианская Л. Н. Михаил Егорович Ващенко-Захарченко // Киевские математики-педагоги / под. ред. А. Н. Боголюбова. — Киев : Вища школа, 1979. — 312 с.
3. Двадцатипятилетие первой Киевской частной женской А. Т. Дучинской Гимназии, основанной В. Н. Ващенко-Захарченко. — Киев : Тип. Петра Барского, 1903. — 104 с.
4. Ващенко-Захарченко М. Е. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованием / М. Е. Ващенко-Захарченко. — Киев : Тип. Имп. Ун-та Св. Владимира, 1880. — 747 с.
5. Ващенко-Захарченко М. Е. Елементарная геометрия в объеме гимназическаго курса / М. Е. Ващенко-Захарченко. — Киев : Тип. Имп. Ун-та Св. Владимира, 1883. — 355 с.
6. Ващенко-Захарченко М. Е. Аналитическая геометрия двух и трех измерений / М. Е. Ващенко-Захарченко. — Киев : Тип. Имп. Ун-та Св. Владимира, 1883. — 355 с.

7. Ващенко-Захарченко М. Е. Теория определителей (окончание). Теория двоичных форм / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1876. — № 7. — С. 377—416.
8. Ващенко-Захарченко М. Е. Теория двоичных форм (продолжение) / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1877. — № 1. — С. 433—456.
9. Ващенко-Захарченко М. Е. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1878. — № 3. — С. 145—176 ; № 6. — С. 233—264 ; № 7. — С. 265—296 ; № 10. — С. 369—392.
10. Ващенко-Захарченко М. Е. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1879. — № 1. — С. 433—488 ; № 2. — С. 489—512 ; № 3. — С. 513—528 ; № 11. — С. 729—744 ; № 12. — С. 745—747.
11. Ващенко-Захарченко М. Е. Краткий исторический очерк развития геометрии / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1880. — № 1. — С. 1—40 ; № 2. — С. 41—72 ; № 3. — С. 79—102 ; № 4. — С. 103—118 ; № 5. — С. 119—150, № 6. — С. 151—174 ; № 7. — С. 175—214 ; № 8. — С. 215—230 ; № 12. — С. 231—270.
12. Ващенко-Захарченко М. Е. Краткий исторический очерк развития геометрии / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1882. — № 9. — С. 673—684.
13. Ващенко-Захарченко М. Е. Исторический очерк развития аналитической геометрии / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1883. — № 9. — С. 274—292.
14. Ващенко-Захарченко М. Е. Теория функций / М. Е. Ващенко-Захарченко // Университетские известия. — 1886. — № 2. — С. 57—72.
15. Трачук Л. Віртуальна виставка: нова бібліотечна послуга бібліотеки / Л. Трачук. — Вісник книжкової палати. — 2007. — № 11. — С. 36—38.
16. Кравчук М. Математика та математики в Київському університеті за 100 років (1834—1934) // Михайло Кравчук. Вибрані праці. Історія і методика математики / Національний технічний університет України «КПІ», Педагогічний музей України; [упоряд.: Вірченко Н. О., Гайдей В. О., Міхно О. П.]. — Київ : НТУУ «КПІ», ПМУ, 2014.— 252 с. — (Сер. «Педагогічні републікації» ; вип. 1). — С. 108—146.

ШУМЕРСЬКА «УНІВЕРСАЛЬНА АСТРОНОМО-МАТЕМАТИЧНА ТАБЛИЦЯ» ТА ВЕЛИКІ ПІРАМІДИ ЄГИПТУ І МЕКСИКИ

Г. Ю. Гриценко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

yaropolkbazhaluk@gmail.com

Найвеличніші піраміди Єгипту та Мексики — «білі плями» в історії культури стародавніх цивілізацій.

Археологи та історики астрономії вважають єгипетські піраміди тільки поховальними спорудами, але незалежні дослідники їм не вірять і посиляються на свідчення античних та арабських авторів, за якими у піраміді Хеопса були закодовані математичні та астрономічні знання.

Оскільки остання царська піраміда у Єгипті споруджена у XVII столітті до н. е., а великі піраміди у Мексиці зводилися у II ст. н. е., то, враховуючи майже двохтисячолітній розрив їх у часі та віддаль у просторі, будь-які їх порівняння в історичній науці вважаються антинауковими.

Автор, як незалежний дослідник, знехтував цими застереженнями та встановив, що піраміди Хеопса і Хефрена у Єгипті та піраміди Сонця і Місяця у Мексиці проектувалися за числами шумерської «Універсальної астрономо-математичної таблиці» («УТ»), яка була сформована в Шумері десь на рубежі IV та III тис. до н. е.

«УТ» реконструйована автором з опублікованих О. Нейгебауером «математичних» клинописних фрагментів та дешифрована як астрономо-математична ще у 1998 році.

Пов'язувати числа габаритів пірамід з числами астрономії «УТ» ми почали після усвідомлення, що «УТ» була невід'ємною складовою близькосхідної астральної релігії, в якій наукові знання про рух небесних тіл тісно перепліталися із фантастичними уявленнями про їхню природу.

Наші дослідження свідчать, що «УТ» як складова релігійного світогляду була широко відома у жрецьких колах на Близькому Сході та в Європі до часів панування Риму і впровадження християнства.

Так, з «УТ» походить опублікована Нейгебауером вавилонська «Таблиця обернених величин відносно числа 60», у якій 30 математичних процедур.

«Прогресія Платона», опублікована К. Фламаріоном, — фрагмент «УТ».

«Таблиця ділення числа 2 на непарні числа» з «Папіруса Райнда» побудована за принципами «УТ». Ці таблиці історики математики вважають суто математичними. Насправді за ними здійснювалися астрономічні обчислення.

Дослідники не впізнають у цих таблицях періодів планет, оскільки давні грецькі астрономи фіксували тільки їхні середні синодичні періоди (які фігурують і в сучасних довідниках), а жерці фіксували періоди планет у всьому діапазоні їхніх значень — від мінімальних до максимальних. Крім того, згідно з хибною та, на жаль, загальновизнаною «парадигмою» історико-астрономічної

школи Нейгебауера, давня єгипетська астрономія та математика нібито були вкрай примітивними, а тому дослідникам не спадає на думку, що єгипетські «математичні таблиці» можуть бути «астрономо-математичними».

Так, ревний послідовник Нейгебауера проф. І. А. Климишин безвідповідально стверджує: «В єгипетських папірусах практично немає записів, що стосувалися б астрономічних явищ. Єгиптяни практично не цікавилися особливостями руху планет, затемненнями Сонця й Місяця». Натомість Аристотель був іншої думки.

В астральному язичництві «УТ» була астрономо-математичною «Біблією-компендіумом» із сакральними числами астрономії. У «Біблії — Святому Письмі» нами виявлено багато чисел астрономії, в тому числі і числа габаритів єгипетських пірамід, які фігурують у ній в алегоричній формі.

За «УТ» будувалися піраміди, мегалітичні «святинища-обсерваторії», створювалися астрономічні обчислювальні пристрої («Фестський диск») і складалися таблиці астрономічних обчислень. «УТ» була «Надсистемою», поза якою дешифрування пірамід неможливе. Ніяких «таємничих знань», а тим більше «зниклих цивілізацій» не існувало. Поширення точних наук відбувалося з єдиного центру — Шумеру. Цивілізаційний ланцюг: Шумер — Єгипет — Європа — Америка.

У кінці I століття до н. е. у Римі, поблизу собору Святого Павла, була побудована піраміда висотою 36,4 м на честь Гая Цестія — римського претора в Єгипті. Наші дослідження показали, що її габарити проектувалися за «УТ» і фіксували ті ж самі астрономічні параметри, що й піраміда Хеопса.

В Америці відомі численні артефакти, які свідчать про її відвідування фінікійцями, карфагенянами, греками та римлянами. Але докази впливу європейців на культури аборигенів Америки відсутні. З цього приводу Г. Бургунський та Р. Фурдуй у книзі «Загадки давнини» слушно писали: «Для справжніх наукових пошуків найважливішим є не уривчасті сліди тимчасового перебування представників іншого народу в тій або іншій частині світу. Головне — їхній внесок у культуру всього континенту. Саме такі пошуки мають принципове значення».

Факт будівництва римлянами піраміди Цестія за «УТ» дозволив нам зробити припущення, що римська діаспора в Мексиці, набувши панівного становища, відродила ідею будівництва пірамід у відповідності зі своїм астрально-релігійним світоглядом, а людські та матеріальні ресурси дозволили реалізувати цей задум.

Математика «Універсальної астрономо-математичної таблиці»

«УТ» була сформована у Шумері у шістдесятковій системі числення, а єгиптянами була переведена в десяткову систему числення.

1. «УТ» містить 725 чисел, згрупованих у 29 стовпчиків та 25 рядків.

2. Базові числа «УТ» — 1; 100 та 6; 60. Базовий ряд стовпчиків таблиці: ... $(1 : 6)^2$; 60^2 ; $(1 : 6)$; 60; 1; 100; 6; $(1 : 6)$; 6^2 ; $(1 : 6)^2$; 6^3 ; $(1 : 6)^3$; 6^4 ...

Маємо чергування степеневих рядів числа 6 із степеневим рядом числа $(1 : 6)$.

3. Степеневий ряд числа 6 — впровадження шістдесяткової системи числення.

4. Числа 1 та 6 у стовпчиках подвоюються, а числа 60 та 100 — роздвоюються.

5. Кожне число у стовпчиках таблично збільшується або зменшується у: 2; 4; 8; 16; 32; 64... рази. Реалізується зведення чисел у квадрат.

6. Кожне число у рядках таблично збільшується або зменшується у 6; 3, 1,5 та у 12; 24; 48; 96... разів, а також у 36; 18; 9; 4,5 та у 72; 144... рази.

7. По діагоналі числа таблично збільшуються або зменшуються у 3; 9; 27; 81... раз. Реалізується зведення чисел у куб та добуток кубічного кореня.

8. Кожне число у ряді таблиці з одного боку має обернену величину відносно числа 60, а з іншого боку — відносно числа 100.

9. Знак «нуль» був невідомий і не позначався на початку дробового числа, а в кінці числа нулі дописувалися умоглядно. Реалізувалася математика «фракталів» — подібних величин. Звертаємо увагу: розрядну кому умоглядно ставили за змістом!

10. Кожне число в таблиці є «колом», якому відповідає число «діаметр» при «пі» = 3,125 та число «радіус» при «2 пі» = 6,25. Числа «пі» та «2 пі» отримувалися в таблиці шляхом послідовного роздвоєння числа 100.

11. Коло ділилося на 360 частин — градусів.

12. Кожне число «УТ» можна було розглядати як «швидкість» протягом одного градуса «кола». При множенні цього числа на 360 таблично отримувалося число «циклу».

13. 3 «УТ» походить стандартна одиниця виміру — царський лікоть, рівний 0,52356 м. ($100 : 191 = 0,523526$). На практиці 0,523 — 0,525 м.

Впровадження «УТ» знаменувало першу «математичну революцію» у стародавньому світі, за якою відбулося нормування математичних процедур.

Дослідники вважають, що ідея форми піраміди полягала у символічному спрямуванні «душ» померлих на Небо.

Наші дослідження з'ясовують астрономічний зміст і призначення пірамід.

Основною філософською проблемою жерців було збагнення феноменів народження та смерті Людини. Світила та планети вважалися живими антропоморфними Богами, які обумовлювали народження, життя та смерть Людини. Так, Людина народжувалася завдяки планеті Венері, яка у своєму періоді містить дві 243-добові лінійні фази (27×9) та 9-місячну — 266-добову фазу. Чоловіком Венери була планета Марс, земним втіленням якої був Фараон. Вшановували Марса-Гора дитя (число 765 д. — мін. період Марса), а також Марса-Гора старого (число 810 д. — макс. період Марса). Смерть Людини пов'язували зі смертю Світил, сонячними та місячними затемненнями, які можуть відбуватися через шість місяців — 177—178 д. Вважалося, що «душа» праведної Людини після смерті потрапляла на Сонце, а «душа» грішної — на Місяць.

Отже, жерцям конче необхідно було знати і обчислювати розміри Сонця та Місяця, відстані до них, а також періоди Сонця, Місяця, Венери та Марса.

Були встановлені безнульові числа змінного відносного кола Сонця: 408—468. Справжнє безнульове число кола Сонця — 4368. Безнульові числа змінного відносного кола Місяця: 102—117. Справжнє число — 1092. По завершенні циклу прецесії, після якого вважалося, що всі явища повторюються, Людина воскресала подібно до планет, які відроджувалися після періодів невидимості. Цикл прецесії вважався змінним, його швидкість коливалася в межах 1 градус за 68—78 років.

Наведені числа антропологічної астрономії кодувалися в пірамідах одиницею виміру — царським ліктем (ц. л.) у системі 1 ц. л. = 1 добі, а також числами обернених величин астрономічних та антропологічних параметрів.

Піраміди були храмами, біля яких відбувалися обряди, приурочені до народження, одруження та смерті як Фараона, так і простих Людей.

Піраміда фараона Хефрена в Гізі

1. Висота піраміди — 274 ц. л. (За «УТ» — 273,35).

$274 \times 0,52356 = 143,46$ м. За обмірами — 143,5 м.

2. Сторона квадратної основи піраміди — 411 ц. л. (За «УТ» — 411,52).

$411 \times 0,52356 = 215,18$ м. За обмірами — 215,3 м.

3. Периметр основи піраміди — $411 \times 4 = 1644$ ц. л. (За «УТ» — 1646).

$100\,000 : 274 = 60\,000 : 1644 = 364,9635$ д. (365 д.). — Сонячний рік.

4. Діагональ квадратної основи — 581,242 д. — Венера. (За «УТ» — 583,2 д.).

$65,8 \times 360 = 102,75 \times 240 = 411 \times 60 = 24660$ р. — цикл прецесії зі швидкістю 1 градус за 68,5 року. (За «УТ» — 68,587). 107,75 — коло Місяця. 411 — коло Сонця.

$100\,000 : 411 = 243,31$ д. (За «УТ» — 243 д.) — фаза Венери — термін народження.

$4110 : 16 = 256,875$. $256,875 \times 27 = 6935,625$ д. — 19-річний сонячно-місячний цикл. $6935,625 : 19 = 365,033$ д.

Піраміда фараона Хеопса в Гізі

1. Висота піраміди від її основи — 281,25 ц. л. (число «УТ»).

$281,25 \times 0,52356 = 147,25$ м. За обмірами — 147,6 м. Вершина зруйнована.

2. Глибина підземної кімнати — 56,25 ц. л. (число «УТ»).

$56,25 \times 0,52356 = 29,45$ м. За обмірами — «приблизно 30 м».

3. Загальна висота піраміди — $281,25 + 56,25 = 337,5$ ц. л. (число «УТ»).

$100\,000 : 281,25 = 355,55$ д. — місячний рік (число «УТ»).

$28,125 \times 13 = 365,625$ д. — сонячний рік. (За «УТ» — 365,8 д.).

$10\,000 : 56,25 = 60\,000 : 337,5 = 177,77$ д. — число смерті («число «УТ»).

$15\,000 : 56,25 = 266,66$ д. — термін народження та воскресіння (число «УТ»).

4. Сторона квадратної основи піраміди — 444 ц. л. (За «УТ» — 444,44).

$444 \times 0,52356 = 232,46$ м. За обмірами — 232,4 м.

5. Периметр квадратної основи піраміди — $444 \times 4 = 177,6$ д. — число смерті.

$444 \times 6 = 266,4$ д. — термін народження та воскресіння.

$74 \times 360 = 111 \times 240 = 444 \times 60 = 266,4 \times 100 = 177,6 \times 150 = 26\,640$ р. — цикл прецесії зі швидкістю 1 градус за 74 роки. (За «УТ» — 74,074 та 26 666,6).

111 — коло Місяця 444 — коло Сонця

6. Діагональ квадратної основи — 627,911. (За «УТ» — 62915). «2 пі» = 6,27911.

Піраміди Хефрена та Хеопса побудовані на спільній діагоналі тому, що при перемноженні чисел їхніх діагоналей отримується число Сонячного року.

$581,242 \times 6,27911 = 364,968$ (365 д.) — Сонячний рік.

Отже, проектування цих пірамід було взаємно узгоджене.

Піраміда Гая Цестія у Римі

1. Висота піраміди — 36,4 м. $36,4 : 0,52444 = 6940,7$ д. — 19-річний сонячно-місячний цикл (За «УТ» — 6944,44 д.). $6940,7 : 19 = 365,3$ д.

2. Сторона квадратної основи піраміди — 29,5 м. $29,5 : 0,52444 = 56,25$ ц. л. (число піраміди Хеопса). $56,25 : 2 = 28,125$ д. (число піраміди Хеопса).

$28,125 \times 13 = 365,625$ д. — Сонячний рік.

3. Периметр квадратної основи піраміди. $56,25 \times 4 = 225$ д. — сидеричний період Венери. $60\,000 : 225 = 266,66$ д. — термін народження.

$40\,000 : 225 = 177,77$ д. — число смерті. $100\,000 : 225 = 444,44$ — коло Сонця.

$25\,000 : 225 = 111,111$ — коло Місяця. $80\,000 : 225 = 355,55$ д. — місячний рік.

Усі обчислення за «УТ» і присутні у піраміді Хеопса.

П'ятиярусна піраміда Місяця у Теотіуакані (Мексика)

1. Висота піраміди — 42 м. $42 : 0,525 = 80$ ц. л.

$80 \times 5 = 400$ — відносно коло Землі. (За «УТ» — 4). (5 — число ярусів піраміди).

За Аристотелем відносно коло Землі = 400 000. Це не розмір у стадіях.

$80 \times 72 = 576,0$ д. — мін. період Венери (число «УТ»).

$80 \times 96 = 768,0$ д. — мін. період Марса (число «УТ»).

$80 : 3 = 266,66$ д. — термін народження. $80 : 45 = 177,77$ д. — число смерті.

$76,8 \times 360 = 576 \times 48 = 768 \times 36 = 1152 \times 24 = 4608 \times 60 = 27\,648$ р. — цикл прецесії (число «УТ»). 1152 — коло Місяця. 4608 — коло Сонця.

$400 \times 96 = 3840,0$ — відносна відстань від Землі до Місяця, яка = 60 радіусам Землі. $400 : 6,25 = 64$ — радіус Землі. $64 \times 60 = 3840$ (число «УТ»).

За Гипархом (II ст. до н. е.) відстань від Землі до Місяця = 59 радіусам Землі.

Справжня середня відстань від Землі до Місяця — 384 400 км.

Відносна відстань від Місяця до Сонця — $3840 \times 4 = 15\,360$ (число «УТ»).

Відносна відстань від Землі до Сонця — $3840 + 15\,360 = 3840 \times 5 = 19\,200$ (число «УТ»). Відстань від Землі до Сфери нерухомих зірок за «Прогресією Платона» (опублікованою К. Фламаріоном): $3840 \times 27 = 103\,680$ (число «УТ»).

2. Сторони прямокутної основи піраміди — 150×130 м. Периметр — 560 м. $560 : 0,525 = 1066,666\dots$ ц. л. (число «УТ»).

$1066,66 : 6 = 177,77$ д. — число смерті (число «УТ»).

$1066,66 : 4 = 266,66$ д. — термін народження (число «УТ»).

$300\,000 : 1066,66 = 281,25$ ц. л. — число піраміди Хеопса.

$1066,66 \times 3,6 = 3840$ — відносна відстань від Землі до Місяця.

$1066,66 \times 18 = 19\,200$ — відносна відстань від Землі до Сонця.

3. Діагональ прямокутної основи — 378 д. — період Сатурна.

$1066,66 : 3 = 355,55$ д. — місячний рік.

Числа 378 д. та 355,55 д. свідчать, що піраміда проектувалася римлянами.

Так у римському календарі числа днів чергувалися у порядку: 355 д., 377 д., 355 д., 378 д. У Римі відбувалися бучні свята «Сатурналії» на честь бога землеробства Сатурна. Основа піраміди була запроектована не квадратною, а прямокутною для отримання числа 378.

П'ятиярусна піраміда Сонця у Теотіуакані (Мексика)

1. Висота піраміди за наближеними обмірами = 75 м. Оскільки вершина піраміди зруйнована, то, певно, справжня висота піраміди = 75,39 м.

$75,39 : 0,52352 = 144$ ц. л. $144 \times 4 = 576$ д. — Венера (число «УТ»).

$100\,000 : 144 = 6944,44$ д. — 19-річний сонячно-місячний цикл (число «УТ»).

$6944,44 : 19 = 365,5$ д. — Сонячний рік.

$144 \times 8 = 1152$ — коло Місяця. $144 \times 32 = 4608$ — коло Сонця.

$144 \times 192 = 27\,648$ р. — цикл прецесії зі швидкістю 1 градус за 76,8 року.

$144 \times 30 = 4320$ — коло Сонця (число «УТ»).

$144 \times 5 = 720$ (5 — число ярусів піраміди).

$720 \times 36 = 1080 \times 24 = 4320 \times 6 = 25\,920$ р. (число «УТ») — цикл прецесії зі швидкістю 1 градус за 72 р. 1080 — коло Місяця.

$144 : 54 = 266,66$ д. — термін народження. $144 : 81 = 177,77$ — число смерті.

2. Сторони прямокутної основи піраміди — 225×220 м. Периметр — 890 м.

$890 : 0,52352 = 1700$ ц. л. (За «УТ» — 16987).

$1700 \times 144 = 24\,480$ р. — цикл прецесії. 144 — висота піраміди Сонця.

$17 \times 4 = 68$. $17 \times 45 = 765$ д. — мін. період Марса — Гор-дитя.

$68 \times 360 = 1020 \times 24 = 4080 \times 6 = 765 \times 32 = 24\,480$ р. — цикл прецесії зі швидкістю 1 градус за 68 р. 1020 — коло Місяця. 4080 — коло Сонця.

3. Діагональ прямокутної основи піраміди — 600.

$1700 \times 6,00 = 1020$. $1700 : 64 = 265,625$ д. — термін народження. (За «УТ» — 265,42). $1700 : 96 = 177,08$ д. — число смерті. Розрядна кома ставилася за змістом.

Новітня математична археоастрономія стає потужною результативною історичною дисципліною, методологія якої не тільки вирішує проблеми розвитку точних наук — математики й астрономії, але й водночас дозволяє з'ясовувати культурно-цивілізаційні контакти і взаємовпливи стародавніх цивілізацій, спростовуючи існуючу в історичній науці концепцію їхнього ізольованого розвитку. «Білих плям» в історії культури стародавніх цивілізацій стає менше.

**РОВЕН ВІЛЬЯМ ГАМІЛЬТОН —
ВИДАТНИЙ ІРЛАНДСЬКИЙ МАТЕМАТИК (4.08.1805—2.09.1865)**

Є. О. Желязков

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

yehor.zheliaskov@mail.ru



Видатний ірландський математик і, можна сказати, людина від Бога – Ровен Вільям Гамільтон, народився в Дубліні 4 серпня 1805 року в родині юриста. Через фінансові труднощі з трьох років його виховував стрий (дядько за батьком) — Джеймс Гамільтон, вікарій та вчитель. Уже в дитинстві проявив незвичайне обдарування. У три роки вмів читати, непогану знав арифметику і географію. У 7 років він знав латинську, грецьку та ідиш; у 12 — під керівництвом свого дядька, хорошого лінгвіста, знав уже 12 мов і серед них перську, арабську та малайську.

За 2 роки перед цим він випадково отримав латинський переклад «Елементів геометрії» Евкліда і вивчив цей твір; у 13 років Гамільтон прочитав «Універсальну арифметику» Ньютона; у 16 років — велику частину «Математичні початки натуральної філософії», в 17 років — почав вивчення «Небесної механіки» Лапласа, в цьому контексті він помітив логічну помилку та повідомив про неї королівському астроному Ірландії Джону Брінклі, після чого той оцінив здібності юнака та почав допомагати йому в галузі точних наук. На той час в Ірландії видатних вчених з технічних дисциплін майже не було, Ровену довелося засвоювати весь матеріал самостійно, майбутньому вченому час від часу довелося навіть в складних випадках бігти на консультацію до Брінклі.

Вступивши 1823 р. в Trinity College у Дубліні, він був в числі перших серед студентів цього коледжу. Показавши такі блискучі інтелектуальні здібності, у 22 роки був призначений на місце Брінклі професором астрономії в Дублінському університеті. У 1835 році, будучи секретарем British Association, що зібралася того року в Дубліні, Гамільтон отримав титул баронета від віце-короля Ірландії. У 1837 обраний президентом Королівської ірландської академії і членом-кореспондентом Петербурзької академії наук. Його твори носять знак геніальності і, можна сказати, що в них він випередив своїх сучасників. У 1835 р., займаючись задачами динаміки, сформував варіаційний принцип найменшої дії.

Майже все своє життя він присвятив науковим розробкам. Він зробив великий внесок у багато наукових галузей, навіть на перервах та після занять в коледжі активно продовжував займатися науковими дослідженнями. Як результат, його роботи активно застосовуються по сьогоднішній день. Він досліджував геометрію, оптику, теоретичну механіку, фізику та математику.

Серед найвідоміших його математичних відкриттів — кватерніони і набла-оператор (оператор Гамільтона). Гамільтон у 1843 р. розробив своєрідну нову систему чисел — кватерніони (лат. *quaterni* — по чотири), які є узагальненнями комплексних чисел з чотирма одиницями $1, i, j, k$. Учений подає його у наступній формі:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

де i, j, k — уявні, або кватерніонні одиниці, а числа a, b, c, d — чотири дійсних числа.

Уявні одиниці справджують таку таблицю множення:

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	j
k	k	j	$-i$	-1

Множення кватерніонів є дистрибутивним щодо додавання і не є комутативним.

Кватерніон являє собою ефективний інструмент для дослідження рухів в 3-вимірному евклідовому просторі. В ході дослідження кватерніонів Гамільтон ввів поняття векторного поля та заклав фундамент векторного аналізу. Свої результати вчений опублікував у роботах «Лекції по кватерніонах» і «Елементи теорії квантів». Подальше узагальнення комплексних чисел спричинилося до створення різних числових систем, які містять будь-яку кількість уявних одиниць. Було створено різні алгебри цих числових систем, з-поміж яких найзмістовніша алгебра гіперкомплексних чисел, розроблена німецьким математиком Г. Грасманом.

Підсумок розвитку теорії кватерніонів дає теорема Ф. Г. Фробеніуса (1878 р.): серед усіх числових систем, які задовольняють умови комутативності і асоціативності додавання, дистрибутивності і асоціативності множення, умов подільності на відмінний від нуля елемент є тільки три: дійсні числа, комплексні числа і кватерніони.

«Винайдення кватерніонів — це революція, схожа на ту, що її зробив Лобачевський у геометрії» (А. Пуанкаре).

У 1873 р. шотландський вчений Джеймс Максвел виклав теорію електромагнетизму за допомогою векторів і кватерніонів.

Спираючись на ідеї Гамільтона і Грасмана, американський математик і фізик Дж. Гібс у підручнику «Векторний аналіз» у 1881 р. розвинув основні ідеї векторного аналізу.

У 1853 році Гамільтон запропонував оператор, названий потім оператором Гамільтона, у вигляді перевернутої грецької літери дельта

$$\nabla$$

Він нагадує старовинний музичний інструмент наблу.

Цей оператор означають рівністю:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Цей оператор дозволяє символічно записати диференціальні операції 1-го порядку над скалярним або векторним полем.

Символічне множення вектора ∇ на скаляр U або вектор $\vec{a}$ відбувається за стандартними правилами векторної алгебри, а множення символів $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$,

$\frac{\partial}{\partial z}$ на величини U, P, Q, R розуміють як взяття частинних похідних від цих величин.

1. Градієнт

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} U.$$

2. Дивергенція

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{a}.$$

3. Ротор

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{a}.$$

4. Похідна за напрямом $\nabla U \cdot \vec{l}_0 = \frac{\partial U}{\partial l}$.

Навесні 1865 року стан здоров'я Гамільтона погіршився. Всю свою багаторічну працю, монографію «Елементи кватерніонів», він встиг завершити за декілька днів до своєї смерті.

Помер він 2 вересня 1865 року у віці 60 років. Похований на дублінському цвинтарі *Mount Jerome Cemetery and Crematorium*.

В пам'ять про Ровена Гамільтона названо багато наукових тверджень та термінів пов'язаних з його іменем. Також на згадку про чудове осяяння на мосту Брум Брідж в Дубліні, де Гамільтон відкрив формулу множення кватерніонів, встановлено пам'ятний камінь.



Окрім цього в його честь названо кратер на видимій стороні місяця.

Список літератури

1. Гамильтон Уильям Роуан // Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А. Н. Боголюбов. — Киев : Наукова думка, 1983. — 639 с
2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн. — Москва ; Ленинград : ГОНТИ, 1937. — Том I. — С. 222—231.
3. Математика XIX века. Том I. Математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова, А. П. Юшкевича. — Москва : Наука, 1978. — 255 с.
4. Крамар Ф. Д. Кватернионы в ранних работах Гамильтона / Ф. Д. Крамар // История и методология естественных наук. — Москва : МГУ, 1966. — Вып. V (математика). — С. 175—184.
5. Полак Л. С. Уильям Гамильтон, 1805—1865 / Л. С. Полак. — Москва : Наука, 1993. — 270 с.
6. Александрова Н. В. Формирование основных понятий векторного исчисления / Н. В. Александрова // Историко-математические исследования. Вып. XXVI. — Москва : Наука, 1982. — С. 205—235.

ВИДАТНИЙ МАТЕМАТИК НІЛЬС ГЕНРІК АБЕЛЬ (5.08.1802—6.04.1829)

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, І. Ю. Мельник

НТУУ «Київський політехнічний інститут»,

Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна

matan@kpi.ua, irinam_5656@mail.ru



У центрі Осло в Королівському парку встановлено відлитий у бронзі пам'ятник визначному норвезькому математику Нільсу Генріку Абелю роботи відомого скульптора Густава Вігеллана. Але сам Нільс Абель спорудив собі більш вражаючий пам'ятник. *Теорема Абеля, рівняння Абеля, абелеві групи, перетворення Абеля* назавжди увійшли в різні розділи математики, при цьому всі свої результати Абель отримав за сім років творчості. Прожив Нільс Абель неповних двадцять сім років. Безмежно сумна історія життя геніального норвезького математика.

Нільс Генрік Абель народився 5 серпня 1802 року у невеликому рибальському селищі Фінней на півдні Норвегії поблизу містечка Ставангер у родині пастора. Зростав він кволим хворобливим хлопчиком, до тринадцяти років отримував освіту вдома. В 1815 році пастор відправив сина в Кафедральну школу в місті Христіанії (з 1925 року Осло). Школа не виправдала сподівань Нільса. Вчителі не відзначалися глибокими знаннями, часто били учнів. Особливо жорстоким був вчитель математики, не дивно, що Нільс Абель охолов до навчання і перестав отримувати гарні оцінки навіть з улюбленої математики. Але все змінилось після того, як звільненого за жорстокість вчителя математики змінив новий вчитель Бернт Мікел Гольмбое, який закінчив столичний університет, досконало володів своїм предметом, умів зацікавити учнів. Він перший помітив і виPLEKав математичний талант Абеля, дозволив користуватися своєю бібліотекою. Дуже швидко Нільс глибоко захопився «царицею наук», і, засвоївши елементарну математику, почав займатися вищою математикою.

Ще не закінчивши школу, Абель почав самостійні дослідження. Його зацікавила задача, що не піддавалась зусиллям багатьох видатних математиків XVII і XVIII століть — знаходження коренів рівняння п'ятого степеню. Після того, як в XVI столітті Тарталья отримав формулу для розв'язання кубічних рівнянь, а Феррарі — для розв'язання рівнянь четвертого степеню, перед математиками постала задача: вивести аналогічну формулу для рівняння п'ятого степеню. Після декількох тижнів роботи Абелю здалось, що шукані формули отримані, але після перевірки цих формул для конкретних рівнянь виявилось, що формули помилкові.



1821 року Нільс Абель вступив до університету у Христіанії, але не мав коштів для навчання. Університет теж через брак коштів не міг йому допомогти, тому декілька професорів, знаючи про виняткові здібності молодого студента, «для того, щоб зберегти для науки рідкісне обдарування, вирішили платити йому стипендію зі своїх власних коштів». Таку турботу Нільс Абель заслуговував своєю старанністю і зразковою поведінкою. Пізніше він отримав стипендію. На той час батька його не стало, мати та п'ятеро його братів і сестер жили у скруті, і Абель, щоб полегшити життя родині, бере до себе одного з братів. Щоб здобути кошти на існування, він давав приватні уроки з математики. З того часу і до самої смерті злидні та борги стають постійними супутниками Нільса Генріка Абеля.

За час навчання у школі та університеті Нільс Абель прочитав усі книги з математики, які зміг дістати, і постійно займався досліджуванням математичних проблем. У нього з'явилися друковані роботи, але вони залишилися непоміченими вченими, бо були написані норвезькою мовою, якою не володів ніхто з видатних математиків того часу.

Одна з його робіт була присвячена знаходженню рівняння лінії, вздовж якої матеріальна точка падає по заздалегідь вказаному закону. Абель звів розв'язок цієї задачі до рівняння, в якому шукана функція знаходиться під знаком інтегралу. Тепер такі рівняння називають інтегральними. Ніхто до Абеля інтегральні рівняння не досліджував. Коли в XIX столітті почала розвиватись загальна теорія інтегральних рівнянь, вчені зрозуміли, що Абель на багато десятиріч передбачив майбутнє математичних досліджень.

У 1822—1823 рр. Нільс Абель пише роботу, присвячену інтегруванню функцій. Пізніше Абель займається теорією еліптичних інтегралів. Таку назву мають інтеграли, що містять квадратні корені з многочленів третього або четвертого степеню, задача виникла у зв'язку з обчисленням дуги еліпса. Важливі результати з дослідження еліптичних інтегралів отримали Фаніано, Ейлер, Гаус, Лежандр. Результатом дослідження Абеля у цьому питанні була досить загальна формула, частинними випадками якої раніше були відомі співвідношення для таких інтегралів. Нільс Абель поставив перед собою задачу отримати диференціальне рівняння для еліптичних функцій і блискуче упорався з нею. Він довів, що еліптичні функції є періодичними. Нільс Абель вирішує знову зайнятися алгебричними рівняннями і нарешті доводить, що рівняння п'ятого степеню не розв'язуються у радикалах. Пізніше з'ясувалось, що аналогічний результат за декілька років до Абеля отримав італійський

вчений Паоло Руффіні. І хоча доведення Руффіні було неповним, терему про нерозв'язність рівняння п'ятого степеню в радикалах називають теоремою Руффіні — Абеля.

Вивчаючи еліптичні функції й інтеграли, Абель широко використовував теорію степеневих рядів. Він довів теорему про область збіжності степеневому ряду, дослідив поведінку суми ряду при наближенні до кінців проміжку збіжності, йому належить доведення теореми про почленне інтегрування та диференціювання степеневому ряду на проміжку збіжності. Всі ці результати стали класичними й увійшли в усі курси вищої математики.

У 1825—1827 роках університет проплатив Абелю закордонне відрядження для продовження освіти. 30 жовтня 1826 року на черговому засіданні французької Академії наук її секретар Фур'є представив норвезького математика Нільса Генріка Абеля і його «Мемуар про загальні властивості досить широкого класу трансцендентних функцій». Висновок про представлену роботу було доручено зробити Лежандру і Коші. Доповідачем затвердили Коші, але «Мемуар» Абеля загубився у паперах в кабінеті Коші. Дуже прикро, що Абель не дочекався визнання французьких вчених, відрядження і кошти закінчувались, і він поїхав до Норвегії. Хто міг передбачити, що через 100 років теретико-групові методи, що ведуть свій початок від робіт Лагранжа, Абеля, Галуа, стануть основою всіх розрахункових методів квантової механіки.

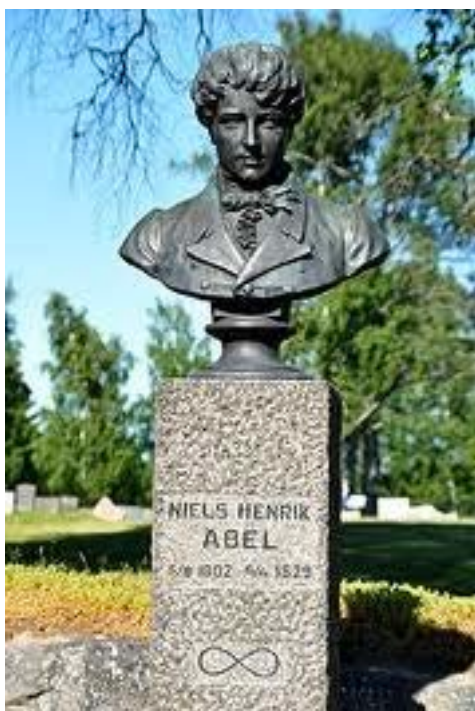
Про паризький період життя Нільса Абеля залишились спогади про те, що він однаково добре розмовляв французькою, датською і норвезькою мовами. Таланти цього юного генія були безмежними.

1828 року Абель викладав в університеті і у Військовій академії, але, як і раніше, жив у скруті, все зароблене віддавав на погашення боргів, що накопичувалися. Цього ж року Нільса Генріка Абеля вибрали в Королівське



наукове товариство Норвегії. Це було єдине офіційне визнання заслуг Абеля за його життя.

Бідність, нужденність, суворий клімат спричинили захворювання на туберкульоз, крім того Нільс Абель у грудні 1828 року під час подорожі на санях у лютий мороз до своєї нареченої Креллі Кемп тяжко застудився і дістав запалення легень. Навіть тяжко хворий Нільс Абель не припиняв працювати, тієї зими він написав одну з найвидатніших своїх статей. Шостого квітня 1829 року Нільс Генріх Абель помер на руках своєї нареченої Креллі та свого найближчого друга Матіаса. Поховали його у Фроланді.



Лежандр писав Якобі «Абель прожив зовсім коротке життя, він встиг зробити так багато, що цього цілком вистачить на те, щоб залишити про нього довгу пам'ять, легко уявити собі, чого би він досяг, якби доля вирішила інакше». Роботи Абеля вплинули на розвиток всієї математики. Вони привели до появи нових математичних дисциплін: теорії Галуа, теорії алгебричних функцій і сприяли визнанню теорії функцій комплексної змінної.

2002 року уряд Норвегії на честь двохсотріччя з дня народження свого видатного вченого Нільса Генріка Абеля заснував Абелівську премію з математики, яка є однією з найпрестижніших у світі. Починаючи з 2003 року щорічно видатним математикам сучасності присуджується премія Абеля, грошовий розмір

якої порівнюваний з Нобелівською премією. Метою цієї премії є не тільки заохочення математиків, а й широка реклама та популяризація сучасної математики, особливо серед молоді. З 2010 року норвезька Академія наук та літератури разом з Інститутом математики щорічно проводять Абелівські конференції. Пам'ятники йому стоять в Осло і в місті Ерстад. Кратер на Місяці названий в честь Абеля. Портрет Абеля міститься на банкноті в 500 норвезьких крон, на пам'ятній монеті у 20 крон. Але найвище визнання, звісно, це **теореми Абеля, абелівські групи, перетворення Абеля** та інші його творчі здобутки.



Список літератури

1. Оре О. Замечательный математик. Нильс Хенрик Абель / О. Оре. — Москва : Физматгиз, 1961. — 50 с.
2. Замечательные ученые / Под ред. С. П. Капицы. — Москва : Наука. — 1980. — 192 с.
3. Лишевский В. И. Рассказы об ученых / В. И. Лишевский. — Москва : Наука. — 1986. — С. 87—97.
4. Смышляев В. К. О математике и математиках. Очерки / В. К. Смышляев. — Йошкар-Ола.: Марийское книжное издательство, 1977. — 224 с.

ВПЛИВ КИЇВСЬКОГО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА НА РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ НА ТЕРИТОРІЇ УКРАЇНИ

Т. В. Крижановська, Т. С. Клецька, Т. М. Семененко

*Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна,
tsk9@mail.ru*

XIX століття було бурхливим, але в той же час цікавим часом у політичному, соціальному і науковому житті нашої країни. Існує велика кількість робіт з історії Київського університету Святого Володимира, одного з найстаріших вищих навчальних закладів України. Головним досягненням математиків Київського університету в перші десятиліття його існування було закладання основ університетської математичної освіти і розробка курсів лекцій. Але водночас велика увага приділялася популяризації математики серед різних верств населення.

У березні 1869 року при Київському університеті св. Володимира було засновано Київське товариство природознавців, на базі якого у 1889 році було сформовано Київське фізико-математичне товариство.

Засідання фізико-математичного товариства проводились як правило один раз на тиждень протягом навчального року. На кожному засіданні заслухували від трьох до п'яти доповідей. Причому обговорювались як наукові проблеми, так і методичні питання. Одну з перших доповідей прочитав В. П. Єрмаков на засіданні 15 березня 1890 року, вона стосувалася питання викладання математики в середній школі. На його думку, викладання математики в школі має бути пов'язано більшою частиною з розв'язанням задач, не зосереджуючись на теорії. А вивчення теорії ні в якому разі не повинно зводитися до затвердження правил, формул і теорем, а скоріше мати на меті вміння логічно і послідовно мислити.

На засіданнях товариства ця тема і в подальшому обговорювалась неодноразово. З березня 1902 р. було вирішено робити спеціальні засідання суто педагогічного характеру. Як видно з протоколів засідань, такі зустрічі проходили дуже жваво і викликали велику зацікавленість. Треба підкреслити, що у Київському товаристві, більш ніж в інших, приділялась серйозна увага викладанню елементарної математики, і внаслідок цього виросла відома Київська школа, до якої належали члени товариства В. П. Єрмаков, М. Є. Ващенко-Захарченко, П. О. Долгушин, М. В. Оглоблін, К. М. Щербина, М. О. Астряб, К. Ф. Лебединцев, М. Г. Попруженко та ін.

У 1907 р. була створена комісія для розробки питання про реформу викладання математики в Російській імперії, до якої входили Г. К. Суслов, В. П. Єрмаков, І. І. Косоногов, О. Д. Білімович, Г. Т. Белобжевський, П. О. Долгушин і К. М. Щербина. Участь у роботі комісії могли брати всі члени товариства. Ця комісія розробила проєкт навчального плану з математики для чоловічих гімназій.

Питанню реформи викладання математики і новим програмам були присвячені доповіді Г. К. Суслова, О. Д. Білімовича, П. О. Долгушина. М. В. Оглобліна, Я. І. Яніцького, К. Ф. Лебединцева, І. І. Зехова. О. П. Зонненштраля, М. О. Столярова, З. О. Архімовича. Про викладання окремих дисциплін в середній школі підготували доповіді В. П. Єрмаков, Д. Д. Єфремов, О. П. Зонненштраль, П. І. Матковський, Я. П. Мінін, П. О. Долгушин, І. О. Столяров, Г. Н. Флоринський, І. І. Зехов, Г. В. Пфейфер. Л. Д. Ханакадопуло, М. В. Оглоблін, Н. І. Володкевич. К. М. Щербина. Д. О. Граве, І. Н. Чирьєв та ін.

Позитивним у Київському фізико-математичному товаристві було те, що члени його першими неодноразово ставили питання про запровадження до курсу середньої школи елементів вищої математики. Вони вважали необхідним перебудувати курс елементарної математики так, щоб ідея функціональної залежності у зв'язку з вченням про нескінченно малі і з поняттям про координати проходила б через увесь курс математики в середній школі. Вони також вимагали гармонічного поєднання теорії і задач, приділення уваги усній лічбі і наближеним обчисленням, погодження різних відділів курсу математики між собою, покращення справи підготовки викладачів середньої школи та ін.

У 1915 р. товариство одержало програму з математики для гімназій, запропоновану Міністерством народної освіти. В результаті її обговорення члени товариства прийшли до висновку, що запровадження в життя цієї програми було б небезпечним для загальноосвітніх завдань середньої школи в глобальному сенсі. Товариство також відмітило, що відсутність будь-яких керівних і об'єднуючих ідей та повна зневага до дидактичних, методичних і частково методологічних вимог у цих програмах у разі їх застосування привела б до повного розладу в навчальній справі і не дозволила б здійснити навіть той мінімум у галузі математичної освіти, який був можливий при старих програмах. У результаті такого енергійного протесту міністр народної освіти призначив нову математичну комісію з реформи середньої школи, в основу роботи якої були покладені доповідь К. М. Щербини і план викладання математики, складений у 1907 р. Київським математичним товариством. Як бачимо, в історії методики викладання математики Київське товариство відіграло значну роль.

Саме тому у 1884 р. В. П. Єрмаков організував випуск першого і єдиного на той час в Україні науково-популярного видання «Журнал элементарной математики», в якому не раз з'являлися статті з різних розділів математики, адресовані учням старших класів гімназій, любителям математики, вчителям. Цей журнал видавався безперервно до 1917 року. Основна увага приділялася задачам з елементарної математики, а особливо тим розділам, які недостатньо докладно розглядалися в шкільному курсі або взагалі не входили до програми. Наприклад, геометричним задачам на побудову, основам теорії чисел. Також друкувалося багато статей з вищої математики, які могли бути подані мовою елементарної математики. Наприклад, з теорії ймовірностей і аналізу

невизначених рівнянь. Такі статті писав особисто Єрмаков. Пізніше було введено педагогічний розділ, де публікувалися статті з методики викладання і вивчення математики.

Також в журналі публікувалося багато математичних і логічних загадок і шарад. Але більшу його частину займали задачі, розв'язок яких пропонувалося знайти читачам. Найкращі розв'язки разом з прізвищами переможців публікувалися в наступних номерах. Таким чином Єрмакова можна вважати першим в Україні та Росії автором заочних математичних олімпіад.

Список літератури

1. Боголюбов А. Н. Киевское физико-математическое общество / А. Н. Боголюбов // Из истории математического естествознания [сб. науч. трудов под ред. А. Н. Боголюбова]. — Київ : Наукова думка, 1984. — С. 3-7.
2. Гнеденко Б. В. О перспективах математического образования / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. — 1965. — № 6. — С. 2—11.
3. Граціанська Л. М. Математики Київського університету / Л. М. Граціанська. — Київ : КДУ, 1967. — 48 с.
4. Добровольський В. О. Математика в Київському фізико-математичному товаристві / В. О. Добровольський // З історії вітчизняного природознавства. — К.: Наукова думка, 1964. — С. 115—127.
5. З іменем Св. Володимира : Київський університет у документах, матеріалах та спогадах / [упор. В. Короткий, В. Ульяновський]. — Київ : Вища школа, 1994. — Кн. 1-2. — 647 с.
6. Історія Київського університету / [відпов. ред. О. З. Жмудський]. — Київ, 1959. — 628 с.
7. Киевский университет. 1834—1984 / [под ред. М. У. Белого]. — Київ : Изд. Киевского ун-та, 1984. — 203 с.
8. Київське математичне товариство [Електронний ресурс] // Сайт Київського Національного університету імені Тараса Шевченка. — Режим доступу до сторінки: <http://www.mathsociety.kiev.ua/history.html>.
9. Математика XIX века / [под. ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича]. — Москва : Наука, 1978. — Т. 1. — 256 с.
10. Материалы для истории учебных реформ в России XVIII-XIX вв. / [сост. Рождественский С. В.]. — Санкт-Петербург : Тип. А. Е. Ландау, 1910. — 238 с.
11. Розвиток науки в Київському університеті за сто років / [відп. ред. М. А. Кушнар'ов]. — Київ, 1935. — 296 с.

ДАНІЕЛЬ БЕРНУЛЛІ — ВИДАТНИЙ ФІЗИК І МАТЕМАТИК

Н. В. Крошко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

kroshko06@bigmir.net

Сімейство Бернуллі було однією з протестантських родин, які тікали з Антверпена в 1583 році, щоб уникнути побиття католиками. Сімейство знайшло притулок спочатку у Франкфурті, а незабаром перебралося до Швейцарії, де осіло в Базелі. Засновник династії Ніколас Бернуллі Старший (1623—1708) одружився з представницею однієї з найстаріших родин Базеля і став великим купцем. Також Ніколас Старший був відомий як видатний фармацевт. Три покоління Бернуллі дали 8 великих математиків і фізиків, з яких найбільш відомі Якоб, Йоганн, Даніель і Якоб II. Серед академіків Петербурзької Академії наук — п'ятеро представників родини Бернуллі.

Даніель народився 8 лютого 1700 р. в Гронінгені (Голландія) у сім'ї Йоганна Бернуллі (сина Ніколаса Старшого) і Доротеї Фалькнер, де батько тоді викладав математику в університеті. У 1713 р. закінчив звичайний курс навчання в класах Базельської гімназії. З юних років захопився математикою, спочатку навчався у батька і брата Ніколаса, паралельно вивчаючи медицину. У 1716 р. отримав звання магістра філософії. В 1718 р. перейшов у Гейдельберзьку академію, у якій під керівництвом видатного лікаря Нобеля вивчав усі розділи медицини, а в 1719 році навчався у Страсбурзі. Після повернення до Швейцарії подружився з Ейлером. У 1721 склав іспити на медика в Базелі, захистив дисертацію. Потім поїхав до Італії, де набиралася досвіду в медицині.

У 1724 р. випустив «Математичні етюди», що складаються з чотирьох розділів: три присвячені математиці, один — застосуванням математики до гідравліки та медицини. У частині книги, пов'язаної з математикою, Бернуллі полемізує з італійськими математиками (Д. Рікетто, Д. Ріккати та ін.) щодо розробленої в той час чистої математики. Тут міститься багато посилань на роботи, поміщені в різний час в «Acta Eruditorum», це служить свідченням того, що автор був у курсі новітніх відкриттів. Найбільш значима частина книги присвячена дослідженню диференціального рівняння Ріккати, що принесло йому популярність.

У 1725 р. Д. Бернуллі разом з Й. Бернуллі отримав першу премію на оголошеному Паризькою академією наук першому конкурсі на тему «Про засоби зберігання рівномірності водяного або пісочного годинника на морі». Вважається, що цей успіх дослідження з прикладної механіки визначив постійний інтерес Д. Бернуллі до практичних завдань. І 5 липня 1725 р. був підписаний контракт, за яким Д. Бернуллі надавалося місце професора фізіології Петербурзької академії наук з платнею 800 карбованців на рік; 27 жовтня 1725 р. він разом з братом Ніколасом II Бернуллі, який отримав професуру по кафедрі математики з окладом 1000 карбованців (найвищим з

усіх, плата академікам становила 4% від суми, відпущеної Петром I на організацію академії), прибув до Петербургу. Відкриття Д. Бернуллі лягли в основу гідродинаміки, гідравліки, фізіології; вони застосовуються в геології, при дослідженні динаміки зірок, в інших областях точного природознавства. Даніель переходить на кафедру математики (1728), що стала вакантною після смерті його брата. Момент для приїзду був надзвичайно невдалим — якраз помер Петро I. Запрошені до Академії іноземці частково розсіялися, але Даніель залишився, і навіть умовив приїхати Ейлера (1727). Але тут померла імператриця Катерина I, і владі остаточно стало не до Академії. Незабаром Даніель повертається до Базеля. Він залишився почесним членом Петербурзької академії, в її журналі опубліковані 47 з 75 праць Даніеля Бернуллі.

У 1732 р. Бернуллі опублікував роботу «Зауваження про рекурентні послідовності», де виклав метод розв'язання алгебричних рівнянь, що не потребує попереднього визначення меж, між якими лежать додатні і від'ємні корені. У 1733 влаштувався професором анатомії і ботаніки у Базелі (інших вакансій не було). Веде жваве, взаємно корисне листування з Ейлером.

У 1738 р., як результат багаторічної праці, виходить фундаментальна робота «Гідродинаміка». Серед іншого там основний «закон Бернуллі». Закон Бернуллі є наслідком закону збереження енергії для стаціонарного потоку ідеальної (тобто без внутрішнього тертя) нестисливої рідини:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}$$

де ρ — густина рідини, v — швидкість потоку, h — висота, на якій знаходиться розглянутий елемент рідини, p — тиск.

Константа в правій частині зазвичай називається *напором*, або повним тиском, а також інтегралом Бернуллі. Розмірність усіх доданків — одиниця енергії, що припадає на одиницю об'єму рідини.

Для горизонтальної труби $h = 0$ і рівняння Бернуллі приймає вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}$$

Ця форма рівняння Бернуллі може бути отримана шляхом інтегрування рівняння Ейлера для стаціонарного одновимірного потоку рідини при постійній густині ρ :

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

Відповідно до закону Бернуллі, повний тиск у сталому потоці рідини залишається постійним уздовж цього потоку.

Протягом 1747—1753 рр виходить у світ важлива серія робіт про коливання струни. Бернуллі, виходячи з фізичних міркувань, здогадався розкласти розв'язання в тригонометричний ряд. Він проголосив, що цей ряд не менш загальний, ніж степеневий. Ейлер і д'Аламбер виступили із

запереченнями. Питання було вирішено лише в ХІХ столітті, і Бернуллі мав рацію.

У 1748 Д. Бернуллі обраний іноземним членом Паризької Академії наук. У 1750 перейшов на кафедру фізики Базельського університету, де і працював до смерті в 1782 році. Помер за робочим столом навесні 1782 року. Одружений не був. Стосунки з батьком коливалися від натягнутих до ворожих, суперечки між ними про пріоритет не вщухали.

Найбільше Даніель Бернуллі прославився працями в галузі математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь. Його вважають, поряд з д'Аламбером і Ейлером, засновником математичної фізики. Фізик-універсал, він ґрунтовно збагатив кінетичну теорію газів, гідродинаміку і аеродинаміку, теорію пружності і т.д. Він перший виступив з твердженням, що причиною тиску газу є тепловий рух молекул. З точки зору молекулярної теорії він пояснив закон Бойля — Маріотта. Бернуллі належить одне з перших формулювань закону збереження енергії (живої сили, як тоді казали), а також (одночасно з Ейлером) перше формулювання закону збереження моменту кількості руху (1746). Він багато років вивчав і математично моделював пружні коливання, ввів поняття гармонійного коливання, дав принцип суперпозиції коливань. У математиці опублікував ряд досліджень з теорії ймовірностей, теорії рядів і диференціальних рівнянь. Він перший застосував математичний аналіз до завдань теорії ймовірностей (1768), до цього використовувався тільки комбінаторний підхід. Бернуллі просунув також математичну статистику, розглянувши застосування імовірнісних методів для практично важливих завдань.

Даніель Бернуллі був Академіком і почесним іноземним членом Петербурзької академії наук (1733), членом Академій: Болонської (1724), Берлінської (1747), Паризької (1748), Лондонського королівського товариства (1750). Лауреат численних премій і призів у конкурсах.

Список літератури

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Даніель_Бернуллі
2. svitppt.com.ua/matematika/zakon-bernulli1.html
3. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли / В. А. Никифоровский. — Москва : Наука, 1984. — 177 с. — (История науки и техники).
4. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А. Н. Боголюбов. — Киев : Наукова думка, 1983. — 639 с.

З ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

О. М. Ленюк, О. М. Нікітіна, Т. М. Пилипюк

*Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
Чернівецький факультет Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут», Чернівці,
Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
Lenyuk_OM@mail.ru, nik_ole4ka@mail.ru, t-myh@i.ua*

*Присвячується пам'яті доктора фізико-математичних наук,
професора, академіка АН ВШ України М. П. Ленюка*

До диференціальних рівнянь та їх систем приводиться достатньо широкий клас задач математичної фізики. Два методи розв'язку задач, а саме: метод відокремлення змінних і метод відображень, виникли в роботах Ж. Б. Фур'є, А. Пуанкаре, Г. А. Шварца. Перший метод завдяки своїй простоті порівняно швидко завоював загальне визнання. А у зв'язку з бурхливим розвитком теорії узагальнених функцій метод перетворення Фур'є — граничний випадок методу відокремлення змінних набув ще більшого значення. Крім цього, цей класичний метод дав сильніший поштовх до розвитку питань, пов'язаних із спектральними задачами математичної фізики, і, зокрема, до розвитку гармонічного аналізу. Отже, народжується метод розв'язку задач математичної фізики — метод інтегральних перетворень (ІП), який став згодом одним із ефективних методів розв'язання крайових задач математичної фізики.

Метод ІП математично еквівалентний методу власних функцій, але він має низку істотних переваг. До цих переваг слід віднести стандартну техніку обчислень, можливість зображення розв'язків у різноманітних формах. Це особливо важливо в прикладних задачах, коли необхідно одержувати розв'язок у зручному для розрахунків вигляді. На кінець, при наявності великої кількості таблиць прямих і обернених для даного вигляду ІП техніка розв'язання набагато спрощується й прискорюється [1, 23—25].

Проте, слід зауважити, що для методу ІП характерні ті ж обмеження, що й для методу відокремлення змінних: він застосовується до лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами, хоча є спроби застосування його до розв'язання деяких нелінійних рівнянь. При цьому лінійні диференціальні оператори, які беруть участь у формулюванні крайових умов, мають або постійні коефіцієнти або змінні неперервні коефіцієнти спеціальної конструкції.

ІП вважається відомим (заданим), якщо:

- 1) відома структура прямого інтегрального оператора H ;
- 2) відома структура оберненого інтегрального оператора H^{-1} ($H \cdot H^{-1} = H^{-1} \cdot H = I$, I — одиничний оператор);

3) наявна основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора, який породжує ІІ;

4) вказана логічна схема застосування до відповідних задач математичної фізики та математичного аналізу.

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба в розв'язанні достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур. Оскільки тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження, то вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ.

Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричним невластним інтегралом (функціональним рядом), який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невластний інтеграл (функціональний ряд) його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Це вимагає, з одного боку, удосконалення й модифікації існуючого математичного апарату, а, з другого боку, створення нових методів. Зокрема, виникла потреба в побудові таких ІІ, які давали б можливість алгебраїзувати лінійні диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами. Такі ІІ були створені в другій половині ХХ століття. Вони одержали назву — *гібридні інтегральні перетворення* (ГІІ).

Уперше ГІІ з'явилися в математичній літературі в 70-х роках ХХ століття в роботах Я. С. Уфлянда та його учнів [2, 3, 6—8, 26—28]. Методика, запропонована в цих роботах, була застосована В. С. Проценком і його учнями для побудови ГІІ Фур'є — Лежандра, Лежандра — Фур'є, Фур'є — Ганкеля, Ганкеля — Лежандра [17—22].

Подальший розвиток теорія ГІІ знайшла у працях М. П. Ленюка та його учнів [4, 5, 9—16, 29]. Зокрема, при найбільш загальних обмеженнях на структури диференціальних операторів, крайових умов та умов спряження побудовані ГІІ типу Фур'є, Фур'є — Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду, Конторовича — Лебедева, Мелера — Фока, Лежандра тощо з $n \geq 1$ точками спряження. Наявність основної тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора дає можливість успішно застосовувати ці перетворення до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних областях.

Список літератури

1. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях / Н. И. Ахиезер. — Харьков : Вища школа, 1984. — 120 с.
2. Белова Н.А. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра / Н. А. Белова, Я. С. Уфлянд // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, № 8. — С. 1397—1399.
3. Белова Н. А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода / Н. А. Белова // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 2006—2010.
4. Быблив О. Я. Интегральные преобразования Ганкеля II рода для кусочно-однородных сегментов / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Известия вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 82—85.
5. Быблив О. Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Известия вузов. Математика. — 1987. — № 7. — С. 3—11.
6. Ефимова И. Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям / И. Т. Ефимова // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 3, № 5. — С. 817—822.
7. Ефимова И.Т. Некоторые интегральные преобразования на составном промежутке и их приложение к решению краевых задач для слоистых сред / И. Т. Ефимова // Дис. канд. физ.-мат. наук. — Ленинград, 1972. — 150 с.
8. Ефимова И. Т. Об одном обобщении интегральной теоремы Фурье и ее приложениях / И. Т. Ефимова, Я. С. Уфлянд // Прикл. матем. и механ. — 1969. — Т. 33. — Вып. 5. — С. 941—944.
9. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
10. Конет І. М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера — Фока на полярній осі з n точками спряження / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Допов. НАН України. — 2006. — № 9. — С. 22—27.
11. Конет І. М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера — Фока на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Матем. Студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С. 169—180.
12. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — Киев, 1983. — 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
13. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) / М. П. Ленюк. — Киев, 1983. — 56 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.18).
14. Ленюк М. П. Узагальнення інтегралу Фур'є — Бесселя / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. — Київ : Ін-т математики АН України, 1993. — Вип. 2. — Ч. 1. — С. 89—101.
15. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича — Лебедева / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
16. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
17. Найда Л. С. Гибридные интегральные преобразования типа Ханкеля — Лежандра / Л. С. Найда // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1983. — № 7. — С. 40—42.
18. Найда Л. С. Гибридные интегральные преобразования Ханкеля — Лежандра / Л. С. Найда // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1984. — Вып. 8. — С. 132—135.
19. Проценко В. С. К решению некоторых задач математической физики для составных областей / В. С. Проценко // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1997. — Вып. 1. — С. 56—64.

20. Проценко В. С. Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье — Лежандра / В. С. Проценко, А. В. Головченко // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1982. — Вып. 6. — С. 26—28.
21. Проценко В. С. Гибридные интегральные преобразования Фурье — Ханкеля и некоторые задачи кручения кусочно-однородных тел / В. С. Проценко, Т. Т. Кашаевец // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. — Харьков, 1978. — Вып. 1. — С. 120—124.
22. Проценко В. С. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред / В. С. Проценко, А. И. Соловьев // Прикладная математика. — 1982. — Т. XIII, № 1. — С. 62—67.
23. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — Москва : ИЛ, 1955. — 668 с.
24. Титчмарш Е. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Ч. Титчмарш. — Москва : Гостехиздат, 1948. — 480 с.
25. Титчмарш Е. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Е. Ч. Титчмарш. — Москва : ИЛ, 1968. — Т. 1. — 668 с.
26. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах упругости / Я. С. Уфлянд. — Ленинград : Наука, 1967. — 402 с.
27. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Ленинград : Наука, 1976. — С. 93—106.
28. Юшкова Е. А. О некоторых сингулярных краевых задачах для уравнения Бесселя и их приложениях в математической физике / Е. А. Юшкова // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 3, № 10. — С. 1403—1407.
29. Яремко О. Э. Матричные гибридные интегральные преобразования / О. Э. Яремко. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1997. — 117 с.

З ІСТОРІЇ ЧИСЛА e ТА СПОСОБИ ЙОГО ЗАПРОВАДЖЕННЯ

О. В. Маляр, В. О. Гайдей

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Malyar95@ukr.net

«Вивчайте, вивчайте число e . Вона початок усього!» — так може бути перефразований вислів Лапласа: «Читайте, читайте Ойлера. Він усім нам учитель!». Так, як Гауса нині називають «Королем математиків», так і число e може носити ім'я «Принцеси констант». Тож, нумо дізнаємося більше про одну з найцікавіших констант в історії математики.

Число e набагато молодше за число π , історія якого сягає більш ніж на три тисячі років, і бере початок ще в Стародавньому світі. Число π захоплює, і продовжує зачаровувати не лише математиків, а й художників, музикантів, інженерів, і всіх людей, що знайомі з ним. Число ж e — новачок у математичному пантеоні чисел, яке отримало буквене позначення лише в XVIII столітті разом з розвитком математичного аналізу. Його історія охоплює мізерні три століття, проте e відіграє в сучасній математиці чи не більш важливу роль.

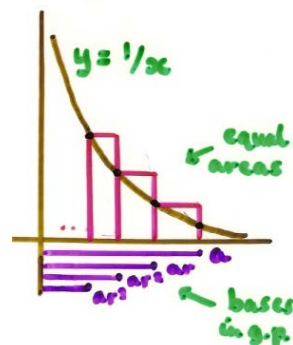
Історію принцеси констант можна умовно поділити на три періоди. Перший майже збігається з сімнадцятим століттям і включає час появи чисел, що нині визнані першим наближеннями числа e . Другий період, що визначається першою половиною вісімнадцятого століття, характеризується визнанням існування точного числа e та зусиллями виразити його різними способами. Третій період, з середини вісімнадцятого до кінця дев'ятнадцятого століття, полягає в дослідженні природи й змісту числа e . Саме в цьому періоді було доведено ірраціональність e .

Число e вперше з'явилося в математиці як дещо незначне. Це сталося в 1618 році. У додатку до праці Непера, присвяченої логарифмам, була приведена таблиця натуральних логарифмів різних чисел. Але ніхто не розумів, що це логарифми з основою e , оскільки в поняття логарифму того часу така річ як основа не входила. Через декілька років, в 1624, знову неявно з'являється число e — Брігз визначає чисельне наближення десяткового логарифму e , але саме число в його роботі не згадувалось.

У 1647 році Сен-Вінсент обчислив площу сектору гіперболи. Чи розумів він зв'язок з логарифмами — можна лише здогадуватись. Лише в 1661 році Гюйгенс відкрив зв'язок між рівнобічною гіперболою та логарифмами. Він довів, що площа під графіком гіперболи

$$xy = 1$$

на проміжку від 1 до e дорівнює 1. Саме ця властивість робить e основою натуральних логарифмів.



Наступний крок був зроблений Гюйгенсом у 1661 році. Він визначив криву, яку назвав логарифмічною. Це крива вигляду

$$y = ka^x.$$

Знову з'являється десятковий логарифм e , який Гюйгенс знаходить з точністю до 17 десятих цифр. Однак він виникає як деяка константа, і не пов'язаний з логарифмом числа.

У подальших роботах з логарифмів e знову не з'являється в явному вигляді. Проте вивчення логарифмів продовжується, в 1668 році Меркатор опубліковує роботу, що містить розвинення в ряд

$$\log(1+x).$$

У цій роботі вперше використовується назва «натуральний логарифм» для логарифму з основою e , але саме число e ще залишається невловимим.

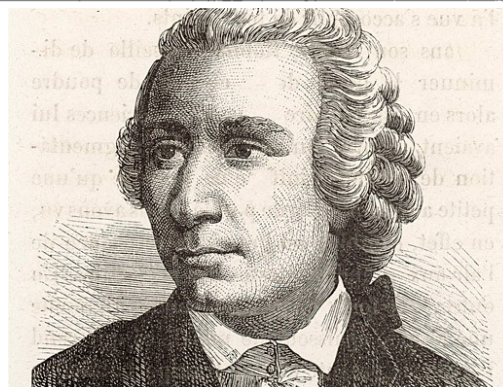
Дивовижно, що число e в явному вигляді вперше виникає не як основа логарифма, а пов'язане з нескінченними добутками. На початку XVII століття стався вибух інтересів в контексті комерційних угод, у яких обчислювали, зокрема, і складні відсотки. У 1683 році Якоб Бернуллі намагається знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Він використовує біноміальну теорему для доведення того, що ця границя знаходиться між 2 та 3, і це можна розглядати як перше, хоч і дуже грубе, наближення числа e . Це перший випадок, коли число визначається як границя. Зараз цю границю ми беремо за означення числа e .

Протягом усього XVII століття внески різних математиків у розвиток концепції числа e були добре розподілені. Тут варто також згадати Ньютона та Ляйбніца. Але вже в першій половині XVIII століття історія e концентрується навколо однієї визначної людини — Леонарда Ойлера. Леонард Ойлер запровадив так багато математичних позначень, що здається природньо, що позначення e також належить йому. Існує багато гіпотез, чому число e Ойлер позначив саме « e », але незважаючи на них, таке позначення вперше з'являється в листі Ойлера Гольдбаху в 1731 році. Вчений зробив багато відкриттів, вивчаючи e в подальшому, та лише в 1748 році в «Introductio in Analysin infinitorum» він дав повне

N	$(1 + \frac{1}{N})^N$	$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
6	2.522	2.71805
7	2.546	2.718253
8	2.566	2.7182787
9	2.581	2.71828152
10	2.594	2.718281801
11	2.604	2.7182818261
12	2.613	2.71828182828
13	2.621	2.718281828446
14	2.627	2.7182818284582
15	2.633	2.71828182845899
16	2.638	2.7182818284590422
17	2.642	2.71828182845904507
18	2.646	2.718281828459045226
19	2.650	2.7182818284590452349
20	2.653	2.718281828459045235339
21	2.656	2.7182818284590452353593
22	2.659	2.718281828459045235360247
23	2.661	2.7182818284590452353602857
24	2.664	2.718281828459045235360287404
25	2.666	2.7182818284590452353602874687
26	2.668	2.71828182845904523536028747125
27	2.670	2.718281828459045235360287471349
28	2.671	2.71828182845904523536028747135254



пояснення всім ідеям пов'язаним з e . Це був найбільш помітний з усіх трактатів, присвячених числу e . Математик показав, що

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Ойлер також знайшов перші 18 десяткових знаків числа e :

$$e = 2,718281828459045235\dots$$

І отримав розклад числа e в неперервні дробу. Зокрема,

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}$$

Ойлер не навів доведення, що ці дробу продовжуються так само, але якби таке доведення було, воно б доводило ірраціональність e . Очевидно, це була перша спроба показати ірраціональність e . Довів же трансцендентність числа e Ерміт у 1873 році.

Серед інших дивовижних результатів в роботі Ойлера показано існування тісного зв'язку між синусами, косинусами та числом e , хоча e відомо з задач, що не пов'язані з геометрією чи трикутниками:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

де комплексну показникову функцію Ойлер вивів з формули Муавра.

І неможливо не згадати найвеличнішу формулу математики

$$e^{i\pi} = -1,$$

яка одержується з вищезгаданої формули Ейлера.



О. М. Крилов бачив у цій формулі символ єдності всієї математики, бо в ній « -1 представляє арифметику, i — алгебру, π — геометрію і e — аналіз».

Число e зустрічається чи не в кожній праці з математики та фізики, де відіграє свою визначну роль.

Розгляньмо кілька таких застосувань.

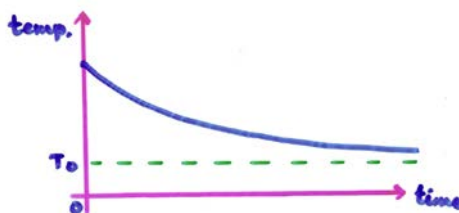
Охолодження чашки чаю.

За ньютонівським законом охолодження,

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_0),$$

де T_0 — температура середовища, K — коефіцієнт пропорційності. Тоді

$$T = T_0 + Ce^{-Kt}$$



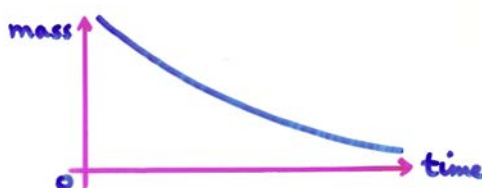
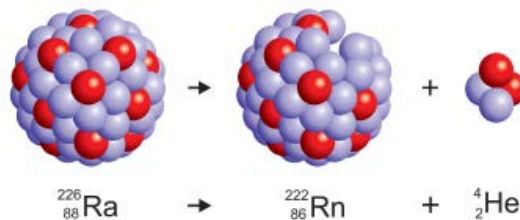
Радіоактивний розпад.

Швидкість розпаду

$$\frac{dm}{dt} = -Km,$$

де K — стала.

$$m = Ce^{-Kt}.$$



Список літератури

1. Glaz S. The Enigmatic Number e: A History in Verse and Its Uses in the Mathematics Classroom : [Електронний ресурс]. — Режим доступу : <http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/the-enigmatic-number-e-a-history-in-verse-and-its-uses-in-the-mathematics-classroom>
2. McCartin B. J. e: The Master of All / B. J. McCartin // The Mathematical Intelligencer. — 2006. — **28**, No. 2. — P. 10—22.
3. Mitchell U. G. The Number e / U. G. Mitchell, M. Strain // Osiris. — 1936. — **1**. — P. 476—496.
4. e (число) : [Електронний ресурс]. — Режим доступу : [https://uk.wikipedia.org/wiki/E_\(число\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/E_(число))
5. Wilson R. The story of e : Open university.

З ІСТОРІЇ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА π (СЕРЕДНЬОВІЧНИЙ ПЕРІОД)

В. Матлаш, В. Шевченко, О. О. Дем'яненко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

o.dem@ukr.net

Число π — це набагато більше, ніж просто число. Воно найвідоміше, найбільш вивчене, найзнаменитіше та найбільш згадуване у всі часи існування людства. Важливість цього числа неможливо перебільшити. Айзек Азимов якось написав: «Якщо б Всесвіт мав форму сфери діаметром 80 мільярдів світових років, то за допомогою 35 знаків числа π ми б змогли обчислити довжину її небесного екватора з похибкою менше однієї мільйонної частки сантиметра». Людство завдячує багатьом вченим, яким вдалося обчислити значення числа π , адже це дуже великий вклад у різні науки, зокрема математику, фізику, астрономію тощо.

Цзу Чунчжи (429—500 рр.), вчений і математик, з надзвичайною точністю оцінив верхню і нижню границі числа π :

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

Він також радив використовувати значення $\frac{22}{7}$ для простих обчислень та

$\frac{355}{113}$ — для складніших.

Видатний математик і астроном Аріабгата (476—550 рр.) отримав значення π , рівне 3,1416, використавши багатокутник із 384 сторонами.

Брахмагупта (598—665 рр.), найобдарованіший індійський математик, створив об'ємну працю «Брахма-спхута-сіддханта», де на жаль, проводиться достатньо неточна оцінка

$$\pi = \sqrt{10} \approx 3,162\dots$$

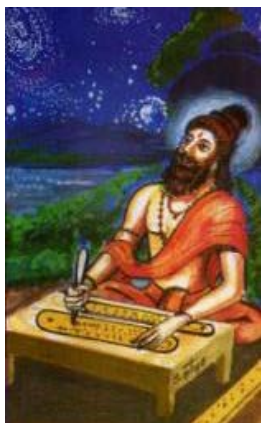
Звернімо увагу на особистість Мухаммеда ібн Муса аль-Хорезмі (780—850). Саме від зміненого ім'я аль-Хорезмі бере початок термін «алгоритм». Аль-Хорезмі є автором «Книги про відновлення і зіставлення», від арабської назви якої походить слово «алгебра». Аль-Хорезмі також рекомендував використовувати значення 3,14 у простих розрахунках і 3,1416 — у складних, наприклад, в астрономії.

Більш точне значення було отримано лише в XII ст. зусиллям Бгаскари II (1114—1185) в його книзі «Лілаваті», яку він назвав на честь доньки:

$$\pi = \frac{3917}{1250} = 3,1416.$$

У 1220 р. Фібоначчі (1170 – 1250), також відомий як Леонардо Пізанський, у одній із своїх праць «Практика геометрії» дає наближення значення

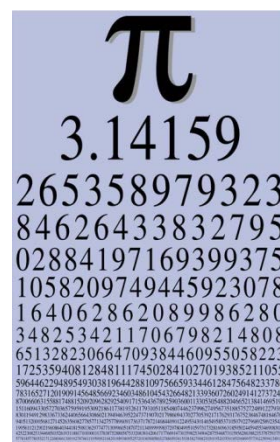
$$\pi = 3,141818.$$

$$2\pi = 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9} + \dots,$$


ал-Каші

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$
$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right),$$

Але для чого багато вчених присвячували числу π більшу частину свого життя? У ХХІ ст. нарешті знайшли незаперечну користь від обчислення числа π з такою точністю: для тестування суперкомп'ютерів використовуються складні обчислення, результат яких повинен бути заздалегідь відомим, і для цього ідеально підходить розрахунок знаків числа π .



З ІСТОРІЇ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА π (СТАРОДАВНІЙ ПЕРІОД)

М. Мязіна, Р. Кивенко, О. О. Дем'яненко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

o.dem@ukr.net

Вступ. Якщо задати кому-небудь з вас питання, де і скільки разів вам доводилося бачити коло, то, напевно, Ви відповіли б: «З тих пір як пам'ятаю себе, я постійно і повсюди бачив кола. Тарілка, з якої я їм; дзига, що змушувала мене в дитинстві забувати про все на світі; чашка, до якої я перший раз простягнув руку; залізний обруч від діжки або від винної бочки, який я ганяв хлопчиськом, ... — адже все це кола. Я бачу сьогодні форму кола в іскристій алмазній коронці бурових верстатів, її нагадує мені будь-яка циліндрична або конічна форма, поясок або кільце».

Кола, по яких відбувається заздалегідь розрахований рух, допомагають нам вимірювати час і підкорювати простір. На уроках геометрії нас вчать, що в кола є центр, від якого всі його точки однаково віддалені...

«А це я давно знав,— чуємо ми у відповідь, — знав ще, коли дивився на колеса автомобіля, на якому так хотів покататися.

У школі мене вчили, що пряма, яка проходить через центр круга і розділяє його на дві рівні частини, називається діаметром, а половина діаметра — радіусом. Там же я дізнався, як обчислювати довжину кола і площу круга. Як зараз пам'ятаю, як записував в зошит формули:

$$L = 2\pi R,$$

$$S = \pi R^2,$$

де грецькою буквою π позначено число, яке наближено дорівнює 3,14».

Ви, можливо, думаєте, що π — просто позначення? Нічого подібного! π — це ім'я власне, як «Іван» або «Марія». Більш того! У той час як Іваном або Марією називають безліч людей і потрібні інші ознаки, щоб точно знати, про кого йде мова, серед нескінченної кількості чисел існує лише одне-єдине, що носить назву π , а саме число, що виражає відношення довжини кола до її діаметра. Число 3,14 — одне з наближених значень π . Для точного визначення його не вистачило б і мільйонів десяткових знаків, послідовність яких, між іншим, навіть невідома. 1958 року було опубліковані перші 10000 десяткових знаків числа π , знайдені за допомогою електронної обчислювальної машини. Може виникнути питання, яка користь від встановлення такої кількості десяткових знаків π , тим більше що для обчислення, наприклад, траєкторії космічної ракети, віддаленої на будь-яку відстань від Землі, не знадобиться і 50 десяткових знаків цього числа.



Не треба думати, що старання математиків перебільшені, що ці обчислення — даремна праця. Якщо вони не можуть бути поки застосовані на практиці, вони можуть стати корисними для розв'язання якоїсь задачі з теорії чисел, а це, в свою чергу, може знайти практичне застосування. Історія математики знає багато таких прикладів.

У ТУМАНІ ЧАСУ

*Математика знає вельми тонкі винаходи,
що можуть бути дуже корисними,
як для вдоволення бажання вчитись,
так і для розвитку всіляких ремесел,
полегшуючи людську працю.*

Р. Декарт

Щоб почати «з самого початку», треба повернутися до початку людської історії: заглянути в епоху, віддалену від нас на десятки тисяч або навіть більше років ...

Ось люди, одягнені в шкури, здерті кам'яними ножами з тварин, за якими вони полювали за допомогою кийків. Один з них сидить у тіні дерева і моторно плете вербовий кошик. Краї кошика він робить круглими, як його вчили батьки. Він занурений у свої думки. На дереві висять ще три готові кошика. Кинувши роботу незакінченою, він забирається на дерево, хапає три вже готові кошики і спускається на землю. Він вибирає прут з купи прутів, кладе поруч, і вимірює їм коло, утворене краєм найбільшого з кошиків, відламуючи зайву частину прута; бере інший прут і вимірює ширину, або, як ми говоримо сьогодні, діаметр кошика. Потім він порівнює обидва прута і на око визначає, що один з них в три рази більше іншого. Коли проведений вимір переконує його, що він не помилився, його обличчя освітлюється радістю. З гарячковою швидкістю повторює він вимір на інших двох корзинах і отримує такий же результат. Людина дивиться, озирається і, побачивши пень круглої форми, проробляє над ним таку ж операцію. Перевірка задовольняє його. Вже багато днів мучить його питання, вирішення якого він тепер знайшов. Питання це важливе для плетіння кошиків, щілини яких треба набивати глиною, щоб вони стали придатні для зберігання води. Для таких кошиків потрібно вибирати прuti такої довжини, яка б дозволяла отримати бажану ширину і форму: стільки-то біля краю, стільки-то в середині і стільки-то у дна. Тепер все піде як треба. «Тепер,— думає людина,— я розумію, як надавати кошикам потрібну форму і розмір».

Це був першовідкривач числа π ! До нього нікому не приходило в голову, що між діаметром кола та її довжиною може існувати який-небудь зв'язок.

Щоб оцінити важливість цього відкриття, нагадаємо, що вже на зорі історії людина користувався багатьма побутовими предметами і прикрасами, що мали форму кола. Таку форму мали майданчики, на яких проводився суд. Гомер без тіні сумніву підтверджує це, коли описує щит Ахілла, на якому була зображена сцена суду: «... старці Градські мовчки на тесаних каменях сидять серед священного кола».

Ми не можемо простежити, яким чином і коли було відкрито число π , але, мабуть, закономірність, згідно з якою діаметр окружності міститься три рази в її довжині, передавалася з покоління в покоління. Її висловлювали на всіх мовах Землі. Нею користувався тесляр, який виготовляв дерев'яне колесо для воза, каменотес, прилаштовуючи оголовок до колодязя, гончар, що вимірював окружність глиняних посудин для нанесення на них малюнків, — взагалі всі ремісники, що мали справу з колами. Ближче до наших часів, коли люди відкрили писемність і стали записувати свої знання, вони висловили в листі і свої спостереження про число π . Збереглися записи, зроблені в різні часи і на різних мовах, але дуже подібні за змістом, тому що мова в них йшла про одне й те ж відкриття. Наприклад, на табличках з обпаленої глини, викопаних в Месопотамії, було написано:

«Якщо 60 є коло, то третя частина від 60 являє собою 20. Це є діаметр»

Це ж співвідношення, виражене в аналогічній формі, ми знаходимо і в задачах, що містяться в самих древніх єгипетських та індійських папірусах, в китайських книгах і т. д.

Зумівши удосконалити науку про вимірювання, єгиптяни пізніше помітили, що діаметр кола не міститься точно 3 рази на її довжині. Встановлення цього факту глибоко схвилювало їх, оскільки воно породило сумніви в правильності відкритих попередниками законів. Це видно і з того, що вони намагалися досягти такого ж результату іншим шляхом — шляхом наукового міркування. Так, очевидно, почалася боротьба між старими традиціями і новими науковими ідеями. Число 3 перестало вважатися виразом відношення між довжиною кола та її діаметром; але єгиптяни продовжували вірити в існування постійного відношення між довжиною кола і діаметром, величину якого вони намагалися встановити.

Ця подія залишила свої сліди в рядах завдань, записаних писарями на папірусах. Обчислення в цих завданнях вже не такі прості, як в тих, де передбачалося, що число π дорівнює 3. Завдяки своєму новому значенню число π виділяється з безлічі натуральних чисел і привертає увагу математиків. Цей факт зафіксовано на сторінках двох розшифрованих вченими манускриптів: на папірусі Райнда, складеному Ахмесом близько 1600 р. до н.е., і на Московському папірусі часів Середнього царства.

Стародавні римляни вважали, що довжина кола довше діаметра в 3,12, у той час, як правильне відношення — 3,14159... Єгипетські і римські математики встановили відношення довжини кола до діаметра не строгим геометричним розрахунком, як пізніші математики, а знайшли його просто з досвіду. Але чому виходили у них такі помилки? Хіба не могли вони обтягнути якусь круглу річ ниткою і потім, випрямивши нитку, просто виміряти її?

Візьмемо, наприклад, вазу з круглим дном діаметром у 100 мм. Довжина кола повинна дорівнювати 314 мм. Однак на практиці, вимірюючи ниткою, ми навряд чи отримаємо цю довжину: легко помилитися на один міліметр, і тоді π виявиться рівним 3,13 або 3,15. А якщо врахувати, що і діаметр вази не можна

виміряти цілком точно, що і тут помилка в 1 мм вельми вірогідна, то для π виходять досить широкі межі між 3,09 і 3,18.

Проведемо кілька дослідів. Для цього намалюємо кілька кіл. За допомогою нитки і лінійки виміряємо довжину кожного кола та його діаметр. Потім розділимо довжину кола на його діаметр.

Визначаючи π зазначеним способом, можна отримати результат, який не збігається з 3,14: один раз отримаємо 3,1, інший раз 3,12, третій 3,17 і т.д. Випадково може виявитися серед них і 3,14, але в очах обчислювача це число не матиме більшої значення, ніж інші.

Цей шлях ніяк не може дати прийнятного значення для π . У зв'язку з цим стає більш зрозумілим, чому Стародавній світ не знав правильного відношення довжини кола до діаметру.

З IV ст. до н.е. математична наука стрімко розвивалася в Стародавній Греції. Давньогрецькі геометри строго довели, що довжина кола пропорційна її діаметру, а площа круга дорівнює половині добутку довжини кола і радіуса круга

$$S = \frac{1}{2}LR = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Це доведення приписують Евкліду Кнідському та Архімеду. Архімед у творі «Про вимір кола» обчислив периметри вписаних в коло і описаних навколо нього правильних багатокутників — від 6 до 96-кутника. Беручи діаметр кола за одиницю, Архімед розглядав периметр вписаного багатокутника як нижню оцінку довжини кола, а периметр описаного багатокутника як верхню оцінку. Розглядаючи правильний 96-кутник, Архімед отримав оцінку

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

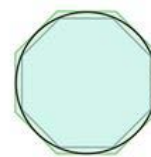
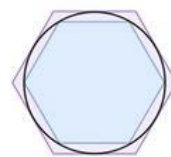
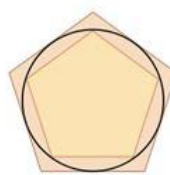
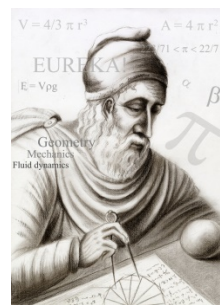
Таким чином, він встановив, що число π лежить у межах

$$3,1408 < \pi < 3,1428.$$

Значення $\frac{22}{7}$ досі вважається цілком

гарним наближенням числа π для прикладних задач.

В «Алгебрі» стародавнього арабського математика Магомета-бен-Муза про обчислення довжини кола читаємо такі рядки: «Кращий спосіб — це помножити діаметр на $3\frac{1}{7}$. Це найшвидший і найлегший спосіб. Богу відомо найкраще.»



Чжан Хен у II столітті уточнив значення числа π , запропонувавши два його еквіваленти:

1) $92 / 29 \approx 3,1724 \dots$,

2) $\sqrt{10}$.

В Індії Аріабхата і Бхаскара використовували наближення 3,1416.

Брахмагупта в IV столітті запропонував як наближення $\sqrt{10}$.

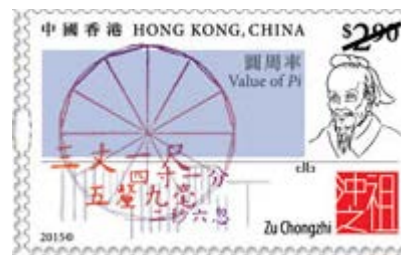
Близько 265 року н. е. китайський математик Лю Хуей надав простий і точний алгоритм для обчислення π з будь-яким ступенем точності. Він самостійно провів обчислення для 3072-кутника і отримав наближене значення для $\pi \approx 3,14159$.

Пізніше Лю Хуей придумав швидкий метод обчислення π і отримав наближене значення 3,1416 тільки лише з 96-кутником, використовуючи переваги того факту, що різниця в площі наступних один за одним багатокутників формує геометричну прогресію зі знаменником 4.

У 480-х роках китайський математик Цзу Чунчжи продемонстрував, що $\pi \approx 355 / 113$, і показав, що $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, використовуючи алгоритм Лю Хуея стосовно до 12288-кутника. Це значення залишалося найточнішим наближенням числа π протягом наступних 900 років.

До II тисячоліття було відомо не більше як 10 цифр числа π .

Висновок. Число π займало розуми вчених з глибокої давнини до наших днів. Але і в наші дні достовірно невідомо, хто перший здогадався про зв'язок між довжиною кола та її діаметром.



«Куди б ми не поглянули,
ми бачимо моторне й працелюбне число:
його містить і найпростіше коліщатко,
і найскладніша автоматична машина».
Ф. Кимпан

Список літератури

1. Кимпан Ф. История числа π / Ф. Кимпан. — Москва : Наука, 1971. — 216 с.
2. Жуков А. В. Вездесущее число π / А. В. Жуков. — Москва : Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.
3. Математика : Энциклопедия для детей. Т. 11. — Москва : Аванта +, 1999. — 688 с.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ ПРАВИЛЬНОЇ ЗМІНИ: ВІД ІСТОРІЇ ДО СЬОГОДЕННЯ

В. В. Павленков, О. А. Тимошенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

matan@kpi.ua

Останнім часом в сучасній математиці правильно змінні (RV) функції знаходять різноманітне застосування, особливо в задачах теорії ймовірностей, теорії чисел, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці та в багатьох інших розділах математики.

Сам термін «правильно змінна функція» (*Regularly varying, RV*) було вперше запропоновано Йованом Караматою у відомій статті 1930 року, хоча використання властивостей таких функцій можна знайти у більш ранніх роботах Ландау 1911 року, Г. Валірона 1913 року, Поля 1917 року та інших.

У своїй статті Карамата довів ряд фундаментальних теорем теорії RV функцій, серед яких найбільш відомою є тауберова теорема (теорема Харді — Літлвуда — Карамати).

Ідеї Й. Карамата успішно розвивалися в «Югославській школі», представниками якої були відомі математики V. Avakumović, S. Aljancić, R. Vojanic, M. Tomić у період між 1930 та 1960 рр.

Великий потенціал RV функцій в області теорії ймовірностей та її застосуваннях було розкрито В. Феллером у книгах 1968 та 1971 рр. Ці роботи вплинули на збільшення інтересу до властивостей правильно змінних функцій. Ще одним крупним поштовхом до збільшення зацікавленості RV-функціями, знову таки з ймовірнісної точки зору, була дисертація Лоуренса де Хаана, представлена у 1970 році.

У 1976 році вийшла монографія Є. Сенети [1], яка присвячена систематичному викладу властивостей дійсних правильно змінних на нескінченності функцій. Вона є першим найбільш повним зібранням фактів, пов'язаних з властивостями функцій з цього класу та відіграє істотну роль у теорії функцій і теорії ймовірностей.

На сьогоднішній час найбільш повною працею, яка містить властивості функцій, пов'язаних з класом RV, а також чисельні узагальнення RV-функцій, є монографія 1987 року авторів N. Bingham, C. Goldie, J. Teugels [2].

Правильна зміна функції — це однобічна локальна асимптотична властивість заданої функції, яка логічно і корисно розширює клас функцій зі степеневою асимптотичною поведінкою на нескінченності до класу функцій з асимптотикою типу степеневої функції, помноженої на коефіцієнт, що змінюється «повільніше», ніж степенева функція.

Нехай $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{R}_+$ — множина додатних дійсних чисел. Нехай також $F(\mathbb{R})$ — множина дійсних функцій $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, а

$$F_+(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \left\{ f \in F(\mathbb{R}): f(x) > 0, x \in [A, +\infty) \right\}.$$

Означення 1. [3] Вимірну функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ називають *правильно змінною* на нескінченності, якщо для довільного $\lambda > 0$ існує скінченна границя

$$\kappa_f(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}.$$

Якщо $\kappa_f(\lambda) = 1$, $\lambda > 0$, то функція f називають *повільно змінною* (SV).

Відомо [3], що для RV-функції f гранична функція κ_f має наступне представлення

$$\kappa_f(\lambda) = \lambda^\rho, \lambda > 0,$$

де число $\rho \in \mathbb{R}$ називається *індексом (порядком)* RV-функції f . Повільно змінні функції і лише вони мають індекс $\rho = 0$.

Будь яка RV-функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ з індексом $\rho \in \mathbb{R}$ може бути представлена у вигляді

$$f(x) = x^\rho \cdot \ell(x),$$

де ℓ -SV функція, відповідна до f . Позначення $\ell(x)$ прийнято використовувати для SV функцій. Це пов'язано з тим, що ℓ є першою буквою французького слова *lentement* (повільно), більше того фундаментальні роботи з теорії повільно змінних функцій були написані Й. Караматою французькою мовою.

Кожна майже всюди додатна вимірна функція, що має додатну границю при $x \rightarrow \infty$, очевидно, є повільно змінною.

Найпростішим нетривіальним прикладом повільно змінної функції є функція $\log x$, причому взяття логарифма будь-якої кратності (наприклад, $\log \log x$) також приводить до повільно змінної функції. З іншого боку, експоненти e^x і e^{-x} , а також незгасальні осцилюючі функції, такі, як $2 + \sin x$ не є правильно змінними. Ясно, що для вивчення правильної зміни функцій у більшості випадків цілком достатньо вивчити властивості повільно змінних функцій.

Функцію $R(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, називають *правильно змінною в нулі*, якщо $R(1/x)$ правильно змінюється на нескінченності. Оскільки, шляхом зсуву початку координат, можна означувати поняття правильно змінної функції в довільній скінченній точці, то обмежуються побудовою теорії правильно змінних на нескінченності функцій.

В останні роки, у теорії ймовірностей виявилась низка питань, в яких з'явилася природна потреба залучати як апарат псевдорегулярні функції, які розширюють клас функцій, що правильно змінюються.

У сучасній літературі при узагальненнях теорії RV-функцій Й. Карамати

виникають три класи функцій: PRV, SQI та POV. Класи PRV, SQI та POV-функцій мають внутрішню характеристику в термінах верхніх та нижніх граничних функцій, які природно виникають при вивченні RV-функцій.

Властивості цих класів функцій вивчали В. Феллер [4], S. Aljancic та D. Arandelovic [5], Н. К. Барі та С. Б. Стечкін [6], У. Штадмюллер і Р. Траутнер [7], С. М. Берман [8], А. Л. Якимів [9], але самі терміни PRV, SQI та POV були запроваджені в роботах В. В. Булдігіна, О. І. Клесова, Й. Г. Штайнебаха. Автори спочатку отримали найпростіші застосування PRV, SQI та POV-функцій у теоремах відновлення, після цього було закладено основи теорії цих класів функцій, яка потім дозволила отримати більш складні застосування. Усі ці результати зібрані в монографії 2012 року (див. [10]).

Для $f \in F_+(\mathbb{R})$ будемо розглядати *верхню та нижню граничні функції*:

$$f^*(c) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \text{ та } f_*(c) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f(ct)}{f(t)}, \quad c > 0,$$

значення яких належать множині $[0, \infty]$.

Означення 2. [10] Вимірна функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ *псевдоправильно змінюється* (PRV), якщо

$$\limsup_{c \rightarrow 1} f^*(c) = 1.$$

Зауважимо, що у роботі У. Штадмюллера і Р. Траутнера [7] доведено, що тауберова теорема для перетворення Лапласа неспадної додатної функції має місце тоді і тільки тоді, коли ця функція має PRV-властивість. У роботі А. Л. Якиміва [9] вивчалась багатовимірна PRV-властивість, але результати цієї роботи є важливими і в одновимірному випадку. У роботі О. І. Клесова, З. Рихліка та Й. Штайнебаха [11] з використанням PRV-функцій вивчався зв'язок між підсиленням законом великих чисел для послідовності випадкових величин та його аналогом для процесу відновлення.

Однією з властивостей PRV-функцій є те, що вони зберігають еквівалентність функцій.

Кажуть, що функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ *зберігає еквівалентність функцій*, якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(u(t))}{f(v(t))} = 1$$

для будь-яких функцій u та v таких, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{v(t)} = 1 \text{ та } \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty.$$

Означення 3. [10] Вимірна функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ достатньо швидко зростає (SQI), якщо $f_*(c) > 1$ для будь-якого $c > 1$, або, що еквівалентно, якщо $f_*(c) > 1$ для будь-якого $c \in (0, 1)$.

Зауважимо, що функція з повільною зміною не може бути SQI- функцією. З іншого боку, будь-яка RV-функція з додатним індексом і будь-яка швидко зростаюча монотонна функція, наприклад $f(t) = e^t, t \geq 0$, є SQI-функцією.

Означення 4. [10] Вимірна функція $f \in F_+(\mathbb{R})$ називають *функцією з позитивним порядком зміни* (POV), якщо $f_*(c) > 1$ для всіх $c > 1$ та $\limsup_{c \rightarrow 1} f^*(c) = 1$.

POV-функції узагальнюють функції з правильною зміною та додатним індексом. В. В. Булдигіним, О. І. Клесовим та Й. Г. Штайнебахом доведено, що строго зростаючі та необмежені POV-функції одночасно зберігають асимптотичну еквівалентність функцій та послідовностей. Більше того, тільки для POV-функцій виконується ця властивість.

Отже, псевдорегулярні функції мають великий спектр застосувань і є ефективним апаратом дослідження ряду питань теорії ймовірностей.

Список літератури

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — Москва : Наука, 1985. — 144 с.
2. Bingham N. H. Regular variation / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels // Encyclopedia of math. and its applications. — Cambridge. — 476 p.
3. Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere des fonctions / J. Karamata // Mathematica (Cluj). — 1930. — № 4. — P. 38—53.
4. Feller W. One-sided analogues of Karamata's regular variation / W. Feller // L'Enseignement Math. — 1969. — № 15. — P. 107—121.
5. Aljancic S. O-regularly varying functions / S. Aljancic, D. Arandelovic // Publ. Inst. Math. Nouvelle serie. — 1977. — № 22 (36). — P. 5—22.
6. Бари Н. К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. Московского математического общества. — 1956. — 5. — С. 483—522.
7. Stadtmüller U. Tauberian theorems for Laplace Transforms / U. Stadtmüller, R. Trautner // J. Reine Angew. Math. — 1979. — 311/312. — P. 283—290.
8. Berman S. M. Sojourn and extremes of a diffusion process on a fixed interval / S. M. Berman // Adv. Appl. Probab. — 1982. — № 14. — P. 811—832.
9. Якимив А. Л. Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана — Харриса / А. Л. Якимив // Труды МИАН СССР. — 1986. — № 177. — С. 177—205.
10. Булдигін В. В. Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення / В. В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах. — Київ : ТВІМС. — 2012. — 441 с.
11. Klesov O. I. Strong limit theorems for general renewal processes / O. I. Klesov, Z. Rychlik, J. G. Steinebach // Probab. Math. Statist. — 2001. — № 21. — P. 329—349.

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ БОГОЛЮБОВА — КРИЛОВА ТА ЙОГО ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК У РОБОТАХ Ю. О. МИТРОПОЛЬСЬКОГО

К. В. Тищенко, В. В. Листопадова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

katiatyschenko@ukr.net, vlistopadova@mail.ua

Математика — це наука,
яка потребує точності
і вважає правильним тільки те,
що переконливо доведено.
Г. Галілей

Точність надзвичайно важлива для інженерних розрахунків. Метод усереднення дає змогу розрахувати точність малих функцій. Багато видатних вчених (Гаус, Фату, Ньютон, Делоне, Гіл) працювали над схемами усереднення. Методи усереднення за часом, засновані на визначенні різного роду середньостатистичних величин, дають можливість отримати оцінку кореляційної функції і спектральні щільності процесу. Проте довершеного загального алгоритму методу усереднення не було складено до публікації статті М. М. Боголюбова «О принципе Рэлея в теории дифференциальных уравнений математической физики и об одном Эйлеровом методе в вариационном исчислении» (1924 р.). У цій статті Боголюбов обґрунтував принцип Релея та спільно з Криловим запропонував для визначення малих порядку функції

$$\left| y(x_k) - y^{(n)}(x_k) \right| = \left| y_k - y_k^{(n)} \right|$$

використовувати диференціальні системи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda q(x)y + f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система рівнянь (1), для якої був розроблений метод Крилова — Боголюбова має стандартний вигляд і базується на так званому принципі Релея в статистичній механіці:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де t — час, ε — малий параметр. Основні припущення, при яких розглядається система, зводяться до достатньої гладкості функції X за εx і деякому «поверненні» функції за t , забезпечують існування середнього значення, яке можна записати у вигляді:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t, x) dt = X_0(x),$$

наприклад, періодичності або майже періодичності X за t . Згідно з методом Боголюбова — Крилова точне наближення до розв'язку $x = x(t)$ системи (1) визначається виразом:

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi).$$

Ю. О. Митропольський продовжив дослідження своїх наставників: учений, працюючи над системами нелінійних диференціальних рівнянь, розвинув метод усереднення. У 1955 році виходять перші книги Ю. О. Митропольського: «Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах» та «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (у співавторстві з його вчителем, академіком М. М. Боголюбовим), за яку йому було присуджено найвищу на той час вітчизняну наукову нагороду.

Учений за допомогою методу послідовних заміन побудував загальний розв'язок систем нелінійних рівнянь і вивчив їх поведінку. Запропонував спосіб знаходження розв'язку задач про коливальні системи з багатьма ступенями свободи. Так, після заміни система (1) для одного ступеня свободи отримує лінійний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau)x = \varepsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (2)$$

А для багатьох ступенів свободи в коливальних системах система (2) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \frac{dq_r}{dt} \right\} + \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) q_r = \varepsilon Q_s(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N) \quad (s = 1, 2, \dots, N),$$

де $\tau = \varepsilon t$ — повільний час, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, а параметри $m(\tau)$, $c(\tau)$, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$

мають незалежну змінну t в комбінації з малим параметром $\varepsilon(\tau = \varepsilon t)$. Тобто легко помітити новий, оригінальний підхід Митропольського до алгоритму методу усереднення Боголюбова — Крилова.

Ця підстановка Ю. О. Митропольського разом з асимптотичними методами М. М. Крилова та М. М. Боголюбова отримали міжнародне визнання як асимптотичні методи Крилова — Боголюбова — Митропольського. За допомогою розробленого ним методу Ю. О. Митропольський розв'язав низку важливих задач сучасної техніки і виявив нові явища в системах при нестационарних режимах.

Список літератури

1. Боголюбов М. М. Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости / М. М. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников // Журн. exper. и теор. физики. — 1960. — № 39, вып. 1 (7). — С. 120—129.
2. Жизненный и творческий путь Ю. А. Митропольского, а также его основные научные достижения / А. М. Самойленко — Київ : Ін-т математики, 2005. — С. 25—50.
3. Коломієць В. Г. Асимптотические методы в теории нелинейных случайных колебаний / В. Г. Коломієць, Ю. О. Митропольський // Український математичний журнал. — 1994. — 46, № 8. — С. 1011—1016.

ІСТОРИЧНА ТА ЛІНГВІСТИЧНА КОМПОНЕНТИ ГУМАНІТАРНОГО ПОТЕНЦІАЛУ МАТЕМАТИКИ

О. Б. Шаврова, Н. К. Дьяченко

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,

Дніпропетровськ, Україна

_oxana_13@mail.ru

Історія математики — це частина історії загальної культури, таким чином, без дослідження історії математики серед учнів та студентів не може бути сформовано цілісне сприймання розвитку людського суспільства. Історія математики дозволяє простежити зв'язок розвитку суспільства з розвитком математики. З одного боку, розвиток суспільства впливає на розвиток математики, а з іншого боку, рівень розвитку математики багато в чому визначає соціальний розвиток. Включення в освітню програму елементів історії математики є ефективним засобом створення позитивного мотиву вивчати математику, сприяє розвитку творчих здібностей, помагає науковому розумінню картини світу.

Питання використання елементів історії у викладанні математики приймається вже давно апріорі, але за браком часу викладачі економлять на цьому. Виділення в гуманітарному потенціалі математики історичної компоненти, обумовлені в першу чергу тим, що математика є однією з найстаріших наук. Знайомство з її історією, як з точки зору розвитку математичної ідеї, так і з різними історичними аспектами розвитку суспільства, безумовно, є важливим елементом гуманітарної освіти студентів.

В історичній компоненті гуманітарного потенціалу математики можна виділити три складові:

- *історико-культурну* (розглядає розвиток математики як частину культури, взаємозв'язок історичних подій і математики);
- *історико-математичну* (показує історію та значення для розвитку суспільства появи математичних термінів, теорем, формул, теорій, ідей);
- *історико-особистісну* (знайомить з творчістю вчених-математиків, їх біографіями, подіями життя).

Розкриття гуманітарного потенціалу математики допомагають також *історичні задачі*, які включають в себе: завдання стародавніх пам'яток культури або задачі зі старовинних математичних книг; завдання, які названі на честь вченого, який розв'язав задачу або сформулював її умову; знамениті нерозв'язні задачі чи задачі, які містять історичну інформацію.

У Дніпропетровському державному аграрно-економічному університеті при кафедрі вищої математики працює гурток прикладної математики та комп'ютерних технологій «Магія чисел», де зацікавлені студенти опрацьовують літературу, знайомляться з основами філософії математики, виконують дослідницьку роботу з історії математики, біографіям видатних математиків та

їх досліджень, розглядають взаємозв'язок математики з іншими науками, вчаться ораторському мистецтву та культурі ведення диспуту і дискусій.

Математика, в певному сенсі, є визначеним засобом комунікації — сучасна математична культура та інші культури. В лінгвістичній компоненті гуманітарного потенціалу математики можна виділити дві складові: мовлення та математика. Перша характеризується приділенням уваги до виступу, тобто грамотність, точність використання термінів, аргументована побудова речень і уміння відстоювати свою точку зору. Основою другої компоненти є безпосередньо мова математики, її термінологія, словниковий запас, синтаксис, точність використання символів, літер.

Розвиток знань, навичок і здібностей студентів чи учнів на заняттях математики потребує розвитку належного математичного мовлення. Але оскільки мова є вторинним, а міркування є первинним, нашим головним завданням є навчити правильно думати наших слухачів. Культура мовлення — це не просто вміння грамотно встановити акценти і правильно вимовляти звуки, обходитись без слів-паразитів. Все це — зовнішня оболонка всього процесу.

Грамотна, переконлива мова — це не вроджений подарунок, а свідомо постійна робота, розроблена майстерність абсолютно необхідна для сучасного фахівця. Добре розвинена письмова й усна мова студентів якісно відрізняє їх від своїх однолітків. Комунікативна компетенція сучасних підлітків проявляє себе у вільному володінні комп'ютерними та інформаційними технологіями. Молоді люди можуть брати участь у віддалених подіях дистанційного характеру. Таким чином, процес формування інтелектуального і творчого мислення стає більш інтенсивним і якісним.

На аудиторних заняттях поширеним є навчальний діалог. Це діалог між викладачем і студентом, також між студентами. І розглядається він як інструмент діяльності, що формує характер розумових процесів. В залежності від навчальних цілей діалоги бувають: репродуктивні, евристичні, творчі.

Не маючи підготовки «математичного стилю сприйняття інформації», люди часто не спроможні проаналізувати інформацію, яка не стосується математики, але дуже важлива особисто і стають жертвою демагогії, реклами, політичних та правових спекуляцій.

Серед найбільш поширених помилок при аналізі інформації в різних сферах діяльності (при недостатньому володінні та знанні властивостей синтаксису та семантики математичної мови) є наступні:

- невміння користуватись термінологією, конкретних означень і понять;
- обмеженість логічної підготовки;
- помилки при узагальненні та конкретизації.

Для формування математичного мовлення доцільно включити задачі:

- 1) для роботи з термінологією, символікою, графічними зображеннями;
- 2) для роботи з логічними конструкціями;
- 3) з письмовими навчальними текстами з математики.

Визначення математики як мови науки відображає одну з важливіших її функцій. Основними характеристиками мови математики є чіткість, точність, обмеженість, однозначність висловлення думки, логічність функцій, виділення загального — частинного, абстрактного — конкретного, існування та однозначність об'єкта. Паралельні та взаємозв'язки використання декількох форм мовного прояву, а також образних та дієвих форм представлення інформації, є засобом розвитку переходу між різними формами представлення інформації в індивідуальному мисленні. Це, на думку психологів, лежить в основі розвитку мислення та інтелекту, а тому дозволяє досягти головної мети вищої школи — підготувати фахівця, громадянина, людину, яка має високий рівень культури, вихованості, має бажання до подальшого творчого та інтелектуального розвитку.

Список літератури

1. Глейзер Г. И. История математики в школе : Пособие для учителей : IV—VI классы / Г. И. Глейзер. — Москва : Просвещение, 1981. — 239 с.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе : Пособие для учителей : VII—VIII классы / Г. И. Глейзер. — Москва : Просвещение, 1982. — 240 с.
3. Глейзер Г. И. История математики в школе : Пособие для учителей : IX—X классы / Г. И. Глейзер. — Москва : Просвещение, 1983. — 351 с.
4. Иванова Т. А. Гуманитаризация общего математического образования : Монография / Т. А. Иванова. — Нижний Новгород : Изд-во НГПУ, 1998. — 206 с.
5. Шкильменская Н. А. Гуманитарный потенциал курса алгебры и начал анализа профильной школы. Модель, принципы и особенности реализации : Монография / Н. А. Шкильменская. — Архангельск : Поморский университет, 2007. — 181 с.

**ВНЕСОК М. М. БОГОЛЮБОВА
В РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

Я. М. Шевченко, В. В. Листопадава

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

yaroslaw.shew4enko@gmail.com, vlistopadova@mail.ua

Перші наукові праці Миколи Миколайовича Боголюбова, були присвячені наближеному розв'язанню диференціальних рівнянь, зокрема обґрунтуванню принципу Релея. Апроксимуючий метод був використаний для знаходження власних чисел і власних функцій граничної задачі. Крім того, цей метод знайшов своє застосування й у розв'язанні рівнянь у частинних похідних. Розвинені методи наближеного розв'язку диференціальних рівнянь дозволили отримати важливі практичні результати для ряду технічних та інженерних проблем.

Однією з перших визначних праць Боголюбова є стаття «О принципе Рэлея в теории дифференциальных уравнений математической физики и об одном Эйлеровом методе в вариационном исчислении» (1926). Задача полягала в обчисленні порядку малості виразу

$$\left| y(x_k) - y^{(n)}(x_k) \right| = \left| y_k - y_k^{(n)} \right|,$$

за допомогою диференціальної системи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda q(x)y + f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Зведення граничних задач для диференціальних рівнянь до задач визначення екстремуму відповідних функцій привело Боголюбова до необхідності детальнішого дослідження питань, що виникали у варіаційному численні. При цьому найважливіше значення набували саме прямі методи варіаційного числення.

Також наукова діяльність Миколи Миколайовича була пов'язана з варіаційним численням та теорією майже періодичних функцій. Основною роботою на цій тематиці є стаття «О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале» (1931). У ній Боголюбов обґрунтовує фактично нову теорію рівномірних майже періодичних функцій, та доводить ряд теорем, які дають змогу узагальнити теореми Бора і Віннера, про тригонометричну апроксимацію майже періодичних функцій. Боголюбов показує, що основні теореми теорії майже періодичних функцій є результатами загальнішої теорії. Згідно з теоремами Боголюбова довільна обмежена функція в певних лінійних комбінаціях поводить себе як тригонометрична сума і в певному сенсі має властивість майже періодичності.

Боголюбову належить побудова функції $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$, що фігурує в квазіперіодичній апроксимації майже періодичної функції, для деякого $\rho \in [0; 0,5]$ він вводить функцію

$$\theta_{\rho}(x) = 1 - \frac{R(x)}{\rho}, \quad R(x) \leq \rho.$$

Припустивши, що $\varphi(x_1, \dots, x_s) = \theta_{\rho}(x_1) \dots \theta_{\rho}(x_s)$, він доводить, що

$$F(x_1, x_2, \dots, x_s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\omega_1 \tau - x_1, \dots, \omega_s \tau - x_s) f(\tau) d\tau}{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\omega_1 \tau, \dots, \omega_s \tau) d\tau}.$$

Тобто, бачимо абсолютно новий, оригінальний підхід Боголюбова до апроксимацій рівномірних майже періодичних функцій, оскільки основні їхні властивості випливають з теореми апроксимації, і не спираються на рівність Парсєваля чи теорію рядів Фур'є.

Згодом була опублікована фундаментальна праця М. М. Боголюбова «К теории сверхтекучести» (1947). Складність побудови теорії надплинності полягала у відсутності в задачі малого параметра. Він припустив, що слабкозбуджений стан неідеального газу можна розглядати як стан газу квазічастинок, який задовольняє критерій надплинності. Цим фактично було пояснено явища надплинності.

Боголюбов припустив, що більшість частинок має нульовий імпульс, та одержав для збуджень апроксимуючий гамільтоніан. Але застосувати тут звичайну теорію збурень виявилось неможливо внаслідок сильної взаємодії частинок, тому для розрахунку спектру елементарних збуджень була запропонована діагоналізація гамільтоніану:

$$H = -\psi_0(x) \left[\frac{\bar{V}^2}{2m} - \frac{1}{m_2 d^2} \cos(\bar{V}d) + \mu \right] \psi_0 - V \psi_1(x) \psi_2(x) \psi_3(x).$$

Для цього були запроваджені канонічні перетворення, відомі як перетворення Боголюбова.

Микола Миколайович описав розв'язок моделі теорії надпровідності Бардіна — Купера — Шріфера (БКШ), це стало основою для подальшого розвитку методу апроксимуючого гамільтоніана. Для цього він увів додатковий оператор у вихідний гамільтоніан взаємодії, який мав важливе значення при відборі розв'язків за низьких температур. Завдяки саме цьому прийому Боголюбов розробив потужний метод теорії фазових переходів, який зараз відомий, як метод квазісередніх Боголюбова.

Завдяки даному математичному тлумаченню надплинності було розглянуто фізичні властивості надплинного стану, вдалося записати гідродинамічні рівняння, для всього температурного діапазону, це дало змогу пояснити взаємний зв'язок між нормальними та надплинними станами.

Фактично працями Миколи Миколайовича з теорії надплинності, була започаткована фізика квантових рідин.

Продовжуючи розвивати дані ідеї у 1963 році, йому вдалося вивести рівнянь гідродинаміки надплинної ідеальної рідини, в результаті чого, було одержано наближення до функцій Гріна.

Микола Миколайович запровадив нове поняття стану систем у квантовій статистичній механіці як нескінченної послідовності статистичних змінних, розвиток якого був описаний рівняннями статичних змінних, що згодом отримали назву рівняння Боголюбова. Розглянувши систему з N частинок з парною взаємодією, що знаходяться в зовнішньому полі:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \frac{\partial f_n}{\partial t} r_i + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial U_i}{\partial r_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_i} \right) \frac{\partial f_n}{\partial p_i} = 0$$

де q_i, p_i — загальні координати та імпульс i -ї частинки, U_i — потенціал взаємодії із зовнішнім полем, V_{ij} — потенціал парної взаємодії частинок, і проінтегрувавши рівняння по змінних усіх частинок, крім частинок з парною взаємодією, Боголюбов отримав одночастинкові функції розподілу, а проінтегрувавши член з парною взаємодією по $N - 2$ змінних, він отримав залишковий інтеграл від двохчастинної функції розподілу:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \dot{r}_1 \frac{\partial f_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U_1}{\partial r_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = (N - 1) \int \frac{\partial V_{1,2}}{\partial r_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_1} dr_2 dp_2.$$

Це дало змогу записати рівняння в загальному вигляді для n -частинкової функції розподілу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \frac{\partial f_n}{\partial t} r_i + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial U_i}{\partial r_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_i} \right) \frac{\partial f_n}{\partial p_i} = \\ = \sum_{i=1}^n (N - n) \int \frac{\partial V_{i,n+1}}{\partial r_i} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial p_i} dr_{n+1} dp_{n+1}. \end{aligned}$$

Слід підкреслити, що праці М. М. Боголюбова в цілому започаткували новий напрям у сучасній математичній фізиці — математичну фізику нескінченних систем, характерною рисою якої є поняття стану.

Його методика розв'язку системи за допомогою методу квазісередніх мала велике значення для розвитку статистичної фізики. Фактично він являється загальним методом теорії фазових переходів. Його досить часто застосовують у теорії поля. Методи Боголюбова стали основними в розвитку теорії феромагнетизму, зокрема для дослідження спектрів елементарних збуджень феромагнетиків.

У подальшому розвитку своїх ідей Боголюбов довів, що за певних умов енергетичний спектр фермівської системи можна зобразити у вигляді елементарних збуджень. Це стало базою для побудови теорії надпровідності. Зв'язок між надпровідністю та надплинністю дуже значний, тому, у певному розумінні, ці явища можна розглядати, як одну з основних властивостей квантової рідини.

Видатні праці Боголюбова з обґрунтування теорії надпровідності як надплинності фермі-систем були відзначені державними нагородами і назавжди увійшли в фонд світової науки.

До самої смерті Микола Миколайович Боголюбов не залишав наукової діяльності, йому вдалося опублікувати більше трьохсот наукових праць з математичної фізики та статистичної механіки, де його внесок був фундаментальним, а часом і визначальним для подальшого розвитку того чи іншого напрямку. Його по праву вважають творцем сучасної математичної фізики.

Список літератури

1. Герасименко В. І. До 100-річчя від дня народження академіка Миколи Миколайовича Боголюбова / В. І. Герасименко, М. Ф. Городній // Вісник Київського національного університету. — 2009. — № 22. — С. 57—59.
2. Боголюбов М. М. Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости / М. М. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников // Журн. exper. и теор. физики. — 1960. — № 39, вып. 1 (7). — С. 120—129.
3. Боголюбов Н. Н. Николай Николаевич Боголюбов. Очерк научной деятельности // Н. Н. Боголюбов, Д. П. Санкович // Физика элементарных частиц атомного ядра. — 1993. — 24, вып. 25. — С. 224—293.
4. Шелест А. В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений / А. В. Шелест. — Москва : Наука, 1990. — 159 с.
5. Литвинко А. С. До 50-річчя побудови М. М. Боголюбовим мікроскопічної теорії надпровідності та відкриття надплинності ядерної матерії / А. С. Литвинко // Вісник Дніпропетровського університету. — 2008. — № 15. — С. 86—94.

IV

СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

**КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНА МЕТОДИКА АНАЛІЗУ
ЯКОСТІ ПЕДАГОГІЧНИХ ТЕСТІВ ЯК ЗАСІБ ІК-ПІДТРИМКИ
ВИКЛАДАЧІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ НТУУ «КП»**

**І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко,
Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова**

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

a.dyx@mail.ru

У доповіді проінформовано про створення в НТУУ «КП» комп'ютерно-орієнтованої методики аналізу якості педагогічних тестів як засобу інформаційно-комунікаційної підтримки викладачів вищої математики та розглянуто основні її характеристики.

У сучасних умовах реформування освітньої галузі актуальною є проблема розвитку професійної компетентності викладачів вищих технічних закладів. Стрімкий розвиток засобів і технологій організації освітнього процесу породжує проблему відповідності професійного рівня викладачів вимогам розвитку інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ)

У зв'язку із упровадженням ІКТ в систему освіти особливого значення набуває комп'ютерне тестування як засіб контролю знань студентів.

Уміння складати тести та обробляти їх результати має бути невід'ємною складовою професійної компетентності сучасного викладача. Застосування викладачем тестового контролю знань ставить перед ним наступні вагомні задачі:

- складання специфікації тесту;
- відбір задач відповідно до специфікації тесту;
- організація процесу тестування;
- аналіз результатів;
- удосконалення тесту.

При цьому збільшення обсягів тестування, розширення бази задач, застосування складних статистичних методів аналізу якості унеможливорює подолання цих труднощів без наявності цілісної методики та відповідного інструментарію, які забезпечать відповідну інформаційно-комунікаційну підтримку викладача. Що в решті-решт дозволить підвищити рівень професійної компетентності викладача і покращить контроль знань студентів

Комп'ютерне тестування знайшло своє місце в навчанні вищої математики студентів технічних спеціальностей НТУУ «КП». Викладачами кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей був розроблений пакет тестів, який входить до складу комплексу комп'ютерних курсів «Вища математика». Розширення кола студентів, охоплених тестуванням, вимагає розширення бази тестових завдань. Це, в свою чергу, породжує задачу аналізу якості створених тестів. Основу аналізу традиційно складають методи теорії ймовірностей та математичної статистики, а саме методи класичної теорії тестів (КТТ) та сучасної теорії тестів Item Response Theory (IRT). Систематичний контроль знань великої кількості учнів та складність математичних методів, що

застосовуються, вимагають відповідної ІК-підтримки такого аналізу, а саме розробки методики комп'ютерно-орієнтованої методики аналізу якості тестів. Загальна схема методики включає в себе наступні етапи:

- формування таблиці результатів;
- аналіз окремих тестових завдань і тесту в цілому (аналіз розподілу вибірки результатів, оцінка ефективності, надійності та критеріальної валідності тесту; аналіз кореляційної матриці завдань, оцінка валідності окремих завдань, аналіз ансамблю характеристичних кривих завдань, аналіз політомічних завдань та дистракторів завдань множинного вибору);
- прийняття остаточних рішень.

Елементи методики вбудовано в систему автоматизованого аналізу якості педагогічних тестів з вищої математики. Система має розвинений графічний інтерфейс, який надає об'єктивну і наглядну візуалізацію результатів тестування, а також в системі передбачена можливість формування та обслуговування бази каліброваних завдань. Програмно систему реалізовано в середовищі «Visual Studio C++» у вигляді окремої програми Windows.

Система є легкою у користуванні та незалежною від мережевих ресурсів. Зчитування інформації з бази результатів тестування середовища MOODLE відбувається за допомогою імпорту Excel файлів та їх обробки за допомогою набору інтерфейсів OLE DB. База каліброваних завдань зберігається у вигляді бази даних MySQL, завдяки чому забезпечується легкість підбору та сортування завдань.

Впровадження комп'ютерно-орієнтованої методики аналізу якості тестів у процес підвищення кваліфікації викладачів сприятиме розвитку професійних компетентностей викладачів вищої математики та підвищенню рівня навчальних досягнень студентів НТУУ «КПІ».

Список літератури

1. Диховичний О. О. Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики / О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : Зб. наук. праць / Редрада. — Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. — № 15 (22). — С. 140—144.

МАТЕМАТИКА У ТЕХНІЧНОМУ ВИШІ: ДО ПИТАННЯ ПРО ЦІЛІ, ЗМІСТ ТА СТРУКТУРУ КУРСІВ

О. І. Баліна, Ю. П. Буценко

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
elena.i.balina@gmail.com*

Традиційно викладання математики в технічному виші було підпорядковане двом цілям. По-перше, це забезпечення зростання загальноосвітнього рівня студентів шляхом вивчення формалізованої (чітко визначена термінологія, логічна еволюція, жорсткі вимоги до обґрунтованості тверджень) дисципліни. Слід зазначити, що захоплені відгуки про математику видатних інженерів великою мірою пов'язані саме з цією стороною математичних курсів — «чистою математикою».

По-друге, викладання математики мало забезпечити належні підвалини для курсів власне інженерної підготовки. Така математика «для споживача», зрозуміло, є життєво необхідною в структурі вищої освіти, особливо якщо вона максимально насичується відповідними прикладами та задачами професійно-орієнтованого характеру [1].

Розвиток технологій природним чином приводить до інтенсифікації технічної освіти (в першу чергу — інженерної), що приводить до дисбалансу на користь другої з вказаних цілей. Зрозуміло, що «конкретизація» освіти має свої дуже серйозні причини (і переваги!), але принциповими є також і заперечення: вища освіта з її функціями підготовки, серед іншого, дослідників та розробників, починає перетворюватись на «просунуту професійну», зосереджену на «генеруванні користувачів» [2]. Небезпека такої еволюції очевидна і посилюється наявними тенденціями в українській освіті. Йдеться про доступність програмних засобів, які дозволяють не утруднювати себе знанням тих власне математичних методів, алгоритми яких вони реалізують (не забуваймо, до речі, про якість результатів, що отримуються в таких випадках). Має місце заманювання, якщо називати речі своїми іменами, всипати абітурієнтів обіцянками навчальних програм максимально орієнтованих на потреби працедавців. Звісно (і на щастя!), часто це залишається словами, проте в багатьох випадках мають місце тенденції до утисків фундаментальної складової технічної освіти (відмова від обов'язкового проходження ЗНО з математики та фізики навіть стандартного рівня, не кажучи вже про підвищений, урізання кількості годин та «компресія» за кількістю семестрів вивчення дисципліни). Наголосимо, що все це викликано об'єктивними обставинами — аж ніяк не продиктоване злою волею керівників різних рівнів. Йдеться про виживання установ та людей, що прагнуть вчити (передавати набуті ними знання), причому у галузях, які безпосередньо пов'язані із економічним розвитком нації. Не відкладаючи викликаного економічними, психологічними та статусними причинами професійного егоїзму

(притаманного, до речі, і математикам, до яких відносять себе автори), слід все ж таки зауважити, що наразі маємо в державному масштабі дисбаланс на користь освіти, не пов'язаної з матеріальним виробництвом. Це, у свою чергу, диктує зростання також її тенденцій, як зниження вимогливості до первинного рівня інтелектуального розвитку, знань та мотивації об'єктів навчання. Парадоксально, але маємо ситуацію аналогічну тій, що мала свого часу місце в Радянському Союзі, коли високий рівень потреби у технічних спеціалістах змішував працювати за моделлю «вище без середнього». Наразі має місце відтворення такої ж схеми, продиктоване високим «рівнем пропозиції» (ліцензованими об'єктами набору студентів до закладів технічної освіти). Наслідки відомі: відшукування можливостей для «лікнепу», падіння зацікавленості студентів у засвоєнні курсів, що великою мірою спираються на фундаментальні дисципліни, зниження вимогливості викладачів, як результат — зниження якості підготовки. Не може бути обійдене увагою питання про реальну потребу суспільства щодо інженерних кадрів. За нашими даними випускники технічних вузів працевлаштовані краще, ніж численні юристи, економісти та менеджери (хоча й не завжди за спеціальністю). Зрозуміло, що підвищення технологічного рівня економіки, яке відновить належний попит на інженерно-технічні кадри, буде процесом тривалим складним і небезболісним (виходимо при цьому з оптимістичного припущення про його невідворотність). Наразі ж економічний сенс наявної мережі інженерної освіти в Україні, мабуть, може полягати лише у відомому ліберальному постулаті «не риба, а вудка».

Підсумовуючи вище сказане можемо констатувати, що в силу об'єктивних обставин зараз знаходяться під загрозою обидві традиційні цілі математичних курсів, але особливо небезпечна ситуація складається навколо першої з них.

Вважається, наявність жорстко формалізованих дисциплін (математики, логіки) є принциповим і обов'язком для сучасної моделі вищої освіти, вона має бути закріплена на законодавчому або нормативному рівні і захищена від різноманітних їх спрощень «гуманізацій», гуманітаризацій та «актуалізацій». Слід чітко зафіксувати неспростовний факт, що формально визначена термінологія та строгі доведення (об'єднані у логічну структуру) є такими ж необхідними рисами курсу математики, як лабораторні роботи для курсів фізики та хімії, вивчення препаратів та живих організмів для біологів та медиків. Нам здається, що абсолютно виправданими були б такі вимоги до програм математичних курсів, як переліки термінів, які запроваджуються з належними означеннями, та теорем, що отримують повне строге доведення. При цьому жодна лекція не повинна залишитися без такої теореми!

Математичні курси, цілі та зміст яких відповідають викладеним вище положенням, матимуть структуру, яка є компромісом між побажаннями профільних кафедр та виділеним (у більшості випадків ними ж) обсягом годин (кількістю кредитів, призначених для вивчення математики). Цей компроміс, насправді, є традиційним, але на наш погляд, актуальним є вихід на перший план викладених вище засад, на яких будуються математичні курси. Це

дозволить уникнути у співпраці з профільними кафедрами таких болючих для математики крайнощів, як згадана вище «компресія» курсу, коли він стискується, наприклад, у два семестри. Що стосується безпосередньо переліку розділів. Які включаються до курсу математики, то автори вважають доречним згадати про те, що може бути назване «другим лезом Ортеги-і-Гассета» [3]. Дійсно вчити варто тільки тому чому реально можна навчити! Це істотно обмежує як номенклатуру розділів, що можуть бути включені до курсу, так і рівень заглиблення в кожний з них. Так, наприклад, при вивченні розділу «Вступ до аналізу» доводиться, на жаль, максимально утискати розгляд структури множини дійсних чисел, максимально обмежувати знайомство з властивостями лінійних просторів у відповідному розділі, не розглядати детально інтегралів залежних від параметра та ігнорувати кратні невласні інтеграли... Наведений перелік є далеко не повним, ще більш вражаючими є приклади вилучень з курсів математики для спеціальностей, пов'язаних з економікою та менеджментом, що нині наявні у кожному технічному виші (і автори вважають це виправданим!). Фактично вони все частіше зводяться до вивчення теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь і початків диференціального числення функцій. Такий підхід, зрозуміло, робить практично неможливим як вивчення сучасної економічної теорії, так і статистичних та оптимізаційних методів, що заміщаються курсами описаного характеру.

Насправді, як зазначалось раніше, така ситуація для інженерних вишів є типовою та виникає об'єктивно — «ножиці» між вимогами до сучасного фахівця та рівнем підготовки і мотивації студентів стають все безжальнішими. Остаточно можна лише стверджувати, що зміст комплексу математичних курсів у технічному університеті має бути встановлений на базі наступних положень.

По-перше, визначальним є напрямок визначений випускною кафедрою.

По-друге, можливість виконання заданого цією кафедрою «плану-максимум» встановлюється обслуговуючою кафедрою математики.

По-третє, перелік розділів, вивчення яких спрямоване на досягнення узгодженої між «замовником» та «виконавцем» цілі, та об'єми годин, що відводиться на вивчення кожного з них, встановлюються саме на основі першого та другого пунктів, але аж ніяк не певної «спущеної зверху» кількості кредитів.

Список літератури

1. Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладниками / А. Д. Мышкис // Математика в высшем образовании. — 2003, № 1. — С. 37—51.
2. Арнольд В. И. Антинаучная революция и математика / В. И. Арнольд // Вестник РАН. — 1999. — 69, № 6. — С. 553—558
3. Ортега-і-Гассет Х. Місія університету / Ідея університету / Хосе Ортега-і-Гассет. — Львів : Пітони. — 2002. — С. 67—107.

ВАЖЛИВІСТЬ КОМПЛЕКСНОГО ПІДХОДУ ДО ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ ДІЇ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ

В. В. Довгай

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
valerdov@gmail.com

Науково-технічний прогрес, обумовлений прагненням людства до підвищення рівня якості життя, неодмінно приводить до необхідності створення та дослідження все складніших та складніших технічних систем, у тому числі й інформаційних. При проектуванні таких систем не завжди вдається уникнути врахування впливу випадкових факторів, що діють у середовищі функціонування даної системи, крім того аналогічне значення має неповне знання про фізичні процеси в самій системі. Все це неодмінно приводить до висновку про необхідність підвищення рівня підготовки фахівців, здатних у своїй майбутній практичній діяльності створювати та досліджувати відповідні системи.

Основою такої підготовки має бути комплекс заходів, а не розрізнені та часто неузгоджені між собою схоластичні курси, прочитані студентам на чисто академічному рівні викладачами без жодного досвіду практичної роботи в даній галузі. Починати слід з основного компонента — розробки навчальних програм дисциплін, що мають забезпечити оволодіння майбутніми спеціалістами ймовірнісними методами дослідження у сфері вибраної професійної діяльності. З точки зору автора основу таких дисциплін складають мінімум три предмети — основи теорії ймовірностей, основи прикладних методів математичної статистики, основи математичного моделювання складних стохастичних систем. При цьому курс теорії ймовірностей має містити виклад її основних понять і положень на сучасному рівні, без недоречних спрощень деяких означень типу «випадкова подія — це подія, яка може відбутись або не відбутись». Професіонал з відповідним рівнем підготовки спроможний обійтись без подібних спрощень, пояснюючи складні поняття виходячи з їх математичної суті на основі успішно засвоєного курсу вищої математики. Це стосується також основ прикладних методів математичної статистики, які хоч і повинні звужуватись до сфери їх практичного застосування майбутніми фахівцями, та все ж міститимуть складні поняття (наприклад, з лінійної алгебри), які не відображались у навчальних програмах з вищої математики через обмеження її об'єму у відповідності з навчальними планами. Основи математичного моделювання мають бути максимально орієнтовані на практичну діяльність майбутнього спеціаліста і сформувані у нього здатність самостійно створювати недетерміновані цифрові моделі функціонування технічних систем свого профілю діяльності у вигляді оригінального прикладного пакету програм з наявними там алгоритмами обробки вихідних параметрів.

Основи теорії ймовірностей повинні створити базу для засвоєння основ прикладних методів математичної статистики та містити наступні необхідні складові:

1. Сучасний аксіоматичний підхід до поняття випадкової події та її ймовірності.

2. Поняття випадкової величини на основі аксіоматичного підходу та її числових характеристик як у дискретному так і в неперервному випадках.

3. Граничні теореми теорії ймовірностей.

Сформоване при цьому теоретичне підґрунтя мусить дати можливість у курсі з основ прикладних методів математичної статистики засвоїти такий мінімальний перелік тем:

1. Методи побудови точкових оцінок невідомих параметрів закону розподілу ймовірностей вихідних величин технічної системи в умовах суттєвого впливу на неї випадкових факторів.

2. Інтервальні оцінки цих параметрів у випадках великої та малої кількості експериментальних даних.

3. Методи статистичної перевірки як параметричних, так і непараметричних гіпотез відносно вихідних величин даної технічної системи.

Для забезпечення потреб окремих кафедр цей перелік може бути розширений, наприклад, до дисперсійного аналізу, кореляційного аналізу, планування експерименту і т. д.

В оптимальному випадку як складання навчальних програм з основ теорії ймовірностей та прикладних методів математичної статистики так і їх реалізацію у ході навчального процесу слід доручити висококваліфікованому спеціалісту з відповідною математичною підготовкою, бажано з досвідом практичної роботи при проектуванні систем в умовах дії на них випадкових збурень. Це забезпечить єдиний підхід до викладу даних двох дисциплін та єдину систему позначень, відсутність якої негативно впливає на якість засвоєваних студентами знань. У ході навчання весь теоретичний матеріал, а особливо з основ прикладних методів математичної статистики, слід ілюструвати прикладами стосовно практичного його застосування у вибраній студентами спеціальності.

На завершальній стадії навчання набуті знання як із основ теорії ймовірностей та прикладних методів математичної статистики, так і з інших предметів повинні синтезуватись у основах математичного моделювання складних стохастичних систем, що можуть бути окремою частиною більш загального курсу. Мета успішного оволодіння даним предметом — можливість створення адекватних цифрових моделей складних динамічних систем в умовах дії на них різного роду випадкових збурень. Реалізація цих моделей у вигляді пакету прикладних програм для обчислювальної техніки має забезпечити без громіздких та занадто витратних натурних випробувань аналіз і проектування відповідних систем. Отже навчальна програма з основ математичного моделювання складних стохастичних систем мусить бути зорієнтована на

здатність майбутніх фахівців створювати алгоритми функціонування таких систем у відповідному середовищі, де суттєвим є вплив випадкових факторів. При цьому слід враховувати те, що загальна модель для досліджень з метою оптимізації чи проектування згаданих систем повинна містити наступні обов'язкові блоки:

1. Блок вводу вхідних параметрів для дослідження.
2. Блок формування середовища, в якому досліджується конкретна реальна або проектована система і де діють випадкові збурення.
3. Блок, що описує функціонування самої системи.
4. Блок статистичної обробки результатів багатократно повторюваних на цифровій моделі експериментів, вихідні дані якого ляжуть в основу аналізу та вдосконалення існуючої чи проектованої системи.

Складання такої програми, до того ж адаптованої до профілю відповідної кафедри, та її реалізацію в учбовому процесі слід доручати фахівцю, що має довід практичної роботи по створенню цифрових моделей і впровадженню їх для дослідження складних технічних систем. Йому бажано працювати у тісній взаємодії з викладачами основ теорії ймовірностей та основ прикладних методів математичної статистики, в кращому випадку — бути одним із них. Це забезпечило б єдиний підхід до спільних понять та символіки в усіх трьох дисциплінах, а це в свою чергу поліпшило б якість навчального процесу.

Список літератури

1. Довгай В. В. Особливості підготовки спеціалістів для дослідження та оптимізації недетермінованих технічних систем за допомогою моделювання їх функціонування //Тези доповідей VI міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». — Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2014. — С. 47—48.
2. Довгай В. В. Важливість та особливості упровадження недетермінованих методів дослідження при підготовці спеціалістів у сучасному технічному університеті // Матеріали III міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», — Київ : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 341—343.

МЕТОДИЧНА ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І. І. Дубина, магістрант, науковий керівник Л. Я. Васильєва

Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,

Миколаїв, Україна

pelyk@outlook.com

Нові запити суспільства ХХІ сторіччя висунули відповідні вимоги до методичної підготовки майбутніх компетентних вчителів математики, що і зумовило потребу в пошуку і впровадженні нових сучасних технологій навчання, в тому числі, інформаційних технологій навчання на всіх рівнях освіти.

У підготовці вчителів математики склалася традиційна система підготовки, в якій використовуються звичні форми проведення занять: лекції, практичні заняття, семінари, лабораторні роботи, консультації, заліки, екзамени. Та в зв'язку з переходом на компетентнісну основу постає необхідність у зміні технологій, форм та методів проведення занять, що дозволить позбутися наслідків існуючої суперечності між теоретичною підготовкою й ефективністю практичної роботи спеціалістів. Це і зумовлює необхідність розроблення та використання інформаційних технологій навчання в методичній підготовці майбутніх вчителів математики.

Термін «технологія» (від гр. *techne* — мистецтво, майстерність і *logos* — слово, вчення) означає вміння майстерно навчати знанням і формувати у фахівців уміння використовувати набуте у своїй діяльності.

З поняттям «технологія» пов'язують певні методики навчання, які найчастіше відображають форми, методи та засоби навчання. Розглядаючи сутність будь-якої технології навчання, можна зауважити, що вона спрямована на реалізацію проекту діалектичного процесу та виявлення можливості діагностування здобутого результату. Значну увагу в технологіях приділяють питанням розвитку і максимального використання технічних засобів з урахуванням їх педагогічних можливостей.

Інформаційні технології — це сукупність методів, виробничих процесів і програмно-технічних засобів, інтегрованих з метою збирання, опрацювання, зберігання, розповсюдження, показу і використання інформації в інтересах її користувачів. За допомогою їх по-різному реалізуються різні функції навчання. Але, все ж таки, їх ідея та особливості від цього не змінюються при проведенні занять із математичних дисциплін. Вони відіграють дуже важливу роль при методичній підготовці вчителів математики. Їхнє використання передбачає не тільки поповнення теоретично-методологічних знань вчителя, але й формування в них професійних умінь з організації успішної взаємодії.

Застосування інформаційних технологій має бути комплексним та інтегрованим, охоплювати весь курс навчання і різні предмети. Вони є не просто доповненням до традиційних методів то форм, а й суттєво коригують усі

його компоненти, серед яких є мета, зміст, методи та засоби. Також інформаційні технології навчання допомагають реалізації таким цілям навчання як формування в майбутнього вчителя математики позитивного ставлення до нових інформаційних технологій, переконаності в ефективності цих технологій навчання, практичному засвоєнню методів навчання в умовах нових інформаційних технологій.

На лекційних та практичних заняттях з математики основним засобом навчання є комп'ютер. За його допомогою вчитель має можливість матеріалізувати деякі абстрактні властивості реальних об'єктів, і завдяки цьому навчальний матеріал стає доступнішим для засвоєння. Комп'ютер допомагає унаочнити та полегшити для засвоєння навчальний матеріал, який охоплює різні сфери життя та діяльності людини. Наприклад, студент має можливість самостійно дослідити характер кривої другого порядку залежно від значень коефіцієнтів її загального рівняння, побудувати певну січну площину до даної поверхні і встановити загальні характеристики утвореного в результаті цього перерізу, розв'язувати задачі курсу лінійної алгебри й аналітичної геометрії, диференціального й інтегрального числення тощо.

Для підготовки та проведення лекційних чи практичних занять викладачі математики використовують такі програмні засоби з математики як GRAN, DG, MathCad, Matlab, Maple, Exel та ін. Всі ці програми значно спрощують підготовку до заняття, роблячи його більш наочним та доступним, економлять час та сили, полегшують перевірку та оцінювання результатів. Також викладачами розробляються електронні версії лекцій та презентацій до них, практичних, самостійних і контрольних робіт, які потім розповсюджуються між студентами для кращого засвоєння та обробки поданого їм матеріалу. Що стосується студентів, то більшість перелічених програмних засобів з математики дозволяють їм працювати індивідуально, тому що вони є своєрідним тренажером, який враховує їх індивідуальні особливості.

Для успішного опанування математичних дисциплін важливо не лише оволодіти знаннями, а й виробити вміння та довести до автоматизму навички роботи з комп'ютером. Завдяки йому є можливість суттєво змінити способи управління навчальною діяльністю. Тому можна виділити такі особливості користування комп'ютером:

- розширення можливості подання навчальної інформації;
- підвищення мотивації навчання;
- активне залучення учнів до навчального процесу;
- розширення асортименту застосовуваних навчальних завдань (завдання на моделювання різних ситуацій, на пошук і усунення деяких проблем, коли є багато варіативних способів вирішення);
- сприяння формуванню в учнів рефлексії своєї діяльності (наочність).

Щоб ефективно використовувати навчальний потенціал інформаційних технологій у методичній підготовці майбутніх учителів математики для поглиблення професійної спрямованості математичних дисциплін, потрібна

розробка інформаційного освітнього середовища. Для впровадження інформаційних технологій у навчальний процес у вищий навчальний заклад потрібно: створити Центр дистанційної освіти, готувати вчителів та учнів для роботи в новому інформаційному середовищі; розробляти та апробувати електронні курси лекцій, новітні засоби навчання математики на базі інформаційних технологій; розміщувати розроблені викладачами навчальні матеріали на WEB - сайті вищого навчального закладу; планувати участь у роботі вебінарів та конференцій щодо використання інформаційних технологій у навчальному процесі; обмінюватися думками та досвідом із зарубіжними колегами з проблем оптимізації навчального процесу засобами інформаційних технологій.

Упровадження інформаційних технологій при методичній підготовці майбутніх вчителів математики на сучасному етапі є надзвичайно важливим. Їх використання у навчально-виховному процесі вищого навчального закладу забезпечить перехід освіти на новий, якісний рівень. За допомогою інформаційних технологій вчителі математики можуть швидко адаптуватися у змінних умовах навчання, стануть соціально здібними та здатними до професійних комунікацій. Використовуючи їх на уроках, вони зможуть бути впевненими, що учні краще засвоять матеріал, розвинуть свої комунікативні й організаторські здібності, творчий потенціал. Та для цього потрібно вдосконалити форми та методи підготовки, розробити інформаційне середовище і методичне забезпечення для дисциплін математичної спрямованості, рекомендації та навчальні посібники із застосуванням інформаційних технологій.

Список використаних джерел

1. Бубнова М. Ю. Проблеми використання інформаційних технологій у методичній підготовці майбутніх вчителів математики / М. Ю. Бубнова // Гуманітарні науки. — 2012. — № 2. — С. 103—109.
2. Жалдак М. І. Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі / М. І. Жалдак // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. — 2011. — № 4—5. — С. 76—83.
3. Завалевський Ю. І. Підготовка педагогів до впровадження сучасних технологій навчання та виховання / Ю. І. Завалевський // Вища школа. — 2013. — № 2. — С. 7—22.

ОСВІТА СУЧАСНИХ УПРАВЛІНСЬКИХ КАДРІВ

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, І. Ю. Мельник

НТУУ «Київський політехнічний інститут»,

Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна

matan@kpi.ua, irinam_5656@mail.ru

На сучасному етапі розвитку суспільства існує велика потреба у висококваліфікованих управлінських кадрах і керівниках, ініціативних менеджерах, самостійних фахівцях. Бажано, щоб такі професіонали були особистостями з чітко визначеними цілями, переконаннями та прагненнями. Саме таких фахівців мають готувати навчальні заклади України.

На думку видатного дослідника менеджменту Г. Мінцберга, діяльність менеджерів доречно описувати з погляду функцій, які вони виконують у процесі управлінської діяльності. Г. Мінцберг зробив висновок, що існує 10 різних, але тісно взаємозв'язаних рольових установок управлінського персоналу — різних категорій поведінки менеджерів. Для виконання обов'язків і ведення роботи, яка робить менеджера професійним управлінцем, він повинен володіти певними навиками управління [1]. Серед цих навиків значну роль у сучасному світі грають технічні уміння, що включають знання та майстерність у певній спеціалізованій сфері: інженерній, комп'ютерній, фінансовій, виробничій тощо.

Американська асоціація менеджменту (ААМ), яка, як відомо, є професійною організацією практикуючих менеджерів, визначила наступні головні характеристики професійних управлінців, що охоплюють чотири основні аспекти: концептуальні навики, навики комунікації, навики ефективності та навики міжособистісного спілкування [2].

Міжнародна дослідницька компанія HayGroup, опитавши представників 226 українських топових компаній, визначила, що більшість топ-менеджерів, які працюють у потужних українських бізнес-структурах є випускниками НТУУ «КПІ». Олена Меньшикова, керівник напрямку HR-інструментів HayGroup в Україні зазначає, що досить високий рівень технічної освіти є основою у професійній роботі кваліфікованого управлінця. «Гуманітарні вузи тут поступаються місцем», — такий висновок робить Олексій Комличенко, управляючий партнер компанії по підбору персоналу Talent Adviso.

Національний технічний університет України «КПІ» очолює рейтинг українських вузів, що випускають найбільшу кількість професійних топ-менеджерів. В четвірку лідерів входять ще три столичні вузи: Національний університет ім. Т. Г. Шевченка, Київський національний економічний університет (КНЕУ), Києво-Могилянська академія (НаУКМА).

Потрібно зауважити, що невеликі сучасні молоді вузи, які дотримуються нової більш гнучкої філософії освіти, приділяють увагу не тільки предметним дисциплінам, але й розвитку практичних навичок та презентацій власних ідей, теж впевнено крокують цим шляхом.

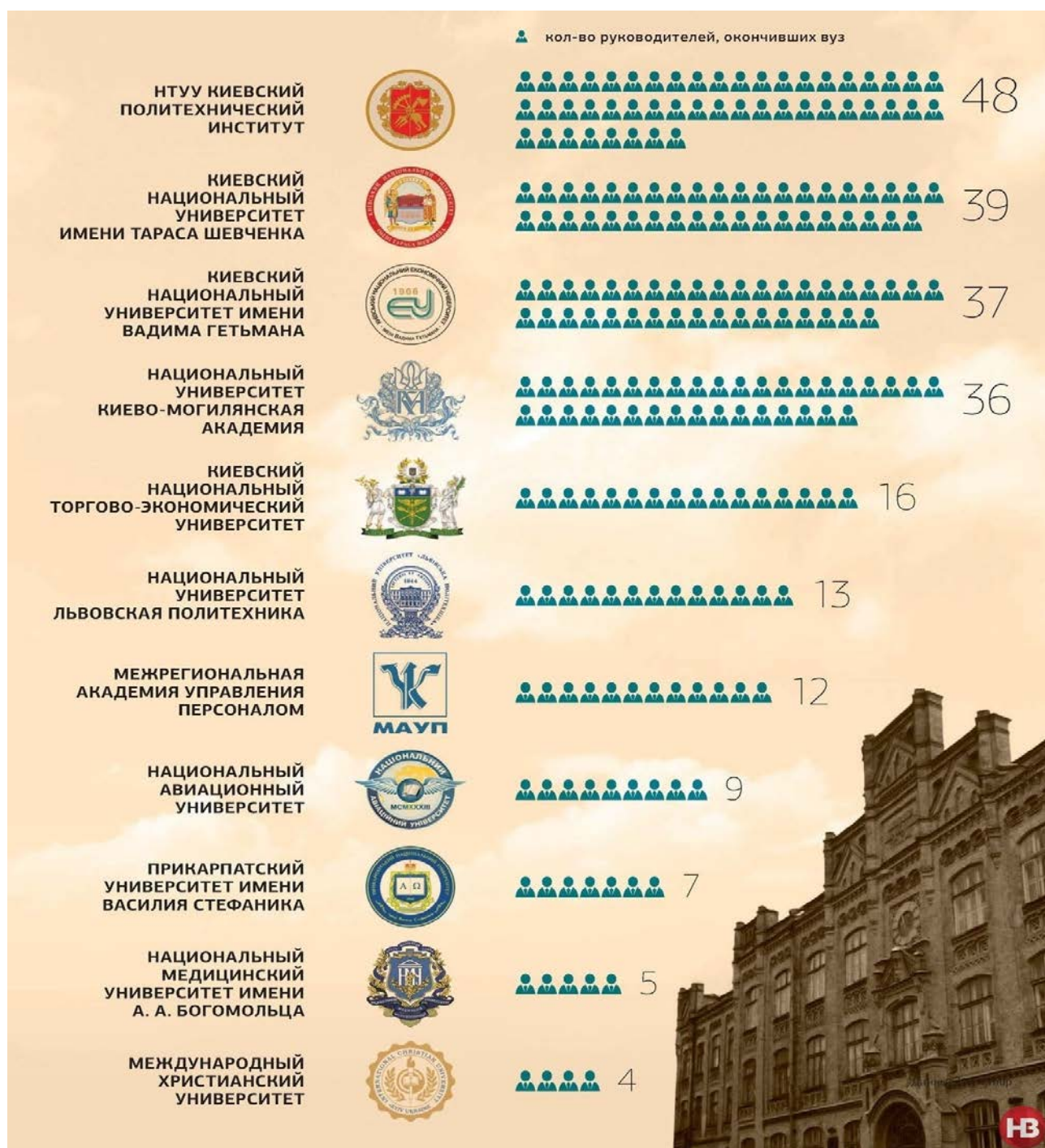


Рис. 1. Виші, які закінчили керівники 226 топових компаній

Одновременно популярность НТУУ «КПИ» не уменьшается, хотя обучения у цьому виші є досить складним, порівняно з іншими навчальними закладами. Студенти політехнічного інституту у своїй більшості вивчають точні науки, в тому числі велика увага звертається на математичні дисципліни, серед яких основними є аналітична геометрія, лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія ймовірностей, математична статистика. Тому випускники НТУУ «КПИ», як правило, мають важливий для керівника аналітичний склад розуму і тип мислення.

Робота топ-менеджера вимагає великої інтелектуальної сили. Для цього потрібна елітарна освіта, а без математики вона неможлива.

На ринку телекомунікаційних послуг ведучою є компанія «Датагруп». Ця компанія — лідер в сегменті супутникового зв'язку VSAT в Україні, займає 85 % вітчизняного ринку. Компанія є найбільш стабільним, надійним і прогресивним оператором фіксованого зв'язку, надає широкий спектр послуг в ІТ-сфері. Генеральним директором компанії «Датагруп» є Олександр Данченко — випускник Київської політехніки. Олександр Данченко закінчив радіотехнічний факультет НТУУ «КПІ» у 1997 році. Телекомунікаційним бізнесом почав займатися ще у студентські роки. В умовах проведення військових дій на території України національний оператор «Датагруп» не залишається осторонь і надає розробки для військово-оборонного комплексу. В 2014 році Олександр Данченко став депутатом Верховної Ради восьмого скликання і з того часу є почесним президентом компанії «Датагруп». Таких успішних випускників НТУУ «КПІ», якими пишається вуз, немало.

Випускники Національного технічного університету України «КПІ» користуються значним попитом у роботодавців і мають великий шанс зробити неабияку кар'єру топ-менеджера.



Рис. 2. ТОП-5 пріоритетних університетів при наймі на роботу.
Відсоток керівників компаній, які закінчили даний вуз

Значне підсилення управлінського потенціалу та належне кадрове забезпечення є запорукою успішної реалізації системних реформ та побудови інноваційно — інвестиційної моделі розвитку України.

Список літератури

1. Минцберг Г. Пять «П» стратегии / Г. Минцберг // Стратегический процесс / Г. Минцберг, Дж. Б. Куинн, С. Гошал; перев. с англ. под ред. Ю. Н. Каптуревского. — Санкт-Петербург : Питер, 2001. — 688 с.
2. American management association survey of managerial skills and competence, March/April, 2000 [Електронний ресурс]: American Management Association Online. — October 30, 2002. — Режим доступу: <http://www.amanet.org>.
3. Зеркалов Д. В. НТУУ «КПІ». Минуле і сучасне. Монографія / Д. В. Зеркалов. [Електронне видання]. — Київ : Основа, 2012. Режим доступу : http://www.zerkalov.kiev.ua/sites/default/files/ntuu_kpi._minule_i_sogodennya._monografiya.pdf

УПРОВАДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

С. П. Казнадій, В. П. Мурашковська, Л. А. Руновська

Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів, Україна

kaz_na@i.ua

Дисципліна «Вища математика» для студентів технічних вишів є з одного боку фундаментальною, формує наукове зображення світу, з іншого боку — прикладною, так як є інструментом для розв'язування професійних задач. Така двоїстість є джерелом суперечок у відповіді на питання: чи є математика ціллю або інструментом навчання, що у свою чергу впливає на вибір методів навчання і на формування комплексу задач.

Розглянемо можливості, які надають засоби інформаційно-комп'ютерних технологій (ІКТ) і їх ефективності використання в процесі вивчення вищої математики в технічному ВНЗ.

У зв'язку із запровадженням нових освітніх стандартів, з одного боку, планується скоротити кількість аудиторних годин, з іншого боку, удосконалити процес математичної підготовки. Студентів технічного вузу необхідно навчати не тільки за традиційними методиками. Це пов'язано з тим, що майбутні інженери та економісти, крім знань із своєї безпосередньої предметної області, мають володіти інформаційною культурою та практичними навичками застосування нових комп'ютерних технологій.

При викладанні і вивченні математики у вищому навчальному закладі не тільки можливо, а й доцільно використання комп'ютерних програм, а саме:

- комп'ютерних середовищ, які входять в офісний пакет Microsoft Office;
- спеціально розроблених програмних продуктів, орієнтованих на застосування у навчальному процесі вищої школи;
- інтегрованих математичних середовищ для науково-технічних розрахунків;
- можливостей всесвітньої мережі Internet.

На сучасному етапі Болонського процесу в технічних ВНЗ відбувається перерозподіл навчального навантаження на користь самостійної роботи студентів і таким чином скорочується кількість аудиторних годин на курс вищої математики, тому він є надзвичайно концентрованим з точки зору насиченості понять, ідей і методів і багато студентів-першокурсників не в змозі «переварити» його за відведений для цього час.

Ці причини потребують модернізації процесу навчання, і в першу чергу корекції математичних знань першокурсників у технічному ВНЗ, тому необхідно знаходити шляхи оптимізації навчального процесу.

Таким засобом може бути системне впровадження нових інформаційних технологій, що потребує забезпечення студентів методичними та навчальними матеріалами нового типу, а саме — електронними курсами по відповідним розділах, використання в навчальному процесі комп'ютерних математичних

систем (Maple, MatLab, MathCAD, Mathematica) та впровадження дистанційного навчання, яке з кожним днем набуває ширшого застосування на різних рівнях освіти. Це пов'язано з тим, що дистанційне навчання як інноваційний освітній проект з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій допомагає студентам реалізувати власні освітні цілі, направлені на розвиток особистості.

Ширше впровадження інформаційних технологій дозволить збагатити зміст і урізноманітнити форми та способи оволодіння новими темами; підвищить мотивацію навчально-творчої діяльності студентів на заняттях; дасть змогу студентам самостійно вивчати певні теми та отримати принципово нові знання для їх подальшого використання в практичній роботі.

Полегшуючи рішення складних завдань, вони знімають психологічний бар'єр у вивченні математики і роблять цей процес цікавим і простішим. Досвід показує, що на заняттях з математики доцільно використовувати одну з програм MathCAD, MatLab або Maple.

Прикладом інтегрованих математичних середовищ для науково-технічних розрахунків які доцільно використовувати у навчальному процесі вищої школи, зокрема під час викладання вищої математики може бути середовище MathCAD, тому саме йому віддають перевагу на механічних спеціальностях. Студенти старших курсів роблять більшість своїх розрахунків саме в системі MathCAD.

Для роботи з MathCAD достатньо елементарних навичок роботи з Windows-додатками, тому доцільно впроваджувати це середовище починаючи з першого курсу при вивченні таких тем, як «Аналітична геометрія», «Лінійна алгебра», «Функції, послідовності і їх границі», «Дослідження функцій за допомогою похідної». «Інтегральне числення функцій однієї змінної», «Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних».

При цьому мова не йде про заміну традиційних занять вивченням математичного пакету, а про те що при вдалому їх поєднанні можна отримати набагато кращий результат.

Наприклад, програма MatLab достатньо проста і зручна в користуванні, тому вже з першого семестру ми знайомимо з нею студентів комп'ютерних спеціальностей. Вони без особливих зусиль оволодівають даним пакетом і охоче застосовують для перевірки результатів своїх розрахунків, побудови поверхонь другого порядку, тіл, обмежених поверхнями, кривих в полярній та параметричній системах координат і т. д. при розв'язанні більш складних задач.

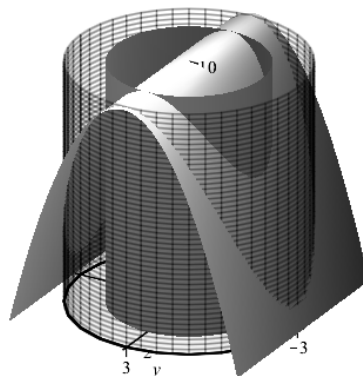
Наприклад, під час вивчення теми «Кратні інтеграли» у студентів другого курсу виникають проблеми, що пов'язані з уявою поверхонь і визначенням меж інтегрування.

У такій ситуації можна запропонувати побудову поверхонь за допомогою пакетів MAPLE або MatLab що дасть змогу уявити дану фігуру.

Наведемо приклад.

Обчислити об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями: $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 10 - x^2$; $z = 0$.

Розв'язання. Зобразивши спочатку окремо циліндричні поверхні, розглянемо тіло, що утворилося при їх перетині:



Так як фігура симетрична щодо осей Ox і Oy , то зобразимо чверть тіла, об'єм якого потрібно знайти:

```
restart : with(plottools) : with(plots) : with(student) :
```

```
Q1 := cylinderplot(3, theta = 0 .. Pi/2, z = 0 .. 0.1) :
```

```
Q2 := cylinderplot(3, theta = 0 .. Pi/2, z = 0 .. 10, style = wireframe, linestyle = 1, color = BLACK) :
```

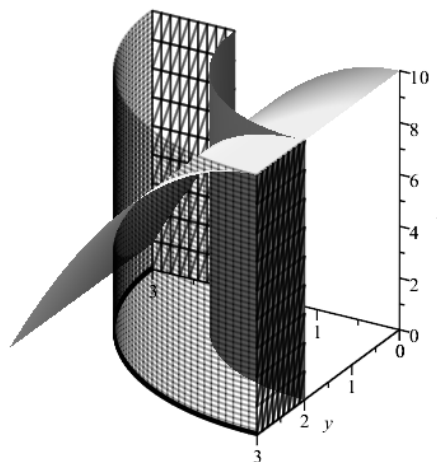
```
Q3 := cylinderplot(2, theta = 0 .. Pi/2, z = 0 .. 10, style = patchnogrid, lightmodel = light2) :
```

```
Q4 := plot3d(10 - x^2, x = 0 .. 3, y = 0 .. 3, style = patchnogrid) :
```

```
Q5 := implicitplot3d(x = 0, x = 0 .. 3, y = 2 .. 3, z = 0 .. 10, style = wireframe, linestyle = 1, color = BLACK) :
```

```
Q6 := implicitplot3d(y = 0, x = 2 .. 3, y = 0 .. 3, z = 0 .. 10, style = wireframe, linestyle = 1, color = BLACK) :
```

```
plots[display]([Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6], axes = normal, orientation = [120, 65]);
```



Перейдемо до циліндричної системи координат:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \int_0^{-\rho^2 \cos \varphi + 10^2} \rho dz d\rho d\varphi.$$

Відповідь. $V = \frac{135}{4} \pi.$

Однак, розглянуті програми не здатні вести контроль за послідовністю дій студента під час розв'язання, виявляти його слабкі місця, надавати докладні описи помилок. Без цього навчальна програма не спроможна замінити викладача. Контроль знань у подібних системах обмежується перевіркою кінцевої відповіді, без зазначення причини помилки на конкретному кроці рішення. Для роботи с подібними програмами користувач сам повинен добре знати методи і способи розв'язання завдань.

Таким чином, використання ІКТ під час розв'язання математичних завдань забезпечує керування процесом на всіх етапах розв'язку, можливість діалогової взаємодії, в ході якої можуть обговорюватися не тільки правильність тих або інших дій, але й стратегія пошуку розв'язання, планування й оптимізація виконання студентами завдання в цілому. Такий підхід до навчання студентів дозволяє забезпечити конкурентоспроможність майбутнього фахівця.

Список літератури

1. Гудирева О. М. Впровадження інформаційно-комунікативних технологій у навчальному процесі вищого навчального закладу / О. М. Гудирева // Інформ. технології в освіті : зб. наук. пр. — 2010. — Вип. 6. — С. 101—112.
2. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики / М. І. Жалдак. — Київ : Техніка, 1997. — 304 с.
3. Жалдак М. И. Математика с компьютером : Пособие для учителей / М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко. — Киев : РУНЦ «ДИНИТ», 2004. — 251 с.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Kuzmin V. N. One method for approximation of the time series using three segmented linear regression	5
Lozynska-Perun I. Y. About one example of Weyl function of Friedrichs' model for non-perturbed operator	7
Machusky E. A., Mikadze S. S. Means' subordination breaking by the means of means of alpha-trinity	10
Авдєєва Т. В. Застосування економетрики до моделювання економічних процесів	13
Анпилогов Д. И. Альтернатива дифференцированию в методе полных квадратов	15
Безклубенко І. С. До питання вибору оптимального варіанту проекту інженерної мережі	19
Буценко Ю. П., Диховичний О. О., Тимошенко О. А. Використання економічних моделей у курсі «Математика для економістів»	21
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. Стеганографічні методики захисту інформації в автоматизованих системах екологічного моніторингу .	25
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г., Семенов С. В. Алгоритм генерації псевдовипадкових чисел на основі моделі цифрових автоматів	27
Ганиев М. Ш., Сафаров Д. С., Шодиев М. С. О решении одной нелинейной уравнений плоской задачи теории упругости	29
Голінко І. М., Галицька І. Є. Процедура синтезу оптимальної системи керування для промислових комплексів штучного мікроклімату	31
Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів	35
Дмитренко О. О. Застосування неперервної моделі В. Лефевра в різних галузях науки	40
Жданова Ю. Д., Шевченко С. М. Актуальність популяризації основ криптографічних знань	43
Іваненко Т. В. Застосування степеневих рядів у задачах з фінансової математики	46
Ковальчук В. В., Бамбура О. В. Диференціально-геометричний метод визначення кривої станів рівноваги однієї динамічної системи	50
Копейка П. И., Чабан Е. Х. Исследование набегания прогрессивной волны на наклонную стенку	54

Копець М. М. Побудова розв'язку системи диференціальних рівнянь Ріккати четвертого порядку	57
Корилюк В. В. Випадкові ліси	61
Котляренко Д. О. Застосування рівняння теплопровідності.....	64
Кучменко С. М., Скасків Л. В. Про групи, у яких усі підгрупи нескінченного секційного p -рангу наближено нормальні.....	66
Легунцова О. В. Основні задачі, що виникають під час вивчення нелінійних динамічних систем і методи їх розв'язання.....	69
Медвідь Н. В. Задача пружного режиму фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом в умовах впливу техногенних факторів.....	72
Міцюхін А. І. Карэктоўны нелінейны нізкахуткі код	75
Ногин Н. В. Краевые задачи о пульсирующем движении газа в полубесконечной цилиндрической трубе	77
Огоренко Р. А. Дослідження поведінки натовпу в змінному небезпечному оточенні за допомогою молекулярно-динамічної моделі Гелбінга.....	79
Пелешенко Б. Г., Деркач О. Д., Макаренко Д. О. Про вплив рівномірності розподілення введенного волокна в полімерний матеріал.....	82
Полетаев Г. С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары	85
Розанов А. В., Воротников И. Л., Котова М. В. Ex-post прогнозирование на основе кусочно-линейных функций регрессии.....	89
Розанов А. В., Потемкина С. Н. Повышение творческой активности студентов при самостоятельной работе в виртуальной физической лаборатории.....	93
Сдвижкова Е. А., Бугрим О. В., Тимченко С. Е. Межпредметные связи как средство реализации проблемного обучения	97
Селезньова Н. П., Селезньов С. В. Роль конгруенції прямих у проблемі комп'ютерного розпізнавання поверхонь	100
Сивак В. Ю. Прогнозування економічного розвитку регіонів	102
Соколенко В. В., Васильєва Л. Я. Тестування чисел на простоту методом Соловея — Штрассена.....	104
Сторожук Є. А., Чернищенко І. С., Руденко І. Б., Харенко С. Б. Дослідження концентрації напружень біля отворів у тонких оболонках з урахуванням пластичних деформацій.....	107
Турчина Н. І. Про крайові задачі для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами	112
Хорошев К. Г., Глущенко Ю. А. Використання методів комплексного аналізу в деяких задачах електропружності для багатозв'язних напівнескінчених пластинок.....	115
Хорошун В. В. Класичні ортогональні поліноми в Maple.....	119
Шульга С. М. Мінімізація енергії (тах, +) задачі методом узагальненого градієнтного спуску	124
Южакова Г. О. Деякі системи гібридних парних та потрійних інтегральних рівнянь	126

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Vlasenko K. <i>Cognitive approach to teaching students solving practical tasks in mathematics</i>	131
Андронатій А. А., Васильєва Л. Я. <i>Роль олімпіад у розвитку математичних здібностей студентів</i>	136
Баришовець П. П., Білоцький М. М. <i>Вказівки як вид навчального впливу у викладанні математики</i>	139
Березка В. В. <i>Видалення внутрішніх точок та побудова опуклого полігону (для студентів математичних спеціальностей)</i>	141
Горленко С. В. <i>Про деякі методичні аспекти викладання теми «Геометричні властивості конформних відображень»</i>	145
Гречко А. Л. <i>Деякі аспекти викладення степеневих рядів у курсі вищої математики</i>	150
Дрозд В. В. <i>Іноземне слово «колоквіум»</i>	152
Енгель А. В. <i>Особливості викладання дисципліни «Математична статистика» із застосуванням часових рядів</i>	156
Ілляшенко В. Я. <i>Принцип історизму в навчанні математики</i>	160
Калайда О. Ф. <i>Про варіаційне трактування кривизни многовидів</i>	163
Калайда О. Ф. <i>Про просте доведення формули площі трикутника та чотирикутника</i>	164
Калайда О. Ф. <i>Простий метод побудови загального інтеграла рівняння в повних диференціалах</i>	165
Калашнікова Н. В. <i>Методика викладання окремих розділів теорії графів</i>	166
Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. <i>Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті в рамках освіти англійською</i>	170
Клімова Т. І., Сапронова Т. М. <i>РГР як вид індивідуального завдання для ефективної самотійної роботи з вищої математики</i>	174
Лапач С. М. <i>Математизація. Небезпеки на місцях</i>	177
Маловичко Т. В. <i>О некоторых аспектах преподавания математического анализа на физических специальностях</i>	181
Мамонова Г. В., Шараєнко О. А. <i>Готовність I курсу до вивчення предметів у білінгвальному режимі за даними соціального опитування</i>	184
Мохонько А. З., Васіна Л. С., Мохонько В. Д. <i>До питання про інтегративні зв'язки математики та спецдисциплін</i>	186
Ненька Р. В. <i>Реалізації міжпредметних зв'язків під час вивчення елементів математичної статистики</i>	191
Островська О., Юрик І. <i>Поняття неперервності функції в курсі вищої математики</i>	193

Панасюк Н. М. <i>Про роль математики в розвиненні творчого мислення майбутнього спеціаліста</i>	195
Петропавловська Г. О. <i>Активізація навчального процесу й організація самостійної роботи під час вивчення математичного аналізу іноземними студентами ОМА</i>	197
Рассоха І. В., Блажко Л. М. <i>Дидактичний та змістовний контекст адаптації студентів на прикладі викладання вищої математики</i>	201
Репета В. К., Репета Л. А. <i>Підсумовування числових рядів спеціального вигляду</i>	205
Трофіменко В., Федорова Л. Б. <i>Про табличний запис інтегрування частинами</i>	208
Чернобай О. Б. <i>Про особливості оцінювання знань студентів з курсу «Вища та прикладна математика»</i>	212
Шинковська І. Л., Заєць І. П. <i>Особливості викладання вищої математики в інтернаціональних групах студентів</i>	214
Шылінец У. А., Гуло І. М. <i>Арганізацыя самастойнай працы студэнтаў на матэматычным аналізе ў педагагічным універсітэце</i>	217

Секція 3. Історія точних наук

Бондаренко В., Гайдей В. <i>Михайло Ващенко-Захарченко: 190 років (віртуальна виставка Педагогічного музею України до ювілею вченого)</i>	223
Гриценко Г. Ю. Шумерська «Універсальна астрономо-математична таблиця» та великі піраміди Єгипту і Мексики	227
Желязков Є. О. <i>Ровен Вільям Гамільтон — видатний ірландський математик (4.08.1805—2.09.1865)</i>	233
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Видатний математик Нільс Генрік Абель (5.08.1802—6.04.1829)</i>	237
Крижановська Т. В., Клецька Т. С., Семененко Т. М. <i>Вплив Київського фізико-математичного товариства на розвиток математичної освіти на території України</i>	241
Крошко Н. В. <i>Даніель Бернуллі — видатний фізик і математик</i>	244
Ленюк О. М., Нікітіна О. М., Пилипюк Т. М. <i>З історії розвитку гібридних інтегральних перетворень</i>	247
Маляр О. В., Гайдей В. О. <i>З історії числа e та способи його запровадження</i>	251
Матлаш В., Шевченко В., Дем'яненко О. О. <i>З історії обчислення числа π (середньовічний період)</i>	255
Мязіна М., Кивенко Р., Дем'яненко О. О. <i>З історії обчислення числа π (стародавній період)</i>	257
Павленков В. В., Тимошенко О. А. <i>Теорія функцій правильної зміни: від історії до сьогодення</i>	262
Тищенко К. В., Листопадова В. В. <i>Метод усереднення Боголюбова — Крилова та його подальший розвиток у роботах Ю. О. Митропольського</i>	266
Шаврова О. Б., Дьяченко Н. К. <i>Історична та лінгвістична компоненти гуманітарного потенціалу математики</i>	268
Шевченко Я. М., Листопадова В. В. <i>Внесок М. М. Боголюбова в розвиток математичної фізики</i>	271

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. <i>Комп'ютерно-орієнтована методика аналізу якості педагогічних тестів як засіб ІК-підтримки викладачів вищої математики НТУУ «КПІ»</i>	277
Баліна О. І., Буценко Ю. П. <i>Математика у технічному виші: до питання про цілі, зміст та структуру курсів</i>	279
Довгай В. В. <i>Важливість комплексного підходу до підготовки фахівців для дослідження динамічних систем в умовах дії випадкових факторів</i>	282
Дубина І. І., Васильєва Л. Я. <i>Методична підготовка майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій</i>	285
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Освіта сучасних управлінських кадрів</i>	288
Казнадій С. П., Мурашківська В. П., Руновська Л. А. <i>Упровадження інформаційних технологій при викладанні вищої математики</i>	291

Національний технічний університет України «КПІ»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
IV Міжнародної
науково-практичної конференції
24—25 грудня 2015 року

Підписано до друку 27.01.2016.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 18,75
Зам. № 1511. Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б