

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
V Міжнародної
науково-практичної конференції
29—30 грудня 2016 року

Київ 2017

УДК 51 (082)
ББК 22.1я43
М 34

Математика в сучасному технічному університеті : матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 29—30 грудня 2016 р.). — Київ : НТУУ «КПІ», 2017. — 268 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Математика в современном техническом университете : материалы V Межд. науч.-практ. конф. (Киев, 29—30 декабря 2016 г.). — Киев: НТУУ «КПИ», 2016. — 268 с. — Укр., рус., англ., белорус.

ISBN 978-617-7021-52-9

Оргкомітет V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Україна)
Проф. О. В. Іванов (Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Україна)
Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

Оргкомитет V Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)
Проф. Н. А. Вирченко (Украина)
Проф. А. В. Иванов (Украина)
Доц. А. А. Дыховичный (Украина)
Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

УДК 51 (082)
ББК 22.1я43

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7021-52-9

©Автори
©НТУУ «КПІ», 2017



ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

SPECTRUM INVESTIGATION OF THE HELMHOLTZ CAVITY OSCILLATIONS — THE “ATOM” OF ACOUSTIC METAMATERIALS

M. Babenko, P. Bakmaiev, A. Pavlus, R. Svystun, A. Zhivkov

babenkomaksym1998@gmail.com, rhyme@i.ua, sanek29037@gmail.com,
svis-roma@yande.ru, zhivkov@yandex.ua

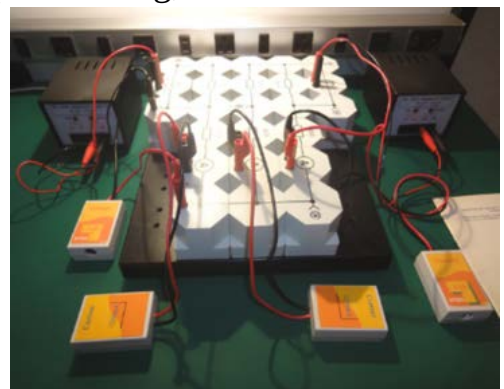
NTUU “Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

In this work, we investigate the oscillation spectrum of the Helmholtz resonator. (Helmholtz resonance, n. d.). Knowing the analogy of the equations between electrodynamics and acoustics (Helmholtz, 1863), we note that the “atom” (the basic unit) of acoustic metamaterial is largely similar to the “atom” of electrodynamic metamaterial. Research were made in Doslid (program developed in the KPI based on LabWive software).

Helmholtz resonator. *The Helmholtz resonator* produces low-frequency vibrations whose wavelength is much larger than the size of resonator itself. If we make an analogy with a mechanical system (a ball on a spring), the vibrating mass will be an air in the throat, and the volume of the vessel behave as elastic material. In the non-harmonic vibrations of sound field, this device responds only to vibrations with f_p frequency and the amplitude of the resulting oscillation is much greater than the amplitude of sound field. Therefore, a combination of Helmholtz resonators can be used to analyze the sound. Friction of the resonator at the resonant frequency cause a strong absorption of sound. Acoustic resonance is a phenomenon used in architecture (sound insulation), automotive (car Muffler), the construction of musical instruments and etc. (Helmholtz resonance, n. d.).

DOSLID program. Sound sensor. *DOSLID* is new kind of program of collecting and data processing, made by KPI employees. Different sensors have been developed and produced (pic. 1, including sound sensors). With DOSLID you can:

- Collect and show results in real time while experimenting;
- Choose different ways of showing collected: graphs, tables;
- Process and analyze the data using Analysis master;
- Import/export data by using text formats;
- Write log of events;
- Watch recordings of experiments and so on.



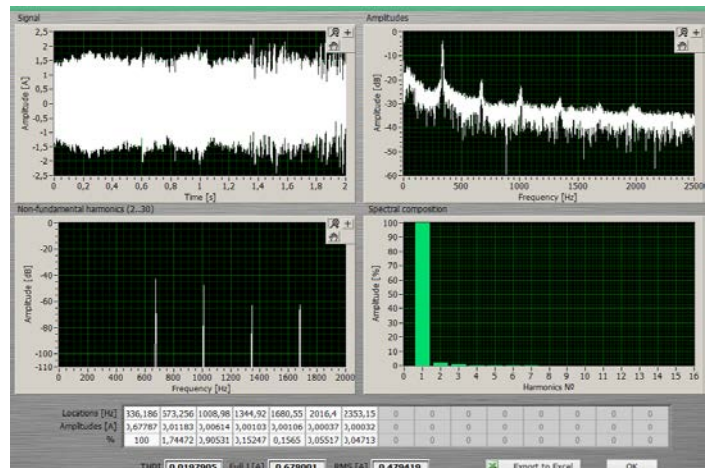
Pic. 1. Sensors

Experiment. As example of Helmholtz resonator, we used tree toy with form of a ball with short and narrow neck (pic. 2). The measurement results are shown on (pic. 3). The measured resonance frequency is 335 Hz, which corresponds to the wavelength (around 1 meter) in air under normal conditions about. Clearly traceable

the mismatch between cavity size and the wavelength of acoustic vibrations in the air. The second and higher harmonics are practically not observed (level of -40 dB can be attributed to an experimental error).



Pic. 2. Christmas tree toy



DEEP STATISTICAL LEARNING IN GENOTYPING QUALITY CONTROL

J. Dykach¹, O. Semeniv²

¹NTUU “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

²Space Research Institute NAS Ukraine and SSA Ukraine, Kyiv, Ukraine
juliadykach@ukr.net

The success of the genome-wide association study (GWAS) in the process of finding or confirming the association between an allele and disease and traits in human, plant and animal genomes is greatly influenced by proper study design and the data analysis workflow, including the use of quality control (QC) checks for genotyping data. Although the number of replicated allele/complex disease associations, discovered through human GWAS, has been steadily increasing, most of the variants, detected to date, have small effects, and very large sample sizes have been required to identify and validate these findings. As a result, even small sources of systematic or random error can cause the false positive results or obscure real effects. This reinforces the need for careful attention to study design and data quality. In addition, most genotyping methods assume three genotype clusters (AA, AB, BB) for two alleles. This assumption does not always hold, especially in plant and animal studies, due to the existence of subpopulation genome structural variation and/or autopolyploid genomes.

Some optimization techniques are used to provide advanced SNP quality control (QC). Genome-wide scans of nucleotide variation in human, plant and animal genomes provide an increasing number of associations with complex traits. Off-target variants (OTV) are reproducible and previously uncharacterized variants that interfere with a SNP of interest. When genotyping diploid SNPs with an OTV pattern (AA, AB, BB, OTV or AA, BB, OTV), the AB and OTV clusters are sometimes fused and called only as AB or the OTV cluster is sometimes called as AB. For second-round OTV genotyping to identify which samples in a SNP should be placed in the OTV cluster often is used EM algorithm. This post-processing step corrects mis-called heterozygote clustering. EM method takes the posterior cluster information for OTV SNPs from classification and reclassifies samples, then updates the genotype cluster centers. But in general, the EM method takes a lot of processing time and memory, in addition it permits to work only with one OTV SNP at on time.

Support vector machines (SVMs) have recently been introduced into machine learning for pattern recognition (Kressel, 1998; Chen et al., 2005). In this report, SVM method for quality control of OTV SNPs is presented. Based on the prior information, the hyper-space of bounds is formed, which divides main classes AA, AB, BB and OTV. The SVM model calculates the probability of SNP referring to one of the classes and selecting the OTV. Such procedure permits to speed up the performance of QC process and accuracy.

For QC of genotyping was implemented the “one-against-one” approach for multiclass classification (Hsu & Lin, 2002). If k is the number of classes, then

$k(k-1)/2$ classifiers are constructed and each one trains data from two classes. For training data from the i th and the j th classes, have to be solved the following two-class classification problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}^{ij}, b^{ij}, \xi^{ij}} & \frac{1}{2} (\mathbf{w}^{ij})^T \mathbf{w}^{ij} + C \sum_t (\xi^{ij})_t \\ \text{subject to} & \quad (\mathbf{w}^{ij})^T \varphi(\mathbf{x}_t) + b^{ij} \geq 1 - \xi_t^{ij}, \quad \text{if } \mathbf{x}_t \text{ in the } i\text{th class,} \\ & \quad (\mathbf{w}^{ij})^T \varphi(\mathbf{x}_t) + b^{ij} \leq -1 + \xi_t^{ij}, \quad \text{if } \mathbf{x}_t \text{ in the } j\text{th class,} \\ & \quad \xi_t^{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

In classification was used a voting strategy: each binary classification is considered to be a voting where votes can be cast for all data points x in the end a point is designated to be in a class with the maximum number of votes. In case of two classes have identical votes, though it may not be a good strategy, but simply is chosen the class appearing first in the array of storing class names.

In modelling was used RBF kernel function. This kernel nonlinearly maps samples into a higher dimensional space so it, unlike the linear kernel, can handle the case when the relation between class labels and attributes is nonlinear (Hsu & Lin, 2002).

For stable and optimal model identification was used cross-validation algorithm (Semeniv & Pidgorodetska, 2014). There are two parameters for an RBF kernel: C and γ . It is not known beforehand which C and γ are best for a given problem; consequently some kind of model selection (parameter search) must be done. The main goal of cross-validation procedure is to identify good (C, γ) so that the classifier can accurately predict unknown data (i.e. testing data).

References

- Chen, P.-H., Lin, C.-J., & Schölkopf, B. (2005). A tutorial on ν -support vector machines. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 21, 111–136.
- Hsu, C.-W., & Lin, C.-J. (2002). A comparison of methods for multi-class support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(2), 415–425.
- Kressel, U. H.-G. (1998). *Advances in Kernel Methods Support Vector Learning: Pairwise classification and support vector machines*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Podgorodetskaya, L. V., Prutsko, Y. V., & Semeniv, O. V. (2016). Farmland state estimation based on agrophytocenoses classification and remote sensing satellite data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(5), 55–63.
- Semeniv, O. V., & Pidgorodetska, L. V. (2014). Biophysical parameters of water ecosystem estimation using satellite images and optimization techniques. *Journal of Automation and Information Sciences*, 46 (I. 9), 68–77.

PRECOMPACTNESS OF THE TRAJECTORIES OF A HYBRID MECHANICAL SYSTEM WITH A FLEXIBLE BEAM

J. Kalosha, A. Zuyev

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
National Academy of Sciences of Ukraine, Sloviansk, Ukraine
julykucher@gmail.com, zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de*

In this work, we consider mathematical model of a controlled oscillating system. It consists of a supported flexible beam with an attached rigid body. The equation of motion is written in the operator form as follows:

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = A\xi(t), \quad \xi \in D(A) \quad (1)$$

for $\xi = (u, v, p, q)^T$ in Hilbert space $X = \overset{\circ}{H}^2(0, l) \times L^2(0, l) \times \mathbb{R}^2$ with inner product

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^l (E(x)I(x)u_1''(x)u_2''(x) + \rho(x)v_1(x)v_2(x))dx + \kappa p_1 p_2 + m q_1 q_2.$$

Here the components of ξ_1 and ξ_2 are denoted by u_1, v_1, p_1, q_1 and u_2, v_2, p_2, q_2 , respectively.

The operator A with the domain

$$D(A) = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \in X : \begin{array}{l} u \in H^4(0, l_0) \cap H^4(l_0, l), \\ u''(0) = u''(l) = 0, \\ u''(l_0 - 0) = u''(l_0 + 0), \\ v \in \overset{\circ}{H}^2(0, l), \\ p = u(l_0), \\ q = v(l_0) \end{array} \right\} \subset X$$

acts as follows:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho}(EIu'')'' + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^k \psi_{j''} M_j \\ q \\ \frac{1}{m} \left\{ (EIu'')' \big|_{l_0-0} - (EIu'')' \big|_{l_0+0} - \kappa p + F \right\} \end{pmatrix}.$$

The space $\overset{\circ}{H}^k(0, l)$ consists the functions $u \in H^k(0, l)$ such that

$u(0) = u(l) = 0$. The operator $A^\circ : D(A^\circ) = D(A) \rightarrow X$ acts similarly to A with $F = M_j = 0$, $j = \overline{1, k}$.

The proposed feedback control corresponds to k distributed torque densities

$$M_j = -\alpha_j \int_0^l \psi_{j''}(x) v(x) dx, \quad \alpha_j > 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2)$$

and the lumped force at the point $x = l_0$:

$$F = -\alpha_0 q, \quad \alpha_0 > 0. \quad (3)$$

The Young modulus E , the moment of inertia I , and the density ρ of the beam are considered to be positive constants. The above feedback control functionals provide the stability of the equilibrium in the sense of Lyapunov (1992), Shestakov (1990).

Our investigation of the asymptotic behaviour of the closed-loop system is based on LaSalle's invariance principle (LaSalle, 1976). In order to study the compactness of the resolvent of the infinitesimal generator A , we construct the resolvent for the operator with constant parameters $M_1, \dots, M_k$, and then we substitute the feedback into the constructed resolvent. As a conclusion, we construct the resolvent for the infinitesimal generator of the closed-loop system.

Let us solve the equation

$$(I - \lambda A)\xi = \bar{\xi}$$

with respect to $\xi \in D(A)$ for a given $\bar{\xi} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{q})^T \in X$ with some $\lambda > 0$. In other words, we will solve the following system written in the matrix form:

$$\frac{d}{dx}U(x) = MU(x) + \hat{\chi}(x), \quad (4)$$

for the vector

$$U(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T = (u(x), u'(x), u''(x), u'''(x))^T,$$

where the matrix M looks as follows:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\rho}{\lambda^2 EI} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\chi}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^k \psi_{j''} M_j + \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{\bar{u}}{\lambda} + \bar{v} \right).$$

The general solution of the system (4) is given by the formula

$$U(x) = \begin{cases} e^{xM}U(0) + \int_0^x e^{(x-\tau)M} \hat{\chi}(\tau) d\tau, & x \in (0, l_0), \\ e^{(x-l)M}U(l) - \int_x^l e^{(x-\tau)M} \hat{\chi}(\tau) d\tau, & x \in (l_0, l), \end{cases} \quad (5)$$

where

$$e^{xM} = (e_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2\mu}(z_2 + z_3) & \frac{1}{2\mu^2}z_4 & \frac{1}{4\mu^3}(z_2 - z_3) \\ \mu(z_3 - z_2) & z_1 & \frac{1}{2\mu}(z_2 + z_3) & \frac{1}{2\mu^2}z_4 \\ -2\mu^2z_4 & \mu(z_3 - z_2) & z_1 & \frac{1}{2\mu}(z_2 + z_3) \\ -2\mu^3(z_2 + z_3) & -2\mu^2z_4 & \mu(z_3 - z_2) & z_1 \end{pmatrix},$$

$$z_1 = z_1(x) = \cosh \mu x \cos \mu x, \quad z_2 = z_2(x) = \cosh \mu x \sin \mu x,$$

$$z_3 = z_3(x) = \sinh \mu x \cos \mu x, \quad z_4 = z_4(x) = \sinh \mu x \sin \mu x, \quad \mu^4 = \frac{\rho}{4\lambda^2 EI}.$$

After substituting the feedback (2)–(3) into the obtained expression (5), we get the resolvent of the operator A , which is a compact mapping

$$R_\lambda(A) : X \rightarrow X' = H^4 \times H^2 \times \mathbb{R}^2$$

because $X' \Subset X$.

Thus, we have proved that the trajectories of the considered closed-loop system are precompact in the infinite-dimensional space with the energy norm.

Note that the set $\{\dot{\mathcal{E}} = 0\}$ does not contain any nontrivial trajectory of the considered system. Therefore, according to LaSalle's invariance principle, the proposed feedback control (2)–(3) provides the asymptotic stability of the equilibrium of the considered mechanical system under the the following conditions.

Proposition. *Let $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ be eigenvectors of the operator A° and, for any $i \in \mathbb{N}$, either $v_i(l_0) \neq 0$ or there exists a $j \in \{1, \dots, k\}$ such that*

$$\int_0^l \psi_{j''}(x) v_i(x) dx \neq 0.$$

Then the solution $\xi = 0$ of system (1) is asymptotically stable.

References

- LaSalle, J. P. (1976). Stability theory and invariance principles. *Dynamical systems*, 1, 211–222.
- Lyapunov, A. M. (1992). *The general problem of the stability of motion*. London: Taylor & Francis, Ltd.
- Shestakov, A. A. (1990). *Obobshchennyi pryamoi metod Lyapunova dlya sistem s rasprelennymi parametrami. (Russian) [The generalized direct Lyapunov method for systems with distributed parameters] With an English summary*. Moscow: Nauka.

INFLUENCE OF DELAY ON DYNAMICS OF NONIDEAL PENDULUM SYSTEMS

A. M. Makaseyev

NTUU “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

makaseyev@ukr.net

In the majority of studies, the dynamics of various oscillatory dynamical systems are being conducted without taking into account the limitations of excitation source power. It is assumed that the power of excitation source considerably exceeds the power that consumes the vibrating system. In many cases, such idealization leads to qualitative and quantitative errors in describing dynamical regimes of such systems. Taking into account the limitation of excitation source power allows identify qualitative changes in dynamical characteristics and discover chaotic dynamical regimes (Krasnopol'skaya & Shvets, 1990; Krasnopol'skaya & Shvets, 1991; Shvets & Sirenko, 2012; Shvets & Makaseyev, 2012).

Another important factor that significantly affects the change of steady-state regimes of dynamical systems is the presence of different in their physical substance, factors of delay. The aim of this work is to study the influence of various factors of delay on steady-state regular and chaotic regimes of nonideal pendulum systems of the type “pendulum-electric motor”. Mathematical model of the dynamical system “pendulum-electric motor” with taking into account various factors of delay can be written as the following system of equations (Shvets & Makaseyev, 2012; Shvets & Makaseyev, 2014):

$$\begin{cases} \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} = Cy_1(\tau - \delta) - y_2(\tau)y_3(\tau - \gamma) - \frac{1}{8}(y_1^2(\tau)y_2(\tau) + y_2^3(\tau)), \\ \frac{dy_2(\tau)}{d\tau} = Cy_2(\tau - \delta) + y_1(\tau)y_3(\tau - \gamma) + \frac{1}{8}(y_1^3(\tau) + y_1(\tau)y_2^2(\tau)) + 1, \\ \frac{dy_3(\tau)}{d\tau} = Dy_2(\tau - \gamma) + Ey_3(\tau) + F. \end{cases} \quad (1)$$

where phase variables y_1, y_2 — describe the deviation of the pendulum from the vertical and phase variable y_3 — is proportional to the rotation speed of the motor shaft. The system parameters are defined by

$$C = -\delta_1 \varepsilon^{-2/3} \varpi_0^{-1}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I}, \quad F = \frac{2l^{2/3}}{a^{2/3}} \left(\frac{N_0}{\varpi_0} + E \right), \quad (2)$$

where m — the pendulum mass, l — the reduced pendulum length, ϖ_0 — natural frequency of the pendulum, a — the length of the electric motor crank, $\varepsilon = \frac{a}{l}$, δ_1 — damping coefficient of the medium resistance force, I — the electric motor moment of inertia, E, N_0 — constants of the electric motor static characteristics.

Positive constant parameter γ was introduced to account the delay effects of electric motor impulse on the pendulum. We assume that the delay of the electric motor response to the impact of the pendulum inertia force is also equal to γ . The constant positive parameter δ characterizes the delay of the medium reaction on the dynamical state of the pendulum.

Let us consider two approaches that allow reducing the time-delay system (1) to the system of equations without delay. The first approach is as follows. Assuming a small delay, we can write

$$\begin{aligned} y_i(\tau - \gamma) &= y_i(\tau) - \frac{y_i(\tau)}{d\tau} \gamma + \dots, \quad i = 2, 3; \\ y_j(\tau - \delta) &= y_j(\tau) - \frac{y_j(\tau)}{d\tau} \delta + \dots, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Then, if $C\delta \neq -1$, we get the following system of equations:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{1}{1 + C\delta} \left(Cy_1 - y_2 [y_3 - \gamma(Dy_2 + Ey_3 + F)] y_3 - \frac{1}{8} (y_1^2 y_2 + y_2^3) \right); \\ \frac{dy_2}{d\tau} = \frac{1}{1 + C\delta} \left(Cy_2 + y_1 y_3 - y_1 \gamma (Dy_2 + Ey_3 + F) + \frac{1}{8} (y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1 \right); \\ \frac{dy_3}{d\tau} = (1 - C\gamma) Dy_2 - \frac{D\gamma}{8} (y_1^3 + y_1 y_2^2 + 8y_1 y_2^2 + 8y_1 y_3 + 8) + Ey_3 + F. \end{cases} \quad (3)$$

The obtained system of equations is already a system of ordinary differential equations. Delays are included in this system as additional parameters.

In order to approximate the system (1) another, more precise, method can be used. In the case $\gamma > 0$, $\delta > 0$ let us divide the segments $[-\gamma; 0]$ and $[-\delta; 0]$ into m equal parts. We introduce the following notation

$$\begin{aligned} y_1(\tau - \frac{i\delta}{m}) &= y_{1i}(\tau), \\ y_2(\tau - \frac{i\gamma}{m}) &= y_{2i}(\tau), \\ y_2(\tau - \frac{i\delta}{m}) &= \tilde{y}_{2i}(\tau), \\ y_3(\tau - \frac{i\gamma}{m}) &= y_{3i}(\tau), i = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Then, using difference approximation of derivative we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_{10}(\tau)}{d\tau} = Cy_{1m}(\tau) - y_{20}(\tau)y_{3m}(\tau) - \frac{1}{8}(y_{10}^2(\tau)y_{20}(\tau) + y_{20}^3(\tau)); \\ \frac{dy_{20}(\tau)}{d\tau} = C\tilde{y}_{2m}(\tau) + y_{10}(\tau)y_{3m}(\tau) + \frac{1}{8}(y_{10}^3(\tau) + y_{10}(\tau)y_{20}^2(\tau)) + 1; \\ \frac{dy_{30}(\tau)}{d\tau} = Dy_{2m}(\tau) + Ey_{30}(\tau) + F; \\ \frac{dy_{1i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\delta}(y_{1i-1}(\tau) - y_{1i}(\tau)), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_{2i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\gamma}(y_{2i-1}(\tau) - y_{2i}(\tau)), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\tilde{y}_{2i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\delta}(\tilde{y}_{2i-1}(\tau) - \tilde{y}_{2i}(\tau)), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_{3i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\gamma}(y_{3i-1}(\tau) - y_{3i}(\tau)), \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (4)$$

It is a system of ordinary differential equations of $(2m + 3)$ -th order. As in the system (3), the delays γ and δ are included in these systems as additional parameters. We note that the solutions y_1, y_2, y_3 of the system (1) are described by the functions y_{10}, y_{20}, y_{30} of the system (4).

Choosing a sufficiently large m in the system (4), the system (3) will be very well approximated by the system (4). The use of mathematical model (4) at $m = 3$, so the system (4) has 15 equations, is optimal for studying the influence of delay on regular and chaotic dynamics of “pendulum-electric motor” system (Shvets & Makaseyev, 2012; Shvets & Makaseyev, 2014).

Let us study the types of regular and chaotic attractors that exist in the systems (3) and (4). We consider the behavior of the systems (3) and (4) when parameters are $C = -0.1$, $D = -0.53$, $E = -0.6$, $F = 0.19$ and the delays $\delta = 0.15$, $0 < \gamma \leq 0.3$. In fig. 1(a, b) phase-parametric characteristics (bifurcation trees) of three-dimensional system (3) and fifteen-dimensional system (4) are shown respectively. These figures illustrate the influence of the delay of interaction between pendulum and electric motor γ on chaotization of the system (1).

The areas of chaos in the bifurcation trees are densely filled with points. A careful examination of the obtained images allows not only to identify the origin of chaos in the systems, but also to describe the scenario of transition to chaos. So with a decrease of γ there are the transitions to chaos by Feigenbaum scenario (infinite cascade of period-doubling bifurcations of a limit cycle). Bifurcation points for the delay γ are the points of splitting the branches of the bifurcation tree (fig. 1(a, b)). In

turn, the transition to chaos with an increase of the delay happens under the scenario of Pomeau — Manneville, in a single bifurcation, through intermittency.

A careful analysis of these figures allows to see qualitative similarity of characteristics of the systems (3) and (4). However, with increasing the delay the differ-

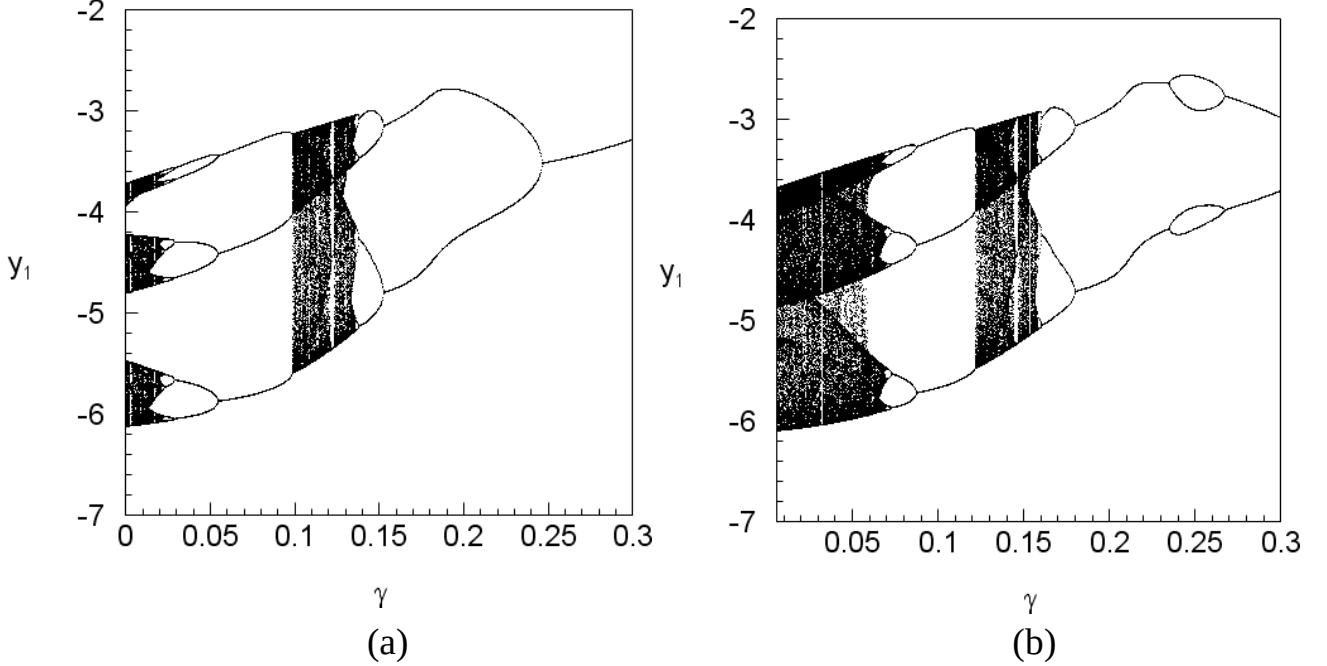


Fig. 1. Phase-parametric characteristics of the system (3) (a) and the system (4) (b)

ences in the dynamics of these systems become very significant. For instance, when the delay of interaction between pendulum and electric motor $\gamma = 0.05$ the steady-state regime of three-dimensional system (3) is periodic and the attractor is limit cycle. Whereas at this values of the parameters and the delays fifteen-dimensional system (4) has steady-state chaotic dynamical regime.

It is also possible a different situation. For instance, at the delays $\gamma = 0.11$ the system (3) has chaotic steady-state regime of oscillations. Whereas at this values of the delay fifteen-dimensional system (4) has regular periodic dynamical regime and its attractor is limit cycle.

Conclusion. Taking into account various factors of delay in “pendulum-electric motor” systems is crucial. The presence of delay in such systems can affect the qualitative change in the dynamical behavior. It is shown, that in some cases the delay is the main reason of origination as well as vanishing of chaotic attractors. The use of three-dimensional mathematical model to study the dynamics of “pendulum — electric motor” systems is sufficient only at small values of the delay. For relatively high values of the delay multi-dimensional system of fifteen equations should be used.

References

- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1990). Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank. *Soviet Applied Mechanics*, 26(8), 787–794.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply. *8th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Prague: Czechoslovak Acad. Sci*, 1, 181–184.
- Shvets, A. Y., & Makaseyev, A. M. (2012). The influence of delay factors on regular and chaotic oscillations of plane pendulum. *Proceedings of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine*, 9(1), 365–377.
- Shvets, A. Yu., & Makaseyev, A. M. (2012). Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (1), 195–204.
- Shvets, A. Yu., & Makaseyev, A. M. (2012). Delay Factors and Chaotization of Non-ideal Pendulum Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (4), 633–642.
- Shvets, A. Yu., & Makasyeyev, A. M. (2014). Chaos in Pendulum Systems with Limited Excitation in the Presence of Delay. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (3), 233–241.
- Shvets, A. Yu., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (2), 303–310.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

Т. В. Авдеева¹, Л.М. Ильичева²

¹НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

²Киевская государственная академия водного транспорта

им. гетьмана Конашевича, Киев, Украина

avdeeva_t1@rambler.ru, m_licheva@ukr.net

Математическое представление об информации связано с ее измерением. Сигналом является сообщение, передаваемое с помощью некоторого носителя. Под количеством информации понимают числовую характеристику сигнала, которая не зависит от его формы и содержания и соответствует степени неопределенности, исчезающей после получения сообщения в виде этого сигнала. Информация, переданная в виде последовательности сигналов (знаков), представляет собой определенный порядок, структурную определенность. Порядок всегда сопоставим с беспорядком — отсутствием структуры.

Мерой беспорядка любой системы является энтропия. Понятие энтропии как меры беспорядка системы взято из термодинамики и является одним из основных не только в теории информации, но и в современном философском осмыслении открытых биосоциальных систем. Реальная ценность понятия энтропии определяется в первую очередь тем, что «степень неопределенности» опытов является характеристикой, связанной с передачей и хранением сообщений. В передачу сообщения входит процесс выбора, который можно измерить количественно. Так, один двоичный сигнал позволяет выбрать одно из двух сообщений: $2^1 = 2$. Для распознавания одного определенного сообщения из N возможных сообщений требуется $m = \log_2 N$ сигналов, то есть для выбора одного из N вариантов нужна информация в $\log_2 N$ бит. Эту формулу предложил американец Р. Хартли в 1928 г. Если набор возможных сообщений и их вероятности известны, для каждого сообщения количество информации равно логарифму величины, обратной частоте появления этого сообщения. Среднее количество информации получаем как сумму произведений статистической вероятности на количество информации каждого сообщения:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

Это формула К. Шеннона, описывающая среднее значение количества информации, приходящейся на один символ алфавита. Функция H достигает максимума, когда частота для всех n сообщений одинакова и равна $p_i = \frac{1}{n}$. Тогда

$$H_{\max} = n \frac{1}{n} \log_2 n = \log_2 n.$$

Формула Р. Хартли является частным случаем формулы К. Шеннона, когда исходы равновероятны.

Пусть заданы два алфавита A и B , состоящие из конечного числа символов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_M\}$. Кортеж в алфавите A называют словом $\alpha = a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, где $i \in [1, n]$. Через F обозначают отображение слов алфавита A в алфавит B , тогда слово $\beta = F(\alpha)$ называют кодом слова α . Кодирование — универсальный способ отображения информации при ее хранении, передаче и обработке в виде системы соответствий между элементами сообщений и сигналами, при помощи которых эти элементы можно зафиксировать.

Рассмотрим стационарную конечную цепь Маркова $\{X_k\}, k = 1, \dots, \infty$, состоящую из одного класса существенных состояний без подклассов (Боровков, 1986). Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ есть некоторое сообщение C_n , $I(C_n) = -\log_2 P(C_n)$ — количество информации, содержащейся в сообщении C_n . Значение $I(C_n)$ — функция на пространстве элементарных событий, равная информации, содержащейся в эксперименте $G^{(n)}$ по выяснению значения X_k после первых n шагов. Для независимых X_k эта информация равна nH , а в данных условиях с вероятностью, близкой к 1, ведет себя асимптотически как nH , где H — энтропия стационарной цепи Маркова:

$$H = -\sum_i p_i \sum_j p_{ij} \log_2 p_{ij}.$$

Рассмотрим применение этого факта к варианту непосредственного кодирования. Пусть $N = 2^m$ число состояний цепи. Число сообщений длины n (цепочек C_n) будет равно $N^n = 2^{nm}$. Если сообщения передаются с помощью двоичного кода, длина сообщений составит nm . Можно утверждать, что при больших значениях n из этих 2^{nm} цепочек с вероятностью $1 - \varepsilon, \varepsilon > 0$ будет передаваться лишь 2^{nH} сообщений. Вероятность появления иных сообщений будет пренебрежимо мала. Тогда можно использовать более экономный код, при котором на передачу сообщения с большой вероятностью потребуется меньшее число единиц. Поскольку $H \leq \log_2 N = m$ экономия в длительности сообщения будет в $\frac{m}{H} \geq 1$ раз.

Список литературы

- Боровков, А. А. (1986). *Теория вероятностей*. 2-е изд. Москва: Наука.
 Спирина, М. С., Спирин, П. А. (2012). *Дискретная математика* (8-е изд.). Москва: Изд. Центр «Академия».

**ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА,
БЛИЗКИХ К СПЯЩЕМУ ВОЛЧКУ ЛАГРАНЖА**

Л. Д. Акуленко¹, Д. Д. Лещенко², Т. А. Козаченко²

¹*Институт проблем механики РАН, Москва, Россия*

²*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
Одесса, Украина*

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

1. Постановка задачи и процедура усреднения. Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \quad C\dot{r} = \varepsilon M_3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела, εM_i , $i = 1, 2, 3$ — проекции вектора возмущающих моментов на эти оси; ψ, θ, φ — углы Эйлера; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущений. В частности, при $\varepsilon = 0$ система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа (Суслов, 1946; Черноусько, Акуленко, Лещенко, 2015). В случае тяжелого волчка имеем $\mu = mgl$, m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тел; A — экваториальный, C — осевой момент инерции тела относительно точки O , $A \neq C$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом ε , которое будет проводиться методом усреднения (Волосов, Моргунов, 1971) на интервале времени порядка ε^{-1} .

В случае невозмущенного движения первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ являются величины (Суслов, 1946; Черноусько и др., 2015))

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i , $i = 1, 2, 3$ — произвольные постоянные $c_2 \geq -\mu$.

Соотношения между корнями кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2] \quad (1.3)$$

и первыми интегралами (1.2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu} = F_1, \quad u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1 = F_2, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu} = F_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Известно в общем случае выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении как функции времени t :

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \\ \alpha &= [\mu(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin am(\alpha t + \beta, k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 < 1. \quad (1.6)$$

Здесь u — периодическая функция $\alpha t + \beta$ с периодом $\frac{K(k)}{\alpha}$; β — произвольная фазовая постоянная; sn , am — эллиптический синус и амплитуда соответственно (Черноусько и др., 2015; Акуленко, Лещенко, Черноусько, 1979), k — модуль эллиптических функций.

Формулы (1.2), (1.4), (1.5) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в случае Лагранжа.

Сделаем следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad Cr^2 \gg \mu, \quad (1.7)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость r достаточно велика. Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией T , и в первом приближении имеем

$$G_z \approx Cr, \quad H \approx T \approx \frac{1}{2} Cr^2. \quad (1.8)$$

Если твердое тело вращается быстро, то для квадрата модуля эллиптических функций можно записать

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1} \ll 1. \quad (1.9)$$

При выполнении второго условия (1.7) имеем

$$u_1 \ll u_3, \quad u_2 \ll u_3, \quad u_1 + u_2 \ll u_3. \quad (1.10)$$

Тогда из соотношений (1.4) получим

$$u_3 = F_1, \quad u_1 u_2 = \frac{F_3}{F_1}. \quad (1.11)$$

После ряда преобразований с учетом (1.4) находим выражения для вещественных корней кубического многочлена (1.3)

$$u_1 = \frac{1}{2F_1} \left[F_2 - \sqrt{F_2^2 - 4F_1 F_3} \right], \quad u_2 = \frac{1}{2F_1} \left[F_2 + \sqrt{F_2^2 - 4F_1 F_3} \right], \quad u_3 = F_1. \quad (1.12)$$

Процедура, разработанная в Черноусько и др. (2015), Акуленко и др. (1979) используется для усреднения системы (1.1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$. В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия выполнения тождеств

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \theta), \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \theta), \\ M_3 &= M_3^*(G_z, H, r, \theta), \end{aligned} \quad (1.13)$$

или, в частности, достаточные условия

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta),$$

которые обеспечивают справедливость соотношений (1.13).

Тогда с помощью ряда преобразований первые три уравнения (1.1) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon U_1(G_z, H, r, \theta), \quad U_1 = M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon U_2(G_z, H, r, \theta), \quad U_2 = M_2^* + M_3^* r, \\ \dot{r} &= \varepsilon U_3(G_z, H, r, \theta), \quad U_3 = C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь U_1, U_2, U_3 – 2π -периодические функции фазы угла θ .

Для быстро вращающегося твердого тела при $k^2 \ll 1$ из выражения (1.5) для u получим приближенную формулу

$$u = \cos \theta \approx u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2(\alpha t + \beta). \quad (1.15)$$

Усредняя правые части полученной системы по t , получим с учетом (1.4), (1.5):

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon V_1(G_z, H, r), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2(G_z, H, r), \\ \dot{r} &= \varepsilon V_3(G_z, H, r), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$V_i(G_z, H, r) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} U_i(G_z, H, r, \theta(t)) dt,$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (1.16) подставлено выражение

$$\theta \approx \arccos \left[u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 (\alpha t + \beta) \right].$$

На интервале времени порядка ε^{-1} оценка близости решений систем (1.14), (1.16) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения δ и малого параметра ε , характеризующего величину возмущений (Мухин, 1985).

После решения системы (1.16) для G_z , H , r медленные переменные u_i , $i = 1, 2, 3$ определяются по формулам (1.12).

2. Движение твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного моментов. Исследуем совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Возмущающие моменты εM_i , $i = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br - \eta, \quad a, b > 0. \quad (2.1)$$

Здесь a , b – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела, $\eta = \text{const}$.

Моменты (2.1) удовлетворяют условиям (1.13), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ . Решение усредненной системы уравнений (1.16), с учетом (2.1) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} r &= (r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta b^{-1}, \\ G_z &= (G_{z0} - Cr_0) \exp(-aA^{-1}\tau) + C(r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta Cb^{-1}, \\ H &= \left(H_0 - \frac{1}{2}Cr_0^2 - \mu \right) \exp(-2aA^{-1}\tau) + \frac{1}{2}C(r_0 + \eta b^{-1})^2 \exp(-2bC^{-1}\tau) - \\ &\quad - \eta Cb^{-1}(r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) + \frac{1}{2}\eta^2 Cb^{-2} + \mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь G_{z0} , H_0 — произвольные начальные значения проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль Oz и полной энергии тела.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r и проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz асимптотически приближаются к значениям $r = -\eta b^{-1}$, $G_z = -\eta Cb^{-1}$. Полная энергия H изменяется, асимптотически

приближаясь к значению $H = \frac{1}{2}\eta^2 Cb^{-2} + \mu$.

Список литературы

- Акуленко, Л. Д., Лещенко, Д. Д. и Черноушко, Ф. Л. (1979). Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика*, 43(5), 771—778.
- Волосов, В. М., Моргунов, Б. И. (1971). *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*. Москва: Изд-во МГУ.
- Мухин, Н. П. (1985). Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, (6), 51—54.
- Суслов, Г. К. (1946). *Теоретическая механика*. Москва: Гостехиздат.
- Черноушко, Ф. Л., Акуленко, Л. Д., Лещенко, Д. Д. (2015). *Эволюция движений твердого тела относительно центра масс*. Москва: Ижевский институт компьютерных исследований.

ЗАВДАННЯ ВЕКТОРА НАПРЯМУ РОЗВИТКУ ІНЖЕНЕРНОЇ МЕРЕЖІ

І. С. Безклубенко, О. І. Баліна

Київський національний університет будівництва та архітектури,

Київ, Україна

i.bezklubenko@gmail.com

Припустимо, що при проектуванні інженерної мережі будуть відомі бажані значення векторів послідовних змінних $q^* = (q_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$, $q^{**} = (q_j^{**})_{j \in \mathbb{N}}$ з яких вектор q^* — визначає бажані в момент проектування значення послідовних змінних, q^{**} — визначає їх значення, бажані в перспективі.

Задана пара векторів q^* і q^{**} задає напрямок розвитку інженерної мережі, якому можна поставити у відповідність вектор $e = q^{**} - q^*$. Задання векторів послідовних змінних q^* і q^{**} для великих інженерних мереж не є складним. Це обумовлено тим, що з кожною послідовною змінною зв'язаний або споживач, або активне джерело цільового продукту. Тому значення послідовних змінних є нормативними величинами, відомими до початку проектування.

Ці вектори можуть задаватися або явно, або визначатися з ряду умов. Наприклад, якщо заданий вектор $q^* = (q_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ значень послідовних змінних, бажаних у момент проектування, то компоненти вектора q^{**} можуть визначатися абсолютними $q_j^{**} = q_j^* + e_j, j \in \mathbb{N}$, або відносними $q_j^{**} = q_j^* + \Delta_j, j \in \mathbb{N}$ приростами і справджувати перший закон Кірхгофа.

При вказаних способах завдання напрямку розвитку інженерної мережі, множини G — перспективних значень векторів послідовних змінних і D — бажаних в момент проектування значень векторів послідовних змінних містять тільки по одному елементу, відповідно q^* і q^{**} . Узагальненням цих способів може бути завдання багатоелементних множин G і D у вигляді систем алгебраїчних нерівностей

$$D : A_D \cdot q \leq b_D, G : A_G \cdot q \leq b_G$$

Багатоелементність множин значень векторів послідовних змінних визначає не єдино можливий вектор напрямку розвитку мережі, що обумовлює можливість вибору його найкращим по деякому критерію. У якості цього критерію можна узяти потребу дотримання режиму економії цільового продукту, яке формалізується у вигляді функціонала $\min \left\{ \sum_{j \in N} q_j \right\}$.

Бажані в перспективі і в момент проектування вектори значень послідовних змінних визначаються при цьому відповідно з умов

$$q^* = \arg \min \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} q_j / q \in D \right\}; \quad q^{**} = \arg \min \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} q_j / q \in G \right\}.$$

Відоме бажане значення вектора $q = q^*$ дозволяє сформулювати наступну оптимізаційну задачу математичного програмування (Безклубенко, 2015):

$$y(q^*) = \sum_{j \in \mathbb{N}^{(a)}} A_{1j} \cdot D_j^n(q^*) + \sum_{j \in \mathbb{N}^{(H)}} B_{1j} / D_j^m(q^*),$$

де перший доданок — це вартість будівельних робіт і другий доданок вартість експлуатаційних затрат, необхідних для досягнення бажаного в момент проектування вектора послідовних змінних q^* .

Розвиток інженерної мережі в напрямку вектора $l = q^{**} - q^*$, обумовлює необхідність формалізації такого критерію оптимізації, який характеризував би вартість будівельних робіт і експлуатаційних затрат в перспективі мінімізувати

$$y(q^{**}) = \sum_{j \in \mathbb{N}^{(a)}} A_{1j} \cdot D_j^n + \sum_{j \in \mathbb{N}^{(a)}} B_{3j} / D_j^m$$

при обмеженнях

$$\overline{B} \cdot h = 0$$

$$h_j = B_{4j} / D_j^m, j \in \mathbb{N}$$

$$D_j \in \left\{ \overline{D}^{(1)}, \overline{D}^{(2)}, \dots, \overline{D}^{(k)} \right\}, \quad j \in \mathbb{N}$$

де $\overline{B}$ — цикломатична матриця графа мережі в перспективі (Безклубенко, Лесько, 2015); $\left\{ \overline{D}^{(1)}, \overline{D}^{(2)}, \dots, \overline{D}^{(k)} \right\}$ — множина значень діаметрів ліній зв'язку, яке відображає перспективний сортамент.

$$B_{3j} = B_j (q^{**})^{\lambda+1}, j \in \mathbb{N}^{(a)}, B_{4j} = K \cdot l_j (q_j^{**})^{\lambda}, j \in \mathbb{N}.$$

Шукана вартість розвитку інженерної мережі в напрямку вектора l від вже досягнутого рівня, визначеного вектором q^* до бажаного q^{**} , і вартість її експлуатації визначається наступним виразом

$$z = y(q^{**}) - \psi \cdot y(q^*),$$

де ψ — коефіцієнт використання старого обладнання мережі.

Список літератури

- Безклубенко, І. С. (2015). До питання вибору оптимального варіанта проекту інженерної мережі. У кн. *Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*. Київ: НТУУ «КПІ».
- Безклубенко, І. С., Лесько, В. І. (2015). Застосування теорії графів до задач проектування інженерних мереж. У кн. *Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції ім. М. Кравчука*. Київ: НТУУ «КПІ».

ПОБУДОВА ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ З АДАПТАЦІЙНИМИ ПРАВИЛАМИ

С. О. Боровик

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

borovyk.stas@gmail.com

У роботі запропонована архітектура експертної системи на основі адаптаційних правил, яка б для заданого входу змінних знаходила алгоритм отримання вихідних значень. Дана система була реалізована мовою Python з використанням засобів CNTK (Computational Network Toolkit).

Ключові слова: експертна система, нечіткі логіки, адаптаційні правила, Python, CNTK.

Вступ. Процес створення експертних систем значно змінився за останні роки, завдяки появі спеціальних інструментальних засобів побудови експертних систем значно скоротились терміни та зменшилась трудомісткість їх розробки, зріс обсяг їх застосувань. Проте зросли і вимоги до складності процесів, що описуються (Варламов, 2002). Для багатьох з таких процесів актуальною та важливою є еволюційна адаптація правил. А для цього необхідна розробка відповідних засобів, що не тільки дають можливість прийняти рішення, а й відображують особливості систем, дозволяють аналізувати та модифікувати відношення, які входять до системи, ефективно працювати зі змінюваними вхідними даними.

Наукова новизна дослідження. Було розроблено й обґрунтовано: новий підхід до побудови моделей системи з еволюційною адаптацією правил з метою прийняття керуючих рішень, який передбачає реалізацію на багатопроцесорних обчислювальних системах; алгоритми оптимізації складного технічного рішення за постійного аналізу ситуацій та з урахуванням змін, що відбуваються зі зміною оточуючого середовища, забезпеченням корегування процесу прийняття рішень без порушення технологічної цілісності.

Постановка задачі. Нехай для деякої системи в нашій базі знаходиться деякий набір правил:

$$R_i (i = 1 \dots \infty),$$

де i — момент часу або етап розвитку цієї системи.

У свою чергу кожне правило являє собою деякий набір вхідних і вихідних змінних:

$$R_i : x_1 \dots x_{n_i} \rightarrow y_1 \dots y_{m_i},$$

а також експертних оцінок, які формують нечіткі правила виводу для цих правил.

На вхід системи подається набір вхідних даних і шукані змінні, на виході потрібно отримати шукані дані:

$$F(R_1 \dots R_k, x_1 \dots x_n) = y_1 \dots y_m,$$

Головна частина. Для рішення даної задачі було створено архітектуру вказану на схемі 1

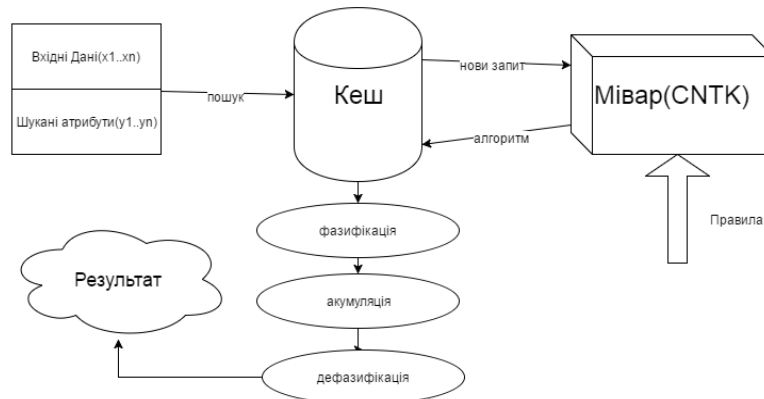


Схема 1

- 1) на вхід надходять вхідні параметри і шукані;
- 2) відбувається перевірка в кешові чи не було знайдено рішення для таких параметрів раніше, якщо вони є, то переходимо до пункту 4;
- 3) шукаємо алгоритм за допомогою використання мівару (Agarwal et al., 2016), реалізованого засобами CNTK, і отримане рішення заносимо в кеш
- 4) виконуємо фазифікацію змінних, акумулюємо значення, проводимо дефазифікацію і вивід.

Оцінка складності. Так як ми маємо n правил, то в самому гіршому випадку нам потрібно буде розглянути $n!$ перестановок і за рахунок паралелізму ми маємо:

$$O\left(\sqrt[k]{n!}\right),$$

де k — кількість потоків.

Але ми можемо наперед упорядкувати правила. Впорядковувати за різними параметрами. Розглянемо два з них:

— кількість вхідних параметрів (n_{in}). Залежність виникає обернено пропорційна. Чим більше ми потребуємо вхідних параметрів, тим пізніше потрібно спробувати це правило, адже зазвичай вхідних даних не дуже багато.

— кількість вихідних параметрів (n_{out}). А тут зв'язок прямо пропорційний, адже чим більше ми можемо отримати вихідних значень, тим швидше потрібно спробувати використати це правило.

Тобто потрібно використати такі ваги для сортування кожного правила:

$$w(R_i) = \left(1 - \frac{n_{in}}{n}\right)^p + \left(\frac{n_{out}}{n}\right)^q,$$

де p і q — параметри, причому, $p + q = 1$ та $0 \leq p, q \leq 1$.

Підібрати p і q можна за допомогою нейронної мережі, де за похибку вважається сума кількості перестановок, потрібних для зсуву кожного правила, поділена на загальну кількість перестановок. Так як для спрощення ми задаємо вхідні дані як номери правил, то це буде просто різниця їх значень, а саме:

$$\sum_{i=0}^n \left(r_i - r_{w(r_i)}\right)^2.$$

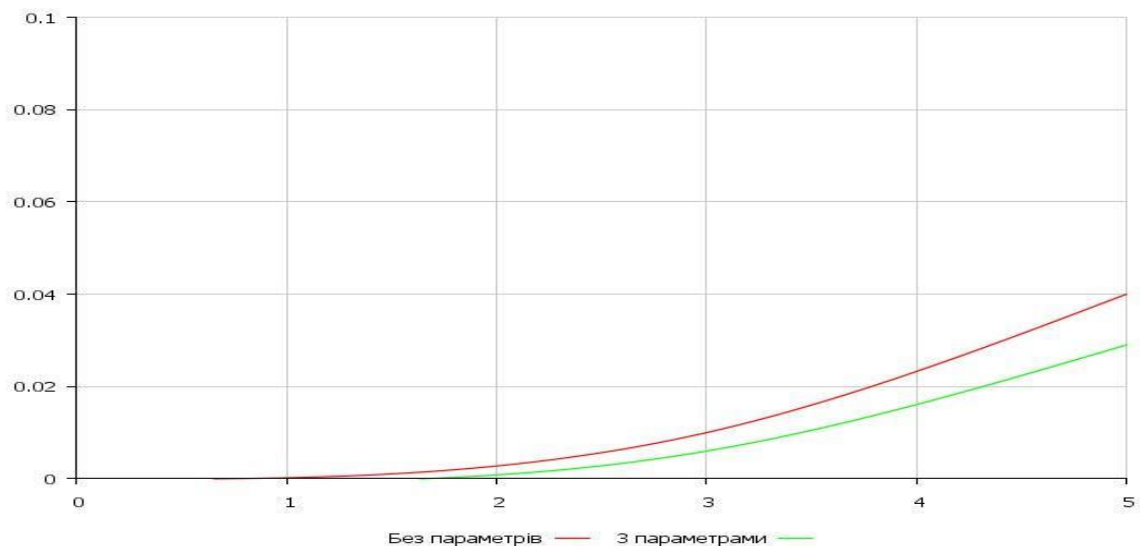


Рис. 1. Графік ефективності оптимізації (вісь x — кількість правил, вісь y — середній час для знаходження алгоритму)

Список літератури

- Agarwal, A., Akchurin, E., Basoglu C. et all. (2016). An Introduction to Computational Networks and the Computational Network Toolkit. Electronic data and program. Retrieved from <http://research.microsoft.com/pubs/226641/CNTKBook-20160217.pdf>
- Варламов, О. О. (2002). *Эволюционные базы данных и знаний для адаптивного синтеза интеллектуальных систем. Миварное информационное пространство*. Москва: Радио и связь.
- Експертні системи (б. д.). У Вікіпедії. Одержано з https://uk.wikipedia.org/wiki/Експертні_системи
- Штовба, С. Д. (2009). *Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику*. Москва: Мир.

МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГІЧНОГО РОЗРИВУ (МІЖ ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ СИСТЕМАМИ)

Ю. П. Буценко, С. М. Веретюк, В. В. Пілінський

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

sergey.veretiuk@gmail.com, pww@ukr.net

Актуальність. Питання виникнення технологічного розриву, а також способи його подолання є надзвичайно актуальною задачею для України.

Аналіз проблеми. Дослідження питання технологічного розриву переважно обмежено розглядом та аналізом економічного відставання між країнами або групами країн. Неокласична та неокейнсіанська економічні теорії аналізують рівень технологічного оснащення, як один з основних факторів, який визначає потенціал економічного зростання країни. Більшість досліджень розглядають технологічний розрив «post factum» і за мету ставлять визначення фактичного відставання між країнами (Fagerberg, 1994).

Життєвий цикл технології, модель розвитку технологічної системи.

Важливим поняттям під час аналізу технологічного розвитку є поняття «життєвого циклу технології».

На якісному рівні цим терміном описують той факт, що можливості будь-якої технології є вичерпними. Протягом свого розвитку технологія послідовно перебуває в таких умовних станах: початкове впровадження, зростання, насичення (рис.1).

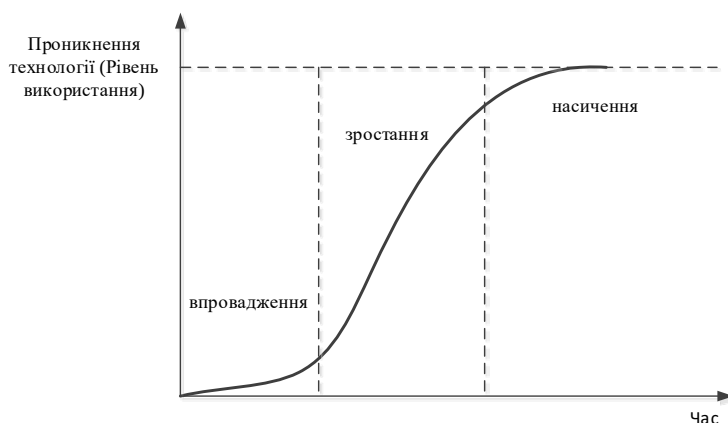


Рис. 1. Етапи еволюції технологічної системи

Система у процесі розвитку досягає певного обмеження, яке відповідає максимальному технологічному потенціалу. У певний момент часу технологія перестає відповідати потребам, а отже виникає попит на нову технологію, яка змінює попередню. Цей процес по суті формує технологічну еволюційну «стрілу часу» (Prigogine & Stengers, 1984) і призводить до незворотності технологічної еволюції в цілому.

At the forefront of innovation through 2G, 3G and 4G cycles

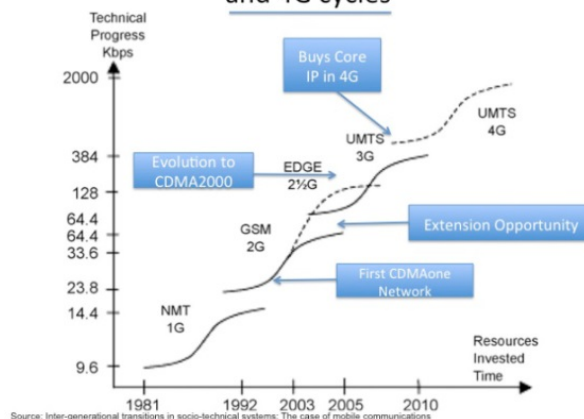


Рис. 2. Еволюція безпроводних технологій

Розвиток технологічної системи можна описати S -законом, який визначає поведінку системи в умовах обмеженого ресурсу або опору середовища (Clayton, 1992). Нехай $f(t)$ — функція, яка характеризує рівень проникнення технології, P — стала, яка визначає потенціал технології, r — швидкість впровадження/проникнення технології, тоді швидкість зміни технології в момент часу t буде пропорційна поточному стану технології та остаточному потенціалу. Відповідне диференціальне рівняння та його класичний розв'язок:

$$\frac{d}{dt} f(t) = rf(t) \left(1 - \frac{f(t)}{P} \right), \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{f_0 P e^{rPt}}{f_0 e^{rPt} + P - f_0} \quad (2)$$

Поява та розвиток технології є наслідком виведення системи зі стану рівноваги за допомогою впровадження інновації. Важливим також є так звана «технологічна спадковість» — нова технологія є продовженням технології, яка вже існує. Розглянемо еволюцію технічної системи, на яку діє послідовність інновацій. Зробимо припущення:

1) момент початку впливу інновації є моментом початку S подібного розвитку до наступного рівня, інновація визначає максимальний потенціал розвитку на обмеженому часовому інтервалі;

2) досліджувана система лінійна, її перехідна характеристика дорівнює (2);

3) вплив інновацій $Y_{\text{вх}}(t)$ на систему відбувається в моменти подій стаціонарного пуассонівського потоку з інтенсивністю λ (дискретний час);

4) розглянемо дві моделі впливу: а) у вигляді незалежних від потоку величин α розподілених за нормальним законом $N(\mu > 0, \delta < 3\mu)$; б) у вигляді незалежних величин α , які розподілені за законом Пуассона з інтенсивністю, яка експоненційно залежить від часу (прикладом експоненційного характеру інновацій є емпіричний закон Мура). Тоді зазначений сигнал можна представити через суму функцій Гевісайда:

$$Y_{\text{вх}}(t) = \sum_i \alpha_i h(t - t'_i),$$

де t'_i — початок i -ї події, α_i — i -й приріст.

Для визначення реакції системи $Y_{\text{вих}}(t)$ за відомим значенням вхідної дії використаємо метод інтегралу Дюамеля і представимо вихідний сигнал як:

$$Y_{\text{вих}}(t) = Y_{\text{вх}}(0)f(t) + \sum_i^N \alpha_i f(t - t'_i)$$

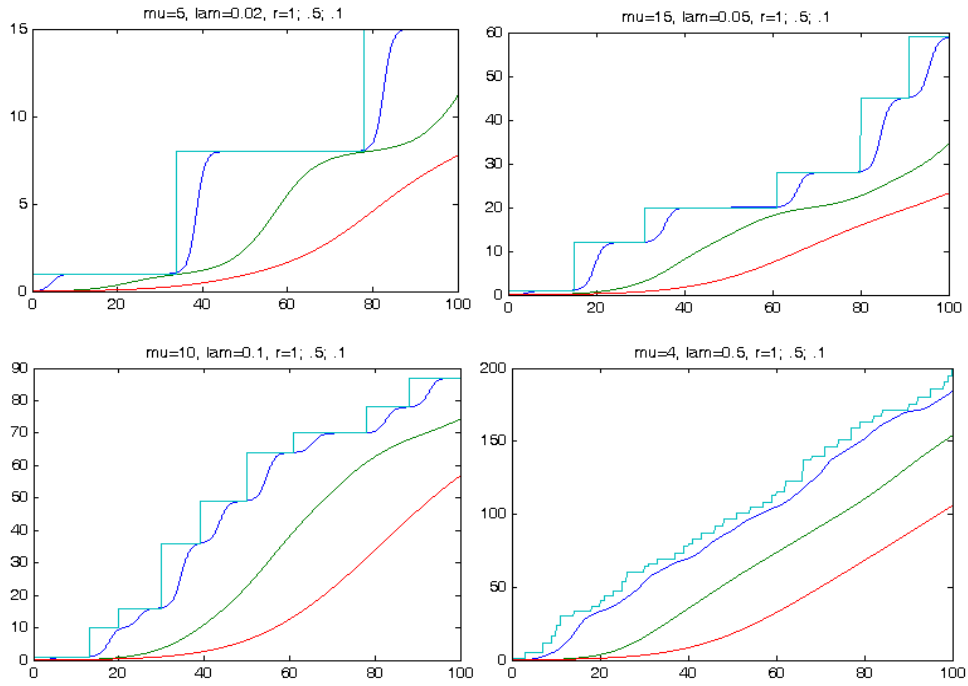


Рис. 3. Результати чисельного моделювання визначення реакції системи на вплив типу «а»

Аналіз еволюційного рівняння та модель технологічного розриву. Модифікуємо (1) з урахуванням залежності від часу технологічного потенціалу:

$$\frac{d}{dt}y(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{P(t)}\right), \quad (3)$$

Отримали класичне рівняння Бернуллі, розв'язок якого:

$$y(t) = \frac{y_0 e^{r(t-t_0)}}{ry_0 \int_{t_0}^t \frac{e^{r(t-t_0)}}{P(t)} dt + 1}$$

Дві моделі впливу можна апроксимувати гладкими функціями:

«а»: $P_a(t) \cong \mu\lambda t$,

«б»: $P_b(t) \cong \frac{1}{\gamma} e^{\gamma(t-\frac{\gamma}{\lambda})}$, де γ — коефіцієнт масштабування інновації.

Розглянемо дві технічні системи S_1 та S_2 . Нехай на першу діє потік інновацій з інтенсивністю λ_1 та математичним сподіваннями приростів μ_1 , на другу — λ_2 , μ_2 . $r_{1,2}$ — коефіцієнти сприйняття інновацій. Технологічним відставанням називатимемо функцію:

$$\varepsilon(t) = \ln \frac{y_1(t)}{y_2(t)}, y_1(t) > 0, y_2(t) > 0,$$

де $y_1(t)$ — реакція системи 1, $y_2(t)$ — реакція системи 2.

Для моделі впливу «а» отримано вираз:

$$\varepsilon(t) = \ln \frac{\mu_1 \lambda_1}{\mu_2 \lambda_2} + \ln \frac{y_{01}}{y_{02}} + (r_1 - r_2)(t - t_0) - \ln \frac{r_1 y_{01} e^{-r_1 t_0} (\text{Ei}(r_1 t) - \text{Ei}(t_0)) + \mu_1 \lambda_1}{r_2 y_{02} e^{-r_2 t_0} (\text{Ei}(r_2 t) - \text{Ei}(t_0)) + \mu_2 \lambda_2}$$

Для умов: $y_{01} = y_{01}, r_1 = r_2 = r, r \neq \gamma, t \gg 0$, отримуємо:

$$\varepsilon(t) \approx \ln \mu_1 \lambda_1 - \ln \mu_2 \lambda_2$$

Для моделі впливу «б» отримано вираз:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \ln \frac{y_{01}}{y_{02}} + (r_1 - r_2)(t - t_0) + \ln \frac{r_1 - \gamma}{r_2 - \gamma} - \\ & - \ln \frac{r_1 y_{01} e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1} - r_1 t_0} \left(e^{(r_1 - \gamma_1)t} - e^{(r_1 - \gamma_1)t_0} \right) + \frac{r_1}{\gamma_1} - 1}{r_2 y_{02} e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_2} - r_2 t_0} \left(e^{(r_2 - \gamma_1)t} - e^{(r_2 - \gamma_1)t_0} \right) + \frac{r_2}{\gamma_1} - 1} \end{aligned}$$

Асимптотика для $y_{01} = y_{01}, r_1 = r_2 = r, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, t \gg 0$:

$$\varepsilon(t) \approx \gamma(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Висновки.

1. Проаналізовано еволюцію технічної системи за умов впливу інновацій.
2. Визначено залежність рівня технологічного розвитку від показників, які характеризують впровадження інновацій — середнє значення потенціалу технологічних нововведень та швидкості впровадження інновацій.
3. Розроблено модель технологічного відставання (випередження) двох незалежних технічних систем.

Список літератури

- Christensen, C. M. (1992). Exploring the limits of the technology S-curve. *Production And Operations Management*, 1(4), 334–357.
- Fagerberg, J. (1994). Technology and international differences in grows rates. *Journal of Economic Literature*, 32(3), 1147–1175.
- Prigogine, I. & Stengers, I. (1984). *Order out of chaos. Man's new dialogue with nature*. London: Heinemann.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАЖОРИТАРНОГО ГОЛОСУВАННЯ ДЛЯ ДІАГНОСТУВАННЯ ТЕХНОГЕННО НЕБЕЗПЕЧНИХ СИСТЕМ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

armchairdoc@yandex.ua, sergeant@aprodos.kpi.ua

Техногенно небезпечні системи — це системи, експлуатація яких зазвичай пов'язана з ризиками, при цьому, зокрема, можливі смертельні випадки або завдання величезних майнових збитків у разі їхнього виходу з ладу (Панкратова, Радюк, 2008). Такі керуючі системи застосовують у багатьох галузях, зокрема, в автомобільній промисловості, медицині, військовій та космічній галузях, у промисловості для керування виробничими процесами, робототехніці та побуті. Існує потреба підвищення надійності, готовності та безпечності в усіх вищезгаданих галузях. Якщо до складу системи входить єдиний модуль чи канал зв'язку, то в разі виникнення несправностей у ньому через шум (завади) система може відмовити і може виникнути надзвичайна ситуація. Отже, у системах з ненадійними елементами для приховування відмов використовують N -модульне резервування або N -версійне програмування разом з відповідною математичною моделлю голосування (Ковалев, Морозов, Царев, 2006).

У літературі згадується багато різновидів алгоритмів голосування (Алексеев, Кораблев, Шестопапов, 2009). Деякі алгоритми голосування, подібні до голосування за відносною більшістю голосів генерують на виході результат, якщо більшість або наперед задана кількість входів збігаються; у протилежному випадку вони нічого не видають на вихід, так що система може бути переведена в безпечний несправний стан. Але для деяких техногенно небезпечних систем не може бути ніяких безпечних несправних станів. У таких системах пристрій для голосування в будь-якому разі повинен видати на виході деяке припустиме значення, використовуючи низку методик, подібних до змішування виходів або результатів усіх модулів, що називають *змішуванням результатів*. Медіана, середнє значення, зважене середнє значення — суть приклади методик, які застосовують пристрої для голосування з метою змішування входів та видачі на виході деякого значення. Пристрої для голосування, які використовують зважене середнє значення, беручи до уваги ретроспективні записи модулів, призначають надійнішим модулям більший ваговий коефіцієнт.

Нехай на вході пристрою для голосування маємо відповіді $x_1 \dots x_N$ від N еквівалентних модулів. Для досягнення більшої гнучкості системи пропонується застосовувати наступний алгоритм (Latif-Shabgahi, Bass & Bennett, 2002):

1. Кожному модулю для обліку історії попередніх голосувань приписують вагу w_i , яка спочатку дорівнює 1.
2. Для кожної пари відповідей обчислюють міру близькості D_{ij} ($i \neq j$) за наступною формулою:

$$D_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x_i - x_j|}{x_{\max} - x_{\min}}\right)^2, & x_{\max} - x_{\min} \neq 0, \\ 1, & x_{\max} - x_{\min} = 0. \end{cases}$$

де x_i та x_j — значення на виході i -го та j -го модулів відповідно, $x_{\max}$ та $x_{\min}$ — максимальне та мінімальне значення загалом по системі.

3. Кожному модулю ставиться у відповідність сумарна міра близькості, що визначається як сума добутків вагових коефіцієнтів на міру близькості, тобто

$$S_i = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N D_{ij} w_j.$$

4. Як результат голосування вибирають значення x_i , якому відповідає найбільше значення сумарної міри близькості S_i . Далі оновлюють ваги w_i за формулою:

$$w_i = w_i \cdot \frac{S_i}{\sum_{j=1}^N S_j}.$$

Отже, при наступному голосуванні більшу вагу матимуть ті модулі, вихідні значення яких були найближчими до вихідного значення загалом по системі. У такий спосіб враховують історію голосувань окремих модулів.

Список літератури

- Latif-Shabgahi, G., Bass, J. M., & Bennett, S. (2002). Voting algorithms in multiple error scenarios for real-time control applications. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 391–396.
- Алексеев, А. А., Кораблев, Ю. А., Шестопапов, М. Ю. (2009). *Идентификация и диагностика систем*. Москва: Издательский центр «Академия».
- Ковалев, И. В., Морозов, В. А., Царев, Р. Ю. (2006). Программно-алгоритмическое обеспечение методов оценки надежности распределенных компьютерных систем. *Системы управления и информационные технологии*, (4 (26)), 26—30.
- Панкратова, Н. Д., Радюк, А. М. (2008). Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (3), 43—52.

ПРИХОВАНИЙ КАНАЛ ПЕРЕДАВАННЯ ПОВІДОМЛЕНЬ НА ОСНОВІ «КНИЖКОВОГО» ШИФРУ ТА ПУСТОГО КОНТЕЙНЕРА

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
ssaavvaa@ukr.net

На сьогодні найбільш поширеним і популярним стеганографічним методом приховування інформаційного обміну залишається метод найменш значущого біта (НЗБ). Це можна пояснити, мабуть, простотою його реалізації та прозорості самої ідеї методу, що базується на недосконалості зорових і слухових органів людини. Але методу НЗБ притаманні принципові обмеження та недоліки. Головний з них полягає у суттєвому звуженні частини контейнера, яка може бути використана для приховування таємної інформації, тобто, по суті, принциповому обмеженні пропускної спроможності каналу передачі прихованої інформації. Таке обмеження саме по собі в багатьох випадках не є критичним, особливо при передаванні коротких повідомлень. Але інша вада методу, на наш погляд, є принциповою й полягає у наступному.

Звуження області ймовірного приховування суттєво збільшує шанси успішного стеганоаналізу шляхом дослідження статистичного розподілу значень саме молодших бітів. Наприклад, можна досить обґрунтовано припускати, що в реальних графічних та аудіо файлах обов'язково існує кореляційна залежність між значеннями молодших бітів і сусідніх з ними старших. Така залежність визначається конкретним змістом «картинки» або аудіо файлу. Так, якщо за сюжетом яскравість на конкретній ділянці зображення збільшується (ближче до джерела освітлення), то відповідні пікселі скоріше будуть теж змінювати свої значення з 0 на 1, а не з 1 на 0 так само, як і молодші біти. Для вибірок оцифрованого звуку можна теж зафіксувати певний зв'язок між значеннями молодших бітів та сусідніх з ними старших. Окрім того, при високих частотах дискретизації (десятки та сотні кГц) більшість сусідніх за часом вибірок первинного аналогового сигналу напевне виявляться однаковими. Наприклад, мовний аудіо сигнал з великою ймовірністю протягом 5...10 мксек між сусідніми вибірками практично не зміниться й сусідні вибірки виявляться однаковими. Цю закономірність виявлять навіть найпростіші методи аналізу.

Звичайно, аналогічні закономірності можливо виявити лише на статистичному рівні. Але коли вони існують, то можна виявити і їх порушення, а з цього випливає, що статистичний аналіз досить обмеженої області контейнера спроможний виявити присутність (відсутність) прихованого таємного повідомлення M .

Потужну групу методів стегоаналізу складають саме статистичні методи (Губенко, Сипаков, 2015; Кошкина, 2015). Найпростіший з них полягає у χ -квадрат атаці, тобто знаходженні величини

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{emn}^{(i)} - x_{теор}^{(i)})^2}{x_{теор}^{(i)}}$$

де $x_{емп}^{(i)}$ та $x_{теор}^{(i)}$ — характеристики виявлених у ньому закономірностей, які відносяться, відповідно, до загальних закономірностей та фрагментів, «підозрюваних» у наявності вбудованої прихованої інформації. Недоліком такого методу є різке падіння його ефективності при використанні стегосистеми з кодуванням адрес вбудованих бітів та зменшенні об'єму прихованого повідомлення. Щодо інших методів вбудовування прихованих повідомлень, наприклад, спектральних для аудіо файлів, то у цих випадках теж існують досить ефективні статистичні (ймовірнісні) методи аналізу, які дозволяють з високою достовірністю виявити ознаки підозри в модифікації відповідних файлів-контейнерів.

Мабуть, доречно тепер нагадати, що основна мета стеганографічних методів полягає саме у приховуванні, власне, *самого акту інформаційного обміну* між абонентами. Задача ж захисту змісту повідомлень від несанкціонованого доступу до їх змісту успішно та гарантовано сьогодні розв'язується шифруванням.

Розглянемо гіпотетичний (але такий, що може бути легко реалізованим) спосіб прихованого передавання інформації. Цей спосіб базується на використанні класичного так званого «книжкового» шифру. Для ілюстрації ідеї пропонуваного способу використаємо такий сценарій інформаційного обміну (рис. 1).

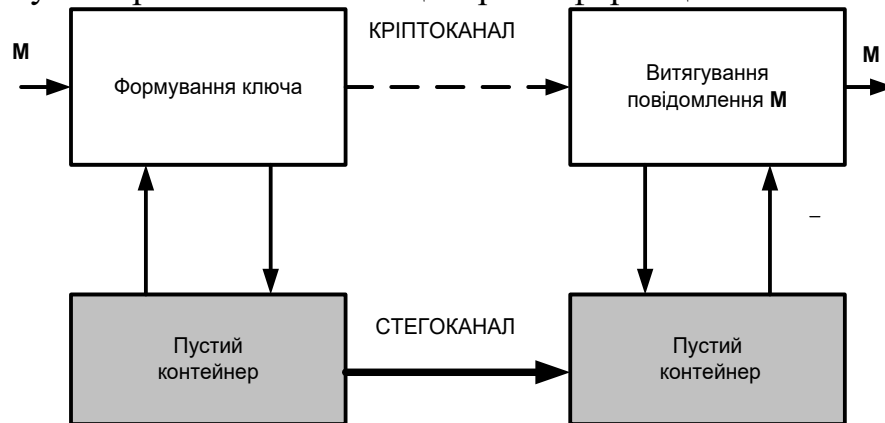


Рис. 1

Абонент на стороні передавача вибирає в якості контейнера довільний файл, наприклад, текстовий (це може бути також і графічний файл). Таємне приховане повідомлення шифруємо заміною його літер адресами таких самих символів у файлі контейнера (так само, як це передбачено при використанні класичного «книжкового» шифру). У випадку графічних файлів складові вибраних пікселів (RGB) інтерпретуються як коди символів у текстових файлах. Приховане повідомлення трансформується у послідовність адрес літер, які містить файл контейнера. Далі ця послідовність після узгодження ключа, наприклад, за протоколом Діффі — Хеллмана передається абоненту на стороні приймача. Зауважимо, що узгодження та використання таємного ключа є *обов'язковою* умовою будь-якого стеганографічного сценарію. Сам акт передавання прихованого повідомлення — це передача контейнера, довільно вибраного абонентом на стороні передавача. А тепер підкреслимо головне: *передається пустий* контейнер. До того ж, його можна й не передавати, якщо у абонента на стороні приймача є бібліотека файлів, які потенційно можуть бути використані. Тоді достатньо передати ім'я обраного файлу. *Оскільки контейнер пустий, то*

виявити в ньому наявність будь-яких модифікацій жоден статистичний аналіз не в змозі. Таким чином, можна стверджувати, що пропонований сценарій реалізує *ідеальне* приховування факту передавання таємного повідомлення.

Звичайно, такий сценарій не є ідеальним і має деякі обмеження та недоліки. Насамперед, при формуванні прихованого повідомлення доводиться суттєво збільшити його обсяг за рахунок необхідності кодування кожного символу (літери, біта) відповідною адресою символу з файлу контейнера, що суттєво зменшує пропускну спроможність стегаканалу. Але при передаванні коротких повідомлень цей фактор не є критичним. Таким прикладом може слугувати формування так званих цифрових водяних знаків, коли «знак» формується на основі файлу, який записується на диск або передається, а умовний абонент інформується лише про адреси символів або пікселів, що містять приховану інформацію.

Розглянутий вище сценарій, є занадто простим і очевидним, щоб претендувати на «революцію» в цифровій стеганографії, але, на наш погляд, може стати приводом до обговорення та дискусії. До речі, одне з принципових питань, що виникає при застосуванні розглянутого сценарію, полягає у наступному.

Чи можна уникнути необхідності попереднього (до акту передавання власне стегоповідомлення M) узгодження ключа? Напевне, ні, оскільки навіть узгодження хоча б класу контейнера (аудіо, відео, графічний) вимагає мінімального спілкування між відправником та одержувачем повідомлення *ще до його відправлення*. А при використанні, наприклад, методу НЗБ одержувач повинен попередньо отримати інформацію про адреси обраних для вбудовування молодших бітів.

Загалом, можна обережно припустити, що кількість інформації, яку необхідно передати на етапі узгодження ключа приблизно пропорційна (або, як мінімум, дорівнює обсягу приховуваного повідомлення). Навряд чи це твердження можна строго довести, але конкретні приклади свідчать на користь його істинності.

Так, при застосуванні методу НЗБ сукупність адрес модифікованих бітів принаймні не менше, ніж довжина прихованого повідомлення. У випадку використання фазових методів до аудіо контейнерів адресатові необхідно попередньо повідомити довжини сегментів та координати точок ДПФ. Методи на базі розширення спектру та інші теж потребують попереднього інформування одержувача, по суті, про те, де саме шукати повідомлення.

Уникнути такого попереднього інформування *принципово неможливо*, оскільки без нього адресат буде позбавлений будь-яких переваг перед стегааналітиком умовного противника. І останнє зауваження: пропонований сценарій інформаційного обміну не вимагає додаткового криптографічного шифрування змісту повідомлення, оскільки таке шифрування вже здійснено за допомогою «книжкового» шифру.

Список літератури

- Губенко, Н. Е., Сипаков, Д. С. (2015). Анализ особенностей методов цифровой стеганографии для защиты информации, передаваемой по открытым каналам. *Информатика и кибернетика*, (2), 28—37.
- Кошкина, Н. В. (2015). Обзор и классификация методов стегоанализа. *Управляющие системы и машины*, (3), 3—12.

ПРО ВЛАТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ W^n -ЗОБРАЖЕННЯ

В. О. Волошина

Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, Київ, Україна

wictorria@gmail.com

Доповідь має на меті висвітлення основних властивостей W^n -зображення та його ймовірнісних застосувань.

1. Побудова W^n -зображення. Побудуємо W^n -розбиття точок $E = [0;1]^n$, задаючи для цього необхідні параметри.

Для цього виконаємо поділ E на r , ($r \geq 2$) замкнених у $\mathbb{R}^n$ множин:

$$\Delta_0^W, \Delta_1^W, \dots, \Delta_{r-1}^W$$

(отримані множини називаються циліндрами W -зображення першого рангу). При цьому мають виконуватися умови:

$$\bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_i^W = E; \lambda(\Delta_i^W \cap \Delta_j^W) = 0, \text{ якщо } i \neq j, \text{ а } i, j \in \overline{0, n-1};$$

$$\lambda(\Delta_0^W) : \lambda(\Delta_1^W) : \dots : \lambda(\Delta_{r-1}^W) = q_0 : q_1 : \dots : q_{r-1},$$

$$\text{причому } q_i > 0, \text{ і } \sum_{i=0}^{r-1} q_i = 1.$$

На другому і кожному наступному кроці вказана процедура повторюється і відношення між мірами Лебега циліндрів одного рангу зберігається.

Таким чином, на k -му кроці кожна множина

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1}}^W, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \in \overline{0, r-1}$$

знову ділиться на r частин

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} 0}^W, \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} 1}^W, \dots, \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [r-1]}^W$$

(ці множини називаються *циліндрами* $(k+1)$ -го рангу), кожна з яких має бути замкненою в $\mathbb{R}^n$. При цьому для довільного фіксованого набору $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \in \overline{0, r-1}$ мають виконуватися умови:

$$1) \bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} i}^W = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}^W$$

$$2) \lambda(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} i}^W \cap \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} j}^W) = 0, i \neq j.$$

$$3) \lambda(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} 0}^W) : \lambda(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} 1}^W) : \dots : \lambda(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} [r-1]}^W) = q_0 : q_1 : \dots : q_{r-1};$$

$$4) \text{diam}(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^W) \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Задане таким чином розбиття визначає зображення точок одиничного квадрата, оскільки для довільної послідовності символів з алфавіту існує послідовність вкладених циліндрів, які стягуються в єдину точку, а також для кожного фіксованого x із квадрата E існує хоча б одне W^n -представлення.

2. Ймовірнісні застосування. Розглянемо клас випадкових векторів, які породжуються незалежними символами W^n -зображення, тобто:

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^W \quad (1)$$

де ξ_k розподілені за законом:

ξ_k	0	1	2	...	$r - 1$
p_{ik}	p_{0k}	p_{1k}	p_{2k}	...	$p_{[r-1]k}$

Для випадкових векторів виду (1) виконується

Теорема 1. Якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0,$$

то розподіл випадкового вектора ξ , заданого умовою (1) є дискретним.

Аналогічно до одновимірного випадку (Працьовитий, 1998) можна також припустити, що для вказаного класу випадкових векторів справджуються узагальнення теорем Джессена — Вінтнера та Леві.

Гіпотеза 1. (Узагальнення теореми Джессена — Вінтнера). *Випадковий вектор виду (1) має чистий розподіл.*

Гіпотеза 2. (Узагальнення теореми Леві). *Випадковий вектор, який виражається формулою (1) має чисто неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} = 0.$$

У роботі Волошина, Торбін (2014) ми спростували гіпотези 1 та 2, а також довели теорему 1 для двовимірного випадку.

Список літератури

- Волошина, В. О., Торбін, Г. М. (2014). Про деякі ймовірнісні феномени, пов'язані з розподілами випадкових векторів, породжених W -зображенням. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, (16 (1)), 258—279.
- Працьовитий, М. В. (1998). *Фрактальний підхід до дослідження сингулярних розподілів*. Київ: Вид-во НПУ.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО КАЛОРИФЕРА У ПРОСТОРІ СТАНІВ

І. М. Голінко, І. Є. Галицька

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
gal@pti.kpi.ua

Автоматичну систему керування кондиціонера необхідно розглядати в рамках єдиного комп'ютерно-інтегрованого комплексу з технологічними взаємозв'язками між обладнанням кондиціонера (Голінко, 2016).

Для розробки комплексної динамічної математичної моделі промислового кондиціонера як єдиного багатовимірного об'єкта керування необхідна наявність математичних моделей обладнання кондиціонера (калориферів, охолоджувачів та зволожувачів) у просторі станів (Голінко, Галицька, 2016).

У роботі розглядається динамічна модель електричного калорифера у просторі станів. При її розробці прийнято наступні спрощення: теплообмін з навколишнім середовищем відсутній; модель містить два динамічні елементи із зосередженими параметрами (елементи ТЕНів та повітря); фізичні властивості матеріальних потоків та теплообмінної поверхні приведені до усереднених значень робочого діапазону апарату.

Розрахункова схема електричного калорифера представлена на рис. 1.

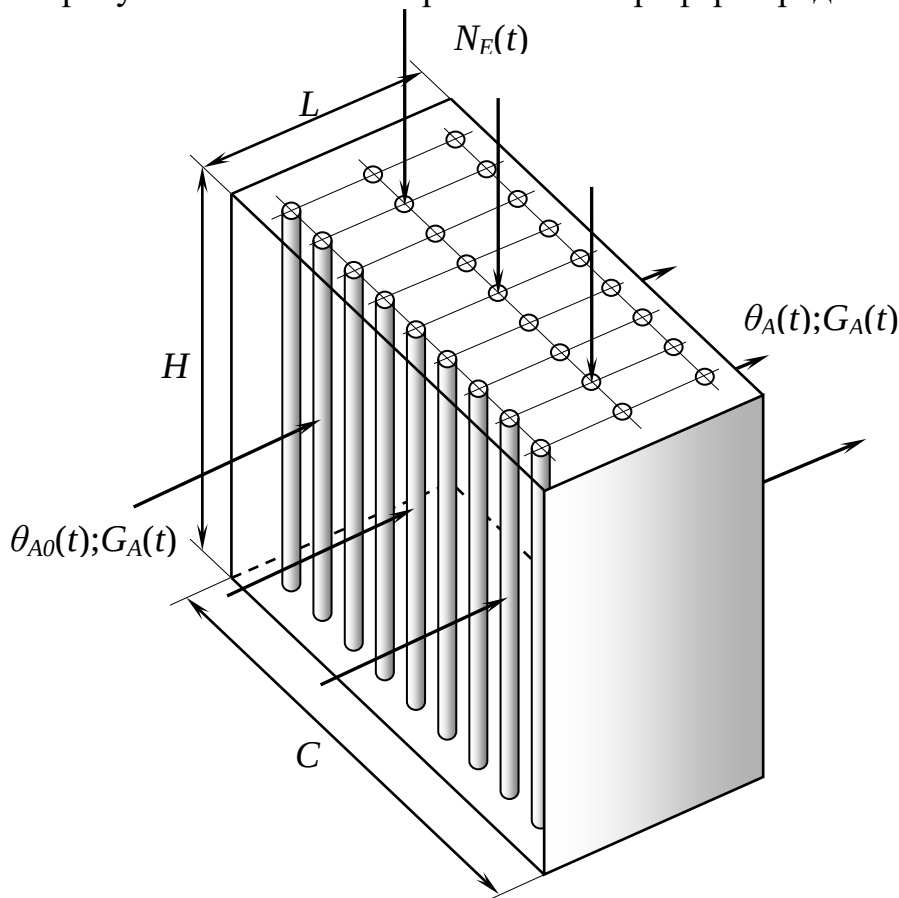


Рис. 1. Розрахункова схема електричного калорифера для моделювання

Розглянуто тепловий баланс для кожного динамічного елемента калорифера та отримано систему диференціальних рівнянь теплових балансів для ТЕНів та повітряного простору калорифера:

$$\begin{aligned} N_E - \alpha_0 F_0 (\theta_E - \theta_A) &= M_E c_E \frac{d\theta_E}{dt}, \\ G_A c_A (\theta_{A0} - \theta_A) + \alpha_0 F_0 (\theta_E - \theta_A) &= M_A c_A \frac{d\theta_A}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

де c_E — приведена теплоємність ТЕНа (конструктивно ТЕН містить металічні та діелектричні матеріали, теплоємність яких усереднюється пропорційно частці маси кожного елемента); M_E — загальна маса ТЕНів; α_0 — коефіцієнт тепловіддачі між повітрям у калорифері та зовнішньою поверхнею ТЕНів; F_0 — загальна площа оребреної поверхні ТЕНів, c_A — теплоємність повітря; M_A — маса повітря в об'ємі $L \times C \times H$ калорифера.

Після спрощення та лінеаризації рівняння (1) у приростах приймуть вигляд (2), що описують динаміку теплообміну для електричного калорифера:

$$\begin{cases} T_E \frac{d\Delta\theta_E}{dt} + \Delta\theta_E = k_0 \Delta N_E + k_1 \Delta\theta_A; \\ T_A \frac{d\Delta\theta_A}{dt} + \Delta\theta_A = k_2 \Delta\theta_E + k_3 \Delta\theta_{A0} + k_4 \Delta G_A. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{де } K_E = \alpha_0 F_0; \quad T_E = \frac{c_E M_E}{K_E}; \quad k_0 = \frac{1}{K_E}; \quad k_1 = 1; \quad K_A = c_A G_A + \alpha_0 F_0;$$

$$T_A = \frac{c_A M_A}{K_A}; \quad k_2 = \frac{\alpha_0 F_0}{K_A}; \quad k_3 = 1 - k_2; \quad k_4 = \frac{c_A (\theta_{A0} - \theta_A)}{K_A}.$$

Математична модель (2) у просторі станів має вигляд:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \mathbf{X}' &= \begin{bmatrix} \Delta\theta'_A \\ 0 \\ \Delta\theta'_E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/T_A & 0 & k_2/T_A \\ 0 & -1 & 0 \\ k_1/T_E & 0 & -1/T_E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta d_A \\ \Delta\theta_E \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} k_3/T_A & 0 & k_4/T_A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0/T_E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{A0} \\ \Delta d_{A0} \\ \Delta G_A \\ \Delta N_E \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Добуток $\mathbf{B}\mathbf{U}$ (3) розкладено на керуючу ($\mathbf{U}_1$) та збурюючу ($\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$) складові, що у подальшому спростить отримання комплексних моделей:

$$\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{B}_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{F}_3,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0/T_E \end{bmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} k_3/T_A & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} k_4/T_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{U}_1 = \Delta N_E; \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{A0} \\ \Delta d_{A0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_3 = \Delta G_A.$$

Порівнюючи моделі (2) та (3) — остання доповнена параметром вхідного (d_{A0}) та вихідного (d_A) вологовмісту. Нагрівання повітря калорифером не впливає на вологовміст ($d_A = d_{A0}$), що відображає (3).

Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь (2) відносно вихідної величини $\Delta\theta_A$. Для системи (2) використаємо перетворення Лапласа відносно змінної t .

$$\begin{cases} \Delta\theta_E (T_E p + 1) = k_0 \Delta N_E + k_1 \Delta\theta_A; \\ \Delta\theta_A (T_A p + 1) = k_2 \Delta\theta_E + k_3 \Delta\theta_{A0} + k_4 \Delta G_A. \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta\theta_A (T_A p + 1) = k_2 \Delta\theta_E + k_3 \Delta\theta_{A0} + k_4 \Delta G_A. \quad (6)$$

Із (5) знаходимо $\Delta\theta_E(p)$, знайдене підставляємо у (6), після групування подібних та спрощення отримаємо:

$$\Delta\theta_A = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \left[(b_1 p + b_0) \Delta\theta_{A0} + (b_3 p + b_2) \Delta G_A + b_4 \Delta N_E \right], \quad (7)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{T_E T_A}{1 - k_1 k_2}; a_1 = \frac{T_E + T_A}{1 - k_1 k_2}; b_0 = \frac{k_3}{1 - k_1 k_2}; b_1 = \frac{k_3 T_E}{1 - k_1 k_2}; b_2 = \frac{k_4}{1 - k_1 k_2};$$

$$b_3 = \frac{k_4 T_E}{1 - k_1 k_2}; b_4 = \frac{k_0 k_2}{1 - k_1 k_2}.$$

Застосовуючи зворотне перетворення Лапласа, можна знайти аналітичний розв'язок (7) за каналами впливу.

Представимо (7) багатовимірною моделлю у області Лапласа, враховуючи вологовміст повітря

$$\mathbf{Y} = \mathbf{WZ},$$

де

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta d_A \end{bmatrix}; \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & W_{14} & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Z}^T = [\Delta\theta_{A0} \quad \Delta d_{A0} \quad \Delta G_A \quad \Delta N_E \quad 0];$$

$$W_{11} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; W_{13} = \frac{b_3 p + b_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; W_{14} = \frac{b_4}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; W_{22} = 1.$$

Проведено імітаційне моделювання динамічних процесів для еклектичного калорифера HE 36/2 припливної системи центрального кондиціонера CV-P 2L N-63B/F-N виробництва фірми VTS CLIMA за каналами впливу.

На рис. 2 представлено результати моделювання. Отримані перехідні процеси мають малу інерційність та аперіодичний характер, причому, інерційність каналу регулювання більша за інерційність каналів збурення. Динамічна поведінка електричного калорифера пояснюється невеликим об'ємом повітряного простору апарату $V_A=0.152 \text{ м}^3$ із відносно значною витратою повітря $G_A=0.43 \text{ кг/сек}$, що нагрівається.

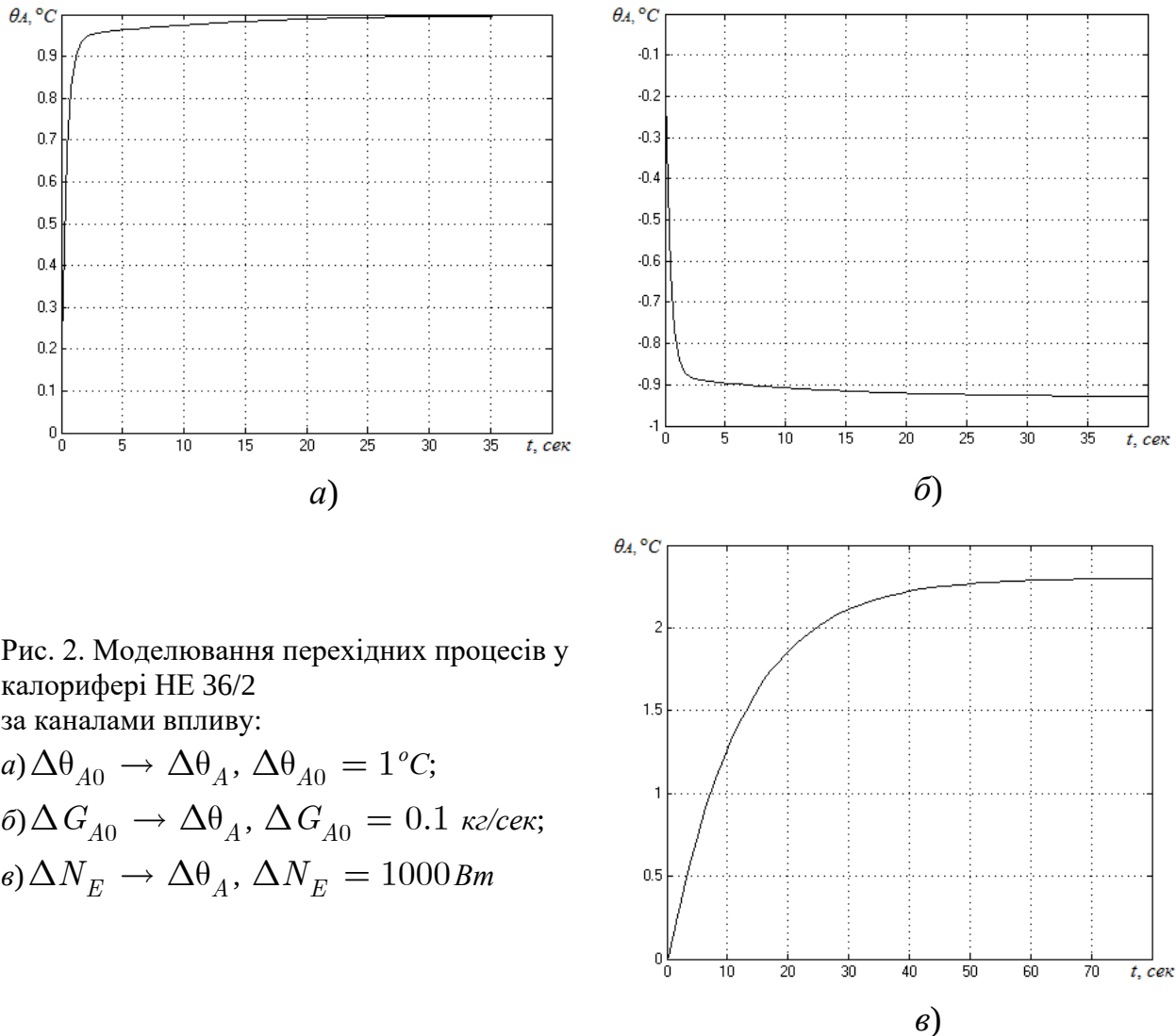


Рис. 2. Моделювання перехідних процесів у калорифері HE 36/2 за каналами впливу:

- а) $\Delta\theta_{A0} \rightarrow \Delta\theta_A$, $\Delta\theta_{A0} = 1^\circ\text{C}$;
- б) $\Delta G_{A0} \rightarrow \Delta\theta_A$, $\Delta G_{A0} = 0.1 \text{ кг/сек}$;
- в) $\Delta N_E \rightarrow \Delta\theta_A$, $\Delta N_E = 1000 \text{ Вт}$

Висновки. Отримана динамічна модель електричного калорифера може бути основою для синтезу автоматичної системи керування та моделювання перехідних процесів у середовищі MatLAB. Суттєвою перевагою даного методу є відносно зручні обчислювальні властивості для динамічних об'єктів та те, що модель у просторі станів дає можливість досліджувати багатовимірні системи.

Список літератури

- Голінко, І. М. (2016). Принципи синтезу автоматичних систем керування промисловими кондиціонерами. *Автоматизація технологічних і бізнес-процесів*, (8), 33—42.
- Голінко, І. М., Галицька, І. Є. (2016). Оптимізація багатовимірних систем керування для комплексів штучного мікроклімату. *Прикарпатський вісник НТШ*, (1), 61—73.

ПРО РОЗВИТОК ПІДХОДУ МОРЕРИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

С. В. Горленко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

До означення аналітичних функцій та дослідження їх властивостей можна підійти з різних боків.

Так, *аналітичною* можна назвати однозначну функцію комплексної змінної, яка має похідну в кожній точці області $D \subset \mathbb{C}$. Це означення, засноване на диференціальних властивостях функцій, запропонував Коші і, саме виходячи з нього, встановив основні властивості аналітичних функцій.

З іншого боку, *аналітичною* можна назвати функцію

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

для якої пара $(u(x, y); v(x, y))$ складається з гармонічних, взаємно спряжених дійсних функцій. Побудовою теорії аналітичних функцій, заснованій на цьому підході, займався Ріман.

За Веєрштрасом можна також уважати *аналітичною* функцію, яка в деякому околі кожної точки області $D \subset \mathbb{C}$ є сумою степеневих рядів (так звана *голоморфна* функція).

Нарешті, за Оsgудом *аналітичною* в однозв'язній області $D \subset \mathbb{C}$ можна назвати будь-яку неперервну функцію комплексної змінної, для якої

$$\oint_L f(z) dz,$$

узятий за будь-яким замкненим контуром $L \subset D$, дорівнює нулю.

Еквівалентність усіх перелічених підходів доводиться в підручниках з теорії аналітичних функцій (див., наприклад, Привалов (1977)). Подальші дослідження в цьому напрямку мали за мету послабити умови, що фігурують в означеннях аналітичності функцій.

Мета цієї роботи — навести історичні кроки узагальнення підходу Оsgуда. У всіх наступних теоремах область D вважаємо однозв'язною.

Теорема Морери в її класичному формулюванні стверджує: *якщо для однозначної та неперервної функції $w = f(z)$ комплексної змінної*

$$\oint_L f(z) dz = 0$$

для будь-якого замкнутого контуру $L \subset D$, то функція $f(z)$ аналітична в області D .

Послаблювати умови цієї теореми можна у двох напрямках:

- 1) намагатись замінити умову неперервності підінтегральної функції слабшою;
- 2) обмежити довільність контуру L .

Такі дослідження й було проведено Федоровим (1933, 1939). Ним було доведено наступні твердження.

Теорема А. Нехай $f(z)$ сумовна в області D і нехай Σ — сім'я замкнутих кривих L , що містить криві як завгодно малих діаметрів. Тоді, якщо

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

для кривих L із сім'ї Σ , або одержаних їх паралельним перенесенням по області D , то функція $f(z)$ майже скрізь збігається з аналітичною в області D функцією.

Теорема Б. Нехай $f(z)$ — однозначна і неперервна в області D і нехай Σ — сім'я замкнутих кривих L , що містить криві як завгодно малих діаметрів та одержаних їх паралельним перенесенням по області D . Тоді, якщо для будь-якої послідовності $\{L_n\}$ кривих сім'ї Σ , кожна з яких міститься всередині попередньої і $\text{diam } L_n \rightarrow 0$, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n} \oint_{L_n} f(z)dz = 0,$$

де σ_n — площа області, обмеженої L_n , то $f(z)$ — аналітична в області D .

Толстовим (1950) було одержане наступне узагальнення теореми Морери:

Якщо $f(z)$ — вимірна в області D і для кожного замкнутого й опуклого контуру $L \subset D$

$$\oint_L f(z)dz = 0,$$

то $f(z)$ майже скрізь збігається з аналітичною в D функцією.

Пономарьовим (1970) відзначено, що в теоремах Федорова можна відмовитись від вимоги прямування до нуля діаметрів кривих, замінивши цю вимогу менш обмежувальною. А саме, було доведено теорему:

Нехай $f(z)$ — неперервна функція, означена в комплексній площині $\mathbb{C}$, а R — деяка множина додатних чисел, така, що похідна множина $R' \neq \emptyset$. Тоді, якщо для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ і будь-якого $r \in \mathbb{R}$

$$\oint_{|\xi|=r} f(z + \xi)d\xi = 0,$$

то $f(z)$ — аналітична функція.

Нарешті, Залкманом (Zalcman, 1972) було доведена (за допомогою апарата узагальнених функцій) досить сильна

Теорема. Нехай $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ і нехай існують такі різні додатні числа $r_1 \neq r_2$, що

$$\oint_{L_r(z)} f(\xi)d\xi = 0,$$

для $r = r_1$ та $r = r_2$ майже для всіх $z \in \mathbb{C}$. Тоді, якщо $\frac{r_1}{r_2} \notin \mathbb{E}_1$, де $\mathbb{E}_1$ — множина відношень додатних нулів функції Бесселя $J_1(z)$, то функція $f(z)$ майже скрізь збігається з аналітичною функцією.

Список літератури

- Zalcman, L. (1972). Analicity and the Pompein problem. *Arch. Ration. Mech and Anal.*, 47(3), 237–254.
- Пономарев, С. П. (1970). Об одном условии аналитичности. *Сибирский математический журнал*, 11(2), 471—474.
- Привалов, И. И. (1977). *Введение в теорию функций комплексного переменного*. Москва: Наука.
- Толстов, Г. П. (1950). О криволинейном и повторном интеграле. В кн. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, 35. Москва: Изд. АН СССР.
- Федоров, В. С. (1933). О теореме Морера. *Математический сборник*, 40(2), 168—179.
- Федоров, В. С. (1949). Об одном свойстве криволинейных интегралов. *Математический сборник*, 66(1), 15—26.

ПРОЕКТУВАННЯ ГЕНЕРАТОРІВ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЯК ЗАДАЧА СИНТЕЗУ ЦИФРОВОГО АВТОМАТА

С. О. Доля, Ю. Г. Савченко

НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», Київ, Україна

ssaavvaa@ukr.net

На сьогодні найбільш поширеним і популярним засобом генерації послідовностей псевдовипадкових бінарних чисел (ППБЧ) залишаються регістри зсуву зі зворотними зв'язками за модулем 2 (*linear feed backshift register* — LFSR). Це гарантує просту реалізацію, особливо, коли мова йде про апаратне виконання, та більш-менш задовільні статистичні характеристики послідовності. У випадках, коли критерієм якості послідовності не є її непередбачуваність (неможливість обчислити наступний елемент послідовності за значеннями попередніх елементів), такі реалізації можна вважати оптимальними. Прикладом такого застосування є генерація тестових сигналів для сигнатурного діагностування технічного стану цифрових пристроїв. У цих випадках LFSR є, мабуть, ідеальним засобом генерації ППБЧ.

Зовсім інша справа при застосуванні ППБЧ в системах криптографічного захисту. Тут саме непередбачуваність стає базовим критерієм оцінки умовної якості генерованої послідовності. Якщо розглядати типове застосування генераторів ППБЧ, наприклад в скремблерах, то генерована послідовність є, фактично, ключем шифрування/дешифрування, тобто від можливості передбачити її перебіг залежать шанси зламу шифру, іншими словами, можливість несанкціонованого доступу до інформації. У разі застосування LFSR через звуження різноманіття варіацій параметрів генератора такі можливості суттєво зростають. По суті, знаючи лише частину послідовності, криптоаналітик зможе обчислити (Пометун, 2008) всі параметри LFSR, які визначають ППБЧ. Функції, які реалізує LFSR, можна записати у вигляді канонічних рівнянь автомата Мура

$$q_i(t+1) = q_{i-1}(t), i = 2, 3, \dots, n;$$

$$q_1(t+1) = \bigoplus_{i=1}^n a_i q_i(t), i = 1, 2, \dots, n,$$

де n — кількість елементів пам'яті автомата; q та t , відповідно, символи значення поточного стану елементів пам'яті та дискретного часу тактів автомата, коефіцієнти a_i визначають конкретний вигляд зворотних зв'язків регістра.

Зазначимо, щоб «підібрати ключ» криптоаналітику у цьому випадку, досить перебрати 2^n варіантів коефіцієнтів a_i , що для комп'ютера при реальних значеннях n не є проблемою. З метою кардинального збільшення різноманіття можливих реалізацій генератора доцільно максимально розширити клас цифрових пристроїв, що можуть бути використані для генерації (Буценко, Савченко, 2016). Таким очевидним максимальним розширенням є перехід до загальної моделі автомата Мілі з канонічними рівняннями

$$y_j(t+1) = f_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t); q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)];$$

$$q_i(t+1) = \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t); q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)],$$

де f_j та φ_i — відповідно, функції виходів та переходів автомата.

У загальному випадку, щоб визначити ці функції перебором можливих варіантів, потрібно проаналізувати (лише для *однієї* з функцій) таку кількість варіантів, яка виходить за межі навіть можливостей найпотужніших суперкомп'ютерів. Так, вже для $n = 8$ кількість варіантів логічних функцій, які слід розглянути, становить більше, ніж 10^{80} . Зрозуміло, не всі функції з такої множини є «перспективними» для побудови генератора ППБЧ, але цей фактор лише ускладнює проблему. Для ілюстрації пропонованого підходу розглянемо простий приклад синтезу автомата Мура для $n = 4$.

Розглянемо випадково згенеровану таблицю істинності для такого автомата (табл. 1).

Табл. 1. Таблиця істинності для автомата Мура при $n = 4$

Десяткові числа		Двійкові числа	
		X	Y
0	8	0000	1000
1	12	0001	1100
2	3	0010	0011
3	10	0011	1010
4	6	0100	0110
5	11	0101	1011
6	9	0110	1001
7	5	0111	0101
8	2	1000	0010
9	1	1001	0001
10	13	1010	1101
11	14	1011	1110
12	7	1100	0111
13	4	1101	0100
14	15	1110	1111
15	0	1111	0000

У таблиці $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Мінімізуємо логічні функції та запишемо залежність вихідних даних від вхідних:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_2 x_4} + \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3}, \\
y_2 &= \overline{x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}, \\
y_3 &= \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_4}, \\
y_4 &= \overline{x_3 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_4} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}.
\end{aligned}$$

Послідовність на виході автомата буде мати наступний вигляд:
0000100000100011101011010100011010010001110001110101101111101111.

Статистичні (частотні) параметри послідовності:

— довжина до повторення — 64 біта;

— кількість нулів — 32, кількість одиниць — 32. Отже, імовірність нуля або одиниці однакова — 0,5.

— кількість комбінацій «00» — 8, «01» — 8, «10» — 8, «11» — 8. Імовірність для груп однакова — 0,25.

кількість комбінацій «000» — 4, «001» — 3, «010» — 4, «011» — 0, «100» — 0, «101» — 3, «110» — 3, «111» — 4. для чотирибітових комбінацій імовірність кожної комбінації буде 1/16.

Зі збільшенням довжини фрагментів рівномірність частотних характеристик, очевидно, буде зникати. Але, якщо розглядати характеристики на бітовому рівні, можна вважати їх задовільними.

Наведений приклад з багатьох причин не можна вважати узагальнюючим, передусім, через доволі невелику кількість різних чисел у послідовності. По-друге, не були розглянуті можливі інші варіанти початкового етапу синтезу автомата, а саме, вибір таблиці відповідності між поточним та попереднім елементом послідовності.

У загальному випадку, саме цей етап виявляється надзвичайно важливим у формуванні статистичних параметрів ППБЧ. Зокрема, така таблиця може дати в результаті автомат, який генерує послідовність максимальної довжини, тобто містить усі задані числа. В іншому випадку граф переходів автомата розпадається на окремі цикли, і перехід з циклу в цикл можна здійснити лише за допомогою зовнішніх вхідних сигналів, що еквівалентно використанню моделі автомата Мілі. Зазначимо, що такі сигнали лише умовно є зовнішніми, оскільки можуть бути сформовані окремим блоком керування, що містить лічильник тактових імпульсів і дешифратор.

На закінчення слід зазначити, що на час виникнення апаратних реалізацій ППБЧ ще не існувало мікроелектронних технологій, тому реалізації на регістрах зсуву завдяки економічності за вартісними та масо-габаритними параметрами були найбільш привабливими. На сьогодні, враховуючи функціональні можливості сучасних ПЛІС та НВІС, ці критерії мають другорядне значення, а непередбачуваність ППБЧ стає вирішальним критерієм. Наприклад, при $n = 32$ генератор легко може бути реалізований однією мікросхемою, а довжина генерованої ППБЧ перевищує 10^{10} біт до повторення чисел, що гарантує

практичну неможливість передбачити її майбутній перебіг на основі аналізу попередніх фрагментів.

Список літератури

- Буценко, Ю. П., Савченко, Ю. Г. (2016). Автоматні моделі генераторів псевдовипадкових бінарних чисел. *Сучасний захист інформації*, (1), 32—37.
- Пометун, С. О. (2008). Алгебраїчні атаки на потокові шифратори як узагальнення кореляційних атак. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (2), 29—40.

ХАРАКТЕРИЗАЦІЙНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВЛАСТИВОСТІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ ІНДИВІДУАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ

В. О. Дрозденко

Білоцерківський національний аграрний університет, Біла Церква, Україна
drozdenko@yandex.ru

Розглянемо випадкову величину X , з функцією розподілу $F(x)$, яка відображає розмір грошової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Страхову премію, тобто суму, яку клієнт платить страховій компанії при укладанні угоди за покриття ризику X , позначатимемо $\pi[X]$.

У більшості випадків величина X вважається невід'ємною, проте від'ємні значення величини X інколи допускаються та трактуються як штрафні санкції, що надходять від застрахованого до страхової компанії за невиконання умов страхової угоди.

Означимо декілька методів індивідуального страхового оцінювання, які ми збираємось аналізувати.

Нетто-премія означається як математичне сподівання розміру грошової компенсації пов'язаної з ризиком X , тобто

$$\pi_{\text{нетто}}[X] = E[X].$$

Премія середнього значення, асоційована з ризиком X , котру в публікації позначатимемо як $\pi_{\text{с.з.}}[X]$, основана на функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$, такий, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X]) = E[v(X)].$$

Премія еквівалентної корисності страховика для ризику X , яку позначатимемо $\pi_{\text{е.к.с.}}[X]$, означається як розв'язок рівняння

$$U(W) = E[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X] - X)], \quad (1)$$

де W — це початковий капітал страховика на момент укладання страхової угоди, а функція $U \in C^2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу страховика, яка задовольняє умови $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності капіталу страховика обрана таким чином, що величина $U(0)$ відображає корисність капіталу страховика на момент укладання страхової угоди, рівняння (1) замінюють рівнянням

$$U(0) = E[U(\pi[X] - X)],$$

а відповідний спосіб оцінювання називають *принципом нульової корисності страховика*; в даному випадку отриману премію позначатимемо $\pi_{\text{н.к.с.}}[X]$.

Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику X , яку позначатимемо $\pi_{e.k.k.}[X]$, означається як розв'язок рівняння

$$u(\omega - \pi_{e.k.k.}[X]) = E[u(\omega - X)], \quad (2)$$

де ω — це початковий капітал клієнта на момент укладання страхової угоди, а функція $u(x) \in C^2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу клієнта, яка задовольняє умови $u'(x) > 0$ та $u''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності капіталу клієнта обрана таким чином, що величина $u(0)$ відображає корисність капіталу клієнта на момент укладання страхової угоди, рівняння (2) замінюють рівнянням

$$u(-\pi[X]) = E[u(-X)],$$

а відповідний спосіб страхового оцінювання називають *принципом нульової корисності клієнта*; отриману в такий спосіб премію позначатимемо $\pi_{n.k.k.}[X]$.

Швейцарська премія для ризику X , яку позначатимемо $\pi_{швейц.}[X]$, залежна від параметра $\Delta \in [0, 1]$ та основана на функції $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$V((1 - \Delta)\pi_{швейц.}[X]) = E[V(X - \Delta\pi_{швейц.}[X])].$$

Звернемо увагу на те, що у випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип страхового оцінювання еквівалентний принципу середнього значення з функцією $v(x) := V(x)$, а у випадку $\Delta = 1$, він еквівалентний принципу нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$.

Трапляється, що вищеописані методи страхового оцінювання застосовують до деяких спеціальних класів ризиків; у якості прикладу можна згадати клас усіх невід'ємних ризиків, або клас ризиків обмежених зверху певним дійсним значенням. У таких випадках функції $v(x)$, $U(x)$, $u(x)$, $V(x)$ достатньо означати на підмножинах $\mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вгору/вниз так, що рівняння, яке задає той чи інший принцип зберігає коректний математичний зміст для всіх ризиків зі згаданого класу.

Говоритимемо, що той чи інший метод індивідуального страхового оцінювання володіє *властивістю мультиплікативної інваріантності*, якщо для довільного допустимого ризику X та довільного $\Theta \in \mathbb{R}^+$ виконується $\pi[\Theta X] = \Theta\pi[X]$.

Детальніше про індивідуальні методи страхового оцінювання, а також властивості, які може мати або не мати окремо обраний спосіб підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, наприклад, в роботах Asmussen & Albrecher (2010), Bühlmann (1970), Dickson (2005), Gerber (1979), Kaas et al. (2008), Kremer (1999), Rolski et al. (1999), Straub (1988).

Теорема 1. *Принцип середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b$, для $a > 0$, тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Користуючись простою технікою від противного, твердження теореми 1 може бути використане для демонстрації того, що випадок $v(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу середнього значення з нетто-принципом; використавши відповідні нижче-представлені твердження можна показати, що випадок $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу еквівалентної/нульової корисності страховика з нетто-принципом; випадок $u(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта з нетто-принципом; для будь-якого $\Delta \in [0, 1]$, випадок $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу швейцарського принципу з нетто-принципом.

Стосовно нижче-представлених методів індивідуального страхового оцінювання згенерованих функціями $v(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, $u(x) = -a(-x)^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, $V(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, зауважимо, що прямого еквівалентного аналогу для них немає серед «загально-вживаних» принципів індивідуального страхового оцінювання.

Теорема 2. *Принцип середнього значення, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k \geq 1$, означеній для $x \in (0, +\infty)$.*

Звернемо увагу на те, що для функції $v(x) = ax^k + b$, при $a > 0$ та $k > 1$, умова $v'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$, отже, твердження теореми 2 не суперечить твердженню теореми 1.

Теорема 3. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b$, при $a > 0$, тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Звернемо увагу на те, що аналогу теорем 2 та 5 не існує для принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.

Теорема 4. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b$, для $a > 0$, тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Наступна теорема справедлива лише для принципу нульової корисності клієнта, і, взагалі кажучи, не справедлива для принципу еквівалентної корисності клієнта.

Теорема 5. *Принцип нульової корисності страховика, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $u(x) = -a(-x)^k + b$, для $a > 0$ та $k \geq 1$, означений для $x \in (-\infty, 0)$.*

Звернемо увагу на те, що для функції $u(x) = -a(-x)^k + b$, при $a > 0$ та $k > 1$, умова $u'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$, отже, твердження теореми 5 не суперечить твердженню теореми 4.

Теорема 6. *Для будь-якого $\Delta \in [0, 1]$, швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, тобто лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Так як, у випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип страхового оцінювання еквівалентний принципу середнього значення, то, на нашу думку, вартий уваги наступний наслідок до теореми 1.

Наслідок (до теореми 2) *У випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k \geq 1$, означений на $x \in (0, +\infty)$.*

З доведенням анонсованих в публікації результатів можна ознайомитись в роботі Pratsiovytyi & Drozdenko (2014).

Список літератури

- Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* (2nd ed.). Singapore: World Scientific.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical methods in Risk theory*. Berlin: Springer.
- Dickson, D. C. M. (2005). *Insurance risk and ruin*. Cambridge: Cambridge University Publishing.
- Gerber, H.-U. (1979). *An introduction to Mathematical risk theory*. Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial risk theory using R*. Berlin: Springer.
- Kremer, E. (1999). *Applied Risk Theory*. Aachen: Shaker.
- Pratsiovytyi, M. V., & Drozdenko, V. O. (2014). Characterization theorems for scale invariance property of insurance premium calculation principles. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(3), 267–288.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Straub, E. (1988). *Non-life insurance mathematics*. Berlin: Springer.

ЗАСТОСУВАННЯ СТАТИЧНИХ ГІПОТЕЗ У ХІМІЇ

П. Ю. Євзютін, В. В. Листопадова

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

pavelievziutin@gmail.com, listopadovavv@gmail.com

Вступ. З давніх-давен науковці намагалися на основі спостереження виводити закономірності і використовувати їх у своїй подальшій роботі. Наприкінці XIX століття німецький хімік Георг Гельм опублікував трактат під назвою «Принципи математичної хімії: Енергетика хімічних явищ». З цієї події пов'язують народження науки — математична хімія.

У роботі ми розглянемо застосування статичних гіпотез у хімії. За допомогою цих математичних методів вивчають дисперсії та розподілення речовини (розподіл Стюдента, Фішера — Снедекора та інші). Метою даної роботи є порівняння методів досліджень та оцінка їх точності.

Статична обробка результатів досліджень у науковій діяльності. Статичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу генеральної сукупності або про значення параметрів відомих розподілів.

Нульова гіпотеза — висунута гіпотеза. Конкуруюча — гіпотеза, що суперечить нульовій.

Статичний критерій — випадкова величина, точний чи наближений розподіл якої відомо і яку використовують для перевірки нульової гіпотези.

Розглянемо такі випадки:

1. Порівняння двох дисперсних нормальних генеральних сукупностей.
2. Порівняння вибіркової середньої з гіпотетичною генеральною середньою нормальної сукупності.

1. Порівняння двох дисперсних нормальних генеральних сукупностей. Нехай задано генеральні сукупності X та Y з нормальним розподілом та розмірами вибірок n_1 та n_2 . Знайдемо виправлені вибірки $(S_X)^2$ і $(S_Y)^2$ за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n},$$

де n — кількість вимірів, $\bar{x}_B$ — середнє значення вимірювання, x_i — значення одного виміру.

Нульова гіпотеза:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1 : D(X) \neq D(Y).$$

Число ступенів вільності: $k = n - 1$.

Обчислимо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F_P = S_Y^2 / S_X^2.$$

Необхідна умова рівності генеральних дисперсій:

$$F_P < F_{кр},$$

де $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ — критична точка, α -рівень значущості, k_1 та k_2 — ступені вільності. Обрахунок точки виконується за даними таблиці розподілу Фішера — Снедекора.

Цей метод ідентичний до методу середніх.

2. Порівняння вибіркової середньої з гіпотетичною генеральною середньою нормальної сукупності. Задано генеральну сукупність X з нормальним розподілом, отриману за результатами n вимірів. Знайдемо середнє значення X_c . Генеральна середня сукупності A невідома, але можливе припущення, що вона рівна гіпотетичному значенню A_0

$$H_0 : A = A_0.$$

Критерій перевірки нульової гіпотези випадкова величина:

$$T = (\bar{X} - A_0)\sqrt{n} / S.$$

Конкуруюча гіпотеза:

$$H_1 : A \neq A_0.$$

Критична точка $t_{кр}(\alpha, k)$ будується за значеннями таблиці критичних точок.

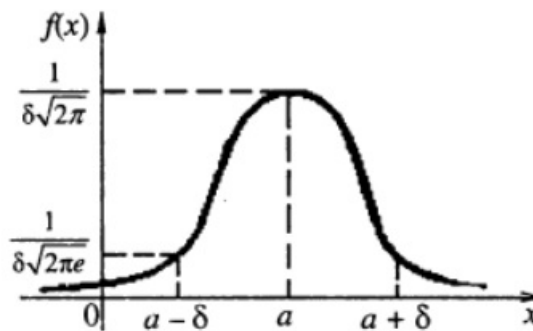


Рис. 1. Графік нормального розподілу

Графік нормального розподілу(крива Гауса) симетричний відносно прямої $x = a$. Точки $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi e}}$ — критичні точки, $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$ — максимум функції при $x = a$.

Цей метод ідентичний до методу найменших квадратів.

Приклад. Порівняємо дві задані дисперсії. Обрахуємо емпіричне значення критерія Фішера:

$$F_{emp} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (1)$$

Критерій Фішера — параметричний критерій і застосовується для порівняння двох варіаційних рядів, де σ_1, σ_2 — розглядувані дисперсії. За нульову гіпотезу візьмемо, що розглядувані дисперсії рівні, а саме $H_0 : D_x = D_y$. Критичні значення визначаємо з таблиці за рівнем значущості та степенями вільності.

Дисперсія першої речовини дорівнює 6,17 ($n_1 = 32$), а другої — 4,41 ($n_2 = 33$). Візьмемо рівень значущості 0,05. Обчислимо емпіричне значення за формулою (1) та знайдемо критичне значення за таблицею:

$$F_{emp} = \frac{6,17}{4,41} \approx 1,4,$$

$$F_{кр}(0,05; 31; 32) = 2.$$

Оскільки, $F_{emp} < F_{кр}$, то приймаємо нульову гіпотезу, що дисперсії однакові.

Висновок. Для порівняння даних методів використаємо їх ідентичність до методу середніх та найменших квадратів. Порівняймо метод середніх та МНК: метод середніх більш простий та менш чутливий до великого відхилення точок, у свою чергу МНК дає більш точні результати при меншій кількості вимірів. З рис. 1 та вище наведених тверджень випливає:

1. Перший метод дає більш широке уявлення про дисперсію та розподілення в ній, тому що проводиться більша кількість вимірів і менший вплив людини на результати (менше обрахунків).

2. Другий метод точніший за перший — більша кількість вимірів та точніше наближення до дійсного значення.

Список літератури

- Брановицька, С. В., Медведєв, Р. Б., Фіалков, Ю. Я. (2004). *Обчислювана математика та програмування: Обчислювана математика в хімії і хімічній технології*. Київ: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”.
- Костин, В. Н., Тишина, Н. А. (2004). *Статистические методы и модели*. Оренбург: ОГУ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯЧЕЕК МЕТАМАТЕРИАЛОВ ПРОГРАММНЫМИ СРЕДСТВАМИ MATHCAD И MICROWAVE OFFICE

А. П. Живков, А. И. Шалик, А. В. Назаров, В. В. Личик, В. О. Мазурок

НТУУ «Киевский политехнический институт им. И. Сикорского»,

Киев, Украина

zhivkov@yandex.ua, alexshalik08@gmail.com, alex.1029456@gmail.com,

lensvich@gmail.com, valentin.mazurok@gmail.com

Метаматериалы играют все большую роль в развитии современных телекоммуникационных технологий (Вендик, Вендик, 2013; Ильченко, Живков, Орлов, 2016), освоении терагерцевого диапазона частот, создании биомедицинских датчиков и во многих других областях науки и техники. В работе установлена и обоснована аналогия между элементарной ячейкой метаматериала (рис. 1) и режекторным микрополосковым фильтром (рис. 2).

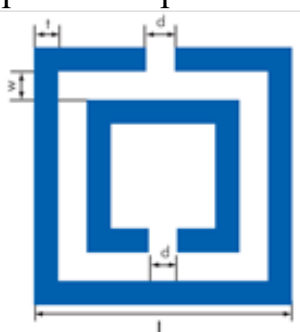


Рис. 1. Атом метаматериала

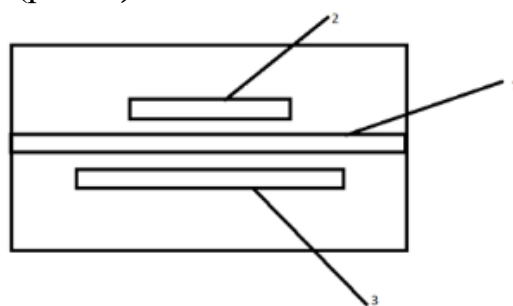


Рис. 2. Микрополосковый режекторный фильтр

Для проверки корректности использования двухрезонаторного режекторного фильтра, резонаторы которого не связаны между собой, в качестве модели ячейки метаматериала были проведены расчеты параметров фильтров как в аналитическом виде, так и в виде элементов микрополосковых линий.

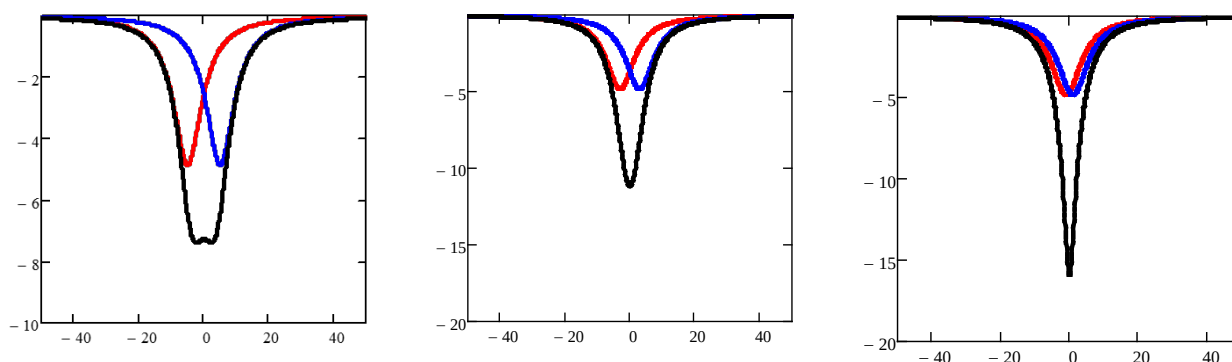


Рис. 3 (а, б, в)

В первом случае расчеты производились в программной среде Mathcad, во втором — с использованием программных средств Microwave Office.

Рисунки 3 а, б и в построены для разных взаимных расстроек между резонансными частотами (парциальными частотами) отдельных резонаторов. Синие и

красные кривые соответствуют резонансным кривым отдельных резонаторов, черная — суммарная кривая, характеризующая поведение ячейки метаматериала.

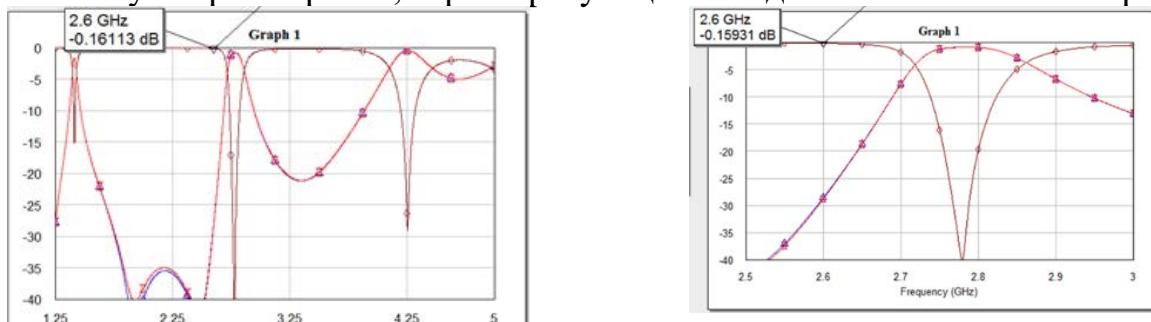


Рис. 4. (а, б)

Очевидным становится, в частности то, что ячейка атома метаматериала состоит не из одной колебательной системы, а из двух, в общем случае слегка расстроенных по частоте друг от друга.

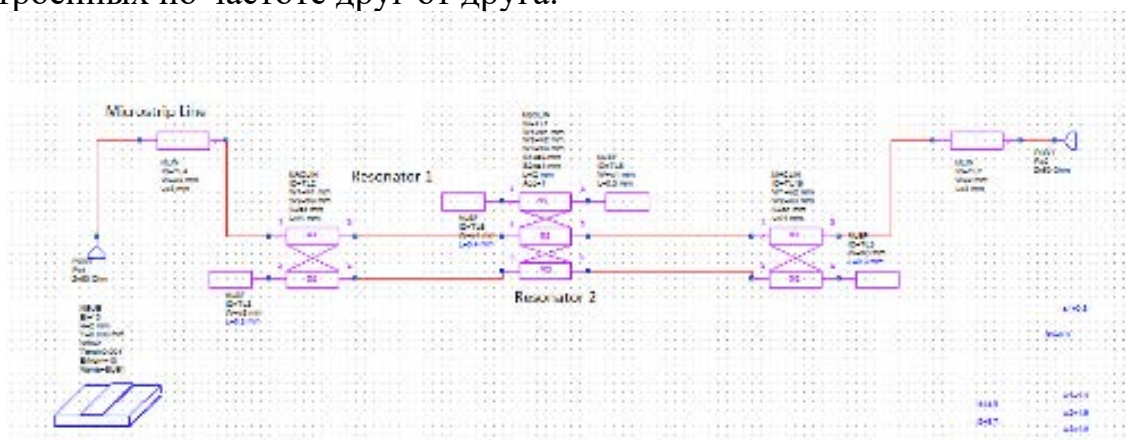


Рис. 5

На рис. 5 представлена модель режекторного фильтра в программной среде Microwave Office, а на рис.4 а) и б) — параметры матрицы рассеяния эквивалентного четырехполюсника, рассчитанные в программной среде Microwave Office.

Выводы (заключение). Сравнение результатов расчётов ячеек метаматериалов на основании моделей мостовых фильтров-прототипов (программа Mathcad) и электродинамических моделей микрополосковых структур (Microwave Office) демонстрирует их эквивалентность и лишний раз свидетельствует о правильности выбранных подходов к исследованию элементарных ячеек — «атомов» метаматериалов.

Список литературы

- Вендик, И. Б., Вендик, О. Г. (2013). Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор). *Журнал технической физики*, 83(1), 3—28.
- Ильченко, М. Е., Живков, А. П., Орлов, А. Т. (2016). Фильтры на базе резонаторов с близкими по частоте модами как ячейки метаматериалов. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (1), 7—14.

МОДИФІКОВАНА КІНЕМАТИЧНА ГРАНИЧНА УМОВА НА ДЕПРЕСІЙНІЙ ПОВЕРХНІ В ҐРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ

Н. В. Іванчук, В. А. Герус, П. М. Мартинюк

Національний університет водного господарства та природокористування,

Рівне, Україна

natasha_medvid@mail.ru

Депресійна поверхня — це межа, яка розділяє зони повністю насиченого ґрунту та сухого (ненасиченого) ґрунту в тілі ґрунтової греблі (Полубаринова-Кочина, 1977) і в загальному випадку з часом змінює своє положення. Для коректності крайових задач, якими описуються математичні моделі фільтрації в ґрунтових греблях, на вільній рухомій межі, якою є депресійна поверхня, потрібно вимагати виконання так званих кінематичних граничних умов.

Наприклад, у роботі Шаманский (1970) запропоновано наступний вигляд такої умови:

$$m \frac{\partial \xi}{\partial t} = (k \nabla u, \nabla \xi) - \omega \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (1)$$

де $\xi(t, \mathbf{X}) = 0$ — рівняння вільної поверхні, $\omega = \omega(t, \mathbf{X})$ — величина інфільтрації через вільну поверхню в область фільтрації, $k = k(\mathbf{X})$ — коефіцієнт фільтрації, $m = m(\mathbf{X})$ — коефіцієнт водовіддачі (недостача насичення або, у випадку сухого ґрунту, — пористість), $u = u(t, \mathbf{X})$ — п'єзометричний напір, $\mathbf{X} = (x, y, z)$.

У роботі Сергиенко, Скопецкий, Дейнека (1991) використано наступну умову

$$k \frac{\partial h}{\partial n} = -m \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu(n_y, y), \quad (2)$$

де $h = h(t, x, y)$ — п'єзометричний напір, m — пористість ґрунту, ν — величина інфільтрації, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до вільної межі, яка описується співвідношенням $\phi(x, y, t) = y - h(x, y, t)$.

Вигляд кінематичних граничних умов (1), (2) свідчить про те, що фактично пористість (на випадок, якщо зверху над депресійною поверхнею знаходиться сухий ґрунт) вважається сталою. У випадку процесів механічної і хімічної суфозії, ущільнення, термічного розширення фаз ґрунту тощо — пористість є змінною величиною.

Зробимо наступне спрощуюче припущення: будь-яка вертикальна лінія перетинає вільну межу лише в одній точці. Це припущення виконується для депресійних поверхонь в ґрунтових греблях.

Виділимо в момент часу $t = t_j$ на вільній поверхні $\phi(\mathbf{X}, t_j) = 0$ область $S^{(j)}$ одиничної площі і розглянемо рух вільної поверхні в напрямку зовнішньої нормалі до неї. Не зменшуючи загальності викладок, знехтуємо інфільтрацією.

Якщо в попередніх роботах Власюк, Мартинюк (2008; 2010) фізико-хімічні та механічні властивості у виділеному циліндрі ґрунту між двома положеннями вільної межі в моменти часу $t = t_j$ та $t = t_{j+1}$ осереднювались, то тут ми їх апроксимуємо лінійними залежностями. Тоді об'єм пор у виділеному циліндрі буде:

$$V = \sigma^{(j+1)}\phi(\mathbf{X}^{(j+1)}, t_{j+1}) - \sigma^{(j)}\phi(\mathbf{X}^{(j)}, t_j), \quad (3)$$

де σ — змінна в часі пористість пористого середовища; $\sigma^{(j)} = \sigma(\mathbf{X}^{(j)}, t_j)$; $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$ — точка, належна виділеній області $S^{(j)}$.

Як видно з (3) пористість в областях $S^{(j)}$ та $S^{(j+1)}$ осереднюється і покладається рівною вказаній величині в точках $\mathbf{X}^{(j+1)} \in S^{(j+1)}$ та $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$ відповідно.

З іншого боку за проміжок часу $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ зміна об'єму рідини у виділеному циліндрі пористого середовища буде

$$V = (\mathbf{u}, \mathbf{n})\Delta t, \quad (4)$$

де $\mathbf{u}$ — швидкість фільтрації.

Прирівнюючи (3) та (4) і переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ маємо кінематичну граничну умову

$$\frac{d}{dt}(\sigma\phi) = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (5)$$

У лівій частині (5) стоїть повна похідна в часі. Маємо

$$\frac{d}{dt}(\sigma\phi) = \frac{d\sigma}{dt}\phi + \sigma\frac{d\phi}{dt}. \quad (6)$$

Ураховуючи (6), з (5) маємо модифіковану кінематичну граничну умову

$$\frac{d\sigma}{dt}\phi(\mathbf{X}, t) + \sigma\frac{d\phi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (7)$$

Фактично умова (7) при $\sigma = \text{const}$ переходить в (2).

Зміна положення депресійної поверхні може відбуватися і за рахунок ущільнення, розущільнення, набухання ґрунтів під нею. У роботі Герус, Мартинюк, Мічута (2015) виведено узагальнену кінематичну граничну умову на випадок просідань ґрунту в результаті його консолідації

$$\frac{dl(x, y, t)}{dt} = \int_{l(x, y, t)}^{l(x, y, t)} \left(\frac{e}{1+e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz, \quad (8)$$

де ρ_p — густина порової рідини, яка залежить від фізико-хімічних факторів (концентрація розчинених речовин та температура); ρ_m — густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти), яка також може залежати від вказаних факторів; e — коефіцієнт пористості ($e = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, σ

— пористість ґрунту); $z = l(x, y, t)$ — рівняння верхньої рухомої межі ґрунту; $z = L(x, y, t)$ — нижня межа ґрунту, яка теж може бути рухомою, але закон зміни її положення є відомим.

Припускаючи незалежність просідань та адитивність загального просідання і враховуючи (8), з (7) маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}\phi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma)\frac{d\phi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\ + \int_{L(x, y, t)}^{\phi(\mathbf{X}, t)} \left(\frac{e}{1 + e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Для можливості застосування (9) мають бути відомими залежності для e (або σ), ρ_p, ρ_m від фізико-хімічного та механічного стану пористого середовища (концентрація солей у рідкій та твердій фазах, концентрація суфозійних частинок, температура).

Список літератури

- Власюк, А. П., Мартинюк, П. М. (2008). *Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах*. Рівне: НУВГП.
- Власюк, А. П., Мартинюк, П. М. (2010). *Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій*. Рівне: Вид-во НУВГП.
- Герус, В., Мартинюк, П., Мічута, О. (2015). Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, (22), 23—30.
- Полубаринова-Кочина, П. Я. (1977). *Теория движения грунтовых вод*. Москва: Наука.
- Сергиенко, И. В., Скопецкий, В. В., Дейнека, В. С. (1991). *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*. Киев: Наукова думка.
- Шаманский, В. Е. (1970). Численное решение задач неуставившейся фильтрации со свободными поверхностями жидкости. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 10(2), 505—514.

ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ ВІДГУКІВ ЕЛЕКТРОННОГО НОСУ: НОВІ ПАРАМЕТРИ ТА МОДЕЛІ

А. О. Калініченко¹, Ю. П. Буценко², С. О. Калініченко²

¹Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

²НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

asya.kalini4enko@gmail.com

Вихідні відгуки сенсорів містить декілька сотень значень, що є досить великим та надлишковим набором даних, який складно обробити. Вилучення інформативних параметрів дає змогу значно зменшити обсяг даних подальшого аналізу.

Інтелектуальний аналіз даних електронного носу починається з вилучення інформативних ознак та створення похідних параметрів з сигналу (*feature extraction*), попередньої обробки параметрів з метою полегшення наступних кроків узагальнення та навчання.

Було запропоновано вилучення характерних ознак відгуку як з вихідного цифрового сигналу, так з моделей апроксимованого сигналу лог-нормальною та поліноміальною функціями.

Отримані параметри можуть бути розділені на дві групи залежно від алгоритму вилучення інформації. Одна група складається з параметрів, розрахованих з вихідного сигналу, такі як: максимальна зміна частоти коливання сенсора, час досягнення максимального сигналу, час досягнення половини максимального сигналу, коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу, швидкість зміни сигналу, відхилення від лінійності, кривина сигналу, розрахована методами чисельного диференціювання, площа під кривою сигналу сенсора. Більшість перелічених параметрів характеризує лише частину сигналу, а побудова класифікаційних чи регресійних моделей потребує оптимізації набору параметрів, що є трудомісткою задачею оскільки потребує урахування їх впливу та кореляції.

Інша група складається з коефіцієнтів рівнянь, отриманих моделей апроксимованого сигналу поліноміальною та лог-нормальною функціями, вилучені параметри характеризують повний сигнал.

Коефіцієнти апроксимуючого поліному (1) знаходимо QR -розкладом матриці Вандермонда та вектора експериментальних значень, що реалізує метод найменших квадратів. У випадку реалізації робастного методу найменших квадратів (з мінімізацією за абсолютними помилками (2)) матриця Вандермонда та вектор експериментальних значень помножуємо на матрицю вагових коефіцієнтів.

$$y = p_1x^9 + p_2x^8 + p_3x^7 + p_4x^6 + p_5x^5 + p_6x^4 + p_7x^3 + p_8x^2 + p_9x + p_{10} \quad (1)$$

де p_i — коефіцієнти полінома.

$$w_i = \frac{1}{|y_i - y(x_i|a)|} \quad (2)$$

де w_i — вагові коефіцієнти.

Після кожної ітерації вагові коефіцієнти перераховуються, процес оптимізації зупиняється, коли різниця зміни параметрів полінома становить не більше 0,0001%.

Модель апроксимуючого сигналу за лог-нормальною функцією розраховується за рівнянням (3). Апроксимація вихідного сигналу здійснено симплекс-методом Нелдера — Міда з мінімізацією за ваговими сумами квадратів різниць (4) (Press et al, 2007).

$$= \begin{cases} h \exp \left\{ -\ln 2 \left(\frac{\ln[1 + 2b(\tau - \tau_c) / \Delta]}{b} \right)^2 \right\}, & \frac{2b(\tau - \tau_c)}{\Delta} > -1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (3)$$

де h — амплітуда сигналу, Гц; b — натуральний логарифм коефіцієнта асиметрії; τ_c — центр, положення якого відповідає амплітуді сигналу, с; Δ — ширина розподілу даних.

$$\chi^2(a) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i [y_i - y(x_i | a)]^2 \quad (4)$$

де a — масив апроксимуючих параметрів, y_i — вихідний сигнал у точці x_i ; $y(x_i | a)$ — апроксимуюча функція; $w_i = 1 / |y_i|$ — ваговий коефіцієнт, який нормує відхилення до значення сигналу в кожній точці з метою найкращої апроксимації на всіх ділянках кривої.

Математичні моделі відтворюють вихідні криві різних за селективністю сенсорів електронного носу та описують характерні зміни геометрії сигналу під час зміни фракцій запаху зразків. Поліноміальна модель є універсальною, описує повний динамічний сигнал з високою точністю (рис. 1), лог-нормальна модель описує характерні геометричні риси сигналу, але не так точно проходить через задані дискретні точки (рис. 2). Отримані коефіцієнти є оптимальним набором параметрів для подальшого аналізу методами обробки багатовимірних даних.

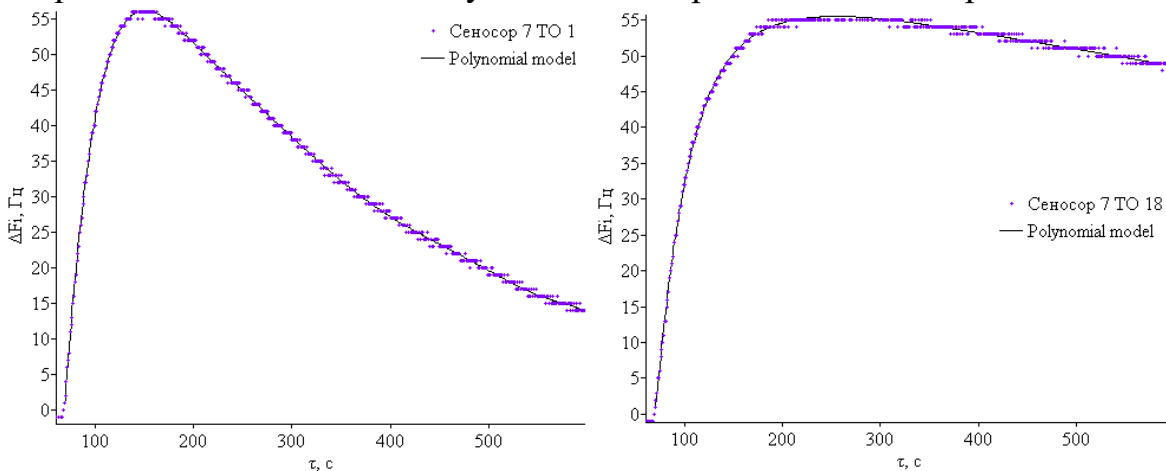


Рис. 1. Дискретний вихідний сигнал сенсора та поліноміальна модель сигналу для свіжих ТО 1 та окиснених ТО 18 зразків гарбузової олії

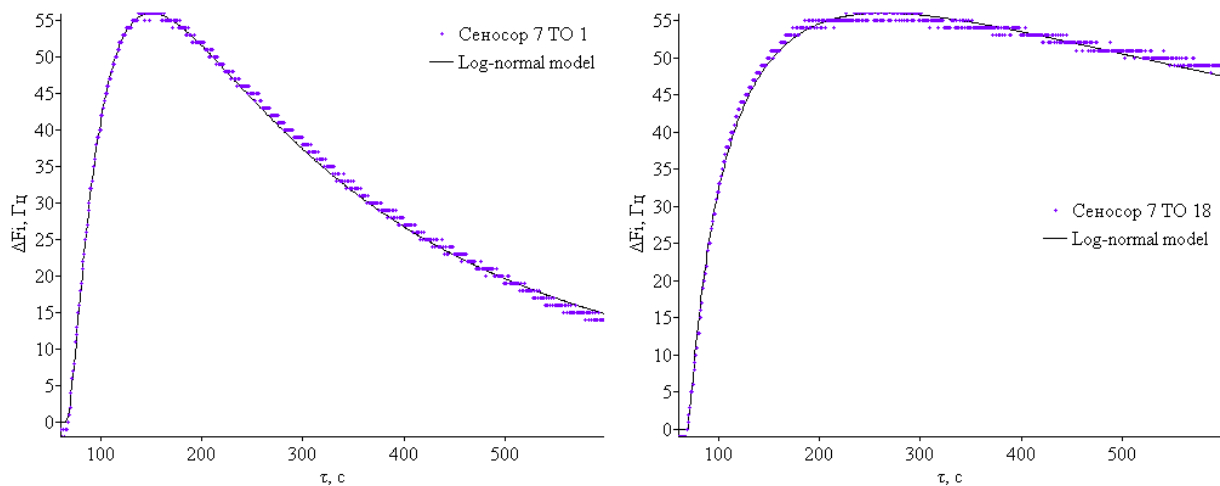


Рис. 2. Дискретний вихідний сигнал сенсора та лог-нормальна модель сигналу для свіжих ТО 1 та окиснених ТО 18 зразків гарбузової олії

Однак, методи обробки багатовимірних даних, наприклад, часто використовувані штучні нейронні мережі є алгоритмами, які потребують попереднього налаштування параметрів та архітектури під конкретну структуру даних.

Тому, було запропоновано експресну інтегральну оцінку запаху зразків, яка полягав у побудові «візуального відбитка» запаху та його оцінювання за наступними геометричними параметрами: G — коефіцієнт, що характеризую зміну геометричної форми фігури; Sm — «гладкість» фігури, P — периметр, у. о.

«Візуальний відбиток» запаху являє собою полярний графік, де головні осі — це зріз за часом вимірювання (вилучені інформативні секунди), а допоміжні осі ($\Delta F_i(\tau_i)$) є сигнали сенсорів (рис. 3, в даному випадку від семи сенсорів) у відповідний час вимірювання τ_i .

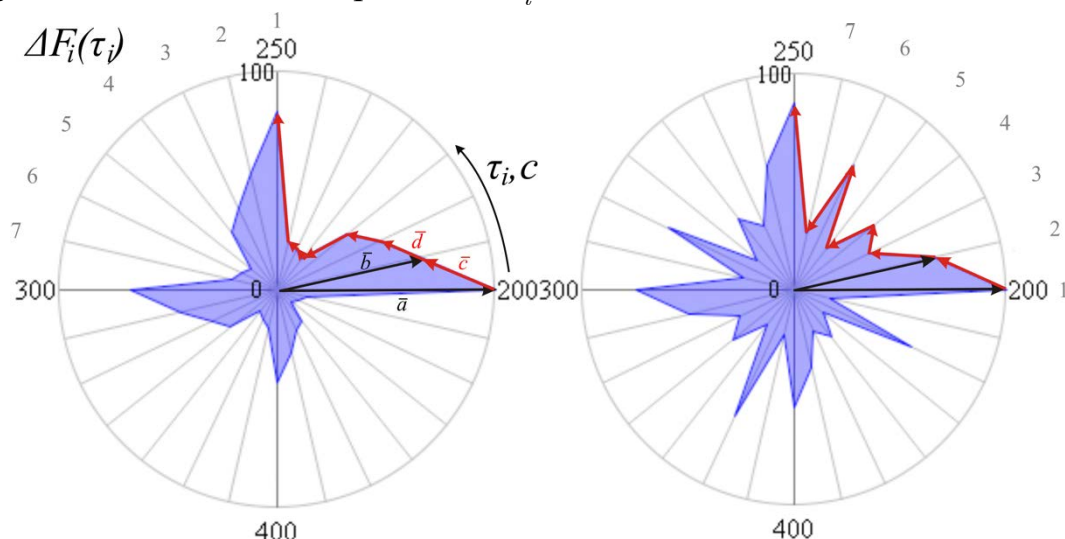


Рис. 3. Візуалізація параметра «гладкості» фігури для свіжого (зліва) та окисненого (справа) зразків

Спочатку знаходимо різницю вихідних векторів-сенсорів ($\bar{a}$ та $\bar{b}$), скалярний добуток отриманого вектора $\bar{c}$ з наступними векторами різниці вихідних

векторів за «візуальним відбитком» характеризує «гладкість» фігури багатокутника, яка змінюється під час зміни складу зразка за рахунок зміни сорбції летких сполук на плівках різних за селективністю сенсорів.

Параметр G характеризую зміну геометричної форми фігури «візуального відбитка» запаху (рис. 4), розраховується як сума кількостей перетинів фігури з круговою сіткою, яка задана з певним кроком (Γ). Таким чином, ми враховуємо перерозподіл летких сполук на плівках сенсорів, за рахунок чого збільшується кількість вершин багатокутника, утворюються піки.

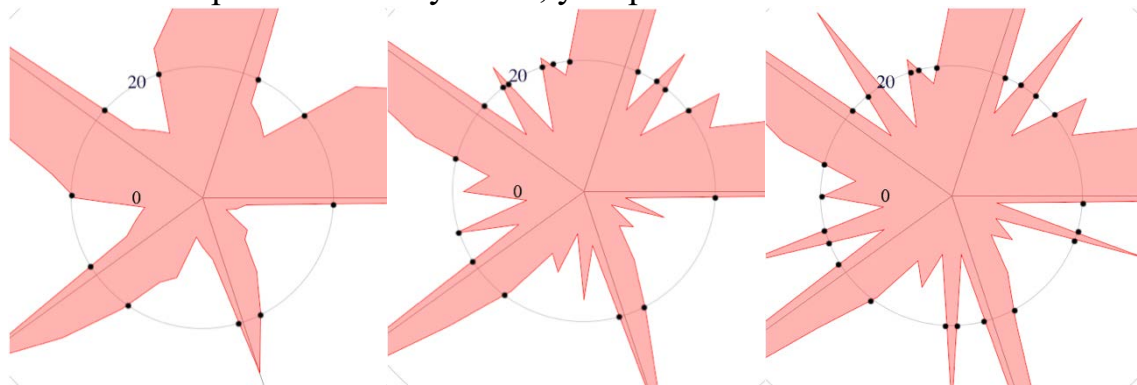
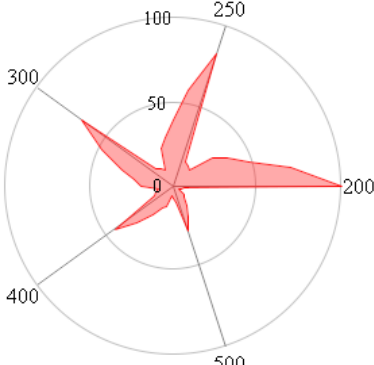
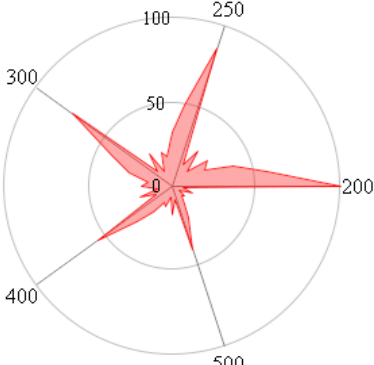
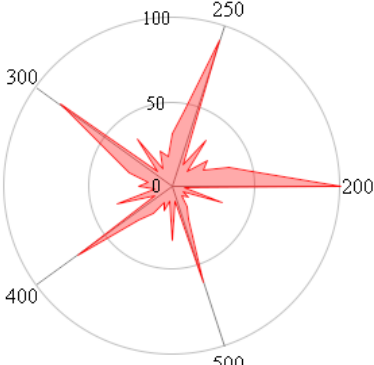


Рис. 4. Візуалізація параметра G для зразків під час окиснення (справа наліво)

Отримані результати представлено у табл. 1, показують, що застосування запропонованих параметрів дасть змогу оцінити зміну складу летких сполук олій в процесі окиснення, запропоновані параметри корелюють зі зміною пероксидного числа олій, як основного фізико-хімічного показника їх якості.

Таблиця 1. Зразки гарбузової олії та запропоновані параметри для оцінювання ступеня їх окиснення

		
ПЧ = 3,8 $\frac{1}{2}$ О ммоль/кг	ПЧ = 10,0 $\frac{1}{2}$ О ммоль/кг	ПЧ = 17,0 $\frac{1}{2}$ О ммоль/кг
$G = 142$	$G = 202$	$G = 260$
$Sm = 2312$	$Sm = 10938$	$Sm = 22449$
$P = 588$ у. о.	$P = 767$ у. о.	$P = 984$ у. о.

Список літератури

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. (2007). *Numerical recipes: The art of scientific computing* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press.

ОЦІНКА ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ВІДБИТКІВ ПЛОСКОГО ОФСЕТНОГО ДРУКУ

О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик

НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

olkuda@yandex.ua, bodo_kush@hotmail.com

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв'язуванні багатьох задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

За теоремою Ляпунова вплив кожного окремого доданка на суму за великих n дуже малий, у разі необмеженого збільшення кількості доданків закон розподілу їх суми необмежено наближається до нормального з математичним сподіванням і дисперсією, які дорівнюють сумах відповідних числових характеристик доданків, тобто можна сформулювати простішу форму центральної граничної теореми, коли випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — взаємно-незалежні.

Центральна гранична теорема (Кушлик-Дивульська, 2014) пояснює велике поширення нормального закону розподілу і є теоретичною основою застосування нормального розподілу для багатьох практичних задач: за широких припущень сума великого (але скінченного) числа незалежних випадкових величин розподілена згідно із законом, близьким до нормального.

Проведено ряд досліджень стосовно можливості налаштування виробничого процесу — виготовлення малотиражної поліграфічної продукції плоским офсетним друком. Отримано можливість досягнення та постійного підтримання балансу «фарба — вода» (Величко, Кушлик-Дивульська, Кушлик, 2016) маючи певні значення та величини подачі фарби, зволожувального розчину, відповідно до кількості друкувальних та пробільних елементів на друкарській формі. Також визначено траєкторію зміни кількості фарби чи зволожувального розчину при оптимальному керуванні зі зміною траєкторії руху точки в сторону «збільшення» чи «зменшення» (Кушлик-Дивульська, Кушлик, 2015).

Досягнувши стабільності (проведено налаштування, унормовано основні показники), дані вимірювань (Кушлик, 2014) використано для перевірки підлягання отриманих значень у вибірках нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона.

Для вибірки з вимірювання значень, отриманих на ділянці дії фарбового ножа № 3 для тесту на відбитку № 90, для якого значення можна вважати стабілізованими, проведені вимірювання: ΔE — колірні відмінності вимірюваного кольору від еталонного значення, D — оптична густина фарби; $\Delta S_{\text{відн}}$ 80%, 40% — розтискування растрової точки, зміна відносної площі друкувальних елементів при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину.

Згідно з методикою розрахунку за критерієм Пірсона, визначено інтервали для кожної з вибірок (для $\Delta E, D, \Delta S_{\text{відн}}$ 80% та $\Delta S_{\text{відн}}$ 40%) та кількість значень, що у них потрапляють. Розраховано ймовірності потрапляння випадкового значення у задані інтервали відповідно до очікуваного середнього значення та середньоквадратичного відхилення, використовуючи функцію пакету MS Excel **НОРМРАСП** $\left(x; x_{cp}; \sigma; 1\right)$, також значення величини χ^2 -статистики. Розраховане значення «хі-квадрат» після порівняння із критичним (формулою в MS Excel **ХИ2ОБР** $\left(\alpha; k\right)$) для всіх даних χ^2 є меншими за значення $\chi^2_{\text{крит}}$

$$(5,723 < 5,99146; 12,39 < 16,9189; 2,837 < 3,8414; 1,007 < 3,8414),$$

тому гіпотеза про відповідність вибірок нормальному закону розподілу приймається.

Отже, вже на відлагодженому поліграфічному виробництві, де досягнуто збалансований стан між фарбою і зволожуючим розчином, що зберігає стабільність на формі, на накатних фарбових валиках і на офсетному полотні з дотриманням загальних вимог до основних показників зволожуючого розчину (водневий показник; загальна жорсткість; електропровідність; температура у блоці охолодження та у зволожуючому апараті) якість продукції змінюється за нормальним законом.

Загальновідомо, під час проведення вимірювань на його результат впливає достатня кількість чинників, які породжують похибки вимірювань. Випадкові похибки виникають унаслідок великої кількості різних причин, які не підлягають точному врахуванню і дають у кожному окремому випадку інше значення. Кожна із причин породжує при вимірюванні невелику похибку v_i , при додаванні яких сумарна похибка

$$V = \sum_{i=1}^n v_i$$

— випадкова величина є сумою великої кількості незначних незалежних одна від одної випадкових величин і згідно з наслідком теореми Ляпунова має нормальний розподіл. Припускаючи, що немає грубих і систематичних помилок (їх уникають дотриманням правил використання вимірювальних приладів, заміною недосконалих приладів, грамотністю виконавця, тощо), можна вважати, що результат вимірювання є випадкова величина X , математичне сподівання якої $\bar{x}$ дорівнює істинному значенню a вимірюваної випадкової величини $M(X) = a$.

Оскільки сумарна похибка $V = X - a$ підпорядковується нормальному закону розподілу, то можливий результат вимірювання $X = a + V$ теж є нормальним законом. Отже, важливими є вміння перевірки відповідності вибірових даних нормальному розподілу і на відлагодженому виробництві якість продукції змінюється за нормальним законом внаслідок того, що виробнича похибка є результатом сумарної дії великого числа випадкових величин.

Список літератури

- Величко, О. М., Кушлик-Дивульська, О. І., Кушлик, Б. Р. (2016). Моделювання робочого стану зволожувального розчину для плоского офсетного друку. У кн. *Збірник наукових праць за матеріалами VII міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»* (с. 7—11). Кам'янець-Подільський: КПНУ.
- Кушлик, Б. Р. (2014). *Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.01*. Київ: НТУУ «КПІ», ВПК «Політехніка».
- Кушлик-Дивульська, О. І., Кушлик Б. Р. (2015). Математична теорія оптимального керування в практичних задачах. *Технологія і техніка друкарства*, (1(47)), 61—68.
- Кушлик-Дивульська, О. І., Поліщук, Н. В., Орел, Б. П., Штабальок, П. І. (2014). *Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник*. Київ: НТУУ «КПІ», ВПК «Політехніка».

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У СУМІЖНИХ НАУКАХ

В. О. Лебідь

НУ «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна

lebiduk@gmail.com

Причина вибору напряму «Застосування математики в суміжних науках». Життя молодих людей доби «міленіуму» (1984—2000 р. р. н.) яскраве, насичене, швидке. Вони прагнуть до різноманітного досвіду: замість того, щоб поступово підійматися вертикальними сходинками, хочуть отримати «горизонтальний» досвід у різних сферах.

Мотивація. Цінності людини продовжують формуватися протягом усього життя. А наука допомагає бути відповідальним і професійно компетентним.

Актуальність проблеми. Інтеграція наукових знань, взаємопроникнення галузевих методологій, способів та засобів стають дедалі все актуальнішою проблемою в умовах процесів глобалізації, що відбувається в усіх напрямках людської діяльності. Тому все більшого значення в розвитку математики набувають її зв'язки з іншими галузями знань. А саме, спектральна теорія графів має широкий діапазон застосувань у науці та техніці, наприклад, у хімії, електриці, машинобудуванні, архітектурі, управлінні і контролі, комунікаціях, оперативних дослідженнях, комбінаторній оптимізації та інформатиці, при розв'язанні конкретних прикладних задач, які виникають у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних та транспортних мереж. Сучасна спектральна теорія графів є також одним із актуальних напрямів у математичній фізиці та квантовій механіці.

Спектральна теорія графів у математичній фізиці та квантовій механіці. Квантовий граф — це метричний граф Γ разом з диференціальним оператором, який діє в гільбертовому просторі $L_2(\Gamma)$ квадратично інтегрованих функцій на Γ , які задовольняють певні крайові умови на вершинах. У квантовій механіці розглядаються рівняння Штурма — Ліувілля та Дірака, у теорії вібрацій — рівняння струн на ребрах графа, які задовольняють одну із крайових умов Діріхле, Неймана чи Робіна на висячих вершинах та умову неперервності разом з умовою Кіргхофа на внутрішніх вершинах. Такі моделі часто використовуються в задачах теорії вільних електронів сполучених молекул у хімії і в теорії квантових дротів і тонких хвилеводів. Зокрема, в сучасних роботах В. М. Півоварчика і його учнів досліджувалися прямі та обернені задачі для стільтьєсівських струн з використанням класичних результатів М. Г. Крейна та їх перенесення на випадок струн, що утворюють різні метричні графи (зіркові, у формі вісімки та ін.) (Boyko & Pivovarchik, 2008; Pivovarchik & Taystruk, 2014).

Обернені спектральні задачі для компактних графів та обернені задачі розсіювання для некомпактних графів, які одержані додаванням до компактних графів декількох напівскінченних ланцюгів розглядає у своїх статтях Павло Курасов (Kurasov, 2006; 2008).

Автор розглядає три типи обернених задач:

- 1) відновлення метричного графа;
- 2) відновлення диференціального виразу на ребрах графа;
- 3) відновлення умов сполучення на вершинах графа.

Спектральна теорія графів в області комп'ютерних наук. Спектральні методи стали основним інструментом із широким діапазоном застосувань в області комп'ютерних наук. Ці методи мали значний вплив на декілька областей, включаючи машинне навчання, інтелектуальний аналіз даних, веб-пошук і ранжування, наукові обчислення і комп'ютерний зір.

Останнім часом методи зі спектральної теорії графів мають широкий спектр застосування в машинному навчанні. Основна причина появи цих методів пов'язана з моделюванням великих даних та зв'язків між ними у вигляді графа. Вибірки даних розглядаються у якості вершин графа з певною вагою, а зв'язки між ними — ребрами графа. Це уявлення даних може бути використане, щоб мотивувати використання ряду методів, у тому числі спектральної кластеризації, нелінійного зменшення розмірності, візуалізації, класифікації для аналізу великих даних (Roweis & Saul, 2000; Joachims, Fawcett, & Mishra, 2003; Macskassy & Provost, 2007).

В останні роки спостерігається кілька цікавих застосувань спектральної теорії графів у теорії обчислень. Це включає в себе роботу зі швидкими обчислювачами для лінійних систем, локальними випадковими блуканнями і наступними комбінаторними застосуваннями для обчислення максимальних потоків.

Нещодавно виявлені зв'язки між найбільшими власними значеннями графів і спектральним розбиттям обіцяють створити платформу між теоретичним аналізом спектра графів і практичним застосуванням цієї теорії.

Список літератури

- Boyko, O., & Pivovarchik, V. (2008). Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 14(2), 159–167.
- Joachims, T., Fawcett, T., & Mishra, N. (2003) Transductive learning via spectral graph partitioning. In *Proceedings 20th International Conference on Machine Learning* (pp. 290–297). Washington DC: AAAI Press.
- Kurasov, P. (2008). Graph Laplacians and Topology. *Arkiv för Matematik*, 46, 95–111.
- Kurasov, P., & Nowaczyk, M. (2006). Inverse spectral problem for quantum graphs. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38, 4901–4915; correction: *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39, 993.
- Macskassy, S., & Provost, F. (2007). Classification in networked data: A toolkit and a univariate case study. *J. Mach. Learn. Res.*, 8, 935–983.
- Pivovarchik, V., & Taystruk, O. (2014). Spectral problem for a graph of symmetric Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 20(2), 164–174.
- Roweis, S., & Saul, L. (2000). Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 290, 2323–2326.

ОЦІНКА ВПЛИВУ ВАНТАЖУ НА РІВНОВАГУ ПОНТОНА

Т. О. Лупіна

Київська державна академія водного транспорту
імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ, Україна

lypina@i.ua

Для підготовки студентів зі спеціальності 271 «Річковий і морський транспорт» актуальними є задачі, пов'язані з рівновагою плаваючих тіл.

У той же час у відомих підручниках і збірниках задач з теоретичної механіки (Павловський, 2002; Апостолук та ін., 2007; Мещерский, 1986) таких задач обмаль. Тому розробка нових фахово-орієнтованих задач на цю тему видається цілком виправданою.

У даній роботі розглядається задача про рівновагу понтона з розташованим на палубі вантажем.

Вихідні дані: понтон прямокутної форми довжиною L , шириною B , висотою H і масою m_1 з вантажем масою m_2 на палубі плаває у воді (питома маса води ρ). Висота центру мас вантажу над палубою понтона h , центр мас понтона знаходиться в центрі його об'єму. Осадка понтона T при розташуванні центру мас понтона і вантажу на одній вертикалі до поверхні води задовольняє нерівність $T < \frac{H}{2}$.

Потрібно: визначити різницю осадок торців понтона (диферент) $2K$ за умови, що відстань розташованого у площині поздовжньої симетрії понтона центру мас вантажу від його вертикальної поперечної площини симетрії дорівнює a (рис. 1).

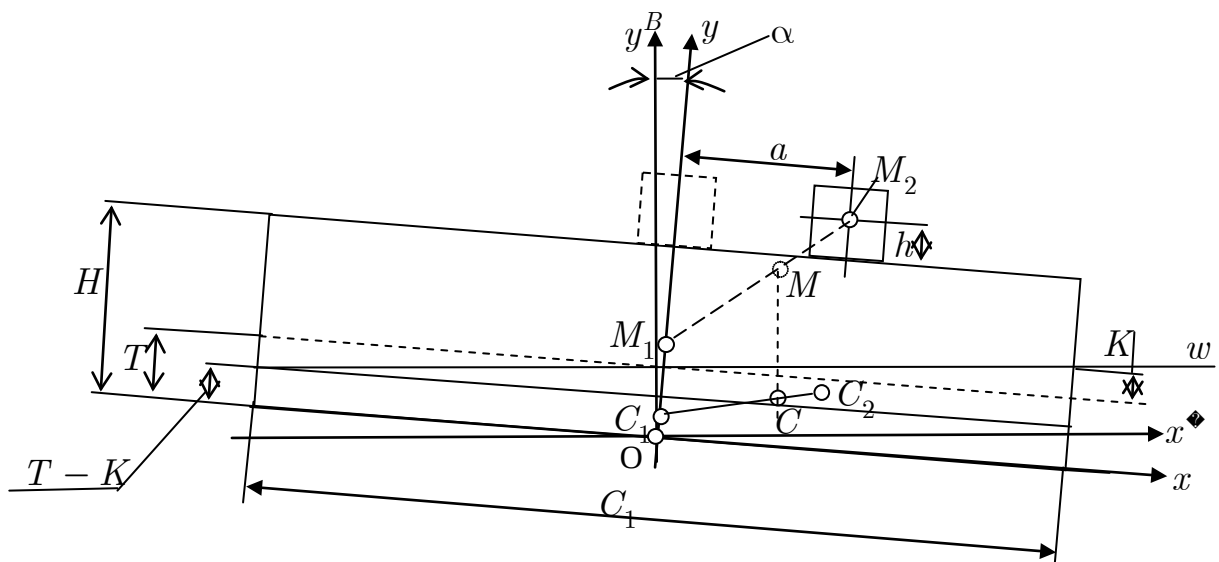


Рис. 1

Розв’язання: для знаходження координат спільного центру мас понтона з вантажем у прямокутній системі координат скористаємось відомими формулами для визначення координат центру мас механічної системи (Павловський, 2002):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

де m_i — маси тіл механічної системи, а x_i і y_i — координати їхніх центрів мас.

Центри мас понтона й вантажу в системі координат xOy , розташованій у поздовжній площині симетрії з центром O , який знаходиться на днищі понтона посередині його довжини, мають координати $M_1\left(0, \frac{H}{2}\right)$ і $M_2(a, (H + h))$ відповідно.

Знайдемо координати точки M — спільного центру мас понтона з вантажем з виразів:

$$x_M = \frac{am_2}{m_1 + m_2}; \quad (2)$$

$$y_M = \frac{\frac{H}{2}m_1 + (H + h)m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Осадка понтона T з вантажем, центр ваги якого розташований на одній вертикалі з центром ваги понтона, складає:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{LB\rho}. \quad (4)$$

Координати точки C — центру мас (центру величини) зануреного об’єму — обчислимо як координати спільного центру мас його двох частин: прямокутного паралелепіпеда об’ємом $LB(T - K)$ з центром мас у точці $C_1\left(0, \frac{T - K}{2}\right)$ та трикутної прямої призми об’ємом LBK з центром мас у точці $C_2\left(\frac{L}{6}, T - \frac{K}{3}\right)$ за формулами (1), які після спрощення мають вигляд:

$$x_C = \frac{LK}{6T}; \quad y_C = \frac{T}{2} + \frac{K^2}{6T} \quad (5)$$

Знайдемо абсциси x_{1M} спільного центру мас понтона з вантажем та x_{1C} центру мас витісненого об’єму води в системі координат x_1Oy_1 , повернутій від-

носно системи координат xOy на кут α , при якому вісь x займає горизонтальне, а вісь y — вертикальне положення, за відомою формулою для координат точки в повернутій на кут α системі координат

$$x_1 = y \sin \alpha + x \cos \alpha :$$

$$x_{1M} = y_M \sin \alpha + x_M \cos \alpha ; \quad (6)$$

$$x_{1C} = \frac{1}{2} \left(T + \frac{K^2}{3T} \right) \sin \alpha + \frac{LK}{6T} \cos \alpha . \quad (7)$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (6) і (7) та розділивши їх на $\cos \alpha$, отримаємо

$$\frac{1}{2} \left(T + \frac{K^2}{3T} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{LK}{6T} = y_M \operatorname{tg} \alpha + x_M . \quad (8)$$

Ураховуючи, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2K}{L}$, після переносу всіх доданків у ліву частину рівняння (8), зведення подібних та спрощення, отримаємо кубічне рівняння:

$$K^3 \frac{1}{3LT} + K \left(\frac{T}{L} - \frac{2y_M}{L} + \frac{L}{6T} \right) - x_M = 0$$

або

$$K^3 + 3KLT \left(\frac{T}{L} - \frac{2y_M}{L} + \frac{L}{6T} \right) - 3LTx_M = 0 . \quad (9)$$

Позначивши

$$3LT \left(\frac{T}{L} - \frac{2y_M}{L} + \frac{L}{6T} \right) = p , \quad (10)$$

$$-3LTx_M = q , \quad (11)$$

отримаємо трьохчленне кубічне рівняння $K^3 + pK + q = 0$, дійсний корінь якого знайдемо за відомою з математики формулою Кардано:

$$K = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} . \quad (12)$$

З рівняння (9), ураховуючи формулу (2), отримаємо вираз для шуканої відстані a від вертикальної поздовжньої площини симетрії понтона до центра мас вантажу:

$$a = \frac{1}{3LT} \left(K^3 + 3KLT \left(\frac{T}{L} - \frac{2y_M}{L} + \frac{L}{6T} \right) \right) \frac{m_1 + m_2}{m_2} . \quad (13)$$

Для випадку, коли лівий торець понтона повністю виходить з води, його осадка $T - K = 0$. Тоді диферент понтона $2K = 2T$, тобто він дорівнює под-

воєній осадці понтона з вантажем, центр мас якого розташований на одній вертикалі з центром мас понтона, і задача спрощується.

Об'єм витісненої води являтиме собою лише трикутну пряму призму з координатами центру мас

$$x_C = \frac{L}{6}; y_C = \frac{2}{3}T.$$

Абсциси x_{1M} спільного центру мас понтона з вантажем та x_{1C} центру мас витісненого об'єму води в системі координат x_1Oy_1 , повернутій відносно системи координат xOy на кут α , при якому вісь x займає горизонтальне, а вісь y — вертикальне положення, визначаються рівностями

$$x_{1M} = y_M \sin \alpha + x_M \cos \alpha; x_{1C} = \frac{2}{3}T \sin \alpha + \frac{L}{6} \cos \alpha.$$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей та розділивши їх на $\cos \alpha$, отримаємо

$$\frac{2}{3}T \operatorname{tg} \alpha + \frac{L}{6} = y_M \operatorname{tg} \alpha + x_M,$$

звідки, враховуючи, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2K}{L}$ та $K = T$, отримаємо наступне рівняння:

$$x_M = \frac{4}{3} \frac{T^2}{L} + \frac{L}{6} - y_M \frac{2T}{L}.$$

Ураховуючи формулу (2), отримаємо вираз для відстані a від вертикальної поздовжньої площини симетрії понтона до центра мас вантажу, при якій лівий торець понтона повністю вийде з води:

$$a = \left(\frac{4}{3} \frac{T^2}{L} + \frac{L}{6} - y_M \frac{2T}{L} \right) \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (14)$$

Поклавши, наприклад, $L = 12$ м, $B = 2,4$ м, $H = 0,9$ м, $m_1 = 2120$ кг, $m_2 = 10000$ кг, $h = 0,2$ м, за умови, що лівий торець понтона повністю виходить з води, отримаємо: за формулою (4)

$$T = \frac{2120 + 10000}{12 \cdot 2,4 \cdot 1000} = 0,421 \text{ м},$$

за формулою (3)

$$y_M = \frac{\frac{0,9}{2} \cdot 2120 + (0,9 + 0,2) \cdot 10000}{2120 + 10000} = 0,986 \text{ м},$$

за формулою (14)

$$a = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{0,421^2}{12} + \frac{12}{6} - 0,986 \frac{2 \cdot 0,421}{12} \right) \cdot \frac{2120 + 10000}{10000} = 2,364 \text{ м.}$$

При $a = 1,0$ м, зберігаючи ті ж значення останніх числових даних, отримаємо: за формулою (2)

$$x_M = \frac{1,0 \cdot 10000}{2120 + 10000} = 0,825 \text{ м,}$$

за формулою (10)

$$p = 3 \cdot 12 \cdot 0,421 \cdot \left(\frac{0,421}{12} - \frac{2 \cdot 0,986}{12} + \frac{12}{6 \cdot 0,421} \right) = 70,041 \text{ м}^2,$$

за формулою (11)

$$q = -3 \cdot 12 \cdot 0,421 \cdot 0,825 = -12,504 \text{ м}^3,$$

за формулою (12)

$$K = \sqrt[3]{\frac{12,504}{2} + \sqrt{\frac{12,504^2}{4} + \frac{70,041^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{12,504}{2} - \sqrt{\frac{12,504^2}{4} + \frac{70,041^3}{27}}} = 0,178 \text{ м.}$$

$$\text{Диферент } 2K = 2 \cdot 0,178 = 0,356 \text{ м.}$$

За аналогією з задачею, розглянутою вище, можна запропонувати студентам задачу про визначення різниці осадок бортів понтона (крену) при зміщенні центру мас вантажу, розташованого в поперечній площині симетрії понтона по відношенню до його поздовжньої площини симетрії.

Список літератури

- Апостолук, О. С., Воробйов, В. М., Ільчишина, Д. І. та ін. (2007). *Теоретична механіка: Збірник задач*. Київ: Техніка.
- Мещерский, И. В. (1986). *Сборник задач по теоретической механике*. Москва: Наука.
- Павловський, М. А. (2002). *Теоретична механіка: Підручник*. Київ: Техніка.

ЭФЕКТЫЎНАЕ КАДАВАННЕ МЯЖЫ АБ'ЕКТА

А. І. Міццюхін

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыяэлектронікі, Інстытут
інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь

mityuhin@bsuir.by

Эфектыўны развязак задачы ідэнтыфікацыі і апісання прасторавых аб'ектаў ва ўмовах, калі трэба здзейсніць сталы кантроль змен у поле выяў, патрабуе выкарыстання вылічальных алгарытмаў, што прыводзяць да зніжэння аб'ёмаў апрацоўкі і аналізавання відэаграфічнай інфармацыі. У працы разглядаецца вылічальны алгарытм, што дазваляе эфектыўна апісваць вонкавыя межы (форму) прасторавага аб'екта. Мяжа з'яўляецца поўным і кампактным уяўленнем геаметрыі аб'екта. У дадатак да вышэйзгаданых абласцей ужывання, паданне дадзеных апісання мяжы, трэба для кампутарнай апрацоўкі і захоўвання медычных выяў, у вайсковых і грамадзянскіх дадатках. Прыкладам, для аэракасмiчнага назiрання зонаў затаплення і забягненасцi, квiтнення вады i iнш. Адным з прыёмаў зніжэння аб'ёмаў перадачы, захоўвання дадзеных з'яўляецца знішчэнне iх прасторавай лiшкавасцi.

Апісанне мяжы. Як вядома, сярод усiх лiнейных пераўтварэнняў карэляваных дадзеных аптымальным у адносінах да крытэру найменшага значэння сярэднеквадратчнай памылкi пры няпоўнай памернасцi (недакладным заданнi каардынат) з'яўляецца пераўтварэнне для декарэлявання, у якасцi ядра якога выкарыстоўваецца матрыца W , складзеная з уласных вектараў каварыяцыйнай матрыцы $\text{cov}(G)$ лiчбавай выявы G (Гонсалес, Вудс, 2008). Прапануецца падыход больш эфектыўнага апісання мяжы шляхам пераходу ад 1-D арганiзацыi дадзеных да 2-D прасторавага iх уяўлення i апрацоўкi.

Будзем лiчыць, што зроблена замена паўтонавай выявы G мяжы аб'екта бiнарным. Дыскрэтную мяжу g можна ўявіць у выглядзе двухвымернай функцыi

$$g_{x_n, y_n}, n \in \{0, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, N-1\},$$

дзе (x_i, y_j) — гэта цэлаалiкавыя пары дэкартава здабытка $\mathbb{Z}^2$, N — лiк кропак (даўжыня) межы. Кожнай кропцы мяжы адназначна адпавядае пара каардынат g_{x_i, y_j} . Уся мяжа ўяўляецца N — кропкавай паслядоўнасцю

$$g_{x_i, y_j} = \{(x_0, y_0), \dots, (x_i, y_j), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1})\}.$$

Дыскрэтную мяжу g можна ўявіць лексiкаграфiчным запiсам пар (x_i, y_j) дэкартава здабытка $\mathbb{Z}^2$ у выглядзе матрыцы A памерам $M \times L$. Пераўтварэнне выточнага i -га вектары $\mathbf{a}_i = (a_1 \dots a_M)^T$ у вектар $\hat{\mathbf{a}}_i = (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_M)^T$ выконваецца як

$$\hat{\mathbf{a}}_i = W \mathbf{a}_i. \quad (1)$$

Аднаўленне вектара $\mathbf{a}_i$ вырабляецца з дапамогай выразу

$$\tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{W}^T \hat{\mathbf{a}}_{i\lambda}, \quad (2)$$

дзе вектар $\hat{\mathbf{a}}_{i\lambda}$ атрыманы ссячэннем (сціскання) часткі каардынат пасля працэсу декарэляцыі (1). Ступень сціскання залежыць ад узроўня декарэляцыі уваходных дадзеных, які вызначаецца функцыяй размеркавання 2D дысперсій σ^2 каэфіцыентаў пераўтварэння (дэскрыптарай) (Mitsiukhin, Karcheuski, 2008) выгляду,

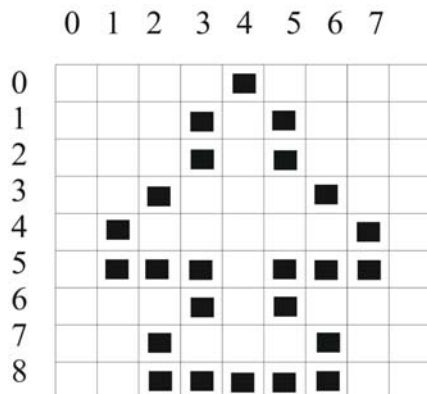
$$\text{diag}[\sigma^2] = \text{diag}[\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_c) \otimes \text{diag}[\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_r)], \quad (3)$$

дзе $\text{diag}[\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_c)]$ і $\text{diag}[\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_r)]$ — дыяганальныя каварыяцыйныя матрыцы адпаведна слупкоў і радкоў матрыцы каэфіцыентаў ператварэння $\hat{g}_{x_i, y_j}$.

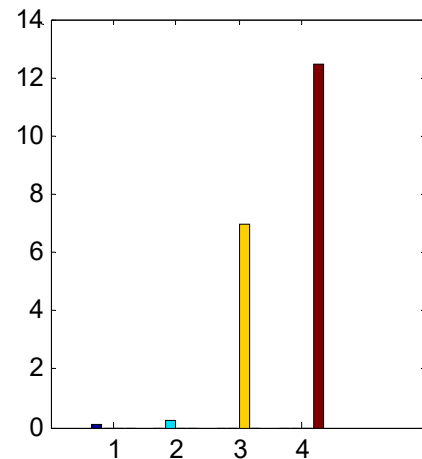
Функцыя (3) дазваляе прагназаваць чаканую эфектыўнасць спіску апісання мяжы і вызначаць лік дэскрыптарай, якія захоўваюцца. Пры гэтым сярэднеквадратычная памылка (страта за кошт сціскання) вызначаецца сумай дыяганальных элементаў λ_i якія адпавядаюць адкіданым каардынатам вектара $\hat{\mathbf{a}}_i$, (Міцюхін, Майсеня, 2013) г. зн.

$$\epsilon = \sum_i \lambda_i. \quad (4)$$

Прыклад. На мал. 1 і 2 паказаны выява $\mathbf{G}$ мяжы даўжынёй $N = 24$ і графік размеркавання дысперсій каварыяцыйнай матрыцы $\mathbf{A}$ па слупках.



Мал. 1. Выява мяжы



Мал. 2. Размеркаванне дысперсій $\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_c)$

Мяжы адпавядае матрыца $\mathbf{A}$ памерам $M \times L = 4 \times 12$, элементамі якой з'яўляюцца каардынаты выявы, мал. 1 разгорткай па слупках. Вылічэнне марыцы $\mathbf{W}^T$ зваротнага пераўтварэння і дыяганальнай матрыцы размеркавання дысперсій (уласных значэнняў λ_i) прыводзіць адпаведна да выразаў:

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} 0.110 & -0.663 & -0.341 & 0.657 \\ 0.715 & 0.148 & -0.618 & -0.291 \\ 0.688 & -0.102 & 0.703 & 0.146 \\ 0.052 & 0.726 & -0.086 & -0.086 \end{pmatrix};$$

$$\text{diag}[\sigma^2] = \begin{pmatrix} 0.128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.259 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.936 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.434 \end{pmatrix}$$

Ацэнкі вектараў выточных дадзеных атрымваюцца з выразу (2). Аналіз графіка, мал. 2 і структуры матрыцы $\text{diag}[\sigma^2]$ паказвае, што практычна ўся энергія сігналу засяроджана ў двух каэфіцыентах кожнага слупка. У гэтым выпадку гарантуецца практычна поўнае аднаўленне дадзеных пра выяву мяжы па двух значэннях каэфіцыентаў пераўтварэння $\tilde{a}_i$. У выніку атрымліваецца эканомія часовых, частотных і іншых рэсурсаў. Значэнне сярэднеквадратычнай памылкі роўна

$$\epsilon = \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 0,387.$$

Выдаткі на перадачу, захоўванне дадзеных са сцісканнем роўныя $2L$. Эфектыўнасць кадавання склала велічыню

$$K = \frac{2N - 2L}{2N} = 0,5 \text{ или } 50\%.$$

З прыклада бачна, што разгледжаны алгарытм кадавання дадзеных дазваляе паскорыць працэс іх перадачы, апрацоўкі і аналізу, зменшыць аб'ём памяці для захоўвання дадзеных і час звароту да памяці на палову.

Заканчэнне. Прапанаваны вылічальны метада можа быць скарыстаны пры праектаванні працэсара, прызначанага для апрацоўкі дадзеных значнага аб'ёму, прыкладам, дадзеных мяжы, калі даўжыня вектара ўваходу вялікая. Пераход да двухвымерных ператварэнняў у гэтым выпадку дае выйгрыш у апрацоўцы, спрашчэнні аналізу выявы, дэшыфрацыі яе асноўных характарыстык і інфармацыйных прыкмет.

Спіс лitarатуры

- Mitsiukhin, A., & Karcheuski, A. (2008). Filtration of Videographic Data by Means of Hartley Discrete Transform. In *Proceedings 53 IWK «Prospects in Mechanical Engineering»* (pp. 365–366). Irmenau: TU Irmenau
- Гонсалес, Р., Вудс, Р. М. (2005). *Цифровая обработка изображений*. Москва: Техносфера.
- Міцюхін, А. І., Майсеня, Л. І. (2013). Выкарыстанне пераўтварэння Хатэлінга для біямэтрычнай ідэнтыфікацыі. У кн. *Матэрыялы III Міжнародной навукова-практычнай канферэнцыі «Матэматыка в сучасному тэхнічному універсітэці»* (с. 72—74). Кіў: НТУУ «КПІ».

СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА З ІЗОТРОПНОЮ ПЛАСТИНОЮ¹

Ю. В. Новікова

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,

Слов'янськ, Україна

yuliya.novikova.88@mail.ru

Прогрес сучасної аерокосмічної індустрії призводить до необхідності розв'язування проблем керування та стабілізації руху складними космічними апаратами з пружними елементами. У більшості теоретичних робіт присвячених динаміці космічних та літальних апаратів до 70-х років XX ст. не враховувалися пружні властивості конструктивних елементів, а об'єкти дослідження вважалися абсолютно твердими тілами.

У роботах Рубановського (1976), Докучаєва (1982) та інших авторів було встановлено, що пружні елементи суттєво впливають на динаміку всієї системи, а тому задачі керування та стабілізації руху для твердих тіл несуть тільки наближену інформацію та не дають повного уявлення про рух системи. Це означає, що нові алгоритми керування повинні забезпечувати стабілізацію не тільки твердих тіл, а й пружних елементів конструкції.

Метою представленої роботи є дослідження стійкості тривіального розв'язку лінійної нескінченновимірної системи, яка відповідає математичній моделі системи з пружною пластиною.

Розглянемо модель механічної системи, яка складається з твердого тіла та тонкої ізотропної пластини. У рамках досліджуваної моделі тіло-носії виконують обертальні рухи з трьома степенями волі, а пластина шарнірно закріплена на границі області.

З твердим тілом, яке обертається навколо нерухомої точки з кутовою швидкістю $\omega(t)$, пов'язано декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (Zuyev, 2015).

Припустимо, що пластина має товщину $h > 0$ і в недеформованому стані займає замкнену область, яка має вигляд $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2], |x_3| \leq \frac{h}{2}$. Також будемо вважати, що в будь-який момент часу t серединну поверхню пластини можна задати рівнянням $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Рівняння коливань пластини згідно гіпотези Кірхгофа — Лява (Lagnese & Leugering, 1996) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \Delta^2 w = \\ & = - \left[(x_1 - a_1)(\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega}_2) + (x_2 - a_2)(\omega_2 \omega_3 + \dot{\omega}_1) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(a_3 - w) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Робота містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф63-726 Державного фонду фундаментальних досліджень.

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа; $\alpha^2 = \frac{D}{\rho h} > 0$, $\rho > 0$ — густина матеріалу, $D > 0$ — жорсткість пластини при згинанні, h — товщина пластини; (a_1, a_2, a_3) — координати нерухомої точки, навколо якої рухається тверде тіло; $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ — кутова швидкість твердого тіла, а $\dot{\omega}$ — кутове прискорення.

Оскільки пластина закріплена шарнірно на границі області Ω , то крайові умови будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) \big|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \bigg|_{x_1=0, x_1=l_1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \bigg|_{x_2=0, x_2=l_2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де ν — коефіцієнт Пуассона. Рівняння (1) з крайовими умовами (2) були отримані у статті Зуев, Новикова (2011).

Застосуємо метод Фур'є до розв'язання крайової задачі (1), (2), та запишемо лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, яка описує вплив повільних обертань тіла-носія на коливання пластини:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj} \eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj} \xi_{kj} + \varphi_{kj} u_1 + g_{kj} u_2. \end{cases} \quad (3)$$

У системі (3): $\xi_{kj}(t)$ — модальна координата, $\eta_{kj}(t)$ — швидкість, що відповідає моді коливань з індексами $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $u_1(t), u_2(t)$ — функції керування, які відповідають кутовому прискоренню тіла-носія. Розглянемо підсистему системи (3) з ненульовими коефіцієнтами при керуваннях $u_1(t)$ та $u_2(t)$. Тоді коефіцієнти системи (3) пов'язані з параметрами механічної системи (1), (2) наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \beta_{kj} &= \alpha \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2 \right), \quad \varphi_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (2a_2 - l_2)}{\pi^2 k j}, \quad g_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (l_1 - 2a_1)}{\pi^2 k j}, \\ (k, j) &\in \hat{N}_2, \end{aligned}$$

де

$$\hat{N}_2 = \{ (k, j) \mid k = 2p - 1, j = 2m - 1, p, m \in \mathbb{N} \}.$$

Припустим, що $2a_1 \neq l_1$, $2a_2 \neq l_2$.

Розгляньмо взаємно-однозначне відображення $(k, j) \mapsto n(k, j)$ між множинами $\hat{N}_2$ і $\mathbb{N}$, тоді величинам з подвійним індексом $(k, j) \in \hat{N}_2$ буде відповідати одинарний індекс $n \in \mathbb{N}$.

Підсистему системи (3) для індексів $(k, j) \in \hat{N}_2$ можна переписати в операторному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

де

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введемо скалярний добуток у гільбертовому просторі ℓ^2 для векторів x та $\bar{x}$ стандартним чином:

$$\langle x, \bar{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n \bar{\xi}_n + \eta_n \bar{\eta}_n).$$

Розглянемо функціонал

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2),$$

який діє з ℓ^2 в $\mathbb{R}$.

Визначимо функції керування зі зворотним зв'язком:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n, \quad v_2(x) = -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n, \quad (k_1 \geq 0, k_2 \geq 0). \quad (5)$$

Похідна V у силу системи (4) з $u_1 = v_1(x)$, $u_2 = v_2(x)$ буде мати вигляд

$$\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0.$$

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. Нехай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Тоді керування зі зворотним зв'язком $u_1 = v_1(x)$ та $u_2 = v_2(x)$ вигляду (5) забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (4).

Список літератури

- Zuyev, A. (2015). *Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements*. Cham Heidelberg: Springer.
- Lagnese, J. E., & Leugering, G. (1996). Controllability of Thin Elastic Beams and Plates. In: Levine, W. S. (Ed.). *The control handbook* (pp. 1139–1156). Boca Raton: CRC Press — IEEE Press.
- Зуев, А. Л., Новикова, Ю. В. (2011). Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением. *Механика твердого тела*, 41, 187—198.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

М. В. Ногін

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

nvnogin@gmail.com

В роботі, на основі Кочин, Кибель, Розе (1949) та Лойцянский (1973), проводиться класифікація, а також приводяться розв'язки простіших крайових задач за допомогою теорії аналітичних функцій комплексної змінної для плоских паралельних потоків ідеальної нестисливої рідини, за умов відсутності і неприсутності вихорів, у стаціонарному режимі.

Відомо, що функція комплексної змінної

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

де $\phi(x, y)$ — «потенціал», а $\psi(x, y)$ — функція току — комплексний потенціал — у літературі називається *характеристичною функцією цієї рідини*.

1. Поступальний потік. $W = (c_1 - ic_2)z$, де c_1, c_2 — сталі. Тоді комплексна швидкість

$$u = c_1, v = c_2, w = Uz$$

2. Плоске джерело. $W = c_1 \ln z$, $c_1 > 0$. Звідки

$$\phi = c_1 \ln \rho, \psi = a\theta$$

Лінії $\theta = c_2$ — у полярній системі — пучок прямих, що проходять через початок координат.

Тепер

$$\bar{v}_\rho = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = |\bar{v}|, \bar{v}_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

Власне, характеристична функція плоского джерела:

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln z,$$

де Q — витрати рідини через контур L , що охоплює центр джерела.

Нарешті, швидкість від джерела:

$$\bar{v} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\rho},$$

а тиск

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\rho} \right)^2,$$

де γ — густина рідини.

3. Плоский циркуляційний потік. Тепер

$$W = -iC \ln z$$

де $C > 0$, і далі,

$$\phi = C\theta, \psi = -C \ln \rho.$$

Проекція швидкості на осі п. с.

$$\bar{v}_\rho = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0, \bar{v}_\theta = \frac{C}{\rho}$$

Із врахуванням циркуляції

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \bar{v} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\rho} \quad (1)$$

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi\rho} \right)^2 \quad (2)$$

В (1), (2): $\rho = 0$ є особлива точка потоку.

Із (2) очевидно, що з наближенням до центру циркуляційного потоку тиск зменшується.

Комбінуючи плоске джерело з циркуляційним потоком отримаємо течію з характеристичною функцією

$$W = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Список літератури

- Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В. (1949). *Теоретическая гидромеханика*. Москва: ГИТТЛ.
- Лойцянский, Л. Г. (1973). *Механика жидкости и газа*. Москва: Наука.

СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Ногин

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

nvnogin@gmail.com

Работа посвящена решению важной задачи гидродинамики, расчету обтекания плоского профиля стационарным потоком со скоростью U . Эффективный метод решения таких задач разработан Л. И. Седовым (Седов, 1966), однако необходимость отметить, что решению подобных задач посвящены также работы Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, С. М. Белоцерковского, А. И. Некрасова и др. В частности, мы используем теоремы Жуковского, Жуковского — Чаплыгина, Томсона.

Итак, рассмотрим обтекание плоского профиля с хордой $2a$, потоком со скоростью U , под углом α . Действие потока на профиль эквивалентное ординате $y = f(x)$ (рис. 1)

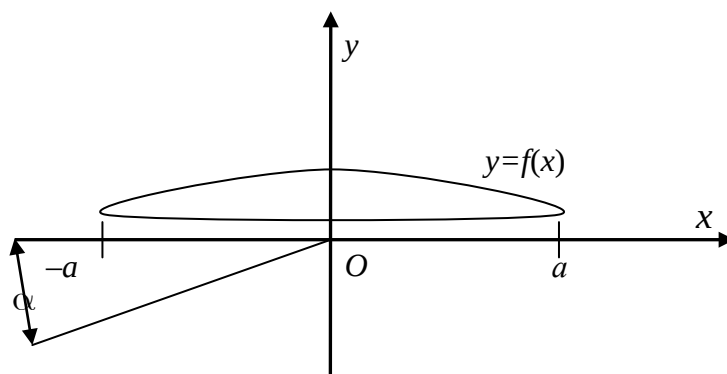


Рис. 1

Тогда характеристическая функция

$$W(z) = Ue^{-i\alpha}z + W_1(z)$$

Для определения, $W_1(z)$ имеем простейшую краевую задачу Римана-Гильберта, причем

$$\frac{dW_1(z)}{dz} = \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}g(z),$$

где $g(z)$ определяется как интеграл типа Коши по контуру L_1 (внутри D).

Окончательно

$$g(z) = -\frac{U}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f' - \alpha}{\xi_k - z} \sqrt{\frac{\xi + a}{a - \xi}} d\xi$$

Находим также «стационарную циркуляцию»

$$\Gamma = 2U \int_{-\infty}^a (f' - \alpha) \sqrt{\frac{\xi + a}{a - \xi}} d\xi$$

и величину «подъемной силы»

$$R_{\pi} = 2\gamma U^2 \int_{-a}^a (f' - \alpha) \sqrt{\frac{\xi + a}{\xi - a}} d\xi,$$

где γ — плотность жидкости.

Список литературы

Седов Л. И. (1966). *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва: Наука.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАДІЙНОСТІ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

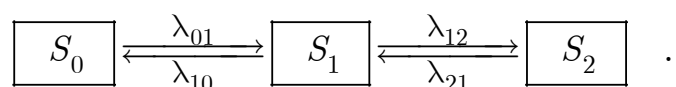
Н. В. Поліщук

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

nvpolin@gmail.com

Системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються у прикладних задачах. Також розглядаються питання дослідження надійності, ефективності роботи таких систем у курсах теорії ймовірностей, теорії надійності, в інших прикладних задачах.

Маємо двоканальну СМО з відмовами, яка може перебувати у трьох станах: S_0, S_1, S_2 . Граф системи має вигляд:



У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її зі стану S_i у стан $S_j, i, j = 0, 1, 2$, з інтенсивністю λ_{ij} .

Позначимо $p_i(t)$ — ймовірність знаходження системи у стані $S_i, i = 0, 1, 2$, у момент часу t . Ці ймовірності задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 - \lambda_{01}p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1, \\ p_2' = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2, \end{cases}$$

з початковим умовами: $p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0$.

У кожний момент часу t , для функцій $p_i(t)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

У теорії випадкових процесів доведено (Поліщук, Кушлик-Дивульська, Орел, 2011), що, якщо кількість станів системи скінчена і з кожного з них можна за скінчене число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, i = 0, 1, 2,$$

які задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{10}p_1 - \lambda_{01}p_0 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2 = 0, \end{cases}$$

при умові $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0, p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0, \quad (1)$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Застосуємо цю систему для дослідження надійності роботи поліграфічного комплексу із двох друкувальних машин і однієї ремонтної бригади.

Нехай стан системи S_0 — обидві машини працюють, S_1 — одна з машин працює, інша в ремонті, S_2 — обидві машини не працюють. Нехай середній час безвідмовної роботи однієї машини $t_0 = 10$ годин, ремонт машини триває $t_1 = 3$ години. При переході зі стану S_0 в стан S_1 з ладу може вийти перша або друга машина з інтенсивністю $\lambda = 1/t_0 = 1/10$, тому $\lambda_{01} = 2\lambda = 2/t_0 = 1/5$, $\lambda_{12} = 1/t_0 = 1/10$, $\lambda_{21} = \lambda_{10} = 1/t_1 = 1/3$.

Обчислюючи фінальні ймовірності за формулами (1), маємо

$$p_0 = 0,562; p_1 = 0,337; p_2 = 0,101.$$

Надійність системи P у стаціонарному режимі визначається за формулою (Вентцель, 1972):

$$P = p_0p_1p_2 = 0,562 \cdot 0,337 \cdot 0,101 = 0,019.$$

Середнє число справно працюючих елементів визначається співвідношенням

$$u = n/(1+\rho) = 2/(1+0,3) = 1,54,$$

де $n = 2$, $\rho = \lambda_{12}/\lambda_{10} = 0,3$.

Ураховуючи формули (1), запишемо вираз для надійності системи P як функцію зведеної інтенсивності ρ , $\rho = \lambda_{12}/\lambda_{10}$, $2\rho = \lambda_{01}/\lambda_{10}$, маємо:

$$P = p_0p_1p_2 = \frac{4\rho^3}{(1 + 2\rho + 2\rho^2)^3}.$$

Дослідивши цю функцію на екстремум, маємо

$$P_{\max} = \frac{5\sqrt{2} - 7}{2} = 0,0355 \text{ при } \rho = \sqrt{2}/2.$$

Тоді середня кількість працюючих машин $u = n/(1 + \rho) = 1,5858$.

Список літератури

Вентцель, Е. С. (1972). *Исследование операций*. Москва: Советское радио.

Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І., Орел, Б. П. (2011). *Дослідження операцій: Конспект лекцій*. Київ: НТТУ «КПІ».

ВПЛИВ ЗМІНИ КРИВИЗНИ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ШАРУВАТИХ НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ

Л. С. Рожок

*Національний транспортний університет, Київ, Україна
r.l.s@ua.fm*

Розв'язується задача про напружений стан тришарових порожнистих неоднорідних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів з використанням підходу, що базується на застосування дискретних рядів Фур'є, методу відокремлення змінних та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Розглядаються порожнисті циліндри під дією зовнішнього навантаження $q = q_0 \sin(\pi s/l)$, що складені з шарів, з'єднаних між собою без проковзування та відриву, для яких виконуються умови спряження

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{\psi\gamma}^i &= \tau_{\psi\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_\psi^i &= u_\psi^{i+1} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Перша квадратична форма в ортогональній криволінійній системі координат s, ψ, γ записується у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2,$$

де s — довжина дуги вздовж твірної, ψ — полярний кут в поперечному перерізі, γ — нормальна координата по товщині циліндра.

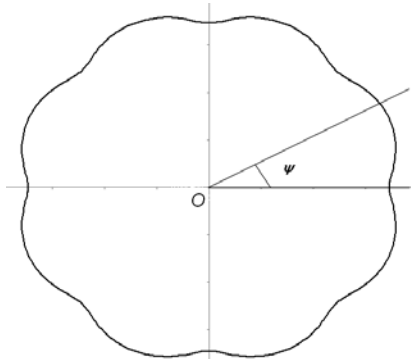


Рис 1. Поперечний переріз поверхні відліку

Рівняння кривої поверхні відліку (рис. 1) задається в параметричній формі у вигляді скороченої епіциклоїди (Корн, Корн, 1968):

$$\begin{aligned} x &= (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left(\frac{A + a}{a} \psi \right), \\ y &= (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A + a}{a} \psi \right), \end{aligned}$$

тут A — радіус нерухомого кола; a ($a > 0$) — радіус рухомого кола; λa ($\lambda < 1$) — відстань до радіуса рухомого кола.

Тоді

$$H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}, \quad \omega = \omega(\psi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2},$$

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{\left(\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2 y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \frac{d^2 x}{d\psi^2}},$$

де R_ψ — радіус кривизни в поперечному перерізі, ω — коефіцієнт переходу від координати дуги напрямної до кутового параметру ψ .

Даний клас задач розглядається в просторовій постановці на основі рівнянь просторової теорії пружності (Тимошенко, 1972). На торцях циліндра задаються граничні умови типу простого обпирання

$$\sigma_s = 0; \quad u_\psi = 0; \quad u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0, \quad s = l.$$

За розв'язувальні функції обираються компоненти напружень $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$ і переміщень u_γ, u_s, u_ψ . Тривимірна крайова задача описується розв'язувальною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними шостого порядку зі змінними коефіцієнтами для кожного шару циліндра.

Розв'язувальні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень у ряди Фур'є вздовж твірної циліндра, після чого відокремлюються змінні в напрямку твірної і отримується двовимірна крайова задача відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є, яка описується розв'язувальною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних більш високого порядку. Отримана розв'язувальна система рівнянь включає в себе коефіцієнти, що містять параметри, які перешкоджають відокремленню змінних за координатою ψ . Тому, до розв'язувальної системи рівнянь розглядають доповняльні функції φ_j^l ($j = 1, 7; l = 1, 5$) після чого, вона матиме коефіцієнти, які формально, не перешкоджатимуть відокремленню змінних у розглядуваному напрямку (Grigorenko & Rozhok, 2014; 2016). Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою ψ , приходять до одомірної крайової задачі відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь для кожного шару у вигляді (індекс i опускаємо для зручності)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,n,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,n,k} + (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,n,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,n,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - b_{66} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,n,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{\psi,n,k} - 2\varphi_{2,k}^1 - c_2 \varphi_{3,k}^1 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{5,k} - b_{22} \varphi_{7,k}; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{du_{\gamma,n,k}}{d\gamma} = c_4 \sigma_{\gamma,n,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3 - c_2 \varphi_{4,k}^2;$$

$$\frac{du_{s,n,k}}{d\gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma,n,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,n,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma,n,k} + \varphi_{2,k}^2 - \varphi_{3,k}^2$$

$$\left(k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N} \right)$$

$$\left(b_{11} = a_{22} a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11} a_{66} / \Omega; \right.$$

$$\left. b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66}; \right.$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23},$$

де для ізотропного матеріалу

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

Граничні умови на бічних поверхнях мають вигляд

$$\gamma = \gamma_{-H/2}: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_{H/2}: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0,$$

тут H — загальна товщина циліндра ($H = h_1 + h_2 + h_3$).

Для інтегрування отриманої одномірної крайової задачі (1), (2) застосовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Для визначення значень доповняльних функцій у процесі обчислення, на кожному кроці інтегрування використовуються ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок (Фихтенгольц, 1949).

На основі розглянутого підходу розв'язано задачу про напружений стан порожнистих неоднорідних тришарових циліндрів, з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів залежно від зміни параметра λ . Циліндри виготовлені з ізотропного матеріалу і мають неоднорідність по товщині. Товщина несучих шарів $h_1 = h_3 = 2$, товщина середнього шару $h_2 = 4$. Несучі шари мають механічні параметри $E = E_0$; $\nu = 0,3$. Для середнього шару прийнято $E = d E_0$; $d = 0,1$; $\nu = 0,3$.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндра $l = 60$, радіус нерухомого кола $A = 16$, радіус рухомого кола $a = 2$, параметр $\lambda = 0,25$; $0,30$; $0,35$.

Варіація параметру λ , яка характеризує величину амплітуди напівгофрів, призводить до суттєвої зміни величини радіуса кривизни. Так, для $\lambda = 0,25$ маємо $R_\psi = -8,1$, для $\lambda = 0,3$ — $R_\psi = -5,2$ і для $\lambda = 0,35$ — $R_\psi = -3,5$,

що не дозволяє нехтувати членами порядку (H / R_ψ) і призводить до необхідності розглядати указаний клас задач саме у просторовій постановці.

Розв'язок задачі наведено в таблиці в середньому перерізі при $l = 30$ уздовж прямої циліндра для розподілу полів переміщень u_γ та полів напружень σ_ψ на внутрішній $\gamma = -H / 2$ та зовнішній $\gamma = H / 2$ поверхнях циліндра в залежності від зміни параметра λ .

Так, збільшення відстані між радіусами рухомого й нерухомого кола з 0,25 до 0,35 призводить до зменшення величини переміщень в 1,05 на внутрішній ($\gamma = -H / 2$) поверхні та в 1,12 рази на зовнішній ($\gamma = H / 2$) поверхні циліндра.

Суттєві зміни в розподілі величини напружень мають місце в западині напівгофрів ($\psi = 0$) на зовнішній поверхні ($\gamma = H / 2$).

Таблиця

		$u_\gamma E_0 / q_0$					σ_ψ / q_0				
		0					0				
$H/2$	0,25	101,65	99,68	93,73	86,10	82,44	6,81	7,25	4,43	3,04	2,98
	0,3	101,72	99,93	93,96	85,63	81,48	5,17	8,32	4,32	2,81	2,92
	0,35	90,18	91,88	88,78	75,47	66,97	17,59	10,58	4,61	2,94	3,37
$-H/2$	0,25	91,02	86,93	78,94	73,62	72,20	-0,21	2,89	4,93	7,61	10,33
	0,3	90,72	86,25	77,76	72,54	71,33	-1,33	3,10	4,55	7,46	11,23
	0,35	87,47	82,60	73,35	67,61	66,26	-2,42	3,58	4,32	7,75	12,71

Таким чином, на основі чисельно-аналітичного підходу, із застосуванням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, було проведено аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів зі складною формою поперечного перерізу, у вигляді з'єднаних опуклих напівгофрів, що описуються рівнянням скороченої епіциклоїди залежно від зміни кривизни поверхні відліку, викликаною варіаціями відстані між центрами рухомого і нерухомого кіл.

Список літератури

- Grigorenko, Ya. M., & Rozhok, L. S. (2016). Influence of curvature on the stress state of longitudinally corrugated hollow cylinders. *Int. App. Mech.*, 52(1), 49–55.
- Grigorenko, Ya. M., & Rozhok, L. S. (2014). Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with a cross-section in the form of convex semi-corrugations. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 57(4), 109—120.
- Корн, Г., Корн, Т. (1968). *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука.
- Тимошенко, С. П. (1972). *Курс теории упругости*. Киев: Наукова думка.
- Фихтенгольц, Г. М. (1949). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 3). Москва: Наука.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А. В. Розанов¹, С. Н. Потемкина², Н. И. Лиманова², Ю. В. Сизова²,

¹Саратовский государственный аграрный университет им. Н.И. Вавилова,
Саратов, Россия

²Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

arosanov@yandex.ru, s.potemkina@tltsu.ru

Определение напряженности электростатического поля заряженного конденсатора требует, в общем случае, решения системы уравнений Максвелла (Ландау, Лившиц, 2005). Это предполагает хорошую теоретическую подготовку, значительные затраты времени на реализацию решения и нуждается в ресурсах для вычислений.

Для расчета краевых эффектов электростатического поля плоского конденсатора при выполнении самостоятельных работ в виртуальной физической лаборатории (Сизова, Лиманова, Потемкина, 2016) мы предлагаем студентам использовать две математические модели, позволяющие достаточно просто и оперативно рассчитать напряженность поля за пределами обкладок конденсатора (Лиманова, Потемкина, Сизова, 2016).

В первой модели поле конденсатора предлагается заменить полем диполя, расположенного так, как показано на рис. 1 (точки A и A'). Ось x расположена симметрично обкладкам конденсатора на расстоянии $\frac{d}{2}$ от каждой обкладки. Ось y перпендикулярна оси x и направлена вертикально вверх.

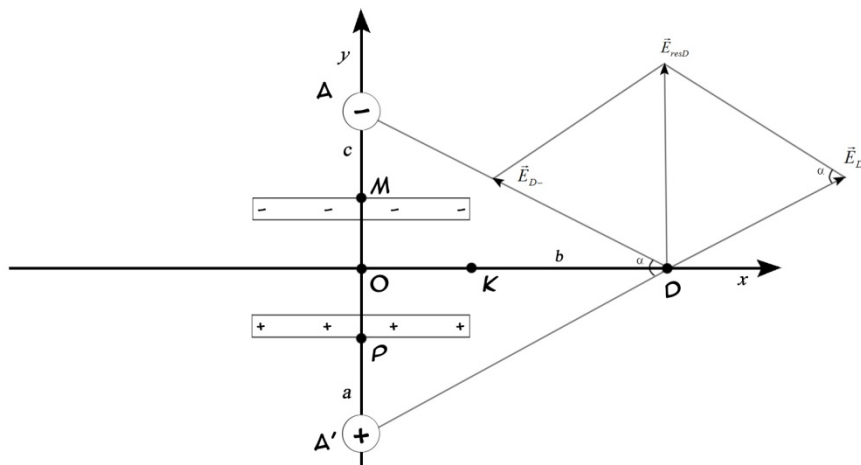


Рис. 1. Взаимное расположение обкладок конденсатора и диполя

Модуль заряда диполя равен модулю заряда одной из обкладок заряженного конденсатора. Ширину обкладок считаем настолько тонкой, что ею можно пренебречь, причем, чем ближе к обкладке конденсатора расположены заряды диполя, тем больше искажается поле внутри конденсатора. Поэтому отрицательный заряд q_1 и положительный заряд q_2 располагаются на расстояниях a

от обкладок конденсатора. Результирующая напряженность $\vec{E}_{resD}$ данной системы рассчитывается согласно принципу суперпозиции.

Из рис. 1 видно, что $OA = \frac{d}{2} + a, OD = \frac{l}{2} + b, 2OA = AA'$. Следовательно

$$A'D = \sqrt{OA^2 + OD^2}.$$

Напряженность поля, созданного зарядом $q_1 d$ в точке D , равна:

$$\vec{E}_{resD} = \frac{kq_1}{AD^2} = \frac{kq_1}{OA^2 + OD^2}. \quad (1)$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} E_{resD} &= E_{D+}^2 + E_{D+}^2 - 2E_{D+}^2 \cos \alpha = 2E_{D+}^2 (1 - \cos \alpha), \\ AA'^2 &= 2A'D^2 - 2A'D^2 \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{-(AA')^2 + 2(A'D)^2}{2(A'D)^2} = \frac{-\left[2\left(\frac{d}{2} + a\right)\right]^2 + 2\left[\left(\frac{d}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + b\right)^2\right]}{2\left(\frac{d}{2} + a\right)^2} \end{aligned}$$

Следовательно, окончательно получаем:

$$E_{resD} = \sqrt{2E_{D+}^2 (1 - \cos \alpha)} = 2E_{D+} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Вторая модель несколько сложнее, но, как показывает практика, дает более точное решение задачи. В ней для расчета напряженности электростатического поля предлагается использовать метод дифференцирования и интегрирования, в основе которого лежат два принципа: представление рассчитываемой величины в дифференциальной форме и принцип суперпозиции (Беликов, 1986).

Каждую из обкладок заряженного конденсатора следует представить в виде системы тонких полосок, настолько тонких, что их можно представить как систему заряженных нитей конечной длины. Эти нити, несущие равномерно распределенные по длине заряды разного знака, расположены симметрично относительно оси x . Заряд одной нити легко рассчитать по формуле:

$$q_{нити} = \frac{q_{конденсатора}}{2N}, \quad (3)$$

где N — число нитей, на которые разделили одну пластину.

Величину линейной плотности заряда рассчитывается по формуле:

$$\lambda = \sigma \Delta x, \quad (4)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Все нити, расположенные на нижней обкладке конденсатора, равномерно заряжены с положительной линейной плотностью заряда, а нити верхней об-

кладки — с такой же по модулю, но противоположной по знаку, линейной плотностью заряда (Потемкина, Розанов, 2010).

На рис. 2 показано направление элементарного вектора напряженности поля, созданного малым элементом dl положительно заряженной нити конечной длины BM . Ось x направим так, чтобы она делила заряженный конденсатор на две симметричные части и располагалась на расстоянии $\frac{d}{2}$ от каждой из обкладок конденсатора, а ось y направим перпендикулярно оси x вертикально вверх. Точка A , для которой необходимо рассчитать величину напряженности поля, может смещаться вдоль оси x .

Рассчитаем напряженность нити BM в точке A .

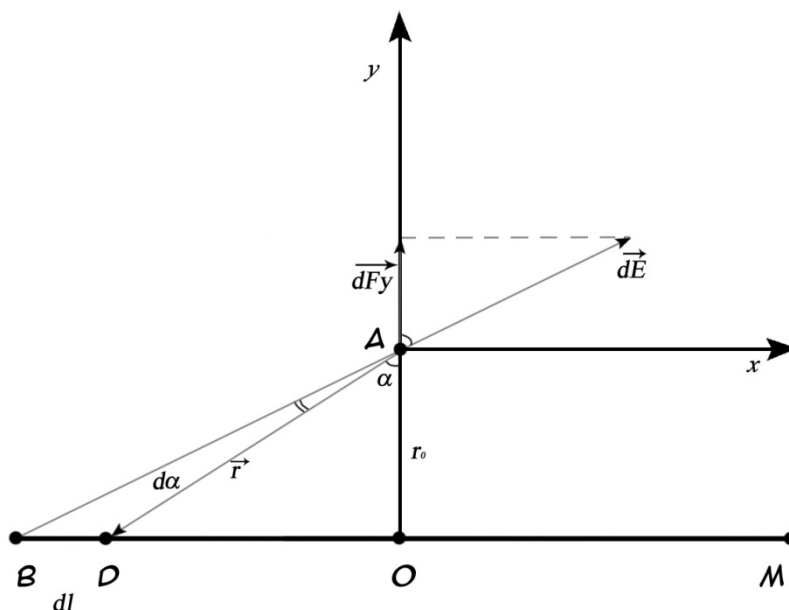


Рис. 2. Напряженность поля, созданного нитью конечной длины

Разделим нить на малые элементы dl , так чтобы

$$dl = \lambda dl \quad (5)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6)$$

Из треугольника AOD следует, что $\frac{r}{r_0} = \cos \alpha$. Соответственно, из тре-

угольника DCB получается $dl = \frac{r_0 d\alpha}{\cos^2 \alpha}$. Проекция $d\vec{E}$ на осях Ox и Oy :

$$dE_y = \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (7)$$

$$dE_x = \frac{\lambda \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (8)$$

После интегрирования для общего случая получаем:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \quad (9)$$

В силу симметрии расположения равномерно заряженных нитей относительно оси Ox , суммарное значение $E_x = 0$.

Остается рассчитать для точки A только проекцию вдоль оси Oy результирующей напряженности, которая будет в 2 раза больше E_y :

$$E_{y \text{ рез}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \quad (10)$$

Синусы интересующих нас углов вычисляются по формулам:

$$\sin \alpha_1 = \frac{BO}{\sqrt{BO^2 + r_0^2}}, \sin \alpha_2 = \frac{OM}{\sqrt{OM^2 + r_0^2}}, \quad (11)$$

При перемещении точки A вдоль оси x вправо или влево будут изменяться величины $\sin \alpha_1$ и $\sin \alpha_2$, и, соответственно, величина напряженности поля $E_{y \text{ рез}}$.

Практика показывает, что обе модели позволяют оперативно и с разумной точностью определять напряженность электростатического поля конденсатора при удалении точки A вдоль оси x от краев его обкладок, т. е. учесть краевые эффекты, но вторая модель дает лучший результат.

Список литературы

- Беликов, Б. С. (1986). *Решение задач по физике: Общие методы* (с. 107—110). Москва: Высшая школа.
- Ландау, Л. Д., Лившиц, Е. М. (2005). *Теоретическая физика*. (Том VIII. Электродинамика сплошных сред, с. 37). Москва: Физматлит.
- Лиманова, Н. И., Потемкина, С. Н., Сизова, Ю. В. (2016). Виртуальный лабораторный практикум на основе метода имитационного моделирования для дистанционного обучения студентов. В кн. *Сб. статей VI международной заочной научно-технической конференции «Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации (ITRT-2016)»* (Ч. 1, с. 37—43). Тольятти: ПВГУС.
- Потемкина, С. Н., Розанов, А. В. (2010). Математические методы в преподавании курса физики. У кн. *Матеріали Тринадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука* (с. 268). Київ: НТУУ «КПІ».
- Сизова, Ю. В., Лиманова, Н. И., Потемкина, С. Н. (2016). Виртуальная физическая лаборатория для системы дистанционного обучения. В кн. *Материалы III Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в сфере АПК»* (с. 123—127). Саратов: Амирит.

ПРО ГРУПИ, У ЯКИХ ПІДГРУПИ, ЩО НЕ Є НОРМАЛЬНИМИ, БЛИЗЬКІ ДО АБЕЛЕВИХ ГРУП

Л. В. Скасків, О. А. Ярова

Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь, Україна

lila_yonyk@ua.fm, yarovaoa@ukr.net

Якщо G — група, то через $L_{norm}(G)$ (відповідно через $L_{non-norm}(G)$) будемо позначати систему всіх нормальних підгруп групи G (відповідно систему всіх підгруп, що не є нормальними). Групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження в теорії груп. Нормальні підгрупи мають досить великий вплив на будову групи, тому в багатьох випадках, коли їх досить багато, структура групи може бути детально вивчена. Образно кажучи, чим більше має група нормальних підгруп, тим ближче група до абелевої. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними (тобто система $L_{norm}(G)$ містить усі підгрупи групи і відповідно система $L_{non-norm}(G)$ є порожньою), то вона або абелева, або є прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої 2-групи та періодичної групи без елементів порядку 2. Цей результат був отриманий для скінченних груп ще в роботі Р. Дедекінда (Dedekind, 1897), а потім був розширений на довільні групи в роботах Ваєр (1933) та Семко, Ярова (2011). Природним наступним етапом стало вивчення груп G , у яких система $L_{non-norm}(G)$ задовольняє деякому (часто досить сильному) обмеженню. Першими такими роботами були роботи О. Ю. Шмідта (1926; 1938), що вже стали класичними. У них О. Ю. Шмідт вивчав скінченні групи, у яких усі підгрупи системи $L_{non-norm}(G)$ є спряженими або система підгруп $L_{non-norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Але систематичне вивчення груп, у яких система підгруп, що не є нормальними, задовольняє деяку досить сильну умову, починається зі статей С. М. Чернікова (1967а; 1967б). У розвитку цієї тематики брало участь багато відомих алгебраїстів, які збагатили її багатьма глибокими і цікавими результатами. Існує багато природних типів підгруп, що близькі до нормальних. Наприклад, у теорії груп важливу роль грають транзитивно нормальні підгрупи (Шмідт, 1926). Підгрупа H групи G називається *транзитивно нормальною в G* , якщо H є нормальною у кожній підгрупі KH , у якій H є субнормальною. Вплив транзитивно нормальних підгруп на властивості і структуру групи вивчався, наприклад, у роботах Пыпка, Семко (2011; 2012), Semko (2013), Семко (2013), Семко, Ярова (2011), Otal, Semko & Semko (2013).

Наша мета — дослідження груп, усі власні підгрупи яких близькі до абелевих. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп зі скінченним комутантом є групи з черніковським комутантом. У даній роботі продовжується вивчення груп, у яких будь-яка підгрупа або нормальна, або має черніковський комутант. Деякий загальний опис таких груп отримано в роботах Semko & Yarovaya (2009), Skaskiv & Arte-

movuch (2013), Яровая (2008; 2009).

Дана робота присвячена детальнішому вивченню будови таких груп. Одним з важливих етапів цього вивчення є розгляд випадку, коли така група має підгрупу скінченного індексу, комутант якої є черніковською підгрупою.

Теорема 1. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G містить у собі підгрупу скінченного індексу, комутант якої є черніковською підгрупою, то й комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

При вивченні розв'язних груп, кожна підгрупа яких або нормальна, або її комутант буде черніковською підгрупою, першим природним кроком є вивчення їх локальної структури. Інакше кажучи, вивчення будови їх підгруп, що мають вигляд $\langle g, A \rangle$, де A — абелева підгрупа, а $g \in N_G(A)$.

Теорема 2. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Нехай, далі, A — абелева підгрупа групи G , та нехай $g \in N_G(A) \setminus C_G(A)$. Тоді $[A, g]$ буде черніковською підгрупою.*

За допомогою попередніх результатів отримано опис структури деяких класів майже розв'язних груп, кожна підгрупа яких або нормальна, або її комутант буде черніковською підгрупою.

Теорема 3. *Нехай G — локально ступінчата група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A , що фактор-група G/A буде скінченно породженою. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Теорема 4. *Нехай G — періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G має нормальну систему Куроша — Чернікова, фактори якої будуть локально ступінчатими. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.*

Теорема 5. *Нехай G — періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну підгрупу A , що фактор-група G/A не має власних підгруп скінченного індексу. Якщо комутант A є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Список літератури

- Baer, R. (1933). Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Akad.*, 2, 12—17.
- Dedekind, R. (1897). Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind. *Math. Annalen*, 48, 548—561.
- Otal, J., Semko, N. N., & Semko, N. N. (Jr.) (2013). On groups whose transitively normal subgroups are either normal or self-normalizing. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 192, 901—915.
- Semko, N. N. (Jr.). (2013). Groups with many pronormal and transitively normal subgroups. *Algebra and Discrete Mathematics*, (2), 269—286.

- Semko, N. N., & Yarovaya, O. A. (2009). On some generalization of metahamiltonian groups. *Algebra and Discrete Mathematics*, (2), 16—24.
- Skaskiv, L., & Artemovych, O. (2013). Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups. *Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка*, 8, 328—334.
- Пипка, О. О., Семко, М. М. (мол.). (2012). Про нескінченні групи, які мають тільки два типи пронормальних підгруп. *Доповіді НАН України*, (2), 32—34.
- Пыпка, А. А., Семко, Н. Н. (мл.). (2011). Группы, имеющие только два типа пронормальных подгрупп. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.*, (2), 36—41.
- Семко, М. М. (мол.). (2013). Группы, що мають велику систему пронормальних і транзитивно нормальних підгруп. *Доповіді НАН України*, (8), 17—20.
- Семко, М. М., Ярова, О. А. (2011). Группы, в яких підгрупи, що не є нормальними, близькі до абелевих груп. *Вісник ДНУ. Серія «Математика»*, 19 (6/1), 113—122.
- Черников, С. Н. (1967а). Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных подгрупп. *Матем. заметки*, 6(1), 11—18.
- Черников, С. Н. (1967б). Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп. *Укр. мат. журн.*, 19(6), 111—131.
- Шмидт О. Ю. (1926). Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп. *Мат. сборник*, 33, 161—172.
- Шмидт, О. Ю. (1938). Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. *Труды семинара по теории групп* (с. 7—26). Москва: ГОНТИ.
- Яровая, О. А. (2008). О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.*, (4), 36—39.
- Яровая, О. А. (2009). О группах, близких к метегамильтоновым. *Вісник Дніпропетровського університету. Математика*, 17(6/1), 143—149.

НЕКЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У СПЕЦІАЛЬНИХ КУРСАХ МАТЕМАТИКИ

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. Ю. Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,

Львів, Україна

roman.tatsiy@gmail.com, opazen@gmail.com

У даній роботі в замкненій формі розв'язано задачу про визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля з узагальненою координатою в багатoshарових (плоских, циліндричних та сферичних) конструкція за наявності дискретно-неперервних внутрішніх джерел тепла. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані. При розв'язуванні задачі використовуються основні положення теорії теплопередачі, теорії узагальнених систем лінійних диференціальних рівнянь та елементи теорії узагальнених квазидиференціальних рівнянь.

Постановка задачі. Розглянемо одновимірне диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} y) + f = 0, \quad (1)$$

яке моделює процеси стаціонарної теплопровідності.

У декартових, циліндричних та сферичних координатах диференціальне рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{1}{x^l} \left(x^l \lambda(x) y' \right)' = -f(x), \quad x > 0, \quad l = 0, 1, 2. \quad (2)$$

(Значення параметра $l = 0$ відповідає декартовим координатам, $l = 1$ — циліндричним, а $l = 2$ — сферичним).

Якщо коефіцієнт $\lambda(x)$ — недостатньо гладкий, то диференціювання виразу $x^l \lambda(x) y'$ виводить нас за межі класичних функцій. Щоб обійти цю неприємну процедуру диференціювання, введемо поняття квазіпохідної (Тацій, Стасюк, Мазуренко, Власій, 2011)

$$y^{[1]} \stackrel{df}{=} x^l \lambda(x) y' \quad (3)$$

З допомогою квазіпохідної (3) зведемо диференціальне рівняння (2) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x^l \lambda(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x^l f(x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Запровадимо наступні позначення:

- Нехай $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ — довільне розбиття відрізка $[x_0, x_n]$ на n частин;
- $\Theta_k(x)$ — характеристична функція проміжку $[x_k, x_{k+1})$

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}); \end{cases} \quad (5)$$

- $\delta_k = \delta(x - x_k)$ — функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$.

та задамо коефіцієнти диференціального рівняння (3), використовуючи позначення (4), (5):

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Theta_k(x), \quad f(x) = x^l \sum_{k=0}^{n-1} r_k \Theta_k(x) + \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^l \delta_k, \quad (6)$$

де $\lambda_k, r_k, s_k \in \mathbb{R}$ і $\lambda_k > 0$ ($\forall k = \overline{1, n-1}$). Не зменшуючи загальності, можна вважати, що точки зосереджень джерел s_k , $k = \overline{1, n-1}$ збігаються з точками розривів коефіцієнтів $\lambda(x)$ та $f(x)$.

Тоді система диференціальних рівнянь (4) за початкової умови

$$Y_l(x_0) = \left(y_l(x_0); \quad y_l^{[1]}(x_0) \right)^T = Y_l^0, \quad l = 0, 1, 2 \quad (7)$$

має єдиний розв'язок $Y(x)$ на проміжку $[x_0, x_n]$. При цьому перша компонента $y_l(x)$ вектора $Y(x)$ — неперервна на $[x_0, x_n]$ функція, а друга компонента $y_l^{[1]}(x)$ має розриви 1-го роду в точках x_k

$$\Delta y_l^{[1]}(x_k) = y_l^{[1]}(x_k) - y_l^{[1]}(x_k - 0) = x_k^l s_k, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

I. Розв'язок початкової задачі. Використовуючи подання коефіцієнтів диференціального рівняння (2) $\lambda(x)$ і $f(x)$ у вигляді (6) та вираз для початкового вектора (7), запишемо систему (4) з початковою умовою у вигляді

$$Y'_l = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k \Theta_k \right) Y_l - \sum_{k=0}^{n-1} x^l R_k \Theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k x^l \delta_k, \quad l = 0, 1, 2. \quad (8)$$

$$Y_l(x_0) = Y_l^0, \quad (7)$$

$$\text{де} \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^l \lambda_k} \Theta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} x^l r_k \Theta_k \end{pmatrix}, \quad S_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} x_k^l s_k \Theta_k \end{pmatrix} \quad (9)$$

Як відомо розв'язок задачі Коші (8), (7) з коефіцієнтами (9) подається у вигляді сплайну

$$Y_l(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{k,l}(x) \Theta_k, \quad l = 0, 1, 2, \quad (10)$$

де компоненти сплайну $Y_{k,l}(x)$ виражені формулою

$$\begin{aligned}
Y_{k,l}(x) &= B_{k,l}(x, x_k) B_l(x_k, x_0) Y^0 + \\
&+ B_{k,l}(x, x_k) \sum_{i=1}^k B_l(x_k, x_i) + \int_{x_k}^x B_{k,l}(x, s) s^l R_k ds, \quad l = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Вкажемо структуру елементів зображення (11):

$$B_{k,l}(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & K_{k,l}(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, \tag{12}$$

де

$$K_{k,0}(x, s) = \frac{x-s}{\lambda_k}, \quad K_{k,1}(x, s) = \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{x}{s}, \quad K_{k,2}(x, s) = \frac{x-s}{\lambda_k x s}; \tag{12'}$$

$$B_l(x_k, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & K_l(x_k, x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, \tag{13}$$

де

$$K_0(x_k, x_0) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_i}, \quad K_1(x_k, x_0) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{x_{i+1}}{x_i}, \tag{13'}$$

$$K_2(x_k, x_0) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_i x_{i+1} x_i};$$

$$Z_{i,0} = - \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ r_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + s_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,0} \\ z_{i,0}^{[1]} + s_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$Z_{i,1} = - \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{\lambda_{i-1}} \left[\frac{1}{4} (x_i^2 - x_{i-1}^2) - \frac{x_{i-1}}{2} \ln \frac{x_i}{x_{i-1}} \right] \\ \frac{r_{i-1}}{2} (x_i^2 - x_{i-1}^2) + s_i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,1}^{[1]} + s_i x_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{14}$$

$$Z_{i,2} = - \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{\lambda_{i-1}} \left(\frac{x_i^2}{6} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_{i-1}^3}{3x_i} \right) \\ \frac{r_{i-1}}{3} (x_i^3 - x_{i-1}^3) + s_i x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i,2} \\ z_{i,2}^{[1]} + s_i x_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\int_{x_k}^x B_{k,0}(x, s) R_k ds = - \begin{pmatrix} \frac{r_k}{2\lambda_k} (x - x_k)^2 \\ r_k (x - x_k) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$\int_{x_k}^x B_{k,1}(x,s)R_k s ds = - \left(\frac{r_k}{\lambda_k} \left[\frac{1}{4} (x^2 - x_k^2) - \frac{x_k}{2} \ln \frac{x}{x_k} \right] \right), \quad k = \overline{0, n-1}; \quad (15)$$

$$\int_{x_k}^x B_{k,2}(x,s)R_k s^2 ds = - \left(\frac{r_k}{\lambda_k} \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x_k^2}{2} + \frac{x_k^3}{3x} \right) \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Зауважимо, що перша компонента векторного розв'язку (10) — це скалярна сплайн-функція

$$y_l(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k,l}(x) \Theta_k, \quad l = 0, 1, 2,$$

яка є розв'язком задачі Коші для квазідиференціального рівняння (2) за початкової умови

$$y_l(x_0) = y_l^0, \quad l = 0, 1, 2,$$

а друга компонента — її квазіпохідна (3).

II. Розв'язок крайової задачі. Розглянемо диференціальне рівняння (2) за крайових умов:

$$\begin{aligned} p_{11}y(x_0) + p_{12}y^{[1]}(x_0) + q_{11}y(x_n) + q_{12}y^{[1]}(x_n) &= \gamma_0, \\ p_{12}y(x_0) + p_{22}y^{[1]}(x_0) + q_{21}y(x_n) + q_{22}y^{[1]}(x_n) &= \gamma_n, \end{aligned} \quad (16)$$

де $p_{ij}, q_{ij}, \gamma_0, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

Крайові умови (16) можна подати у матричному вигляді:

$$PY(x_0) + QY(x_n) = \Gamma, \quad (17)$$

де

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y^{[1]}(x) \end{pmatrix}.$$

Тоді крайова задача (2), (16) еквівалентна крайовій задачі для векторної функції (8), (17).

Як відомо розв'язок задачі Коші (8), (7) є розв'язком крайової задачі (8), (17) якщо початковий вектор Y^0 набуває вигляду

$$Y^0 = [P + QB(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \left[\Gamma - Q \sum_{i=1}^n B(x_n, x_i) Z_i \right] \quad (18)$$

за умови, що $[P + QB(x_n, x_0)]^{-1}$ існує.

Розглянемо частковий випадок крайових умов (16):

$$\begin{aligned}\alpha_0 x_0^l y_l(x_0) - y_l^{[1]}(x_0) &= \alpha_0 x_0^l \psi_0, \\ \alpha_n x_n^l y_l(x_n) - y_l^{[1]}(x_n) &= \alpha_n x_n^l \psi_n,\end{aligned}\quad l = 0, 1, 2, \quad (19)$$

де $\alpha_0, \alpha_n, \psi_0, \psi_n \in \mathbb{R}$ (крайові умови 3-го роду).

Умови (19) можна записати у вигляді (17), де

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_0^l & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n x_n^l & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_0^l \psi_0 \\ \alpha_n x_n^l \psi_n \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, 2. \quad (20)$$

Знаходження вектора (18) уцьому випадку здійснимо поступово.

1. Знайдемо матрицю $[P + QB(x_n, x_0)]^{-1}$, використовуючи (20)

$$[P + QB(x_n, x_0)]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n x_n^l K_{n,l}(x_n, x_0) & 1 \\ -\alpha_n x_n^l & \alpha_0 x_0^l \end{pmatrix}, \quad (21)$$

де

$$K_{n,0}(x_n, x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_i}, \quad K_{n,1}(x_n, x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{x_{i+1}}{x_i}, \quad K_{n,2}(x_n, x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_i x_n x_{i+1}},$$

$$\Delta = \alpha_0 x_0^l + \alpha_0 \alpha_n x_0^l x_n^l K_{n,l}(x_n, x_0) + \alpha_n x_n^l;$$

2. Знайдемо матрицю $B_l(x_n, x_i) Z_{i,l}$, $i = \overline{1, n-1}$, $l = 0, 1, 2$.

Маємо

$$B_l(x_n, x_i) Z_{i,l} = - \begin{pmatrix} z_{i,l} + K_l(x_n, x_i) (z_{i,l}^{[1]} + s_i x_i^l) \\ z_{i,l}^{[1]} + s_i x_i^l \end{pmatrix}; \quad (22)$$

3. Використовуючи (22), знайдемо матрицю

$$\Gamma - Q \sum_{i=1}^n B_l(x_n, x_i) Z_{i,l} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T, \quad l = 0, 1, 2,$$

де

$$A = \alpha_0 x_0^l \psi_0,$$

$$\begin{aligned}B &= \alpha_n x_n^l \psi_n + \alpha_n x_n^l \left[\sum_{i=1}^{n-1} z_{i,l} + K_l(x_n, x_i) (z_{i,l}^{[1]} + s_i x_i^l) + z_{n,l} + z_{n,l}^{[1]} \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i,l}^{[1]} + s_i x_i^l) + z_{n,l}^{[1]}.\end{aligned}$$

Тоді з використанням (21), (22) вектор (18) можна записати у вигляді

$$Y^0 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A [1 + \alpha_n x_n^l K_{n,l}(x_n, x_0)]; & -\alpha_n x_n^l A + \alpha_0 x_0^l B \end{pmatrix}^T.$$

Слід підкреслити, що моделі процесів теплопровідності в багатошарових структурах з урахуванням внутрішніх джерел тепла викладені в запропонованій роботі з єдиної точки зору (рівняння теплопровідності (2) розглядається як у декартових, так і в циліндричних та сферичних координатах при різних $l = 0, 1, 2$) і вирішальну роль при цьому відіграє концепція квазіпохідних.

Список літератури

- Тацій, Р. М., Стасюк, М. Ф., Власій, О. О. (2011). Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазидиференціальних рівнянь другого порядку. *Вісник НУ «Львівська політехніка», фізико-математичні науки*, (718), 61—69.
- Тацій, Р. М., Стасюк, М. Ф., Мазуренко, О. В., Власій, О. О. (2011). *Узагальнені квазидиференціальні рівняння*. Дрогобич: Коло.

ЯКІСНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗНАННЯ ЯК ЧИННИК УСПІШНОЇ ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦЯ З ФІЗИКИ

О. Л. Чепок

Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Як добре відомо, жодного розділу фізики, як науки, так і як навчальної дисципліни, не існує без відповідного математичного супроводу. Фізика й математика практично одночасно формувалися як самостійні галузі знань. Кожна з них на тому чи іншому етапі свого розвитку виступала в якості джерела нагнення для іншої. Такі найфундаментальніші розділи математики як диференціальне та інтегральне числення, векторна алгебра, векторний аналіз, тензорна алгебра, тензорний аналіз виникли у фізиці під час пошуків найбільш точних характеристик певних явищ навколишнього середовища. Подальше уточнення та осмислення вже математиками математичної сутності основних положень цих розділів дозволило фізикам поглибити, поширити, а, іноді, навіть, принципово змінити весь характер усвідомлення відповідних явищ. З іншого боку існують розділи математики (наприклад, неевклідова геометрія Лобачевського), які спочатку сформувалися в математиці як суто теоретичні умовиводи, а значно пізніше знайшли своє безпосереднє застосування у фізиці. Перевірка практикою надала переконливі свідчення про те, що вони підходять для математичної характеристики певних фізичних явищ та процесів.

Викладання курсів загальної фізики, теоретичної механіки, теоретичної фізики, електротехніки, електроніки для майбутніх вчителів фізики середніх загальноосвітніх навчальних закладів повинне не тільки демонструвати зразки застосування у фізиці математичних методів, а й сприяти формуванню у студентів відповідного світогляду про вищевказаний взаємопроникливий характер відношень між фізикою і математикою.

У той же час уже перші розділи курсу загальної фізики вимагають від студентів вільного володіння такими математичними поняттями і концепціями як поняття дійсного числа, тотожного перетворення математичного виразу, алгебраїчного рівняння з однією невідомою (у першу чергу лінійного і квадратного рівнянь), дійсної функції дійсного аргументу, її властивостей, графіка відносно прямокутної декартової системи координат, закономірностей відображення властивостей функції на графіку, найважливіших властивостей та графіків основних елементарних функцій, у тому числі тригонометричних, степеневих та логарифмічних функцій, векторів, координат векторів, операцій над векторами (див., наприклад, Сивухин (1979), Савельєв (1969)). І тут виникають суттєві складнощі.

У першу чергу вони пов'язані з недостатньою математичною підготовкою учнів у загальноосвітніх навчальних закладах, не зважаючи на наявність у першокурсників сертифікатів ЗНО з математики. Для покращання такої ситуації

можна рекомендувати включити до робочих навчальних планів підготовки студентів фізичних спеціальностей інтенсивний курс елементарної математики, розрахований на третину першого семестру навчання, який передував би всім «фізичним» курсам, у першу чергу, курсу загальної фізики. На сучасному етапі розвитку вищої освіти навчальні плани підготовки фахівців будь-якої спеціальності вже для студентів перших курсів до 50% навчального матеріалу відносять до самостійної роботи. Але, по-перше, для такої роботи повинні бути створені необхідні матеріальні умови. По-друге, випускники середньої школи зараз просто не вміють навчатися самостійно. Їх треба цьому вчити. І цим як раз зручно було би зайнятися під час подібного інтенсивного курсу математики, вже тому, що цей курс виступає як повторення і поглиблення відповідного матеріалу середньої школи. Треба тільки розробити необхідний методичний супровід.

До того ж, суттєвим є той факт, що курс загальної фізики вимагає значно більш глибокого володіння апаратом векторної алгебри, ніж це передбачено навчальною програмою середніх загальноосвітніх навчальних закладів. Треба, щоб студенти вміли оперувати поняттям не тільки ортонормованого, а й довільного афінного базису множин векторів, були знайомі з означеннями і властивостями векторного добутку векторів, мішаного добутку векторів, подвійного векторного добутку векторів, теорією кривих, а потім, і поверхонь другого порядку. Все це є матеріалом стандартного курсу аналітичної геометрії. Але до програми підготовки студентів фізичних спеціальностей уже традиційно входить об'єднаний курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії, першу частину якого, також традиційно, складають елементи лінійної алгебри (див., наприклад, Кострикин, Манин (1980)). Такий об'єднаний курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів відповідних спеціальностей у вищій школі існує вже майже 50 років, але методичні питання про його найоптимальніші зміст та структуру не можна вважати вирішеними остаточно. Треба домогтися максимально можливого узгодження змісту та структури цього курсу зі змістом і структурою курсу загальної фізики. За навчальним планом опанування студентами частиною курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії може передувати початку їх оволодіння курсом загальної фізики.

Подібних узгоджень вимагають й інші курси фізичних і математичних дисциплін. Зрозуміло, що це стане можливим тільки як результат плідної співпраці викладачів фізики і математики на засадах взаємної поваги та узгодженого розуміння спільної мети.

Список літератури

- Кострикин, А. И., Манин Ю. И. (1980). *Линейная алгебра и геометрия*. Москва: Изд-во Московского университета.
- Савельев, И. В. (1969). *Курс общей физики* (Т. 1. Механика). Москва: Наука.
- Сивухин, Д. В. (1979). *Курс общей физики* (Т. 1. Механика). Москва: Наука.

ПРО ІСНУВАННЯ СІМЕЙСТВА ХАОТИЧНИХ АТРАКТОРІВ У ДЕЯКИХ НЕІДЕАЛЬНИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

О. Ю. Швець

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

alex.shvets@bigmir.net

Багато сучасних машин, механізмів та технічних пристроїв у якості конструктивних елементів містять циліндричні баки, частково заповнені рідиною. Тому дослідження коливань вільної поверхні рідини в циліндричних баках впродовж останніх десятиліть привертають пильну увагу. Починаючи з 70-х років минулого століття були запропоновані, так звані «маловимірні», математичні моделі, що описують такі коливання. Ці моделі дозволяють для опису коливань вільної поверхні рідини в баку використовувати нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь замість рівнянь у частинних похідних, які виникають при описі задачі в самій загальній постановці (Краснопольская, Швець, 2008).

Розглянуто резонансні коливання вільної поверхні рідини в циліндричному баку при збудженні таких коливань джерелом енергії обмеженої потужності. Такі задачі описуються неідеальними, за Зоммерфельдом — Кононенком, динамічними системами маятникового типу. Вперше такі моделі були побудовані й досліджені в роботах Krasnopol'skaya & Shvets (1990; 1991). Зауважимо, що нехтування взаємодією між джерелом збудження коливань і коливальною навантаженням призводить до грубих помилок в описі динаміки досліджуваних систем.

Метою цієї роботи є виявлення і дослідження регулярних і хаотичних усталених рухів системи «бак з рідиною — джерело збудження», у випадку вертикального збудження платформи бака. Такі дослідження були розпочаті в роботі Krasnopol'skaya & Shvets (1993), де була побудована математична модель системи, в якій враховувалося взаємодія між джерелом збудження коливань і баком з рідиною. У цій роботі, а також у роботі Shvets (2008) було показано, що в досліджуваній динамічній системі існує декілька типів хаотичних атракторів. Причому, було показано, що якщо розглядати систему «бак з рідиною — джерело збудження» при відсутності умов на обмеженість потужності джерела збудження, то виявити хаотичні атрактори в такій системі взагалі не вдається.

За допомогою, розробленої в роботах Краснопольская, Швець (2008), Krasnopol'skaya & Shvets (2009) методики був проведений великий комплекс чисельних розрахунків метою яких було виявлення нових особливостей хаотичної та регулярної динаміки системи «бак з рідиною — джерело збудження». Розроблена методика забезпечує знаходження та всебічне дослідження регулярних та хаотичних атракторів детермінованих динамічних систем.

У роботі вдалося виявити сімейства як регулярних, так і хаотичних атракторів, які існують у достатньо великому околі початку координат фазового простору. Фазові портрети таких атракторів вкладені один в інший, але ніколи не мають спільних точок перетину або дотику. У просторі параметрів системи хаотичні атрактори сімейства мають достатньо малі басейни притягання. Проекції фазових портретів атракторів цього подібні за своєю геометричною формою з чітко помітною властивістю масштабного скейлінгу.

Також подібними є перерізи Пуанкаре, відображення Пуанкаре, фазопараметричні характеристики та Фур'є-спектри всіх хаотичних атракторів сімейства.

Перехід від регулярних атракторів до хаотичних відбувається для всіх атракторів сімейства за однаковими сценаріями. Причому вдалося виявити сценарії Фейгенбаума та Помо — Манневілья за якими відбуваються переходи до хаосу. Зазначимо, що крім якісної подібності переходів до хаосу, у просторі параметрів досліджуваної системи «бак з рідиною — джерело збудження», спостерігається й кількісний збіг точок біфуркацій усіх атракторів знайденого сімейства.

Список літератури

- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1993). Parametric resonance in the system: Liquid in tank+electric motor. *International Applied Mechanics*, 29 (9), 722–730.
- Krasnopol'skaya, T.S., & Shvets, A. Yu. (1990). Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank. *Soviet Applied Mechanics*, 26 (8), 787–794.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply. In *Proceedings 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms* (Vol. 1, pp. 181–184). Prague: Czechoslovak Acad. Sci.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3), 532–553.
- Shvets, A. Yu. (2008). Regular and chaotic oscillations of free surface of liquid in a cylindrical tank at non-ideal excitation. In *Proceedings of Institute of Mathematics of NASU*, 5(2), 349–366.
- Shvets, A. Yu., & Makaseyev, A. M. (2012). Delay factors and chaotization of non-ideal pendulum systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (4), 633–642.
- Shvets, A. Yu., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of transition to chaos in non-ideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, (2), 303–310.
- Краснопольская, Т. С., Швеца, А. Ю. (2008). *Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением*. Москва: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований.

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕМИ «ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА»

Д. І. Штефан¹, Т. О. Штефан²

¹Запорізький технічний ліцей, Запоріжжя, Україна

²Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна
dimka1105@rambler.ru, tayana2000@rambler.ru

Вступ. Не випадково кажуть, що ступінь науковості тієї чи іншої дисципліни вимірюється тим, наскільки в ній застосовується математика. Однак справжньою мовою науки є вища математика, що вивчає змінні величини й поточні процеси, для аналізу яких алгебри і геометрії недостатньо. Виникнення диференціального й інтегрального числення було нерозривно пов'язано зі створенням Ньютоном початків теоретичної фізики: поняття вищої математики він сприймав як переклад на математичну мову основних понять механіки (Зельдович, Яглом, 1982). Без понять «похідна» та «інтеграл» неможливо описувати й досліджувати змінні величини і функції, що характеризують залежності одних величин від інших. Отже, закони природи формулюють на мові вищої математики, на мові похідних та інтегралів (Яворський, Детлаф, 1985).

Із урахуванням виснаження нафти та газу, а також негативних екологічних наслідків спалення вугілля, потреби людства в електроенергії можуть бути задоволені в основному за рахунок атомної енергетики. Фізичною основою ядерної енергетики є реакція ділення найбільш важких ядер на два дочірніх ядра. Проектування та експлуатація ядерних реакторів потребує техніко-економічних розрахунків, оснований на застосуванні методів вищої математики. Метою представленої роботи є розв'язання деяких задач теми «Радіоактивний розпад та ділення ядер» за допомогою методів дисципліни «Вища математика».

Постановка задачі. У роботі наочно представлено застосування методів вищої математики до розв'язання прикладних задач на радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду — закон, відкритий Содді і Резерфордом експериментальним шляхом і сформульований в 1903 році (Радиоактивный распад, (б. д.)). Сучасне формулювання закону: відношення числа атомів, що розпалися за одиницю часу, до загального числа атомів є постійною величиною, що залежить тільки від виду атомів (Яворський, Детлаф, 1985):

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (1)$$

що означає, що число розпадів за проміжок часу t в довільній речовині пропорційне числу N наявних у зразку радіоактивних атомів даного типу. При цьому мається на увазі, що загальне число атомів дуже велике. Величина λ називається ймовірністю розпаду.

Радіоактивні атоми характеризуються періодом напіврозпаду T , який являє собою час, протягом якого число атомів N унаслідок розпаду зменшується вдвічі порівняно з початковим. Період напіврозпаду обернено пропорційний ймовірності розпаду (Сивухин, 2002):

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (2)$$

Середній час життя атомів складає

$$\bar{t} = \frac{T}{\ln 2}. \quad (3)$$

Основна частина. На уроках фізики в 11 класі Запорізького технічного ліцею під час вивчення теми «Фізика атомного ядра» були запропоновані наступні задачі.

1. Скільки урану потрібно витратити для отримання тієї ж кількості енергії, що виробляє найбільша в Європі Запорізька АЕС на добу? Потужність ЗАЕС 6000 МВт. ККД АЕС 40%.

2. Скільки урану потрібно б було на добу, якщо всю енергію, що виробляється у світі, отримувати на АЕС? ККД атомних станцій прийняти рівним 40%. Потужність електроенергії, що виробляється у світі, дорівнює приблизно $9 \cdot 10^{12}$ Вт.

3. Світове споживання енергії дорівнює приблизно $3,2 \cdot 10^{20}$ Дж на рік. Скільки дейтерію за секунду необхідно б було спалювати в термоядерних реакторах для забезпечення усіх сучасних енергетичних потреб людства?

4. Обчисліть добову витрату урану в ядерному реакторі із тепловою потужністю 3 ГВт. Скільки нафти знадобилось би спалювати для отримання тієї ж самої потужності?

5. Середній час життя радію 2400 років. Знайти період піврозпаду радію.

6. Спочатку було 200 г радію. Скільки його залишиться через 300 років?

7. За 500 років розпалося 10 г радію. Скільки його було в початковий момент?

8. Визначити через, який проміжок часу розпадається 1%, 10%, 90%, 99% від початкового запасу радію.

9. 1 г вуглецю тваринного або рослинного походження випромінює 15,3 бета-часток за хвилину за рахунок радіоактивного розпаду ядер ізотопів вуглецю $^{14}_6\text{C}$. Який період напіврозпаду цього ізотопу, якщо відомо, що півтора атома цього ізотопу приходить на 10^{12} атомів інших ізотопів вуглецю.

10. Після аварії на ЧАЕС в деяких місцях досі реєструється гамма-випромінювання з потужністю експозиційної дози 160 мікрорентген на годину. Визначте, у скільки разів це перевищує гранично допустиму дозу для населення. Експозиційної дози 1 Р відповідає поглинена доза 8,8 мГр.

Задачі типу 1—4 розв'язуються із використанням формули (Сивухин, 2002)

$$m = \frac{PtM}{\eta N_A E_0},$$

і, хоча є практично значущими та цікавими, не потребують використання методів вищої математики. Відповіді до задач: 1) 6,45 кг; 2) 9500 кг; 3) 16,5 г/с; 4) 3,16 кг; $6,1 \cdot 10^6$ кг.

Задачі типу 5 розв'язуються з використанням формул (2) і (3). Відповідь до задачі 5: період напіврозпаду радію складає приблизно 1660 років.

Під час же розв'язку задач типу 6—9 виникає необхідність розв'язку диференціального рівняння (1) із заданими початковими умовами. Розв'язавши рівняння (1), маємо закон радіоактивного розпаду у вигляді:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\bar{t}}} \quad (4),$$

де N_0 — кількість речовини в початковий момент часу $t = 0$. Застосувавши формулу (4), отримаємо наступні відповіді: 6) 176,5 г; 7) 53,3 г; 8) 24 роки, 250 років, 5500 років, 11000 років; 9) 5556 років.

Формулювання закону радіоактивного розпаду у вигляді (4) можна знайти в багатьох підручниках та довідниках з фізики, зокрема, Яворский, Детлаф (1985), Сивухин (2002). Цікавим та практично корисним було розібратися, як цей закон отримано, чому він має саме таку форму (у вигляді показникової функції). Ознайомлення з результатами експериментів, проведених ще в ХІХ столітті, та самостійний розв'язок рівняння (1) дали більш поглиблене розуміння закону радіоактивного розпаду та його застосування при розв'язку задач, які постають як при навчанні, так і в реальному житті. Наприклад, здивування від того факту, що з 100 радіоактивних атомів 63 розпадаються за час $\bar{t}$, а решта 37 — після $\bar{t}$, хоча всі атоми й однакові, час розпаду в них різний, призводить до бажання подальших дослідів. Особливості розпаду вивчаються у квантовій механіці: в явищі радіоактивного розпаду вже виявляються особливості законів поведінки атомів і ядерних частинок, які відрізняються від законів руху тіл, з якими ми зустрічаємося в класичній механіці і в повсякденному житті (Зельдович, Яглом, 1982).

Висновки. Розв'язок прикладних задач сприяє зацікавленості учнів, розвитку допитливості, яку сучасні методи навчання майже зовсім задушили; указує на зв'язок предметів шкільної та вузівської програми з можливою майбутньою професією випускників шкіл. Крім того, виконання означеної роботи призводить до сприйняття математики не тільки як абстрактної, чисто формальної, дисципліни, а викликає розуміння її необхідності при вирішенні прикладних задач фізики, біології, археології та інших наук.

Список літератури

Зельдович, Я. Б., Яглом, И. М. (1982). *Высшая математика для начинающих физиков и техников*. Москва: Наука.

Радиоактивный распад. (б. д.). В *Википедии*. Получено из https://ru.wikipedia.org/wiki/Радиоактивный_распад

Сивухин, Д. В. (2002). *Общий курс физики*. (Т. V. Атомная и ядерная физика). (3-е изд., стер.). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Яворский, Б. М., Детлаф, А. А. (1985). *Справочник по физике*. Москва: Наука.

ДЕЯКІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ τ -УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРИЄДНАНИХ ФУНКЦІЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРШОГО РОДУ ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$

Г. О. Южакова

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

conf@pti.kpi.ua

Кожному математику чи інженеру, якому доводиться мати справу з розв'язанням диференціальних рівнянь у різноманітних областях теоретичних і прикладних наук, добре відомі спеціальні функції — функції, які не виражаються через елементарні (функції Бесселя, Лежандра, ортогональні многочлени, гіпергеометричні функції, функції Мат'є та ін.). Особливо важливим є застосування спеціальних функцій при розв'язанні крайових задач математичної фізики, квантової теорії поля, у багатьох галузях теоретичної і прикладної математики та ін.

Різнманітність задач, які приводять до виникнення спеціальних функцій, стала причиною швидкого зростання протягом останніх десятиліть кількості спеціальних функцій та їх узагальнень. При цьому особлива увага приділяється вивченню властивостей таких узагальнених спеціальних функцій з метою подальшого ефективного застосування при розв'язанні складніших математичних та практичних задач.

У статті Южакова (2010) розглянуто й доведено низку композиційних співвідношень, що містять τ -узагальнену (за Райтом) приєднану функцію Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ (Virchenko, 1999):

$$\begin{aligned} {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) = & \frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\Gamma\left(-k - \frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right)} \times \\ & \times \int_0^1 t^{-k - \frac{m-n}{2} - 1} (1-t)^{k - \frac{m+n}{2}} \times \\ & \times {}_2\Psi_1\left[\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1\right), (1-m, \tau); \left|\frac{1-z}{2}t^{\tau}\right|\right] dt, \end{aligned} \quad (1)$$

де ${}_2\Psi_1(z)$ — функція Фокса — Райта [6], $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $|1-z| < 2$;

$k + \frac{m+n}{2} \neq -1, -2, \dots$; $k - \frac{m-n}{2} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $m \neq 1, 2, \dots$;
 $|\arg(z \pm 1)| < \pi$.

Теорема 1. При умовах існування τ -узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ (1) мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
{}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right) \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_k^{m-1,n-1}(z) - \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m,n}(z) + \\
&\quad + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(1 - m - \left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m-1,n-1}(z), \\
\frac{\mu + \nu + 1}{\mu} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(k - \frac{m+n}{2}\right) {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \\
&= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_k^{m+1,n+1}(z) + \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\
&\quad + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z), \\
\left(k + \frac{m-n}{2} + \left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)_{\tau}\right) {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\
&\quad + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)_{\tau}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m,n}(z) - \\
&\quad - \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)_{\tau}}{k + 1 + \frac{m-n}{2}} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) + \\
&\quad + \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)_{\tau} \left(k + 1 - \frac{m+n}{2}\right)}{k + 1 + \frac{m-n}{2}} {}^{\tau}P_{k+1}^{m,n}(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau \right) {}^\tau P_k^{m,n}(z) = \\
& = - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_k^{m+1,n+1}(z) - \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) +}{k + \frac{m-n}{2} + 1} \\
& + \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau \left(k + 1 - \frac{m+n}{2} \right)}{k + \frac{m-n}{2} + 1} {}^\tau P_{k+1}^{m,n}(z).
\end{aligned}$$

Теорема 2. Якщо виконано умови $|1-z| < 2$; $|\arg(z \pm 1)| < \pi$; $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $k + \frac{m+n}{2} \neq -1, -2, \dots$; $k - \frac{m-n}{2} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $m \neq 1, 2, \dots$, то справедливі нижченаведені формули диференціювання τ -узагальненої (за Рай-том) функції Лежандра ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ (1):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} {}^\tau P_k^{m,n}(z) &= \left(\frac{n}{2(z+1)} - \frac{m}{2(z-1)} - \frac{k + \frac{m-n}{2}}{2\tau} \right) {}^\tau P_k^{m,n}(z) + \\
&+ \frac{k + \frac{m-n}{2}}{2\tau^2 \left(k - \frac{m-n}{2} \right)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\
&+ \frac{\left(k + \frac{m-n}{2} \right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2} \right) \tau \right)}{2\tau^2 \left(k - \frac{m-n}{2} \right)} {}^\tau P_{k-1}^{m,n}(z), \\
\frac{d}{dz} \left[(z-1)^{k+\frac{n}{2}+1} (z+1)^{-\frac{n}{2}} {}^\tau P_k^{m,n}(z) \right] &= \\
&= \frac{k+1 - \frac{m-n}{2}}{k+1 + \frac{m-n}{2}} (z-1)^{k+\frac{n}{2}} (z+1)^{-\frac{n}{2}} \left[\left(k+1 - \frac{m+n}{2} \right) {}^\tau P_{k+1}^{m,n}(z) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) \right].
\end{aligned}$$

Теорема 1 та 2 доведені за умов існування τ -узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$. При доведенні використано властивості τ -узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гауса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ і зв'язок між функціями ${}^{\tau}P_k^{m,n}$ та ${}_2F_1$ (Вірченко, 2006):

$${}^{\tau}P_k^{m,n}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)} {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2}\right),$$

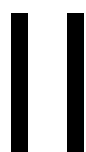
$${}_2F_1(a, b; c; \xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix} (a, 1), (c, \tau) \\ (c, \tau) \end{matrix} \middle| \xi t^{\tau}\right] dt$$

при $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1-m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$, де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Gamma(c)$ — класична гамма-функція.

Одержані результати є узагальненням співвідношень, отриманих автором у статті Южакова (2009) для функції ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$, яка є окремим випадком розглянутої функції ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ при $m = n = \mu$.

Список літератури

- Kilbas, A. A., & Saigo, M. (2004). *H-Transforms*. London: Charman and Hall.
- Virchenko, N. (1999). On a generalized Laugerre's function and its applications. *Fractional Calculus and Appl. Analysis*, 2(4), 529–536.
- Virchenko, N., & Fedotova, I. (2001). *Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications*. Singapore: World Scientific.
- Бейтмен, Г., Эрдейи, А. (1965). *Высшие трансцендентные функции*. Москва: Наука.
- Вірченко, Н. О. (2006). Про гіпергеометричні функції, їх узагальнення та застосування. *Наукові записки АН ВШ України*, 1, 20—25.
- Вірченко, Н. О., Рум'янцева, О.В. (2008). (τ, β) -узагальнена гіпергеометрична функція Гауса та її застосування. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (1), 139—143.
- Южакова, Г. О. (2009). Рекурентні співвідношення з узагальненими функціями Лежандра. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (6), 148—153.
- Южакова, Г. О. (2010). Композиційні формули для τ -узагальнених приєднаних функцій Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 114—120.



МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ДІЯЛЬНІСНИЙ ПІДХІД ВИВЧЕННЯ ЯК ОСНОВОПОЛОЖНИЙ ЧИННИК ПОДОЛАННЯ ПРОБЛЕМИ НЕ-УСВІДОМЛЕННЯ СТУДЕНТАМИ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ РЕАЛІЯМИ ЖИТТЯ ТА ТЕОРЕТИЧНИМИ ЗНАННЯМИ

Л. М. Блажко¹, Т. О. Карпалюк², І. В. Рассоха¹

¹Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка,
Полтава, Україна

²НТУУ «Київський політехнічний інститут імені І. Сікорського», Київ, Україна
lblazhko@ukr.net, tamarakarpyuk@ukr.net, innaolha@mail.ru

Проблема неусвідомлення зв'язків між наукою та реальним життям своїм корінням сягає ще шкільного навчання. Учні не розуміють, навіщо вивчають у школі, приміром, синуси, косинуси, похідні, інтеграли. Але через специфіку організації шкільного навчання не мають змоги, а іноді й сміливості, запитати вчителя про застосування отриманих знань у повсякденному житті. Крім того, навіть якщо учень набирається сміливості і ставить запитання, то вчитель часто-густо не дає відповіді — через брак часу на уроці, або через відсутність необхідних знань. Ситуація погіршується зі вступом колишніх школярів до ВНЗ та з початком вивчення вищої математики. Відстежити взаємозв'язок між науковою теорією та реаліями життя студенту ще складніше, ніж школяреві. У подальшому це закінчується плачевно: не знаючи, як і де застосувати отримані знання на практиці, колишні студенти опиняються в глухому куті при виборі професійної діяльності після закінчення ВНЗ, а на державному рівні країна отримує спеціалістів, які не знають і, зрештою, не застосовують свої знання в тих сферах професійної діяльності, до яких їх власне готували під час навчання у ВНЗ. Тобто випускники вишів ідуть працювати не за спеціальністю, і в результаті втрачають кваліфікацію.

Чимало дослідників наголошували на важливості розуміння сенсу навчання для становлення особистості як такої, вказували на потребу зробити прикладний підхід базовим у викладанні дисциплін. Серед інших можна назвати З. О. Решетову, О. Г. Євсєєву, Г. О. Атанова, О. А. Малигіну тощо. Усі вони визнавали діяльнісне навчання вкрай важливим для формування самодостатньої особистості в цілому і кваліфікованого спеціаліста зокрема.

У нашій роботі ми ставимо за мету розглянути, яким чином можна подати матеріал з теорії диференціальних рівнянь, щоб сформувати у студентів уявлення про застосування даних знань на практиці.

Ще І. Ньютон говорив, що «закони природи виражаються диференціальними рівняннями». При відборі навчального матеріалу для використання його на практичних заняттях зі студентами викладачеві слід орієнтуватися на прикладний зміст задач. Студент мусить розуміти повною мірою, про що йдеться і де застосовуються задачі, які пропонують йому розв'язати під час навчального заняття. Існує чимало диференціальних рівнянь чи їх систем, які використовую-

ють для побудови математичної моделі того чи іншого процесу фізики, хімії, біології, медицини, тощо.

Традиційно областю застосування математичних моделей є теорія розвитку біологічних популяцій. Ця теорія розглядає різні аспекти основних закономірностей зміни чисельності популяцій, у тому числі, і клітин, що знаходяться як в природних умовах, так і в лабораторних. Уважаємо доцільним запропонувати студентам розглянути модель природного росту популяцій (модель Мальтуса), модель «хижак — жертва» (модель Вольтери), остання описує динаміку взаємодії популяції.

Розв'язання задач на визначення, наприклад, швидкості кровотоку, швидкості руху клапанів і стінок серця допоможе студентам усвідомити, як диференціальні рівняння застосовуються, приміром, у медицині. Можна розглянути математичні моделі імунних реакцій, модель кровообігу при фільтраційно-реабсорбційних процесах у капілярах.

При виборі математичних моделей, що описують певний процес слід орієнтуватись на рівень підготовки студентів. Краще обрати простішу модель, нехай вона не відображає всіх нюансів, зате буде зрозумілою, легкою для сприйняття.

Викладачам вищих навчальних закладів варто взяти на озброєння науково-дослідницьку роботу, спрямовану на усвідомлення прикладного боку матеріалу, що вивчається.

1. При викладанні теорії диференціальних рівнянь можна організувати заняття в позанавчальний час: йдеться про створення гуртків, науково-технічних товариств, проведення демонстраційних експериментів.

2. Можливе використання геометричного моделювання, як різновиду самостійної роботи студентів, під час вивчення диференціальних рівнянь. Використання графічних редакторів для геометричного моделювання зробить викладання більш наочним, при цьому можлива співпраця з викладачами кафедри інформатики.

3. Важлива профорієнтаційна робота зі студентами: організація екскурсій на виробництва, де застосовуються математичні знання на практиці, інтерв'ювання працівників виробництв, проведення прес-конференцій задля обміну досвідом та розвитку навичок грамотного спілкування студентів на професійному рівні, формування професійного словника.

Отже, вважаємо необхідним наголосити на тому, що викладач вищого навчального закладу має повсякчас орієнтуватися на прикладний характер матеріалу при підготовці до занять, ініціювати науково-дослідницьку роботу студентів, організовувати самостійну роботу та стежити, щоб вона була захопливою і цікавою, а також здійснювати певні заходи щодо профорієнтації студентів. Така налаштованість викладача ВНЗ зрештою переслідує лише одну мету: не тільки передати теоретичні знання, але й підготувати студентів до праці за спеціальністю, до безпосереднього використання отриманих знань на практиці, до усвідомлення зв'язків між реаліями життя та навчальним матеріалом.

Список літератури

- Атанов, Г. О. (2007). *Теорія діяльнісного навчання*. Київ: Кондор.
- Білоусова, Л. І. та ін. (редкол.) (2010). *Науково-дослідна робота студентів як чинник удосконалення професійної підготовки майбутнього вчителя: зб. наук. пр., (1)*. Харків: Факт.
- Гой, Т. П., Махней, О. В. (2012). *Диференціальні рівняння*. Івано-Франківськ: Сімик.
- Епишева, О. Б. (1999). *Деятельностный подход как теоретическая основа проектирования методической системы обучения математике: дисс. ... доктора пед. наук: 13.00.02*. Москва.
- Євсєєва, О. Г. (2010). Предметна модель студента як база проектування технологій навчання математики на засадах діяльнісного підходу. // *Наукові праці. Серія: Педагогіка, психологія і соціологія*, (8 (174), с. 160—165). Донецьк: ДонНТУ.
- Малыгина, О. А. (2008). *Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного подхода*. Москва: Издательство ЛКИ.
- Малыгина, О. А. (2009). *Формирование основ профессиональной мобильности в процессе обучения высшей математике*. Москва: URSS.
- Решетова, З. А. (1997). Процесс усвоения как деятельность. У кн. *Современные проблемы дидактики высшей школы: Сб. избр. трудов Междунар. конф.* (с. 3—12). Донецк: Изд-во ДонГУ.

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛІ

І. В. Вініченко

*Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна
super.vinichenko20@mail.ru*

У сучасних умовах, коли в суспільстві помітно зріс інтерес до реалізації розвиваючих цілей навчання, а кількість годин, що відводяться на вивчення математичних курсів у вищій школі, неухильно знижується, з усією гостротою постає питання пошуку ефективніших способів організації кожної ланки процесу навчання, кожного виду навчальної роботи, що здійснюється на заняттях з математики. Особливо, це стосується такого важливого аспекту методичної роботи, як робота з математичними помилками школярів.

На сьогодні софізми, і зокрема математичні, навчають мислити, доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки. Аналіз софізмів має важливе педагогічне значення, бо розібрати софізм — означає знайти помилку. Відомий математик і методист М. Брадїс відзначав, що добре ознайомившись з якоюсь помилкою, ми страхуємо учнів від повторення такої помилки в майбутньому, «процес відшукування помилки в різних математичних судженнях легко зробити дуже захоплюючим, а розгляд помилок може стати засобом для підвищення інтересу до вивчення математики».

Типові математичні помилки учнів і зараз «наповнюють» учнівські зошити. Вони є свідченням недосконалості використовуваної вчителями методики. Швидке усунення помилок — лише необхідна, але не достатня умова педагогіки гуманізму в навчанні математики. Адже гуманізація освіти — це спрямованість від особистості, її структури через навчальний предмет до особистості конкретної дитини. Реалізація ідей гуманізму передбачає включення в число вихідних положень, що визначають функціонування методичної системи навчання математики, структури особистості, закономірностей її розвитку. Ця спрямованість повинна знайти відображення насамперед з метою навчання.

Таким чином, набагато гуманніше своєчасне запобігання помилок. Це особливо важливо для учнів старшого шкільного віку, які вивчають пропедевтичний курс математики у вищій школі.

Протиріччя між потребою шкільної практики в удосконаленні методичної роботи з математичними помилками школярів і її фактичним станом визначає актуальність проблеми дослідження, яка полягає у вивченні та визначенні шляхів удосконалення системи методичної роботи з помилками учнів по курсу математики у школі.

Метою даної статті є методика застосування математичних софізмів під час навчання математики в середніх закладах освіти.

Основна мета розгляду софізмів у школі полягає в залученні до критичного мислення, уміння не тільки відтворювати певні логічні схеми, певні розумові

процеси, але і критично осмислювати кожен етап міркувань відповідно до засвоєними принципами математичного мислення й обчислювальної практики.

Практика викладання переконливо підтверджує, що можливості доцільного використання математичних софізмів зростають у міру просування учнів по мірі зростання їх інтересу до логічної структури науки. Особливо серйозно й поглиблено ця робота може бути поставлена в математичному гуртку учнів старших класів, де зазвичай проявляється підвищений інтерес до логічних основ методів математичного доведення (Брадис, Минковский, Харчева, 1967).

Наприклад, можна використати такі софізми:

1. «Два різні натуральні числа рівні між собою».

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ y = 4 - \frac{x}{2} \end{cases}$$

Зробимо це підстановкою y з другого рівняння в перше, отримаємо $x + 8 - x = 6$, звідки $8 = 6$.

Викриття софізму: рівняння $y = 4 - \frac{x}{2}$ можна записати у вигляді $x + 2y = 8$, тоді вихідна система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

У цій системі рівнянь коефіцієнти при змінних однакові, а праві частини не рівні між собою, з цього випливає, що система несумісна, тобто не має жодного розв'язку. Графічно це означає, що прямі $x + 2y = 6$ та $y = 4 - \frac{x}{2}$ паралельні та не зливаються.

Перед тим, як розв'язувати систему лінійних рівнянь, корисно проаналізувати, чи має система єдиний розв'язок, нескінченно багато розв'язків або не має розв'язків взагалі.

2. Або, наприклад, учень розв'язував систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 - 1321x - 23 = 0, \\ x^4 - 1310x - 144 = 0 \end{cases}$$

Від першого рівняння він відняв почленно друге, дістав: $-11x + 121 = 0$, звідки $x = 11$. Але, підставивши значення $x = 11$, учень переконався, що воно не є коренем жодного з цих рівнянь. Чому?

Викриття софізму: Рівняння $-11x + 121 = 0$, є тільки наслідком системи, але воно не рівносильне їй: будь-який розв'язок системи є розв'язком рівняння, але не навпаки. Тому поки що можна зробити лише такий висновок: якщо система має розв'язок, то він єдиний і є розв'язком рівняння. Підставивши значен-

ня $x = 11$ у систему, робимо остаточний висновок: розв'язків вона не має (Брадис и др., 1967).

Математичні софізми змушують особливо уважно, з великою настороженістю прочитувати їх тексти, ретельно стежити за наявністю належної точності у визначеннях і записах, за дотриманням усіх умов придатності теорем, за відсутністю незаконних узагальнень та заборонених дій. Усі ці моменти цінні в методичному відношенні, так як вони направлені на змістовне засвоєння предмета, що протиставляється формальному, для якого «характерно неправомірне домінування у свідомості і пам'яті учнів звичного зовнішнього (словесного, символічного або образного) вираження математичного факту над змістом цього факту» (А. Я. Хинчин) (Бевз, 1989).

Міцність же засвоєння математичного факту значно підвищується посиленням елемента емоції при сприйнятті, що викликається абсурдним твердженням формулювання софізму.

Вправи в розкритті софізмів не гарантують від появи подібних же помилок у самостійних міркуваннях учнів, але дають можливість у разі появи помилки швидше її виявити і в ній розібратися. У педагогічному плані висловлена думка реалізується в тому, що математичні софізми, що пропонуються увазі учнів, повинні, як правило, використовуватися не стільки для попередження помилок, скільки для перевірки ступеня свідомості засвоєння і закріплення певного матеріалу. На цьому положенні базується практика роботи вчителів математики, які використовують у деякому обсязі матеріал софізмів на заключному етапі вправ по розділу і при повторенні.

Помилки ж учнів педагог попереджає шляхом усебічного розгляду досліджуваних понять у класі. Добре знання самим педагогом типових учнівських помилок, причин їх виникнення і матеріалу математичних софізмів сприяє кращому досягненню цієї мети. Ступінь підготовленості в цьому напрямку педагога відчутно позначається в підборі прикладів, у виявленні всіх істотних у межах даного типу варіацій, з метою попередження виникнення односторонніх асоціацій і неправильних узагальнень.

Необхідна умова застосовності того чи іншого математичного софізму в навчанні учня полягає у наявності останньої із передумов для розкриття цього софізму. Недотримання цієї необхідної умови не тільки повністю знецінює застосування софізмів, але і робить їх шкідливими: учень, який не має можливості розібратися в суті питання, безпорадно хапається за зовнішні прийоми, що зводить свою роботу до простого здогаду, втрачає рівновагу, виробляє в собі риси нерішучості. Усе це, звичайно, не має нічого спільного із завданням поступового і неухильного виховання обережності у твердженнях, як з усвідомленою потребою розібратися в умовах питання і в засобах для його відповідального рішення. До речі, у кожному місці курсу вчитель повинен бути цілком щирим з учнем, відверто вказуючи йому ті логічні пробіли свого викладу, які є наслідком свідомого педагогічного корективу (Бевз, 1989).

Важко, вивчаючи математику, не зацікавитися математичними софізмами. У 2003 році у видавництві «Просвещение» вийшла книга А. Г. Мадери і Д. А. Мадери «Математичні софізми», в якій понад вісімдесят математичних софізмів, по крупичках зібраних з різних джерел. Цитата з книги: «Математичний софізм являє собою, по суті, правдоподібне міркування, що приводить до неправдоподібного результату. Причому отриманий результат може суперечити всім нашим уявленням, але знайти помилку в міркуванні часто не так-то просто; іноді вона може бути досить тонкою і глибокою. Пошук укладених у софізм помилок, ясне розуміння їх причин ведуть до осмисленого розуміння математики. Виявлення та аналіз помилки, укладеної в софізм, часто виявляються більш повчальними, ніж просто розбір рішень «безпомилкових» завдань. Ефектна демонстрація «доведення» явно невірному результату, в чому і полягає сенс софізму, демонстрація того, до якої нісенітності призводить нехтування тим чи іншим математичним правилом, і подальший пошук і розбір помилки, що призвела до нісенітності, дозволяють на емоційному рівні зрозуміти і «закріпити» те чи інше математичне правило або затвердження. Такий підхід при навчанні математики сприяє більш глибокому її розумінню і осмисленню» (Мадера, Мадера, 2003).

Отже, для розвитку пізнавальної діяльності математичні софізми можна застосовувати при вивченні математики у школі: на уроках, щоб зробити їх більш цікавими, для створення проблемних ситуацій; у домашніх завданнях, для більш осмисленого розуміння матеріалу, пройденого на уроках (знайти помилку в математичних софізмах, придумати свої математичні софізми); при проведенні різних математичних змагань, для різноманітності; на заняттях факультативів, для більш глибокого вивчення тем математики; при написанні реферативних і дослідницьких робіт. Цілі застосування математичних софізмів на уроках математики можуть бути найрізноманітнішими, наприклад: вивчення історичного аспекту теми; створення проблемної ситуації при поясненні нового матеріалу; перевірка рівня засвоєння вивченого матеріалу; для цікавого повторення і закріплення вивченого матеріалу.

Список літератури

- Бевз, Г. П. (1989). *Методика викладання математики*. (3-тє вид., перероб. і доп.). Київ: Вища школа.
- Брадис, В. М., Минковский, В. Л., Харчева, А. К. (1967). *Ошибки в математических рассуждениях*. Москва: Просвещение.
- Мадера, А. Г., Мадера, Д. А. (2003). *Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям*. Москва: Просвещение.

ПРО ОДНУ ГРАНИЦЮ З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

С. О. Глоба, І. А. Юрчук

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

sagloba@ukr.net, iyurch@ukr.net

Друга визначна границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

є важливою складовою модуля «Границі числових послідовностей та функцій» з курсу математичного аналізу. У процесі знаходження границь, що з нею пов'язані, студенти часто виконують наступні перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x^2}{2}}\right)^{\frac{3x^2}{2} \cdot \frac{2}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x}} = e^0 = 1.$$

Проте, допитливий та уважний студент може зауважити, що для запису рівності другої рівності не достатньо властивостей границі (суми, добутку та частки), а необхідні додаткові теоритичні викладки, яких в основній літературі (Зорич, 2002; Кудрявцев, 1989; Никольский, 1990; Фихтенгольц, 2003) не доведено.

У роботі ми доводимо лему, яка дозволить робити перетворення такого виду впевнено як допитливим студентам так і викладачеві.

Перш ніж сформулювати лему, нагадаємо означення границі функції на мові « $\epsilon - \delta$ ».

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A := \left(\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon \right)$$

Лема. Нехай існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$,

$|A|, |B| < \infty$. Якщо $B > 0$, то справедлива рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)^{f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}. \quad (1)$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то для

$$\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_1(\epsilon_1), \delta_2(\epsilon_2) > 0 \quad \forall x, |x - x_0| < \delta,$$

де $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon_1$ і $|\varphi(x) - B| < \epsilon_2$.

Випадок 1. $B \geq 1$. Для $\forall x, |x - x_0| < \delta$, справедливі наступні оцінки.

$$\begin{aligned}
& \left| \varphi(x)^{f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| = \\
& = \left| \varphi(x)^{f(x)} - \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \leq \\
& \leq \left| \varphi(x)^{f(x)} - \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| + \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| = \\
& = \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left| \varphi(x)^{\frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}} - 1 \right| + \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| = \\
& = \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left(\left| \varphi(x)^{\frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \right)
\end{aligned}$$

За умовою $A - \varepsilon_1 < f(x) < A + \varepsilon_1$ і $B - \varepsilon_2 < \varphi(x) < B + \varepsilon_2$, де $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, тому

$$\begin{aligned}
& \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left(\left| \varphi(x)^{\frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \right) < \\
& < \left| (B + \varepsilon_2)^{(A + \varepsilon_1)} \right| \left(\left| (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (B + \varepsilon_2)}{(B + \varepsilon_2)} \right)^{(A + \varepsilon_1)} \right| \right) = \\
& = \left| (B + \varepsilon_2)^{(A + \varepsilon_1)} \right| \left(\left| (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{B + \varepsilon_2}{B + \varepsilon_2} \right)^{(A + \varepsilon_1)} \right| \right) = \\
& = \left| (B + \varepsilon_2)^{(A + \varepsilon_1)} \right| \left(\left| (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - 1 \right| \right)
\end{aligned}$$

Відмітимо, що в останньому виразі знак $| \quad |$ можна опустити, бо за припущенням $B \geq 1$. Отже, отримаємо наступну оцінку

$$\left| \varphi(x)^{f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| < (B + \varepsilon_2)^{(A + \varepsilon_1)} \left((B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - 1 \right).$$

Покладемо

$$\varepsilon' = (B + \varepsilon_2)^{(A+\varepsilon_1)} \left((B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - 1 \right),$$

відкриємо дужки та отримаємо рівняння

$$(B + \varepsilon_2)^A (B + \varepsilon_2)^{2\varepsilon_1} - (B + \varepsilon_2)^A (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - \varepsilon' = 0,$$

або, що те ж саме

$$(B + \varepsilon_2)^{2\varepsilon_1} - (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A} = 0.$$

Введемо позначення $y = (B + \varepsilon_2)^{\varepsilon_1}$ та перепишемо рівняння у вигляді

$$y^2 - y - \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A} = 0.$$

Розв'язками даного рівняння є значення

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}}.$$

Оскільки значення $y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}}$ є таким, що $y_1 > 1$, то,

повернувшись до заміни, знайдемо, що

$$\varepsilon_1 = \log_{(B+\varepsilon_2)} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}} \right).$$

Слід відмітити, що $B + \varepsilon_2 > 1$, де $\varepsilon_2 > 0$ за умовою, тому $\varepsilon_1 > 0$. Як висновок, які б значення $\varepsilon' > 0$ та $\varepsilon_2 > 0$ ми не взяли, для нього завжди існує $\varepsilon_1 > 0$.

Випадок 2. $0 < B < 1$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $B + \varepsilon_2 < 1$ (якщо $B + \varepsilon_2 \geq 1$, доведення зводиться до Випадку 1). Тоді, для $\forall x, |x - x_0| < \delta$, справедливо

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x)^{f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| < \\ & < \left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left(\left| \varphi(x)^{\frac{f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \right). \end{aligned}$$

За умовою $A - \varepsilon_1 < f(x) < A + \varepsilon_1$ і $B - \varepsilon_2 < \varphi(x) < B + \varepsilon_2$, де $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, тому

$$\left| \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \left| \left| \frac{\varphi(x)^{f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}}{\varphi(x)} - 1 \right| + \left| 1 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| \right| < \\ < \left| (B + \varepsilon_2)^{(A - \varepsilon_1)} \right| \left| (B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} - 1 \right|$$

Відмітимо, що в останньому виразі, знак $|$ можна опустити, бо

$(B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} > 1$. Отже, отримаємо наступну оцінку

$$\left| \varphi(x)^{f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| < (B + \varepsilon_2)^{(A - \varepsilon_1)} \left((B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} - 1 \right).$$

Покладемо $\varepsilon' = (B + \varepsilon_2)^{(A - \varepsilon_1)} \left((B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} - 1 \right)$, відкриємо дужки та отримаємо рівняння

$$(B + \varepsilon_2)^A (B + \varepsilon_2)^{-2\varepsilon_1} - (B + \varepsilon_2)^A (B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} - \varepsilon' = 0,$$

або, що те ж саме

$$(B + \varepsilon_2)^{-2\varepsilon_1} - (B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A} = 0.$$

Введемо позначення $y = (B + \varepsilon_2)^{-\varepsilon_1}$, отримаємо рівняння

$$y^2 - y - \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A} = 0,$$

розв'язками якого є значення

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}}.$$

Розглянемо

$$y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}},$$

зрозуміло, що $y_1 > 1$. Звідки знайдемо

$$\varepsilon_1 = -\log_{(B + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}} \right).$$

Слід відмітити, що для $B + \varepsilon_2 < 1$ вираз

$$\log_{(B + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon'}{(B + \varepsilon_2)^A}} \right) < 0,$$

тому $\varepsilon_1 > 0$. Як висновок, які б значення $\varepsilon' > 0$ та $\varepsilon_2 > 0$ ми не взяли, для нього завжди існує $\varepsilon_1 > 0$.

Зі сказаного вище випливає, що для $\forall \varepsilon' > 0$ існує $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon_1), \delta_2(\varepsilon_2)\}$ таке, що

$$\forall x, \quad |x - x_0| < \delta, \Rightarrow \left| \varphi(x)^{f(x)} - \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \right| < \varepsilon'.$$

Наслідок. Лема справедлива, якщо $A = \pm\infty$ і $B \neq 1$.

Доведення. Означимо функцію $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$. Тоді, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0$ і для

$f_1(x)$ справедливі умови Лема.

Наслідок. Лема справедлива, якщо $A = \pm\infty$ і $B = 1$.

Доведення (Каплан, 1967). Запишемо

$$\varphi(x) = 1 + [\varphi(x) - 1] \text{ і } f(x) = \frac{1}{\varphi(x) - 1} [\varphi(x) - 1] f(x).$$

Зауваження. У формулі (1) точка x_0 означає і число, і один із символів ∞ , $-\infty$ або $+\infty$.

Зауваження. Лема доводиться аналогічно за допомогою означень границі функції на мові «околів» та «бази».

З Лема випливає, що приклад, який наведений на початку статті, ми можемо переписати у вигляді:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x^2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x^2}{2}} \right)^{\frac{3x^2}{2} \cdot \frac{2}{3x}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x^2}{2}} \right)^{\frac{3x^2}{2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x}} = e^0 = 1.$$

Список літератури

- Зорич, В. А. (2002). *Математический анализ* (Часть I). Москва: МЦНМО.
 Каплан, И. А. (1967). *Практические занятия по высшей математике* (Т. 1). Харьков: Издательство ХГУ.
 Кудрявцев, Л. Д. (1967). *Краткий курс математического анализа*. Москва: Наука.
 Никольский, С. М. (1990). *Курс математического анализа* (Т. 1). Москва: Наука.
 Фихтенгольц, Г. М. (2003). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 1). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИЧНОЇ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Я. В. Гончаренко, О. С. Сушко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
yan_a@ukr.net, teacher_math@i.ua

Курс «Стохастична фінансова математика» є традиційним у підготовці студентів спеціальностей та спеціалізацій «Актварна та фінансова математика», «Математична економіка та економетрика», «Прикладна та теоретична статистика», «Економічна кібернетика», зокрема, він вивчається магістрантами спеціальності 111 «Математика» Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Вивчення цього курсу є можливим, оскільки в бакалавраті передбачалося вивчення, так званого, «класичного» курсу фінансової математики, а саме, дисципліни за вибором «Елементи фінансової та актуарної математики».

Метою і завданнями навчальної дисципліни «Стохастична фінансова математика» є: ознайомити студентів з основними поняттями детермінованих та стохастичних моделей фінансової математики, сформувати здатність використовувати знання про сучасні ймовірнісні методи дослідження вартості акцій та облігацій, формування портфеля інвестора та уміння застосовувати набуті знання до розв'язування різноманітних задач фінансової діяльності установ і підприємств, зокрема, з використанням сучасних комп'ютерних інформаційних технологій.

Згідно з метою та основними завданнями курсу, до програми навчальної дисципліни включено вивчення таких основних питань, як: фінансовий ринок в умовах невизначеності; класичні теорії: випадкові блукання, граничні задачі для випадкових блукань, диверсифікація портфеля Марковіца, модель ціноутворення фінансових активів, арбітражна теорія розрахунків; стохастичні моделі з дискретним часом: динамічні моделі ринкових цін, лінійні стохастичні моделі (моделі ковзного середнього та авторегресійні моделі), нелінійні стохастичні умовно-гаусівські моделі; стохастичні моделі з неперервним часом: моделі, що ґрунтуються на броунівському русі, стохастичні інтеграли, формула Іто, стохастичні диференціальні рівняння, модель Блека — Шоулса, моделі з властивістю автомодельності, показник Херста, фрактальність.

Вивчення курсу передбачає формування у студентів таких компетентностей: базові уявлення про різноманітність математичних об'єктів, розуміння єдності математики як науки, її місця в сучасному світі та системі наук; володіння методами опису, ідентифікації та класифікації математичних об'єктів; здатність застосовувати математичні, зокрема аналітичні, ймовірнісні, статистичні, кореляційні, регресійні та дисперсійні, методи до створення, аналізу та дослідження математичних моделей фінансово-економічних об'єктів, процесів і явищ; здатність застосовувати сучасні інформаційні технології для розв'язання теоретичних, практичних та прикладних задач; базові уявлення про історію розвитку окремих галузей прикладної математики; здатність аналізувати наукову та на-

вчально-методичну літературу з дисципліни; вміння застосовувати набуті теоретичні знання до розв'язування задач; вміння використовувати раніше набуті знання при вивченні нового теоретичного матеріалу. Знання, вміння та набуті студентами в процесі вивчення даного курсу компетентності, можуть бути використані в їх науковій роботі, при написанні дослідницьких робіт, виконанні кваліфікаційних магістерських досліджень.

У доповіді будуть представлені деякі питання методики навчання дисципліни «Стохастична фінансова математика», зокрема методика вивчення стохастичних моделей ціноутворення фінансових активів та частинних випадків моделі Блека — Шоулса.

Одним з питань, передбачених програмою курсу «Стохастична фінансова математика» є вивчення моделі Блека — Шоулса. У своїх роботах, присвячених проблемі визначення цін опціонів, нобелівські лауреати Блек і Шоулс отримали диференціальне рівняння для цін фінансових похідних, залежних від ціни акції, по якій не виплачуються дивіденди. Основний сенс міркувань, що використовували автори, полягав у тому, що складається безризиковий портфель з двох фінансових контрактів: фінансової похідної та акції. Дохід такого портфеля прирівнюється до доходу, отриманого від такої ж за величиною інвестиції при безризиковій ставці. У моделі Блека — Шоулса портфель залишається безризиковим тільки протягом короткого періоду часу. Проте можна довести, що дохід протягом цього короткого часового періоду повинен бути безризиковою процентною ставкою, якщо арбітражні можливості відсутні. Це означає, що протягом будь-якого короткого періоду часу невизначеності (ризиків) як в ціні акції, так і в ціні фінансової похідної повністю корельовані. Коли такий портфель з фінансової похідної та акції складено, прибуток (або втрати) акції компенсується втратами (або прибутком) фінансової похідної, тому повна вартість портфеля в кінці короткого періоду часу відома.

Розпочинати вивчення стохастичних моделей ціноутворення активів, на нашу думку, варто з розгляду найпростіших дискретних випадків.

Найпростішою ймовірнісною моделлю зміни ціни активів є модель Бернуллі. Вона будується на основі наступних припущень. Нехай деякий актив купується інвестором у момент часу t за ціною S_t і погашається (продається) у момент часу T за ціною S_T , $t < T$. Припустимо, що актив не передбачає виплати дивідендів і не вимагає ніяких витрат протягом інтервалу часу (t, T) ; при цьому ставка доходності $y(t, T)$ розглянутого активу протягом часу $\tau = T - t$ може набувати одне з двох значень $\tau^{-1} \ln u$ з ймовірністю p або $\tau^{-1} \ln d$ з ймовірністю $1 - p$, де u , d і p — параметри моделі. Два відповідних можливих значення ціни в момент погашення (продажу) відповідно дорівнюють $S_t u$ з ймовірністю p або $S_t d$ з ймовірністю $1 - p$.

Параметри u , d і p можна оцінити за допомогою змін на ринку за який-небудь попередній період. Будемо вважати, що символ u відповідає зміні ціни вище (up) певного рівня, а символ d відповідає зміні ціни нижче ($down$) цього рівня. Так що не обов'язково $d < 1 < u$, але передбачається, що $d < u$. Нехай y^* є безризиковою ставкою прибутковості за певний період, тоді можна показати, що необхідною умовою відсутності арбітражу в такій моделі буде виконання нерівності $d \leq r = e^{y^* \tau} \leq u$. При цьому очікувана ціна погашення активу збігається з ціною погашення безризикового активу з такою ж початковою вартістю, тобто $MS_T = S_t e^{y^* \tau} = S_t r$, тільки тоді, коли ймовірність p зміни ціни вище безризикового рівня обчислюється за формулою $p = \frac{r - d}{u - d}$.

Оскільки модель Бернуллі характеризує можливу зміну ціни активу за деякий окремий часовий період, її зазвичай називають моделлю одного періоду (*single period model*). Разом з тим, студентам можна запропонувати розглядати її як фрагмент моделі, що характеризує зміну цін протягом деякої послідовності періодів часу (наприклад, декількох років). Зазвичай у такій розширеній моделі передбачається, що зміна цін у наступні періоди не залежить від того, яким чином змінювалася ціна в попередніх періодах, тобто модель визначає процес зміни цін з незалежними приростами протягом послідовних періодів. У цьому випадку процес зміни ціни активу є марківським, а сама модель, що представляє комбінацію моделей Бернуллі, називається біноміальною моделлю.

У біноміальній моделі використовується дві функції, що впливають на характер випадкової зміни фінансових змінних: функцію дрейфу μ і волатильність σ . Параметр μ зазвичай є очікуваним доходом, що отримує інвестор за короткий період часу, він є відносною величиною, його значення залежить від ризику прибутку активу (від тієї частини ризику, якою не може керувати інвестор), а також від процентної ставки. Студентам слід наголосити на тому, що параметри u , d і p вибираються так, щоб для малого інтервалу часу Δt очікуваний дохід від ціни акції дорівнював $\mu \Delta t$, а дисперсія доходу — $\sigma^2 \Delta t$. Склавши і розв'язавши відповідну систему рівнянь, студенти мають переконатися в тому, що

$$u = e^{\sigma \Delta t}, d = u^{-1} = e^{-\sigma \Delta t}, p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}.$$

Список літератури

- Борисенко, О. Д., Мішура, Ю. С., Радченко, В. М. і Шевченко, Г. М. (2007). *Збірник задач з фінансової математики*. Київ: Редакційно-видавничий центр Київського університету.
- Мішура, Ю. С., Шевченко, Г. М. (2009). *Математика фінансів*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Ширяев, А. Н. (2004). *Основы стохастической финансовой математики*. Москва: ФАЗИС.

СУЧАСНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В КУРСІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. Л. Гречко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

and.grechko@gmail.com

Багато курсів диференціальних рівнянь для студентів фізико-математичної спеціалізації ще декілька десятиліть тому були орієнтовані на формальне розв'язання стандартних типів диференціальних рівнянь та систем, асимптотичну теорію, а з якісної теорії обмежувалися класифікацією особливих точок лінійних двовимірних систем. Проте сучасний рівень підручників з диференціальних рівнянь, приміром (Schaeffer & Cain, 2016) став суттєво більш вищим, за рахунок тем стійкості розв'язків та якісної теорії диференціальних рівнянь, які:

- дозволяють розширити математичні моделі з розділів наук, які не освітлювалися раніше: сучасна фізика, математична біологія, економіка, медицина тощо;

- дозволяють використовувати комп'ютерні системи (Maple, Matlab, Mathematica) для обчислень та візуалізації, що дає більш поглиблене розуміння концепцій;

- заохочують емпіричні дослідження математичних моделей, які дозволяють провести більш глибокий аналіз, ніж стандартні задачі підручника.

За останні 20—30 років курс диференціальних рівнянь для студентів фізико-математичної спеціалізації значно розширився за рахунок розділів стійкості розв'язків та якісної теорії диференціальних рівнянь: дослідження стійкості періодичних розв'язків, критерії існування періодичних розв'язків квазілінійних диференціальних рівнянь, регулярна та сингулярна теорія збурень, дослідження граничних циклів та теорія Пуанкаре — Бендиксона, питання лінеаризації двовимірних нелінійних диференціальних рівнянь в околі гіперболічної особливої точки, елементи теорії біфуркацій (біфуркація особливих точок та теорія Андронова — Хопфа). Останні дві теми вже стали стандартом «де-факто» присутності в майже всіх сучасних курсах диференціальних рівнянь, але слід зауважити, що при їх упровадженні слід відмовитись від ретельного доведення та складних аналітичних перетворень, сконцентрувавшись на формальному опису, реальної інтерпретації на конкретних модельних прикладах. Розглянемо деякі найбільш важливі сучасні математичні моделі, які описуються двовимірними нелінійними диференціальними рівняннями з одним або двома параметрами.

1. Фізика. Класичні приклади старих підручників (математичний маятник, радіоактивний розпад, басейн з двома трубами тощо) розглядаються в темах інтегрованих типів диференціальних рівнянь та систем. *Нові моделі:* системи Ньютонів (консервативні), двовимірні гамильтонові системи доповнюють тему перших інтегралів та особливих точок, дослідження рівняння Дуфінга (стійкість за Ляпуновим), дослідження коливної моделі Ван дер Поля (тема гранич-

них циклів та теорії збурень), математична модель знаходження солітона та інші (Schaeffer & Cain, 2016).

2. Біологія. Класичні моделі математичної біології «хижак — жертва» Вольтерри — Лотки, системи конкурентної міжвидової боротьби (тема- класифікація особливих точок лінійних двовимірних динамічних систем та існування граничних циклів), спрощені моделі Chemostat та системи Ходжкіна — Хакслі нервових мембран (тема теорія біфуркацій) (Murray, 2002).

3. Медицина. Математична модель поширення епідемій, модель роста пухлин Решіньо — де Лізі (тема — граничні цикли та лінеарізація), найпростіша модель Фітца — Хью — Нагумо блукаючих пульсів (Keener & Sneyd, 1998).

4. Хімія. Математична модель Brusselator I. Пригожина (тема — теорія збурень та критерії Льєнара граничних циклів) (Schaeffer & Cain, 2016).

5. Економіка. Математична модель Калдора економічних циклів (тема критерії існування граничних циклів), математична модель Кейнса IS-LM (тема — теорема Андронова — Хопфа), різні моделі економічного зростання Харрод-Домара, нео-класичні моделі (тема — біфуркація особливих точок) (Tu, 1994).

Як приклад розглянемо популяційну двовидову модель Холлінга (1972), яка задається системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{a+x}, \\ y' = sy \left(1 - \frac{y}{\nu x}\right), \end{cases}$$

де всі змінні $x(t), y(t)$ (взаємодіючі популяції) та сталі r, a, b, K, s, ν є додатними. Незважаючи на особливі точки в початку координат та на осях, знаходимо єдину «нетривіальну» особливу точку (x^*, y^*) , яка визначається системою

$$\nu x = y, \quad r \left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{by}{a+x}.$$

Матриця Якобі лінеаризованої системи в особливій точці має вигляд

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} k & -bx^* / (a+x^*) \\ (k-\lambda)\nu & \lambda - k \end{pmatrix},$$

де $\lambda = k - s$, $k = -rx^* / K + b\nu x^{*2} / (a+x^{*2})$. Зрозуміло, що $\det A(\lambda) > 0$, $\text{tr } A(\lambda) = \lambda$, тому особлива точка є стійкою при $\lambda < 0$ та нестійкою при $\lambda > 0$. Власні значення $\rho_i(\lambda)$ матриці $A(\lambda)$ є комплексними при достатньо великих $|\lambda|$, але важливо що при $\lambda = 0$ $\text{Re } \rho_i(0) = 0$ та $\text{Im } \rho_i(\lambda) \neq 0$, тому можливо застосування теореми Андронова — Хопфа. Залишилось перевірити умову

$$\frac{d \operatorname{Re} \rho_i(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{d \operatorname{tr} A(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{2} > 0,$$

тобто при достатньо малих $|\lambda|$ існує граничний цикл (рис. 1), який біфуркує з фокусу і дає можливість існування в даній моделі режиму автоколивань або режиму стабілізації чисельності популяцій.

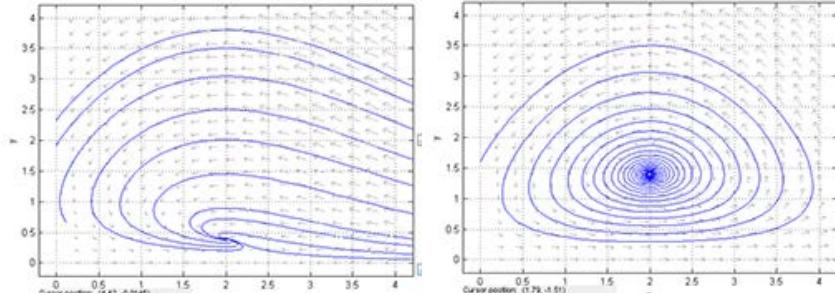


Рис. 1

Список літератури

- Keener, J. and Sneyd, J. (1998). *Mathematical physiology*. New-York: Springer.
Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology 1. An introduction*. New-York: Springer.
Schaeffer, D. and Cain, J. W. (2016). *Ordinary differential equations*. New-York: Springer.
Tu, P. N. (1994). *Dynamical systems. An introduction with applications in economics and biology*. Berlin: Springer.

ОСОБЛИВОСТІ ПРОЦЕСУ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ ПІД ЧАС ПІДГОТОВКИ СПЕЦІАЛІСТІВ ДЛЯ МАШИНОБУДІВНОЇ ГАЛУЗІ

В. В. Довгай

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

valerdov@gmail.com

Однією з підвалин сучасної розвиненої економіки є галузь машинобудування, яка в нашій країні переживає не найкращі часи внаслідок відсутності осмисленої та цілеспрямованої політики в її реформуванні. Те, що відбувається, є малокерованим і непослідовним процесом при відсутності чіткої програми дій для побудови потужної галузі, що в підсумку, як і багато подібного при здійсненні економічних перетворень, не сприяє суттєвому зменшенню вже аж занадто високого рівня корупційних, олігархічних, монополістичних, клептократичних, непотичних та інших негативних тенденцій у сучасному державотворенні. Звичайно, на цьому фоні є окремі галузі, які з точки зору пересічного громадянина демонструють успішніший розвиток (інформаційні технології, транспорт, поліграфія, торгівля і т. д.), а тому як батьки, так і їх діти орієнтуються на здобути освіти саме в тих підрозділах вищої школи, де найкраще готують відповідних спеціалістів. Саме там, до яких ще слід додати факультети або інститути, де з точки зору звичайної людини навчають «престижним» спеціальностям (фінанси, право, соціологія, політологія і т. д.) немає проблем з набором найбільш якісно підготовлених випускників середніх навчальних закладів. Галузі ж машинобудування, де особливо необхідні якісні знання з таких непростих та об'ємних дисциплін, як елементарна математика і фізика в повному обсязі програми середньої школи, віддає перевагу все менша кількість цих випускників з відповідними знаннями. До того ж після всіх реформувань системи середньої освіти, що мали, як правило, поверховий та формальний характер і не передбачали при відсутності необхідного фінансування кардинальних змін, відсоток випускників з достатнім рівнем знань елементарної математики у кращому випадку не зріс.

Усе це є причиною того, що на початку навчального року знайомлячись з контингентом першокурсників викладачі вищої математики відповідних факультетів та інститутів все частіше бачать серед них студентів, що пройшовши зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) не готові без додаткових зусиль як викладачів, так і в першу чергу їх самих, сприймати складний для них та ще й дуже об'ємний курс цієї дисципліни. У першу чергу виникає питання до якості системи ЗНО, яка по відношенню до елементарної математики допускає вступ у сучасний технічний університет випускників середніх навчальних закладів, що не засвоїли там у достатньому обсязі наступних фундаментальних тем:

- 1) дії з раціональними числами та виразами (у тому числі розклад на множники многочленів);
- 2) поняття функції та основних елементарних функцій;
- 3) еквівалентні перетворення алгебраїчних та тригонометричних виразів;

4) еквівалентні перетворення рівнянь та нерівностей.

Природньо, що наступним виникає питання до стану середньої освіти в нашій державі, яка не забезпечує засвоєння багатьма учнями навіть найпростіших знань з елементарної математики, починаючи вже з шостого класу (дії з раціональними числами). Після такої прогалини у знаннях не варто й чекати від учня того, що він оволодіє в достатньому обсязі поняттями та властивостями тригонометричних функцій, логарифмів, зможе розв'язувати навіть найпростіші рівняння та нерівності. Усе це є необхідною сумою знань, з якою студент першого курсу повинен починати вивчати курс вищої математики, але ще донедавна у педагогічних колах середньої освіти настирно поширювалась думка про те, що не потрібно у навчальних закладах учити так, щоб давати цю суму знань, треба, мовляв, навчати учня вчитися і край. Таким чином свідомо чи несвідомо розривались два нерозривні процеси — здатність самостійно здобувати знання та набуття при цьому певної суми знань. Як наслідок у багатьох випадках маємо наступну типову ситуацію: не навчили учня вчитися, та й не дали при цьому необхідної суми знань для успішного продовження навчання у вищих технічних учбових закладах. Тенденції до зменшення частки таких учнів серед першокурсників тих факультетів та інститутів сучасного технічного університету, які готують фахівців для машинобудівної галузі, поки що не помітно. Ні в якому разі не можна всю відповідальність за це покласти на стрілочника — вчителя математики, він і так робить усе, що може. Щоб зрозуміти справжні причини такого явища, досить звернути увагу на стан економіки в державі, яка готує до того ж так багато економістів, у тому числі за мірками міністерств та відомств і самої високої кваліфікації, але в якій немає ефективної економіки.

Та незворотній хід історії разом з позитивними тенденціями розвитку українського суспільства неодмінно поставить владу перед необхідністю здійснювати не поверхові реформи без зміни олігархічної, монополістичної та корупційної складової, а докорінне перетворення економіки у прогресивному напрямку до вигляду, який існує у всіх розвинених країнах. При цьому і галузь машинобудування займе належне їй достойне місце, що неодмінно вплине на вступ до відповідних факультетів та інститутів сучасного технічного університету значно більшої кількості талановитих випускників середніх навчальних закладів, які володітимуть необхідними там знаннями з елементарної математики і не тільки ними. Але щоб підтримати до настання такого часу на належному рівні процес підготовки відповідних фахівців, необхідно у короткостроковій перспективі не гаючись передбачити у навчальних програмах для першого курсу дисципліну (можливо, вільного вибору), завданням якої було б компенсувати прогалини в тих розділах елементарної математики, де їх наявність гальмує сприйняття студентами не тільки вищої математики, а й інших дисциплін, що її використовують. Щодо довгострокової перспективи, то там на чільне місце слід поставити профорієнтаційну роботу викладачів сучасного технічного університету з контингентом старшокласників середніх навчальних закладів.

РЕАЛІЗАЦІЯ НАСТУПНОСТІ У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ

В. В. Дрозд

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Якось, проходячи повз стенд оголошень кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПП, я помітив папірець, на якому було надруковано назву наукової конференції «Реалізація наступності у викладанні...». У викладанні чого, я не пам'ятаю. Але мене відразу різануло по серцю це словосполучення: «реалізація наступності». Адже саме про це я постійно думаю, коли починаю читати лекції з математичного аналізу студентам першого курсу КПП. Реалізація наступності у викладанні математики. Мене завжди це турбувало, але я не знав, як це називається. Саме як персонаж однієї з п'єс Мольєра, який навіть не здогадувався, що все життя розмовляв прозою.

Реалізація наступності. Колись, у радянські часи викладачі вищих навчальних закладів навіть і не задумувались про це. Процентів вісімдесят студентів першого курсу добре знали елементарну математику, тобто мали достатню базу задля того, щоб нормально сприймати лекції з математичного аналізу, аналітичної геометрії тощо. Інші двадцять процентів або потихеньку підтягувались, наздоганяли інших по знанням (а бувало таке, що й переганяли), або відраховувались. Тому відому фразу Аркадія Райкіна «товарищи студенты, забудьте всё, чему вас учили в школе» я завжди сприймав як абстрактний гумор, який не має жодного відношення до життя.

Зовсім не ту картину ми спостерігаємо останні років з двадцять. «Не той тепер Миргород, Хорол-річка не та». Як відмічено в статті Довгай (2013), «випускник звичайної загальноосвітньої середньої школи часто не має необхідних знань для того, щоб успішно вивчати предмет вищої математики». Саме тому років з сім-вісім тому завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПП» Валерій Володимирович Булдигін запропонував викладачам, що викладали курс математичного аналізу на фізико-математичному факультеті, приділити в першому семестрі більше уваги деяким важливим розділам елементарної математики. І перш за все тим розділам, які потрібні для кращого засвоєння диференціального та інтегрального числення, теорії рядів тощо. Що це, як не «реалізація наступності»? Правда, ми тоді ще не знали таких слів. Але жваво прийнялись за справу і змінили програму таким чином, щоб перші дев'ять-десять лекцій були присвячені елементарній математиці.

У результаті одержали те, про що колишній російський прем'єр Чорномірдин дуже влучно сказав: «Хотели, как лучше, а вышло, как всегда». Чому ж так вийшло? А тому, що спроба протягом перших десяти лекцій повторити весь курс елементарної математики просто відбирає час, який був раніше запланований на весь перший семестр. По-друге, викладаючи після цього теорію множин, відображення множин, потужність множин тощо, ми неодмінно вимушені повторюватись. Звичайно: «повторение — мать учения». Але час, час... Часу зав-

жди не вистачає. І нарешті, по-третє. Викладаючи спочатку так звану елементарну математику, а потім окремо так звану вищу математику, ми робимо методичну помилку. Мені, принаймні, так здається. В результаті ми одержуємо людей з розірваною, кліповою свідомістю. Ми одержуємо людей з вищою освітою, далєбі навіть академіків (наприклад, такий собі Микола Левашов), які стверджують, що комплексних чисел не існує. Бідолаги, вони думають, що цілі чи раціональні числа існують. Мабуть, в академіях іноді забувають про реалізацію наступності у викладанні математики (та й філософії теж).

Як би там не було, але з часом стало зрозуміло, що основні розділи програми з елементарної математики не треба викладати окремо від розділів вищої математики, які заплановано на перший семестр. Треба їх творчо поєднувати. Тобто не схематично, неформально, не «в лоб». Дивіться. Перший семестр. Перша лекція з математичного аналізу. Ми знайомимо слухачів з первинними поняттями математики, з множинами, із множиною натуральних чисел, з аксіомами, означеннями, з першими теоремами та методами їх доведення. Теорема про ділення цілого числа на ціле число з остачею, теорема про кількість простих чисел тощо. Студент, який був у школі відмінником, нудьгує. Він вважає, що все це очевидно. Як показує практика, ця самовпевненість зникає вже під час першого колоквиуму (або першого спілкування з викладачем на практичному занятті). Коли цей студент нарешті зрозуміє, що не знає різниці між аксіомою та теоремою, між означенням та властивістю, між поняттями «необхідно» та «достатньо» тощо.

Трохи краща справа зі студентом, який був у школі трієчником. Він усе це чує майже вперше. Як правило, його захоплює краса і логічність побудови числових множин: спочатку розширюємо множину натуральних чисел за рахунок числа нуль та від'ємних цілих чисел, розглядаємо їх властивості, потім розширюємо множину цілих чисел за рахунок дробових чисел, розглядаємо їх властивості тощо. А далі ірраціональні числа. Ще цікавіше. Тут головне для цього трієчника — тримати фішку, не відволіктись зненацька на симпатичну сусідку чи новий гаджет. А наш відмінник у цей час продовжує нудьгувати. Якщо у нього не вимкнути завчасно той же гаджет. Але краще всього задати йому якесь питання. Наприклад: що таке звичайний дріб? А коли він щось скаже та щось напише, спитати: а що означає оця горизонтальна рисочка? Довга пауза — виявляється, що не все так просто. Після цього з'являється надія, що він зверне увагу на здавалось би знайомі речі, про які лектор розповідає як про щось неймовірне. У той же час залишається надія, що трієчник ще не загубив цю увагу.

Це дуже важливо. Саме зараз настає час, коли їх увага конче потрібна. Чому саме зараз? Тому що настав час розповісти їм, що таке точні межі числових множин. До кінця зрозуміти це поняття непросто. Особливо для вчорашнього школяра. І тут дуже важлива роль викладача, який веде практичні заняття. Треба вдало підібрати низку прикладів, які розкриють студентам суть поняття точної межі числової множини. Без цього неможливо рухатись далі. А далі — тео-

рема про існування точних меж обмеженої множини, властивості точних меж тощо.

Тільки після цього можна визначити арифметичні дії з дійсними числами. Користуючись властивостями точних меж, можна довести властивості арифметичних дій на множині дійсних чисел. Далі можна дати студентам трохи відпочити і нагадати їм, що таке числова пряма, упорядкованість дійсних чисел, властивості нерівностей, модуль дійсного числа, його властивості тощо. Пояснити, чому кожному дійсному числу відповідає одна і тільки одна точка на числовій прямій. Після цього варто довести існування кореня з будь-яким натуральним показником від будь-якого додатного дійсного числа. Це дає можливість визначити степінь з дійсним показником та довести відомі студентам властивості степенів та коренів. Таким чином, ми завершуємо розгляд числових множин, з якими студенти будуть працювати протягом чотирьох семестрів, вивчаючи курс математичного аналізу. Як бачимо, більшість фактичних знань про ці множини студенти повинні були знати з шкільної програми. Але тепер ми їм це нагадали, і головне — вони тепер мають чітке обґрунтування цих знань.

Далі ми знайомимо студентів з поняттям функції, області визначення, множини значень функції тощо. Відмінники знову нудьгують і тут корисно задати їм питання: а чи знає хто-небудь, що таке графік функції? Дуже добре, якщо хоча б один слухач відповість щось більш-менш переконливе. Давши після цього чітке означення графіка функції, природньо нагадати графіки основних елементарних функцій та елементарні перетворення графіків (паралельне перенесення, розтяг, симетрія тощо). Цим ми вбиваємо відразу двох зайців: по-перше, ми продовжуємо реалізовувати наступність у викладанні математики, а по-друге, ми готуємо базу для кращого засвоєння студентами наступної теми.

А наступна тема — це потужність множин. Це зовсім неочевидне і абсолютно нове поняття для більшості студентів першого курсу. І якщо на цей момент їм ще цікаво... А про те, щоб їм було цікаво постійно, можна тільки мріяти. Я завжди згадую батьківські збори в початковій школі, де вчилася моя донька. Кожного разу протягом перших чотирьох років учителька починала збори словами: «Поки що більшості ваших дітей вчитись цікаво». Саме через це ми з дружиною не переїжджали в інший район міста до закінчення дочкою початкової школи. Хоча можливість такого переїзду в значно кращу квартиру була. Дочці було цікаво вчитись. Що може бути краще для батьків? Коли студенту цікаво слухати лекцію, що може бути краще для викладача?

Отже, потужність множин. Того студента, якому ще цікаво і який уперше знайомиться з цим предметом, очікує справжнісіньке одкровення. Ще б пак — він вперше почує, а потім і сам пересвідчиться, що між цілим та його частиною можна побудувати взаємно однозначну відповідність. Він побачить, що це характерна риса всіх нескінчених множин, і саме цим вони відрізняються від скінчених множин. Висловлюючись пишномовно, наш студент вперше в житті загляне в цей бездонний колодязь і в нього запаморочиться в голові. Щоб повернути його до тями, викладач повинен підібрати якомога більше цікавих прикла-

дів. І саме тут для побудови взаємно однозначних відповідностей між множинами йому допоможуть розглянуті на попередніх лекціях властивості елементарних функцій та їх графіків, а також такі перетворення площини чи простору як гомотетія, інверсія, паралельне перенесення тощо.

Зауважимо ще одну особливість реалізації наступності у викладанні математики. Як сказано в статті Рассоха, Блажко (2015), «наступність у навчанні є потужним засобом адаптації студентів першого курсу до навчання у ВНЗ». Марно сподіватись, що впродовж місяця від початку семестру наш студент повністю адаптувався. Але надалі його очікують теж знайомі речі: границя функції, неперервність, похідна тощо. Є автори (див., наприклад, Довгай (2013)), які пропонують «відмовитись від викладання основ теорії границь і диференціального та інтегрального числення» в середній школі. Це абсолютно хибна думка. Так, більшість школярів навряд чи до кінця розуміють, що таке границя функції чи похідна. А що таке сума двох дійсних чисел, вони розуміють? А чому існує квадратний корінь з числа 5, вони розуміють? Наповнити змістом відомі їм поняття — ось яка мета кожного викладача, який читає лекції з математичного аналізу студентам першого курсу. Головне, що з цими поняттями їх вже познайомили в середній школі.

Як пожартував колись, один з викладачів кафедри, Юрій Павлович Буценко, вищу математику студентам технічних факультетів викладають задля того, щоб, почувши назву якогось математичного терміну на лекції з технічної дисципліни, студенти не здригались нервово від несподіванки. А тепер уявіть собі вчорашнього школяра, який на кожній лекції чує купу невідомих слів: «базис», «детермінант», «ранг», «ексцентриситет», «сигнатура» тощо. Про поступову адаптацію тут можна тільки мріяти. У цьому плані викладачам, що читають лекції з математичного аналізу на першому курсі, трохи поталанило: вони «усього-на-всього» будують твердий фундамент під дах, який вже існує в головах студентів, час від часу додаючи до цього даху нові елементи. Головне — постійно підтримувати «зв'язок матеріалу, що вивчається у ВНЗ, із відповідним шкільним матеріалом» та дбати про «заповнення існуючих прогалів у знаннях абітурієнтів» (Рассоха, Блажко, Карпалюк, 2014).

Список літератури

- Довгай, В. В. (2013). Значення суми знань студента при вивченні вищої математики. У кн. *Матеріали Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 299—300). Київ: НТУУ «КПІ».
- Рассоха, І. В., Блажко, Л. М. (2015). Дидактичний та змістовний контекст адаптації студентів на прикладі викладання вищої математики. У кн. *Матеріали Четвертої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*. (с. 201—204). Київ: НТУУ «КПІ».
- Рассоха, І. В., Блажко, Л. М., Карпалюк, Т. О. (2014). Проблеми адаптації студентів першого курсу при вивченні вищої математики. У кн. *Матеріали Третьої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 203—205). Київ: НТУУ «КПІ».

УСВІДОМЛЕННЯ АБСТРАКТНОСТІ ЧЕРЕЗ ПРИКЛАДНУ СПРЯМОВАНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ю. Д. Жданова, С. М. Шевченко, Г. В. Шевченко

Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна

yuzhdanova@yandex.ru, SN-shevchenko65@yandex.ua, foxik.ryzyu@gmail.com

Глобальна інформатизація сучасного суспільства ставить нові вимоги до процесу навчання в технічному університеті спеціалізації «Інформаційні технології», зокрема до вивчення дисциплін фундаментальної підготовки. Це пояснюється тим, що фундаментальне знання застаріває набагато повільніше на відміну від технічного, прикладного. Як відомо, дисципліна «Дискретна математика» є теоретичною основою професійної освіти майбутнього фахівця інформаційних технологій.

Аналіз джерел (Зепнова, 2011; Мельников, 2003; Щедролосьєв, 2011) щодо вивчення дискретної математики в технічному ВНЗ дозволив визначити, що галузеві стандарти вищої освіти для різних напрямів підготовки дуже відрізняються один від одного за змістом і за обсягом розділів, які на думку авторів стандартів потрібні фахівцю з певної спеціальності. Більш того, розділи дискретної математики нерідко відносять до спеціальних глав вищої математики, що, на нашу думку, є неправильним, тому що дискретна математика має свої специфічні задачі і методи досліджень, які обумовлені відмовою від неперервності.

Проте, при всіх значних відмінностях є й спільні для різних спеціальностей розділи: елементи теорії множин, елементи комбінаторики, елементи теорії графів, елементи математичної логіки. Ці розділи є основою курсу дискретної математики для будь-якої спеціальності. Крім цих основних розділів до області вивчення дискретної математики відносять загальну алгебру, теорію алгоритмів, теорію автоматів, теорію кодування та інші.

При цьому не можна розглядати дискретну математику як набір різних теорій, не пов'язаних між собою. А між тим студенти часто сприймають її саме так.

Наступні труднощі у процесі вивчення дискретної математики студентами полягають у тому, що основним поняттям даної дисципліни притаманний високий рівень абстракції.

Як відомо, у процесі пізнавальної діяльності людина відображає об'єкти та явища реальної дійсності у формі чуттєвих образів або у формі понять. Поняття утворюються у свідомості людини після узагальнення. Такі мисленні побудови у процесі пізнання та усвідомлення називають науковими абстракціями (Рузавин, 2008; Светлов, 2006). Наукова абстракція надає більш повне уявлення про дійсність, ніж безпосереднє відчуття.

Математика, зокрема дискретна математика, має широкий прикладний спектр, можливості її застосування необмежені. І причиною цього є її абстрактний характер, який проявляється у тому, що вона оперує з ідеальними об'єктами, тобто об'єктами, яких у природі не існує. Таким чином, наука, яка

начебто віддаляється від матеріального світу, насправді дозволяє розкрити закономірності цього світу завдяки найбільш розповсюдженим видам абстракції: ототожнювання, ідеалізації та іншим. Такі абстракції як «множина», «відношення» дозволяють побудувати математику коректно і просто, пояснити суть кількісних відношень, а через них — і просторові форми.

Ураховуючи вищесказане, вважаємо, що завданням викладача є не тільки надання знань студентам згідно вимог стандарту, але і відкриття їм цілісності структури дискретної математики. А головне, слід підкреслювати, що розділи дискретної математики, які вивчаються студентами певного напрямку технічної підготовки, лежать в основі математичних моделей систем і процесів, які застосовуються в наступних, професійно орієнтованих дисциплінах. Потрібно більше уваги приділити питанню наочності, що можна зробити за допомогою застосування сучасних мультимедійних технологій. При викладенні «сухої» математичної інформації використання різних схем, таблиць, графічних ілюстрацій, анімації зробить матеріал, що викладається на лекції, доступним для сприйняття. На практичних заняттях потрібно застосовувати пакети математичних програм таких, як Mathcad, Maple та інші. Це не тільки полегшує розв'язування складних задач, а й робить цей процес більш простим і цікавим. Навчання має бути подане як вид дослідницької роботи, що дасть додаткову зацікавленість і дозволить якісно сформувати загальнонаукові і професійні компетенції у майбутніх фахівців.

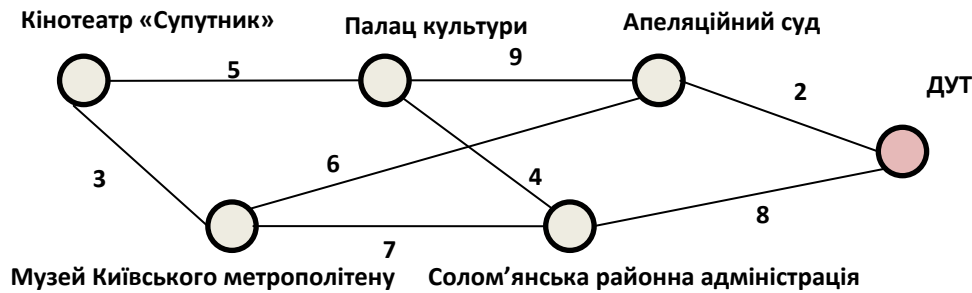
Для забезпечення взаємозв'язку між математичною та професійною підготовкою студентів, реалізації процесу наступності та прикладної спрямованості у Державному університеті телекомунікацій авторами був розроблений комплект міні-проектів у процесі навчання дискретної математики. Так, наприклад, під час вивчення теми «Операції над множинами» виконується проект «Порівняння наборів списків IP-адресів, доменних імен, одержаних у різні часові періоди». Діаграми Ейлера — Вена є ефективними для пошуку відповідностей та розбіжностей між даними наборами. Вивчення теми «Графи» закінчується міні-проектом «Проект створення телекомунікаційних мереж мінімальної вартості між місцями (університетами, аудиторіями і таке інше)». Зразок такого проекту представлено у таблиці 1.

У процесі вивчення булевих функцій студенти будують схеми з функціональних елементів, які представляють дані функції. Водночас, вивчаючи дисципліну Теорію ймовірностей, знаходять надійність таких систем.

Таблиця 1.

Умова: У недалекому майбутньому Державний університет телекомунікацій завдяки добре навченим студентам і спільними зусиллями з викладачами, став інтернет-провайдером (постачальник послуг інтернету). Оскільки наш університет мав вихід у глобальну мережу, у сфері інтернет послуг мав серйозні наробки, з нами захотіли підписати договір про надання нового обладнання (роутерів) для отримання високоякісного та чіткого сигналу такі будівлі Солом'янського району як: Апеляційний суд, Солом'янська районна адміністрація, Київська місцева прокуратура, Палац культури, Кінотеатр «Супутник», Музей Київського метрополітену. Підключення було здійснено за допомогою зв'язного дерева за мінімальним шляхом від комутатора мережі.

Солом'янський район



Слід відмітити, що більшість студентів складають програми різними мовами програмування для розв'язання таких завдань за допомогою ІКТ.

Кращі роботи обговорюються на студентських конференціях. Зазначимо, що створення таких проектів (задач прикладного характеру) мотивує наших студентів на вивчення математики, на її значущість, формує інтерес до математичної діяльності.

Список літератури

- Зепнова, Н. Н., Кузьмин, О. В. (2011). Особенности преподавания курса дискретной математики во втузе. *Омский научный вестник*, (1 (95)), 160—163. Получено из <http://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-prepodavaniya-kursa-diskretnoy-matematiki-vo-vtuze>
- Мельников, О. И. (2003). *Современные аспекты обучения дискретной математике*. Минск: Научно-методический центр «Электронная книга БГУ». Получено из <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/MathematicsMechanics/melnikov.pdf>
- Рузавин, Г. И. (2008). *Философия науки*. Москва: ЮНИТИ-ДАНА.
- Светлов, В. А. (2006). *Философия математики. Основные программы основания математики XX столетия*. Москва: КомКнига.
- Щедролосьєв, Д. Є. (2011). *Методична система навчання дискретної математики майбутніх інженерів-програмістів засобами інформаційних технологій: Автореф. дис ... канд. пед. наук*. Херсон: Б. в.

ПРО ДОВЕДЕННЯ БЕЗ СЛІВ

Р. М. Іванець¹, В. О. Гайдей²

¹Ліцей № 142, Київ, Україна

²НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

victor144169@gmail.com

Статтю підготовлено за матеріалами роботи «Доведення без слів», поданої до розгляду до Київської Малої академії наук (відділення — математика, секція — прикладна математика) у 2016/2017 р.

Метою роботи є розглянути доведення без слів (наочні доведення), як метод доведення певних математичних проблем, щоб зробити висновок, у яких випадках доцільно використовувати доведення без слів, а також чи коректно надавати доведенням без слів статусу доведень.

Вступ. Наочні доведення чи *доведення без слів* (ДБС), що є буквральним перекладом англійського терміну *proof without words* (PWW) мають давню історію. Так на них натрапляємо і в математичних трактатах Давнього Китаю, класичної Греції чи середньовічної Індії. Звісно, що тією чи іншою мірою рисунки, креслення чи діаграми використовувались під час математичних доведень майже скрізь і завжди.

Але сучасний сплеск, а потім і дослідження та систематизацію, доведень без слів можна відрховувати від публікації 1975 року в журналі «Месеметікс Мегезін» (Mathematics Magazine) Математичної Асоціації Америки двох статей Руфуса Азейкса (Rufus Isaacs) (рис. 1 та 2) (Isaacs, 1975).

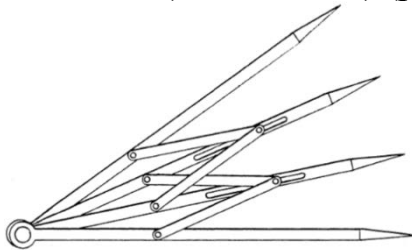


Рис. 1. Трисекція кута

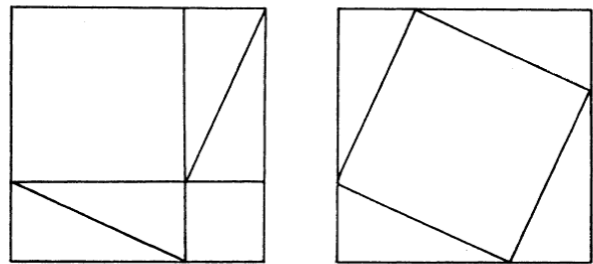


Рис. 2. Доведення теореми Піфагора

Розділ «Доведення без слів» стає постійним у цьому журналі, а з 2012 року і в «Коледж месеметікс джорнел» (The College Mathematics Journal).

Наочні доведення зараз активно поширюються і в мережі Інтернет, причому часто в анімованому вигляді, наприклад, (Bogomolny, 1998; USAMTS Proofs without words, n. d.). З'явилися уже сотні таких доведень тверджень з найрізноманітніших розділів математики: геометрії, алгебри, тригонометрії, диференціального та інтегрального числень, аналітичної геометрії, комбінаторики, теорії чисел тощо. Популярність цих математичних артефактів знаходиться на підйомі.

Одним з найплідніших авторів і дослідників наочних доведень є Роджер Нелсен (Nelsen, 1993; 2000; Alsina & Nelsen, 2006).

Подамо доведення теореми Піфагора з давньокитайського математико-астрономічного тексту «Чжоу бі суань цзин» (III ст. до н. е. — I ст. н. е) (рис. 3).

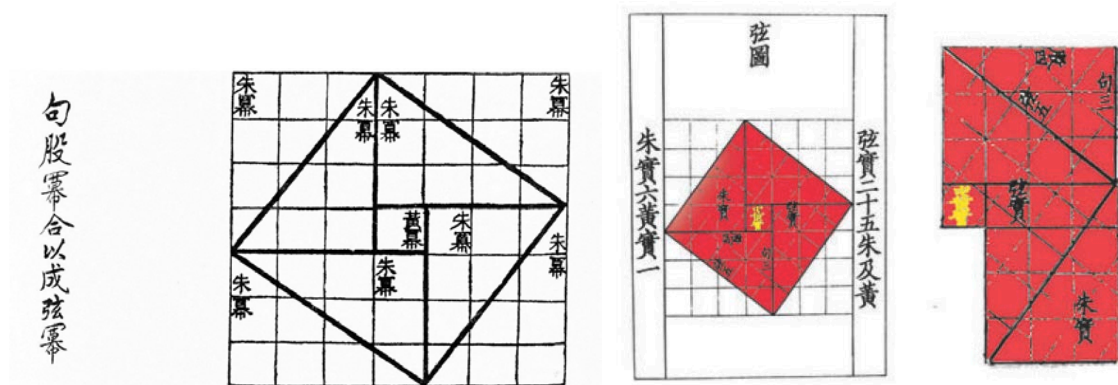


Рис. 3. Давньокитайське ДБС теореми Піфагора

ДБС 1. Узагальнення теореми Піфагора. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин усіх його сторін.

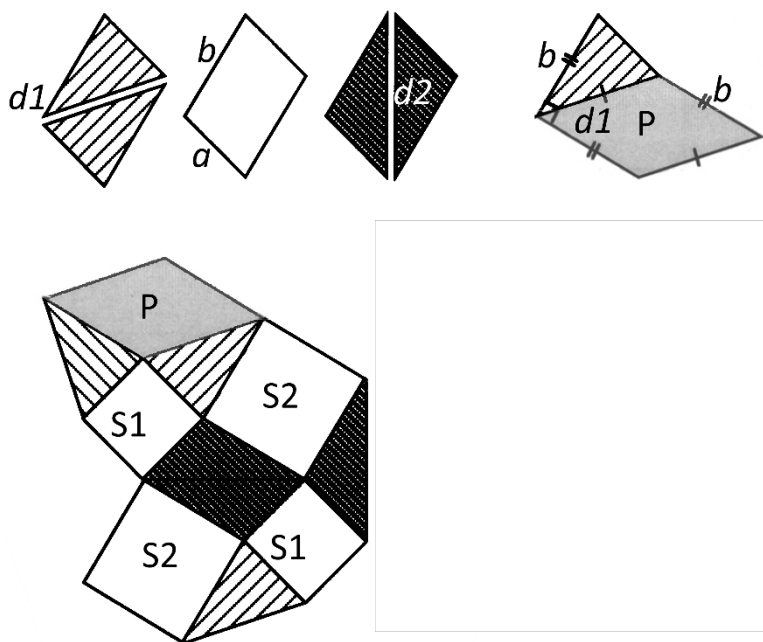


Рис. 4

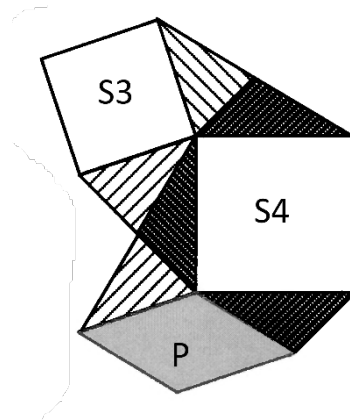


Рис 5

Пояснення до рис. 4. Маємо паралелограм зі сторонами a та b . S_1 — квадрат, утворений a -сторонами паралелограма. Його площа $S_1 = a^2$. S_2 — квадрат, утворений b -сторонами паралелограма. Його площа $S_2 = b^2$. P — паралелограм, утворений b -стороною паралелограма і його меншою діагоналлю d_1 .

Пояснення до рис. 5. S_3 — квадрат, утворений меншою діагоналлю паралелограма d_1 . Його площа $S_3 = d_1^2$. S_4 — квадрат, утворений більшою діагоналлю паралелограма d_2 . Його площа $S_4 = d_2^2$.

Візуально видно, що фігури однакові (їх можна накласти одна на одну), отже, мають рівну площу, а також складаються з однакових елементів в однаковій кількості, окрім квадратів.

Якщо прибрати всі елементи в обох фігурах, окрім квадратів, то ми зменшимо їх на однакову площу. Ураховуючи те, що їх початкові площі теж були рівні, маємо:

$$2S_1 + 2S_2 = S_3 + S_4 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) * 2 = d_1^2 + d_2^2.$$

ДБС 2. Різниця косинусів. Пояснення до рис 6.

1. З $\triangle AFD$ маємо

$$AD = AF \cos \alpha = \cos \alpha.$$

2. З $\triangle ABC$ маємо

$$AC = AB \cos \beta = \cos \beta.$$

Тоді $AC - AD = EB = \cos \beta - \cos \alpha$.

$$3. FH = \frac{1}{2}FB = AF \sin \angle AFH =$$

$$= \sin \angle AFH = \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\text{Отже, } FB = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

4. У $\triangle AOD$ і $\triangle FOH$: $\angle D = \angle H = 90^\circ$, $\angle AOD = \angle FOH$ — вертикальні.

Отже, $\triangle AOD \sim \triangle FOH$.

$$\text{Звідки } \angle OAD = \angle OFH = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

5. Маємо

$$EB = \cos \beta - \cos \alpha = FB \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ДБЗ 3. Різниця синусів. Пояснення до рис. 6.

1. З $\triangle AFD$ маємо $DF = AF \sin \alpha = \sin \alpha$

2. З $\triangle ABC$ маємо $BC = AB \sin \beta = \sin \beta$.

Тоді $EF = DF - BC = \sin \alpha - \sin \beta$.

3. З $\triangle FEB$ маємо

$$EF = FB \cos \angle BFE = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ДБС 4. Синус подвійного кута. Пояснення до рис. 6.

З $\triangle ABC$ маємо за теоремою синусів

$$\frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle A}{BC};$$

$$\frac{\sin 2\theta}{2 \sin \theta} = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{1} = \cos \theta; \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

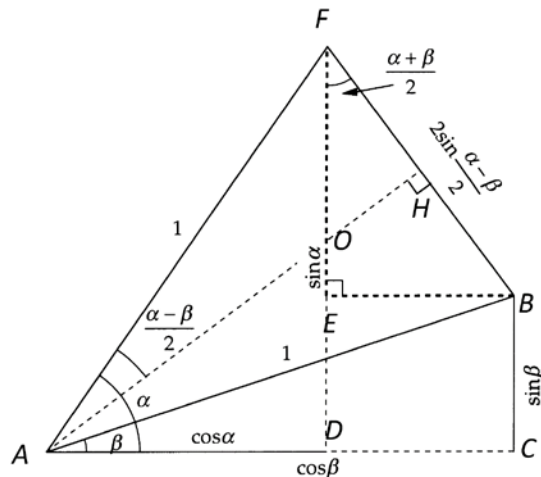


Рис. 6

ДБС 5. Розбіжність ряду. Пояснення до рис. 7.

1. Розгляньмо два подібних прямокутних трикутники $\triangle ABC$ та $\triangle CBH$ ($\angle C = \angle H = 90^\circ$), де H — основа висоти, опущеної на гіпотенузу AB :

$$AB \cdot BH = BC^2 = 1;$$

$$BH = \frac{1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Нехай точка A — центр кола радіусом AC , а точка E — точка перетину кола зі стороною AB .

Тобто,

$$AE = AC = \sqrt{k-1};$$

$$EB = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

3. З рисунку видно, що $BH > BE$.

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} >$$

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - 1$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

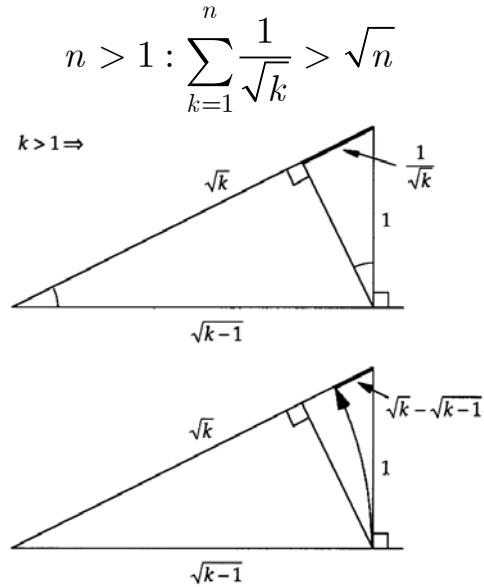


Рис. 7

Список літератури

- Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2006). *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington, D. C: Mathematical Association of America.
- Bogomolny, A. (1998). Proofs Without Words. Retrieved from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: <http://www.cut-the-knot.org/ctk/pww.shtml>
- Doyle, T., Whitman, Kutler, L., Miller, R., & Schueller, A. (2017). Proofs without words and beyond. Retrieved from <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond>
- Isaacs, R. (1975). Two mathematical papers without words. *Mathematics Magazine*, 48(4), 198.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.
- USAMTS Proofs without words. (n. d.). Retrieved from http://www.usamts.org/About/U_Gallery.php
- Zhoubi Suanjing. (n. d.). In *Wikipedia*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Zhou_Bi_Suan_Jing

ДО ПИТАННЯ ІНТЕГРОВНОСТІ У КВАДРАТУРАХ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА МОДИФІКОВАНОЇ ЗАДАЧІ ДІДОНИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Відома ізопериметрична варіаційна задача Дідони (Калайда, 1999) із задачі на умовний екстремум інтегрального функціонала перетворена в задачу на безумовний екстремум функціонала (Калайда, 2014).

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, F(x, y, y') = \kappa(x)y + \sqrt{1 + y'^2}, \quad (1)$$

рівняння Ейлера для інтегранта якого має вигляд

$$\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \kappa(x), \quad (2)$$

тобто рівняння кривої, що має задану кривизну $k(x)$ (при розв'язуванні задачі Дідони, замість рівняння Ейлера, користувались його першим інтегралом

$$F(y, y') - y'F'_{y'}(y, y') = C, \forall C, \quad (3)$$

а тому цього не помітили). Звідси слідує елементарно простий спосіб розв'язування задачі Дідони: при $\kappa(x) = \kappa_0 = \text{const}$ розв'язком задачі є крива сталої кривизни, тобто коло заданої довжини.

При $x \mapsto \kappa(x)$ розв'язок задачі в квадратурах добуто в статті (Калайда, 2014):

$$y - C_1 = \int \frac{(\phi(x) - C)dx}{\sqrt{1 - (\phi(x) - C)^2}}, \phi(x) = \int \kappa(x)dx, \forall C, C_1.$$

Принагідно відмітимо, що рівняння Ейлера екстремалей інтегрального функціонала одночасно являється рівнянням Ейлера множини функціоналів, підінтегральні вирази яких відрізняються повними диференціалами певних функцій $\psi(\dots)$ (про це в літературі з варіаційного числення частково відмічено в Калайда (1999)). Зрозуміло, для спрощення такі диференціали доречно вилучати.

Тут наводиться розв'язок задачі для функціонала виду (1) при умові, що кривизна шуканої функції y є задана функція $y \mapsto \kappa(y)$. У цьому випадку відповідне рівняння Ейлера має перший інтеграл виду (3), так що маємо рівняння

$$\kappa(y)y + \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C, \forall C \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1 - (C - y\kappa(y))^2}}{C - y\kappa(y)},$$

звідки випливає рівність

$$x - C_1 = \int \frac{(C - y\kappa(y))dy}{\sqrt{1 - (C - y\kappa(y))^2}}, \forall C, C_1.$$

Легко переконатись, що при $\kappa(y) = \kappa_0 = \text{const}$ з цієї рівності теж матимемо рівняння кола кривизни κ_0 (коло радіуса $R = 1 / \kappa_0$).

Зауважимо, що перший інтеграл (3) напевне угадано, а потім доведено перевіркою диференціюванням. З методичної точки зору це не зовсім коректно. Наведемо просте логічне його доведення. Для цього запишемо функціонал

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b F(y, y') dx$$

з інтегрантом $F(y, y')$ у вигляді функціоналу

$$x \mapsto M(x) = \int_a^b F(y, 1/x') x' dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B \Phi(y, x') dy, \Phi(y, x') = x' F(y, 1/x').$$

відносно оберненої функції $y \mapsto x(y)$.

Як бачимо, інтегрант цього функціоналу не залежить явно від шуканої функції x , а тому рівняння Ейлера для нього має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \Phi'_{x'}(y, x') = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dy} (F(y, 1/x') + x' F'_{1/x'}(y, 1/x') (1/x')'_{x'}) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y') = C, \forall C, \end{aligned}$$

тобто дістали перший інтеграл (3).

З рівності (3) та відповідного рівняння Ейлера

$$F'_y(y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(y, y') = 0 \Rightarrow \int F'_y(y, y') dx - F'_{y'}(y, y') = C, \forall C$$

з тим же інтегрантом $F(y, y')$ слідує рівність (на екстремалях функціоналу з даним інтегрантом)

$$\int F'_y(y, y') dx = F(y, y') / y'.$$

Принагідно зауважимо, що при переході від прямої функції до її оберненої вираз для диференціала довжини дуги $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \Rightarrow \sqrt{1 + x'^2} dy$ та вираз (2) для кривизни кривої $y = f(x)$ співпадає (з точністю до знаку) з виразом для кривизни кривої $x = g(y) = f^{-1}(y)$ ($\kappa_g = \frac{-x''}{\sqrt{(1 + x'^2)^3}}$).

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (1999). *Варіаційне числення*. Київ: ВЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2014). Деякі узагальнення та модифікації задачі Дідони. У кн. *Матеріали Третьої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 166). Київ: НТУУ «КПІ». matan.kpi.ua/uk/mvstu3.html

ПОБУДОВА РАЦІОНАЛЬНИХ КОЛОКАНТ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ МНОГОЧЛЕНІВ С. БЕРНШТЕЙНА

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудову раціональних колокант традиційно здійснюють безпосередньо у вигляді частки алгебричних многочленів з невідомими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів з умов колокації (Калайда, 2000). Цей метод найменш економний. Удвічі економнішим являється метод побудови згаданих колокант у вигляді частки многочленів Лагранжа (Калайда, 2000; 2015а; 2015б). Тут розглядається побудова раціональних колокант у вигляді частки многочленів С. Бернштейна. У результаті утворюється раціональна колоканта, еквівалентна за кількістю колокацій многочленові Лагранжа і, зокрема, многочленові Маркова — Ерміта.

Для побудови згаданих раціональних колокант типу Лагранжа розглянемо раціональну функцію (з параметрами a_j)

$$x \mapsto R_n(x; f; a) = \frac{B_n(x; f; a)}{B_n(x; 1; a)}, x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$B_n(x; f) = \sum_{j=0}^n b_{n,j}(x) f_j, b_{n,j}(x) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j},$$
$$B_n(x; f; a) = \sum_{j=1}^{n-1} b_{n,j}(x) f_j a_j + b_{n,0}(x) f_0 + b_{n,n}(x) f_n.$$

Зауважимо, що, як і многочлени С. Бернштейна

$$B_n(0; f) = f_0, B_n(1; f) = f_n,$$

функція (1) теж має цю властивість

$$R_n(0; f; a) = f_0, R_n(1; f; a) = f_n.$$

Зафіксувавши в (1) змінну x в $n-1$ вузлових точках $\bar{x}_i$ (і, зокрема, при $n > 2$ і в точках x_i) та прирівнявши результат до значень $\bar{f}_i$ у цих вузлах апроксимованої функції f , дістанемо лінійну відносно шуканих значень параметрів a_j систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{n,j,i}(\bar{f}_i - f_j) a_j = b_{n,0,i}(f_0 - \bar{f}_i) + b_{n,n,i}(f_n - \bar{f}_i), i = \overline{1, n-1} \quad (2)$$

(при $n = 2$ та $\bar{x}_1 = x_1 = 0,5$ система (2) вироджена; при $n = 1$ многочлен С. Бернштейна є многочлен Лагранжа, тому цей випадок тут не розглядається).

Підставивши розв'язок системи (2) в (1), матимемо раціональний за порядком точності аналог многочлена Лагранжа з $n + 1$ вузлами, так що

$$r(x) = f(x) - R_n(x; f; a) = \frac{x(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - 1)r^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}, c \in (0, 1)$$

(доводиться так само, як і у випадку многочлена Лагранжа).

Для побудови раціональної колоканти типу Маркова — Ерміта розглянемо раціональну функцію виду (1)

$$x \mapsto \tilde{R}_n(x; f; a, b) = \frac{(1 - x)^n a f_0 + x^n b f_n + Q_n(x; f)}{(1 - x)^n a + x^n b + Q_n(x; 1)}, n \geq 2, \quad (2)$$

$$Q_n(x; f) = B_n(x; f) - (1 - x)^n f_0 - x^n f_n,$$

з невідомими a, b (при $n = 1$ слід вводити одну з цих невідомих). Як і функція (1), функція (2) являється колокантою функції f з простими вузлами x_0, x_n . Тому можна поставити задачу про побудову колоканти (2) (з рахунок параметрів a, b) з кратними вузлами x_0, x_n . Покажемо, що при умові $f'_0 \neq 0, f'_n \neq 0$ така колоканта існує.

Дійсно, з системи рівнянь (відносно невідомих a, b)

$$\tilde{R}'(0; f; a, b) = f'_0, \quad \tilde{R}'(1; f; a, b) = f'_n$$

дістаємо явні рівності

$$a = n(f_1 - f_0) / f'_0, b = n(f_n - f_{n-1}) / f'_n.$$

Підставивши це в (2), остаточно матимемо раціональну колоканту

$$\tilde{R}_n(x; f; a, b) = \frac{(1 - x)^n f'_n f_0 (f_1 - f_0) + x^n f'_0 f_n (f_n - f_{n-1}) + f'_0 f'_n Q_n(x; f)}{(1 - x)^n f'_n (f_1 - f_0) + x^n f'_0 (f_n - f_{n-1}) + f'_0 f'_n Q_n(x; 1)}$$

з похибкою апроксимації

$$\tilde{r}(x) = x^2(x - 1)^2 \tilde{r}^{IV}(\xi) / 4!, \xi \in (0, 1)$$

(доводиться так само, як і у випадку многочлена Маркова — Ерміта).

При $n = 1$ за допомогою раціональної колоканти виду (1) з одним параметром дістанемо колоканти (при $f_1 \neq f_0$) з одним двократним вузлом $x_0 \vee x_1$:

$$\tilde{R}_1(x) = ((1 - x)f_0(f_1 - f_0) + x f'_0 f_1) / ((1 - x)(f_1 - f_0) + x f'_0),$$

$$\tilde{R}_1(x) = ((1 - x)f_0 f'_1) + x f_1 (f_1 - f_0) / ((1 - x)f'_1 + x(f_1 - f_0)).$$

Зауважимо, що похибки апроксимації функції f колокантами виду (1), (2) наведено при умові, що графіки апроксимованої функції та її колоканти не перетинаються (не дотикаються), крім вузових, ще в якихось точках, бо тоді порядок мализни похибки збільшиться на кількість таких перетинів (дотиків) (Калайда, 2000).

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2015а). Про побудову повних раціональних колокант функцій. У кн. *Матеріали XVI Міжнародної наукової конференція імені академіка М. Кравчука*. (Ч. 2; с. 116). Київ: НТУУ «КПІ».
- Калайда, О. Ф. (2015б). Побудова симетричних двосторонніх раціональних колокант з двократними вузлами. У кн. *Матеріали XVI Міжнародної наукової конференція імені академіка М. Кравчука*. (Ч. 2; с. 114—115). Київ: НТУУ «КПІ».

ПРО ГЛАДКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ СПЛАЙНІВ З ДОДАТКОВИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

У літературі звернено увагу здебільше на лінійні неперервні сплайни

$$S(x) = L_1(x; f; x_{i-1}, x_i), x \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], x_i - x_{i-1} = h_i, \quad (1)$$

де $L_1(x; f; x_{i-1}, x_i)$ — лінійний многочлен Лагранжа апроксимованої функції f за вузлами x_{i-1}, x_i . Його ліва та права похідні у точках x_i , зрозуміло, не рівні між собою, оскільки

$$S'(x_i - 0) = (f_i - f_{i-1}) / h_i, S'(x_i + 0) = (f_{i+1} - f_i) / h_{i+1}.$$

При $h_i = h$ стрибок сплайна (1) є

$$S'(x_i + 0) - S'(x_i - 0) = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) / h_i = O(hf_i''),$$

тобто сплайн диференційовний з точністю $O(hf_i'')$. Слід сподіватись, що неперервні сплайни з многочленів Лагранжа $L_n(x; f)$, тобто сплайни виду (1)

$$\hat{S}_n(x) = L_n(x; f; x_{i-1}, x_i), x \in \Delta_i, \quad (2)$$

з додатковими $n - 1$ внутрішніми вузлами $c_{ij} \in \Delta_i$ при $h_i = h$ являтимуться ще більш диференційними. Справді, оскільки (Калайда, 2000)

$$L_n(x) = L_n(x_i) + L_n'(x_i)(x - x_i) + \dots + L_n^{(n)}(x_i)(x - x_i)^n / n!$$

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+1-k)}(c)}{(n+1-k)!} O(h^{n+1-k}), c \in \Delta \quad (3)$$

то маємо рівності

$$\begin{aligned} \delta^{(k)}(x) &= f^{(k)}(x) - \hat{S}_n^{(k)}(x) = \\ &= \begin{cases} f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x; f; x_{i-1}, x_i) = O(h_i^{n+1-k}), x \in \Delta_i, k = \overline{1, n}, \\ f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x; f; x_i, x_{i+1}) = O(h_{i+1}^{n+1-k}), x \in \Delta_{i+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} S_n^{(k)}(x_i + 0) - S_n^{(k)}(x_i - 0) &= \\ &= \delta^{(k)}(x_i + 0) - \delta^{(k)}(x_i - 0) = O(h_{i+1}^{n+1-k}) - O(h_i^{n+1-k}). \end{aligned}$$

Такі ж властивості мають сплайни, побудовані за допомогою повних раціональних функцій у вигляді частки двох многочленів Лагранжа з параметрами, визначуваними з умов колокації в додаткових (проміжних між основними) простих вузлах, оскільки для таких колокант теж чинна рівність виду (3).

Неперервними сплайнами являються також сплайни виду (2) із многочленів С. Бернштейна. Але, оскільки для цих многочленів рівність виду (3) чинна лише при $n = 1$, $k = 1$, то високого ступеня гладкості від таких сплайнів очікувати не доводиться. У цьому легко переконатись хоча б при $n = 2$ та порівняти з $n = 2$.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

ТИПОВІ ПОМИЛКИ СТУДЕНТІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»

В. Камінчук, І. В. Вигоднер

Херсонський національний технічний університет, Херсон, Україна

inna.vygodner@rambler.ru

Вступ. Студенти вищих технічних закладів повинні добре володіти математичним апаратом, оскільки багато понять лінійної алгебри та математичного аналізу знаходять своє застосування в економічних та технічних науках. Але рівень математичної підготовки випускників середніх шкіл та, як наслідок, студентів вишів, спадає рік від року.

Метою публікації є аналіз найпоширеніших помилок під час вивчення однієї з ключових тем вищої математики — «Числові ряди» та внесення методичних рекомендацій з метою запобігання цих помилок.

Основна частина. У темі «Числові ряди» основним питанням є питання збіжності ряду. Необхідно привчати студентів підходити до цієї проблеми раціонально. Зокрема, починаючи дослідження ряду, відразу застосовують ту чи іншу ознаку, не перевіряючи попередньо, чи виконується необхідна ознака збіжності.

Приклад 1. Дослідити на збіжність знакододатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$. Більшість студентів досліджують цей ряд за ознакою Д'Аламбера, яка не дає відповіді на запитання, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Невелика кількість студентів застосовує інтегральну ознаку Коші, яка дає можливість знайти відповідь, але обчислення невластивого інтегралу викликає безліч запитань та помилок і в непогано підготовлених студентів. Тому необхідно переконати студентів у доцільності починати дослідження будь-якого ряду з перевірки необхідної ознаки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Як бачимо, необхідна ознака не виконується, тобто ряд розбігається.

У зв'язку з попереднім прикладом хочеться застерегти ще від однієї досить поширеної помилки, коли необхідна ознака збіжності ряду вважається достатньою.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3(n-1)}$.

Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(n-1)} = 0.$$

Ознака виконується, але дослідимо цей ряд за допомогою граничної ознаки порівняння. У якості еталонного ряду візьмемо гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3(n-1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n-1)} = \frac{1}{3} \neq 0, \neq \infty.$$

Як бачимо, за граничною ознакою ряд розбігається. Необхідна умова, оскільки вона не є достатньою, не завжди відповідає на поставлене запитання, і цей факт необхідно доносити до студентів.

На основі власного практичного досвіду вважаємо, що ознака Д'Аламбера застосовується студентами частіше за інші. Як відомо, за цією ознакою, необхідно обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, але не всі учні вміють правильно виписати елемент u_{n+1} .

Приклад 3. При дослідженні на збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

можна спостерігати такий запис: $u_n = \frac{1}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n!+1}$. Це не вірно, оскільки при утворенні елемента u_{n+1} треба в u_n всі n замінити на $n+1$. Правильний розв'язок виглядає так:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n!}, u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Ряд збігається, оскільки знайдена границя менша за одиницю.

При застосуванні ознаки д'Аламбера, певні труднощі виникають унаслідок недостатності сформованих навичок обчислення границь.

Приклад 4. При дослідженні ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ наводився такий

розв'язок:

$$u_n = \frac{n^n}{(2n)!}, u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!n^n}$$

Багато студентів на цьому моменті зупиняються, оскільки не можуть обчислити одержану границю. Доведемо розв'язок до кінця:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+1)(2n+2)(2n)!n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{2(2n+1)(n+1)n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{2(2n+1)} = 0. \end{aligned}$$

Ряд збігається, оскільки знайдена границя менша за одиницю.

Велику кількість помилок студенти допускають при використанні інтегральної ознаки Коші. Це викликано недостатнім рівнем підготовки з тем «Невизначені інтеграли» і «Визначені та невластні інтеграли».

Приклад 5. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$ на збіжність.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$ при значеннях аргументу $x = 2, 3, 4, \dots$. Необхідно звернути увагу, що значення $x = 1$ розглядати неможливо, оскільки $\ln 1 = 0$. Легко перевірити, що при x більше за 1 $f(x)$ неперервна, додатна та монотонно спадає. Візьмемо нижню границю невластного інтегралу $a = 2$ та обчислимо його:

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_2^b = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln^{-2} b - \ln^{-2} 2) = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln^2 b} - \frac{1}{\ln^2 2} \right).\end{aligned}$$

Оскільки вираз $\frac{1}{\ln^2 b} \rightarrow 0$,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \frac{1}{2 \ln^2 2}.$$

Відповідно, інтеграл збігається, та, як слідство, збігається і заданий числовий ряд.

Висновки. Враховуючи важливість теми «Числові ряди», вважаємо доцільним попереднє виконання завдань пропедевтичного характеру. До їх складу рекомендуємо включати завдання з розділів, які вивчалися раніше: «Обчислення границь», «Обчислення інтегралів» тощо. Завдання, запропоновані безпосередньо на дослідження рядів, повинні розглядатися від зовсім простих до більш складних та мати різноманітний характер. Доцільно пропонувати студентам досліджувати один ряд за різними ознаками, тим самим дати їм можливість самостійно зробити висновки щодо раціонального підходу та пошуку правильного розв'язку.

Список літератури

Бугров, Я. С., Никольский, С. М. (2003). *Высшая математика* (Ч. 2). Москва: Дрофа, 2003.
Дубовик, В. П., Юрик, І. І. (2001). *Вища математика*. Київ: А. С. К.

ДО ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ (ЛДС)

О. О. Кільчинський¹, Т. В. Крижановська², Т. М. Семененко²

¹Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна

²Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна
aa.kil@i.ua

Питання проходження випадкового процесу через ЛДС досліджені давно і досить ґрунтовно, але у сучасних умовах вивчення математичних дисциплін у пришвидшеному темпі вони потребують відповідних методів їх викладення на достатньо високому теоретичному і зрозумілому для студентів вищого технічного закладу рівні. Просте копіювання розгорнутих досліджень, що застосовані в роботах Вентцель, Овчаров (1991), Гихман, Скороход, Ядренко (1988) в умовах часових обмежень лекційного викладення видається нереальним. Нижче пропонується наступна схема викладення цих питань на спрощеному, але (як ми надіємось) допустимо строгому доказовому рівні.

Динамічною системою (ДС) називається всякий пристрій, що має «вхід», тобто місце, куди надходить збурення — випадковий процес $\xi(t)$ — та «вихід», тобто місце, де формується відгук, або реакція ДС на це збурення — випадковий процес $\eta(t)$. Закон перетворення, правило A , за яким в результаті роботи ДС вхідне збурення $\xi(t)$ перетворюється в реакцію $\eta(t)$ на виході системи, називається оператором ДС. ДС, оператор якої є лінійним, називається лінійною динамічною системою (ЛДС).

Нехай робота ЛДС, що перетворює випадковий процес $\xi(t)$ у випадковий процес $\eta(t)$, визначається диференціальним рівнянням

$$A_n \left(\frac{d}{dt} \right) \eta(t) = B_m \left(\frac{d}{dt} \right) \xi(t), \quad (1)$$

де $A_n \left(\frac{d}{dt} \right)$ та $B_m \left(\frac{d}{dt} \right)$ — лінійні оператори зі сталими (дійсними) коефіцієнтами:

$$A_n \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{d}{dt} \right)^k, \quad B_m \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{k=0}^m b_k \left(\frac{d}{dt} \right)^k.$$

Виходячи зі співвідношення (1), розгляньмо допоміжний випадковий процес $\zeta(t)$ за формулою:

$$\zeta(t) = A_n \left(\frac{d}{dt} \right) \eta(t) = B_m \left(\frac{d}{dt} \right) \xi(t).$$

Знаходячи математичне сподівання $m_\zeta(t)$ і кореляційну функцію $K_\zeta(t_1, t_2)$ процесу $\zeta(t)$ і застосовуючи відому властивість комутативності оператора M (оператора осереднення по ймовірності) з оператором L (оператором лінійного перетворення), зі співвідношення (1) отримаємо:

$$\begin{cases} A_n \left(\frac{d}{dt} \right) m_\eta(t) = B_m \left(\frac{d}{dt} \right) m_\xi(t), \\ A_n \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) K_\eta(t_1, t_2) = B_m \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right) B_m \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) K_\xi(t_1, t_2). \end{cases} \quad (2)$$

Формули (2) встановлюють диференціальний зв'язок між характеристиками вхідного і вихідного випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$.

Прийmemo, що на вхід ЛДС (1) надходить стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з характеристиками

$$m_\xi(t) = m_\xi = \text{const}, \quad K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau), \quad (\tau = t_2 - t_1). \quad (3)$$

Знайдемо характеристики реакції $\eta(t)$ на виході системи при умові, що ЛДС є стаціонарною, тобто працює в усталеному режимі, при якому випадковий процес $\eta(t)$ також є стаціонарним. Розшукуючи характеристики реакції (як і для всякого стаціонарного процесу) у вигляді

$$m_\eta(t) = m_\eta = \text{const}, \quad K_\eta(t_1, t_2) = K_\eta(\tau), \quad (\tau = t_2 - t_1), \quad (4)$$

зі співвідношень (2) виводимо:

$$\begin{cases} a_0 m_\eta = b_0 m_\xi, \\ A_n \left(-\frac{d}{d\tau} \right) A_n \left(\frac{d}{d\tau} \right) K_\eta(\tau) = B_m \left(-\frac{d}{d\tau} \right) B_m \left(\frac{d}{d\tau} \right) K_\xi(\tau). \end{cases} \quad (5)$$

Застосовуючи у другому зі співвідношень (5) перетворення Фур'є (згідно з властивостями лінійності та диференціювання функції-оригіналу), отримаємо:

$$A_n(-i\omega) A_n(i\omega) \dot{S}_\eta(\omega) = B_m(-i\omega) B_m(i\omega) \dot{S}_\xi(\omega). \quad (6)$$

Тут $\dot{S}_\xi(\omega), \dot{S}_\eta(\omega)$ — спектральні характеристики процесів $\xi(t), \eta(t)$:

$$\dot{S}_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \dot{S}_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\eta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (7)$$

Ураховуючи, що

$$A_n(-i\omega) = \overline{A_n(i\omega)}, \quad B_m(-i\omega) = \overline{B_m(i\omega)}$$

і при $\forall z \Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2$, співвідношення (6) можна подати також у вигляді:

$$|A_n(i\omega)|^2 \dot{S}_\eta(\omega) = |B_m(i\omega)|^2 \dot{S}_\xi(\omega).$$

Звідси отримуємо відому формулу перетворення стаціонарної ЛДС з неперервним спектром:

$$\dot{S}_\eta(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 \dot{S}_\xi(\omega), \quad (8)$$

де через $\Phi(i\omega)$ позначено частотну характеристику динамічної системи (1):

$$\Phi(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \quad (9)$$

Виходячи зі співвідношень (5), (7), та формули обернення перетворення Фур'є, основні характеристики реакції $\eta(t)$ стаціонарної ЛДС (1) можна знайти за відомими характеристиками вхідного збурення $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} m_{\eta} &= \Phi(0)m_{\xi}, \quad K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{\eta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{\eta}(\omega) e^{i\omega|\tau|} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{\xi}(\omega) |\Phi(i\omega)|^2 e^{i\omega|\tau|} d\omega \end{aligned} \quad (10)$$

(вираз $\Phi(i\omega)$ дається рівністю (9)). Формули (10) дають потрібний розв'язок задачі про знаходження реакції стаціонарної ЛДС (1) на вхідне збурення $\xi(t)$.

Приклад. На вхід стаціонарної ЛДС, робота якої визначається рівнянням

$$\eta''(t) + 7\eta'(t) + 10\eta(t) = \xi'(t) - 3\xi(t),$$

надходить стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з характеристиками $m_{\xi} = 10$, $K_{\xi}(\tau) = 70e^{-3|\tau|}$. Знайти характеристики реакції $\eta(t)$ на виході при умові, що система працює в усталеному режимі.

Розв'язання. За формулою (9) знайдемо частотну характеристику і квадрат її модуля:

$$\begin{aligned} \Phi(i\omega) &= \frac{i\omega - 3}{(i\omega)^2 + 7i\omega + 10} = \frac{i\omega - 3}{10 - \omega^2 + 7i\omega}, \quad |\Phi(i\omega)|^2 = \frac{|i\omega - 3|^2}{|10 - \omega^2 + 7i\omega|^2} = \\ &= \frac{\omega^2 + 9}{(10 - \omega^2)^2 + 49\omega^2} = \frac{\omega^2 + 9}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100} = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)}. \end{aligned}$$

За формулою (10) знайдемо математичне сподівання

$$m_{\eta} = \Phi(0) \cdot m_{\xi} = \left. \frac{i\omega - 3}{10 - \omega^2 + 7i\omega} \right|_{\omega=0} \cdot 10 = -3.$$

За формулою (7) знайдемо спектральну щільність

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\eta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\eta}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 70e^{-3|\tau|} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = 2 \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} 70e^{-3\tau} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= 140 \operatorname{Re} \left. \frac{e^{-(3+i\omega)\tau}}{-(3+i\omega)} \right|_{\tau=0}^{\tau=+\infty} = 140 \operatorname{Re} \frac{1}{3+i\omega} = 140 \operatorname{Re} \frac{3-i\omega}{9+\omega^2} = \frac{420}{9+\omega^2}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення $|\Phi(i\omega)|^2$ та $\dot{S}_{\xi}(\omega)$ у формулу (8), отримаємо:

$$\dot{S}_{\eta}(\omega) = \frac{420}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)}.$$

Далі, застосовуючи обернення перетворення Фур'є, і враховуючи, що функція $K_{\eta}(\tau)$ є парною, згідно з формулою (10) знайдемо:

$$\begin{aligned}
 K_{\eta}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{\eta}(\omega) \cdot e^{i\omega|\tau|} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{420}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)} \cdot e^{i\omega|\tau|} d\omega = \\
 &= \frac{420}{2\pi} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{res}_{\omega=5i} \frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)} + \operatorname{res}_{\omega=2i} \frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)} \right] = \\
 &= 420i \left[\lim_{\omega \rightarrow 5i} \frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)} (\omega - 5i) + \lim_{\omega \rightarrow 2i} \frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 4)} (\omega - 2i) \right] = \\
 &= 420i \left[\frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega + 5i)(\omega^2 + 4)} \Big|_{\omega = 5i} + \frac{e^{i\omega|\tau|}}{(\omega^2 + 25)(\omega + 2i)} \Big|_{\omega = 2i} \right] = \\
 &= -2e^{-5|\tau|} + 5e^{-2|\tau|}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $m_{\eta} = -3$; $K_{\eta}(\tau) = 5e^{-2|\tau|} - 2e^{-5|\tau|}$.

Список літератури

- Вентцель, Е. С., Овчаров, Л. А. (1991). *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения*. Москва: Наука.
- Гихман, И. И., Скороход, А. В., Ядренко, М. И. (1988). *Теория вероятностей*. Киев: Выща школа.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕСТОВОЇ ФОРМИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Т. І. Клімова, Т. М. Сапронова

НУ «Одеська морська академія», Одеса, Україна

onma@yandex.ua

Зміни у сфері освіти, що відбулися останнім часом в НУ «ОМА» (скорочення курсу вищої математики з трьох до двох семестрів) призвели до протиріччя між наявністю розробленої теорії та методики використання тестів для оцінки якості знань і їх ефективним застосуванням у практиці викладання вищої математики.

Тестовий контроль — це оперативна перевірка якості засвоєння знань, негайне виправлення помилок і заповнення прогалин. Ця форма контролю допомагає викладачеві оперативно перевірити рівень формування уявлень і понять курсантів, визначити їхнє просування в навчанні. Використання тестів для перевірки знань підвищує її об'єктивність, дозволяє визначити рівень самостійної роботи. Це дуже важлива функція тестів, оскільки вона, дозволяє покращити ефективність навчального процесу в цілому. Тести дають можливість для виявлення рівня знань курсантів, деяких характеристик навчальної діяльності таких, як темп діяльності, зосередженість, ступінь розвиненості пам'яті, уваги, ставлення до справи. Отже, робота з тестами допомагає вивчати і враховувати особистісні особливості кожного курсанта і тим самим продуктивніше індивідуалізувати навчальний процес.

На кафедрі вищої математики НУ «ОМА» в організації навчального процесу для систематизації знань і контролю навчальної діяльності запроваджено комплекс навчальних тестів.

У цій статті для ознайомлення нами пропонуються тести з деяких розділів вищої математики. У них включено теоретичні питання та практичні завдання. Час проведення таких тестів 5—7 хвилин. Як правило, тестування проводиться після того, як розділ опрацьований. Так тести за темами «Елементи векторної алгебри» та «Елементи аналітичної геометрії. Площина» мають вигляд

Тест 2.1. Елементи векторної алгебри.

2.1. Векторним добутком двох векторів називається:

а) вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним трьома умовам:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка.

б) число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинуса кута, що утворюють ці вектори;

в) вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним трьома умовам:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — ліва трійка;

г) вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним трьома умовам:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка.

2.2. Серед формул для обчислення довжини вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ знайти правильні

а) $|\vec{a}| = \vec{a}^2$; б) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; в) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$; г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2 \cos \frac{\pi}{2}}$.

2.3. Об'єм піраміди, яка побудована на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$, дорівнює

а) $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|}{6}$; б) $\frac{|\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}|}{6}$; в) $\frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{6}$; г) $\frac{|\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})|}{6}$.

2.4. Якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ і кут між ними $\varphi = \frac{\pi}{6}$, то скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює

а) $3\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\sqrt{3}$.

2.5. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(4; 2; 0)$ та $\vec{b}(0; -1; 1)$, дорівнює

а) $6\sqrt{2}$; б) $6\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{6}$; г) 6 ; д) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Тест 3.1. Елементи аналітичної геометрії. Площина.

3.1. Рівнянням площини у відрізках на координатних осях називається

а) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

б) $Ax + By + Cz + D = 0$.

в) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

г) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

д) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.

3.2. Відстань від точки $A(1; 2; -1)$ до площини $2x + 3y + 6z = 0$ дорівнює

а) 7 ; б) $\frac{2}{49}$; в) 2 ; г) $\frac{2}{7}$.

3.3. Встановити відповідність між рівнянням площини та її розміщенням у просторі:

1) $3x + 2z + 5 = 0$;

2) $y - 3z - 8 = 0$;

3) $2x + 5y - 8 = 0$;

4) $-x + 4y - 2z = 0$;

- а) паралельна осі Ox ;
- б) паралельна осі Oy ;
- в) паралельна осі Oz ;
- г) проходить через початок координат.

3.4. Серед рівнянь вибрати те, що визначає площину

1) $x + 2y - 4 = 0$

2) $y^2 = 4x - 30$

3) $2x + 3y + 3z = 0$

- а) тільки 1) і 3); б) тільки 1); в) усі; г) тільки 3); д) жодної.

3.5. Записати, як знаходиться кут між двома площинами...

Нами розроблені також і такі тести, які містять тільки теоретичні питання. Ці тести бажано пропонувати курсантам на початку заняття для того, щоб перевірити, наскільки ретельно опрацьована лекція з тієї або іншої теми.

Таким чином, виконання курсантами тестових завдань і наступний їх аналіз викладачем сприяє творчому зростанню педагога, оскільки вимагає від нього пошуку нових підходів у навчанні особливо в індивідуальній роботі. І найголовніше — тестування дозволяє в режимі лімітованого часу невеликими «порціями» перевіряти знання з досить великих розділів вищої математики.

Список літератури

- Варварецька, Г. А., Клімова, Т. І., Сапронова, Т. М. (2011). Застосування порівняльних таблиць на практичних заняттях з вищої математики. У кн. *Методы совершенствования фундаментального образования в школах и вузах: Материалы XVI международной научно-методической конференции, Севастополь, 19—23 сентября 2011 г.* (с. 38—42). Севастополь.
- Варварецька, Г. А., Клімова, Т. І., Сапронова Т. М. (2015). Запровадження методів активного навчання шляхом використання опорного конспекту, порівняльних таблиць, тестів у процесі викладання вищої математики. *Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць*, 1, 114—123. Одержано з mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_12a.pdf

ОБ ОДНОМ УНИВЕРСАЛЬНОМ МЕТОДЕ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Т. В. Коваль, Е. И. Олефир

Южноукраинский национальный педагогический университет

имени К. Д. Ушинского, Одесса, Украина

l.olefir@i.ua, tatjana.koval21@yandex.ru

В настоящее время для решения задач линейной алгебры, связанных с вычислениями (решение систем уравнений, обращение матриц, нахождение матриц, нахождение рангов базисов и т. д.) существует много различных методов. Каждый из этих методов позволяет решить определенную задачу, например, вычислить определитель или для заданной матрицы найти обратную матрицу, или привести квадратную форму к каноническому виду.

Поэтому интерес представляет один универсальный метод, обладающий очень простой и четкой вычислительной схемой, который позволяет

- 1) для системы векторов: находить ранг и базис, исследовать на линейную зависимость, дополнять линейно независимые системы до базиса пространства;
- 2) для системы линейных уравнений: решать и исследовать системы, находить фундаментальную систему решений однородной системы;
- 3) для матриц: находить ранг матрицы, строчный и столбцовый ранги, находить обратную матрицу и собственные векторы;
- 4) вычислять определители;
- 5) приводить квадратичную форму к каноническому виду;
- 6) использовать при доказательстве теорем линейной алгебры.

Подробное описание, теоретическое обоснование и практическое применение метода можно найти в методической работе Швеца (1999), а также (частично) в учебнике Гурский (1982) под названием «жордановы исключения».

Универсальность и простота метода делает его чрезвычайно полезным при изучении линейной алгебры. Однако, как показало проведенное нами исследование, на практике этот метод бывает часто незаслуженно забытым

Метод жордановых исключений (описание). Пусть

$$S_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} x_i \quad (1)$$

— система векторов n -мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем P , $x_i \in \mathcal{L}$; $\alpha_i \in P, k = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$.

Тогда матрица системы (1)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{ki} & \dots & \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mi} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Составим таблицу

	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y_1	α_{11}	$\dots$	α_{1i}	$\dots$	α_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_k	α_{k1}	$\dots$	α_{ki}	$\dots$	α_{kn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	α_{m1}	$\dots$	α_{mi}	$\dots$	α_{mn}

Идея метода жордановых исключений состоит в следующем. Выбираем α_{ki} такие, чтобы $\alpha_{ki} \neq 0$. Тогда в системе (1) из k -го уравнения можно выразить x_i через $x_1, \dots, x_{i-1}, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n$. Подставим выражение для x_i в остальные равенства системы (1), получим новую систему, для которой таблица будет иметь вид:

	x_1	$\dots$	x_{i-1}	y_k	x_{i+1}	$\dots$	x_n
y_1	β_{11}	$\dots$	$\dots$	β_{1i}	$\dots$	$\dots$	β_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_{k-1}	$\beta_{k-1,1}$	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k-1,i}$	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k-1,n}$
x_i	β_{k1}	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k,i}$	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k,n}$
y_{k+1}	$\beta_{k+1,1}$	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k+1,i}$	$\dots$	$\dots$	$\beta_{k+1,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	β_{m1}	$\dots$	$\dots$	β_{mi}	$\dots$	$\dots$	β_{mn}

Такое преобразование называется операцией замещения y_k на x_i и обозначается (y_k, x_i) .

При этом элемент α_{ki} называется ведущим элементом, а строка и столбец, на пересечении которых находится α_{ki} , называется соответственно ведущими строкой и столбцом.

Тогда для определения $\beta_{k,i}$ справедливо следующее правило.

1. Ведущий элемент заменяется на обратный, т. е.

$$\beta_{ki} = \frac{1}{\alpha_{ki}}.$$

2. Все остальные элементы ведущего столбца делятся на α_{ki} , т. е., например,

$$\beta_{1i} = \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ki}}.$$

3. Все остальные элементы ведущей строки меняют знак и делятся на α_{ki} , например,

$$\beta_{k1} = -\frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{ki}};$$

4. Все элементы, не принадлежащие ведущей строке или ведущему столбцу, вычисляются по правилу:

Преобразуемый элемент α_{rj} «проектируется» на ведущую строку и столбец, затем находится разность между произведением $\alpha_{rj}\alpha_{ki}$ и произведением проекций, которое делится на α_{ki} , т. е.

$$\beta_{rj} = (\alpha_{rj} \cdot \alpha_{ki} - \alpha_{ri} \cdot \alpha_{kj}) : \alpha_{ki}.$$

Например, в таблице

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	1	2	-1	3
y_2	2	1	4	-1
y_3	1	-2	3	-2

выполним операцию замещения (y_2, x_3)

	x_1	x_2	y_2	x_4
y_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$

Рассмотрим примеры решения различных задач линейной алгебры методом жордановых исключений Теоретическое обоснование возможности применения метода жордановых исключений для каждой из рассмотренных ниже задач представлено в работах Швец (1977) и Гурский (1982).

Пример 1. Проверить линейную независимость векторов

$a_1 (1, 1, 3, -1, 2),$

$a_2 (2, -1, 0, -3, 1),$

$a_3 (-3, 1, 1, 2, -2)$ и дополнить их до базиса пространства R^5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	3	-1	2
y_2	2	-1	0	-3	1
y_3	-3	1	1	2	-2

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	-1	-3	1	-2
y_2	2	-3	-6	-1	-3
y_3	-3	4	10	-1	-4

	y_1	x_2	x_3	y_2	x_5
x_1	3	-4	-9	-1	-5
x_4	2	-3	-6	1	-3
y_3	-5	7	16	1	-1

	y_1	x_2	x_3	y_2	y_3
x_1	28	-39	-89	-6	-5
x_4	7	-24	-54	-2	3
x_5	-5	7	16	1	1

Заданные строки линейно независимы (они все перебрасываются вверх), поэтому векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и $(y_1, x_2, x_3, y_2, y_3)$ — базис $\mathcal{L}$, откуда $(a_1, e_2, e_3, a_2, a_3)$ — базис R^5 .

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	-1	1	-1	1
y_2	0	2	1	-1
y_3	1	0	0	1
y_4	-1	1	0	0

	x_1	y_1	x_3	x_4
x_2	1	1	1	-1
y_2	2	2	3	-3
y_3	1	0	0	1
y_4	0	1	1	-1

	x_1	y_1	x_3	y_3
x_2	2	2	3	-1
y_2	5	2	3	-3
x_4	-1	0	0	1
y_4	1	1	1	-1

	x_1	y_1	y_4	y_3
x_2	-1	-1	1	2
y_2	2	-1	3	0
x_4	-1	0	0	1
x_3	-1	-1	1	1

Ранг матрицы A равен 4, поскольку последняя операция замещения (y_2, x_1) осуществима ($\beta_{21} \neq 0$).

Пример 4. Обращение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3
y_1	1	0	1
y_2	2	-1	2
y_3	-1	2	2

	y_1	x_2	x_3
x_1	1	0	-1
y_2	2	-1	0
y_3	-1	2	3

	y_1	y_2	x_3
x_1	1	0	-1
x_2	2	-1	0
y_3	3	-2	3

	y_1	y_2	y_3
x_1		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	2	-1	0
	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3
0	1	-3	1
0	1	1	-1
0	1	1	1

	0	x_2	x_3
x_1	1	3	-1
0	1	4	-2
0	1	4	0

	0	x_3
x_1	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	1	2

	0
x_1	$\frac{1}{4}$
x_2	0
x_3	$-\frac{1}{2}$

Получим $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Примеры вычисления определителей, нахождения собственных значений матриц и преобразования квадратичных форм к каноническому виду методом жордановых исключений можно найти в (Швец, 1977).

Список литературы

- Гурский, Е. И. (1982). *Основы линейной алгебры и аналитической геометрии*. Минск: Высшая школа.
- Швец, М. Н. (1977). *Метод Штифеля в линейной алгебре*. Одесса: ОГУ.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ» СТУДЕНТАМ ГУМАНІТАРНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

О. І. Новицька

Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,

Миколаїв, Україна

olga-noviskaya@mail.ru

Зв'язок гуманітарних дисциплін та математики в останні роки стає все більш тісним та багатоплановим, саме тому зростає попит на використання математичних методів для опису та аналізу тих явищ, якими займаються нематематичні дисципліни. Вивчення математики майбутніми спеціалістами, а також застосування ними сучасних математичних методів та понять сприяє більш успішному формуванню у студентів професійної компетентності, вмінню використовувати міжпредметні зв'язки, розвитку критичного та логічного мислення. Далеко не останнє та важливе місце відіграє в цьому дисципліна «Числові системи», найголовніші теми якої входять до базового курсу «Основи вищої математики», що вивчається студентами гуманітарних спеціальностей протягом усього навчання у вищому навчальному закладі. У даний курс включено тільки ті розділи математики, які необхідні для розвитку загальної культури мислення та для роботи у професійній галузі, тільки ті поняття і методи, які студент зможе зрозуміти і практично освоїти впродовж періоду навчання настільки, щоб уміти використовувати їх на практиці.

Отримуючи спеціальність на гуманітарних факультетах, студенти поступово оволодівають ключовими компетенціями, спрямованими на перетворення особистості студента у справжнього професіонала. В останні роки сукупність видів професійних компетенцій постійно розширюється, що обумовлено особливостями освітньої підготовки у вищих навчальних закладах, запровадженням нових навчальних програм. У цьому процесі важливу роль посідає саме математична компетентність — особистісна якість, заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, що свідчать про готовність і здатність здійснювати математичну діяльність.

Можна виділити такі математичні компетенції, на розвиток яких спрямований курс «Основи вищої математики»:

- 1) студенти повинні знати основні поняття та методи елементарної математики, геометрії, алгебри і початків математичного аналізу;
- 2) уміти виконувати дії з числами;
- 3) будувати логічні зв'язки;
- 4) використовувати основні алгебраїчні тотожності для перетворення алгебраїчних виразів;
- 5) виконувати геометричні побудови;
- 6) доводити математичні твердження;
- 7) диференціювати та інтегрувати функції.

Числа вивчаються у школі і є основоположною темою всієї шкільної математики, а аксіоматична побудова теорії числових систем є найважливішою частиною фундаменту всієї математики. Отже, доцільно починати вивчення курсу «Основи вищої математики» саме з основоположних тем та розділів дисципліни «Числові системи», які розвивають у студентів більшість з вищезазначених базових компетенцій, а саме:

1. Елементи теорії множин.

2. Алгебраїчні операції, їх властивості, алгебри, види алгебр, алгебраїчні системи.

3. Відношення, основні види відношення.

4. Сучасні аксіоматичні методи.

Основною метою викладання даних тем та розділів дисципліни є:

1) ознайомлення студентів з основними аксіоматичними побудовами теорії числових систем;

2) оволодіння основними методами дослідження числових множин;

3) ознайомлення з основами наукового підходу до розв'язання проблем з використанням числових систем;

4) формування у студентів наукового світогляду, чітких уявлень про місце сучасних числових систем у загальній системі математичних знань, необхідних майбутнім спеціалістам для розуміння цілей і завдань використання апарату числових систем у різноманітних галузях математичної науки;

5) розкриття ролі дисципліни «Числові системи» в сучасному розвитку освіти, науки і техніки.

Отже, можна зробити висновок, що дана дисципліна сприяє формуванню не тільки наукового уявлення про числові системи, а й формуванню професійної та математичної компетентності в цілому, озброює майбутнього спеціаліста методологією наукового пізнання, формує вміння проводити логічно обґрунтовані міркування.

Список літератури

Вивальнюк, Л. М., Григоренко, В. К., Левіщенко, С. С. (1988). *Числові системи*. Київ: Вища школа.

Кудрявцев, Л. Д. (1977). *Мысли о современной математике и ее изучении*. Москва: Наука.

Суходольский, Г. В. (2001). *Лекции по высшей математике для гуманитариев*. Харьков: Гуманитарный Центр.

ПРО ВИКЛАДАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

О. В. Островська¹, І. І. Юрик²

¹НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
Київ, Україна

²Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
olyushka.ostrovska@gmail.com, i.yu@ukr.net

Існує багато способів викладати поняття визначеного інтеграла, але найбільш популярними є два з них. У першому випадку визначають визначений інтеграл, як границю інтегральної суми (Дубовик, Юрик, 2013; Пискунов, 1985), а потім виводять формулу Ньютона — Лейбніца. У другому випадку визначений інтеграл визначають як різницю первісних, а потім доводять, що ця різниця є границею інтегральної суми (Кудрявцев, Демидович, 1987).

На наш погляд перший спосіб має перевагу, а саме: 1) перше уявлення про інтеграл у студентів у цьому випадку зв'язується з конкретним змістом цього поняття, а не з формальним його визначенням; 2) характер цього визначення конструктивний, і тому пізніше він узагальнюється на поняття кратних та криволінійних інтегралів, а це, очевидно, має вагу.

Узагалі кажучи, у методиці викладання теорії визначених інтегралів (Кузьмінський, 2005; Салов, 2003) основний напрямок повинен бути таким, щоб студенти підготувались до розуміння ідеї існування поняття нескінченно малих, яка є єдиною в тому випадку, коли її використовують для визначенні об'єму тіл, величини роботи та при складанні диференціального рівняння для розв'язування конкретної задачі. Суть цієї ідеї полягає у заміні одних нескінченно малих іншими, еквівалентними, у заміні приростів адитивної функції її диференціалами.

У зв'язку з цим виникає непроста методична задача — показати студентам роль диференціала в підінтегральному виразі та його зміст і призначення.

Відомо, що інженери розуміють диференціал як матеріальний шматок, інтеграл для них — проста сума диференціалів. Складання диференціального рівняння для них не відрізняється від складання рівняння в скінченних величинах. М. Я. Вигодський у передмові до одного зі своїх підручників (Выгодский, 1933) писав: «Спросите инженера или физика, пользуется ли он на практике тем дифференциалом, который он изучал в курсе математики. Вы получите, вероятно, ответ, что его дифференциал — это не главная часть приращения функции, а практически ничтожная часть исследуемой величины. Почему он применяет к „своему“ дифференциалу те операции, которые были установлены для „математического“ дифференциала, — на этот вопрос дадут лишь немногие ответ, и тогда они скажут вам, какие усилия они затратили, чтобы понять эту связь; для большинства же этот вопрос так и останется неясным: теория сама по себе, а практика — сама по себе.».

Погляд на диференціали, як на актуальні нескінченно малі і, відповідно, розуміння інтеграла, як суми таких нескінченно малих, справді зручний в практичному застосуванні цих понять. Не тільки інженер, але й математик при складанні диференціального рівняння по суті мислить на мові актуальних нескінченно малих.

Але кожен інженер повинен чітко усвідомити, що це тільки зручне уявлення і є умовним. А чому ця умовність допустима, і в чому полягає безумовна правильність у діях над нескінченно малими, логічні закони, які керують цими діями, повинні бути чітко зрозумілими інженерам, які застосовують апарат аналізу нескінченно малих.

Таким чином, це дозволяє нам сформулювати такі вимоги до методики викладання теорії визначених інтегралів у технічному університеті:

1) поняття визначеного інтеграла, як границі інтегральної суми повинно бути органічно зв'язано з поняттям диференціала функції як її умовного приросту. Зробити це потрібно на основі уявлення про визначений інтеграл як різницю значень первісної на основі розкриття зв'язку між визначеним інтегралом як числом і визначеним інтегралом як функцією від верхньої межі;

2) друга вимога, яка визначає методичну лінію в теорії визначених інтегралів, полягає в тому, щоб закріпити у студентів погляд на визначений інтеграл не тільки як на число, але і як на відповідну первісну функцію по відношенню до підінтегральної функції.

Потрібно відмітити, що в багатьох підручниках поняття визначеного інтеграла як різниці значень первісної викладено так, що його сенс не повністю розкрито. А уявлення про визначений інтеграл від функції є більш загальним, ніж уявленням про нього як число. Воно відноситься до поняття визначеного інтеграла як числа так само, як і поняття функції відноситься до поняття її частинного значення. Конструюванням цього частинного значення певної первісної шляхом сумування її диференціалів з наступним граничним переходом є по суті метод обчислення значення цієї функції. Така картина і повинна бути освоєна студентами.

Згідно таких настанов, викладення принципів питань теорії визначених інтегралів зосереджуємо на двох темах: визначений інтеграл як границя інтегральної суми, визначений інтеграл як різниця значень первісної.

Список літератури

- Выгодский, М. Я. (1933). *Основы исчисления бесконечно-малых* (3 изд., доп. и испр.). Москва: ГТТИ.
- Дубовик, В. П., Юрик, І. І. (2013). *Вища математика*. Київ: Ігнатекс-Україна.
- Кудрявцев, В. А., Демидович, Б. П. (1987). *Краткий курс высшей математики*. Москва: Наука.
- Кузьмінський, А. І. (2005). *Педагогіка вищої школи*. Київ: Знання.
- Пискунов, Н. С. (1985). *Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов* (Т. 1). Москва: Наука.
- Салов, В. О. (2003). *Основы педагогики вищої школи*. Дніпропетровськ: НГУ.

**ПОЗИТИВНЕ ВИКОРИСТАННЯ НЕДОЛІКІВ
ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА EXCEL
ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Т. А. Селуянова, Н. В. Старун, Г. Я. Тулущенко

Херсонський національний технічний університет, Херсон, Україна

tuluchenko@mail.ru

При викладанні курсу вищої математики у студентів неодмінно викликають інтерес історичні відомості про помилки, які припускалися відомими математиками минулого. Так, Галілей вважав, що підвішена за два кінці нитка приймає форму параболи (Вилейтнер, 1960, с. 286), той же Галілей вважав, що розв'язком задачі про брахістохрону є дуга кола (Icaza Herrera de, 1994), помилки, які припускалися відомими математиками тих часів (зокрема Лагранжем) при становленні понять «неперервність» та «диференційованість» (Медведев, 1975, с. 57), при становленні поняття «рівномірна збіжність ряду» (зокрема, відома помилка Коші, яка була виправлена Абелем) (Медведев, 1975, с. 80) тощо.

Результати, які отримують сучасні професійні математики, значно виходять за межі класичного (часто обмеженого) курсу вищої математики і не можуть бути зрозумілими більшості студентів економічних, технологічних та інженерних спеціальностей. А, отже, показати цій аудиторії приклади, як вдосконалюється ця галузь людських знань сьогодні неможливо. Але виявляється можливим показати приклади некоректного використання математичних методів у програмних продуктах, що випускаються навіть відомими компаніями-розробниками, що спеціалізуються на науковому програмному забезпеченні.

На офіційному сайті Microsoft (The RAND function..., 2004) наявна інформація про те, що у версії табличного процесора Excel 2003 функція генерації випадкових чисел могла повертати від'ємні значення при використанні параметрів за замовчуванням, тобто при генерації випадкових чисел із проміжку $[0;1]$. Ця проблема була усунута фахівцями Microsoft на початку 2004 р. Дослідимо, ретельніше випадкові числа, що генеруються в Excel 2013.

При опануванні студентами методів перевірки гіпотез про належність досліджуваної вибірки до генеральної сукупності з певним ймовірнісним розподілом рекомендується включити до розгляду таку задачу.

Задача. Перевірити якість генерування випадкових чисел із рівномірним розподілом на проміжку $[0;1]$ генератором випадкових чисел, який входить до складу табличного процесора Excel 2013.

Для тестування виберімо функцію «Генерація випадкових чисел» з пакету «Аналіз даних». Для прикладу обмежимося генерацією 50 випадкових чисел.

Перевірка за стандартною процедурою згенерованої псевдовипадкової послідовності чисел завжди дає позитивну відповідь про рівномірний розподіл генеральної сукупності, із якої вилучена вибірка. Але, якщо продовжити генерувати нові послідовності випадкових чисел на тому самому листі, то неодмінно з'являється послідовність, яка не витримує перевірки (рис. 1).

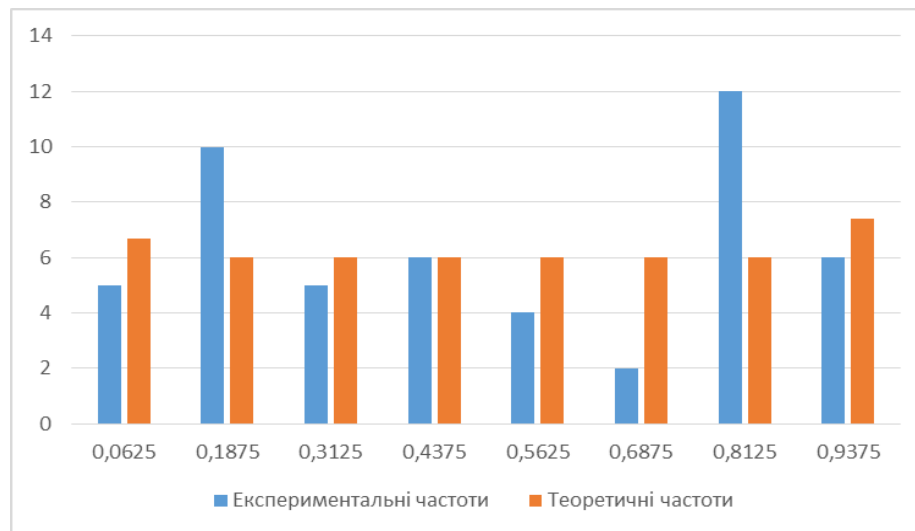


Рис. 1. Приклад суміщених гістограм експериментальних та теоретичних абсолютних частот для виборки, що не витримує тестування

У табличному процесорі Excel використовується алгоритм генерації псевдовипадкових чисел, який розроблений у статті Wichman & Hill (1982). Цей алгоритм гарантує відсутність повторів у послідовності випадкових чисел до $1E+13$ згенерованого числа та проходить ряд відомих тестів. Але, як бачимо, має і недоліки.

Якщо продовжити досліджувати якість генерування випадкових послідовностей з іншими класичними ймовірнісними розподілами, які передбачені в пакеті «Аналіз даних», то має місце той самі недолік: при повторних генеруваннях послідовностей на одному й тому самому листі після 2—20 повторів обов'язково з'являється послідовність, яка не проходить перевірку на належність зазначеному закону розподілу.

Виявлені недоліки відомого програмного забезпечення дозволяють запропонувати студентам завдання, які вчать бути свідомими користувачами продуктів навіть відомих брендів, підвищують інтерес до вивчення класичних дисциплін.

Список літератури

- Icaza Herrera de, M. (1994) Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem. *Revista Mexicana de Fisica*, 40(3), 459–475.
- The RAND function returns negative numbers in Excel 2003 (2004). Одержано з <https://support.microsoft.com/ru-ru/kb/834520>
- Wichman, B. A., & Hill, I. D. (1982). Algorithm AS 183: An Efficient and Portable Pseudo-Random Number Generator. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 31(2), 188–190.
- Вилейтнер, Г. (1960). *История математики от Декарта до середины XIX столетия*. Москва: ГИФМЛ.
- Медведев, Ф. А. (1975) *Очерки истории теории функций действительного переменного*. Москва: Наука.

МОТИВАЦІЯ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ КУРСУ ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

О. Б. Чернобай

Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь, Україна

chernobai.olga@gmail.com

У сучасних освітніх програмах галузі знань «Управління та адміністрування» з'являється навчальна дисципліна «Вища та прикладна математика», яка включає такі основні розділи:

1. Вища математика.
2. Теорія ймовірностей.
3. Математична статистика.
4. Математичне програмування.
5. Дослідження операцій.

Метою викладання даного курсу є:

— формування у студентів спеціальності «Менеджмент» базових математичних знань для розв'язування завдань при вивченні спеціальних дисциплін та в їх майбутній професійній діяльності;

— розвиток знань, вмінь та навичок аналітичного мислення при дослідженні життєвих та економічних ситуацій;

— математичне формулювання та розв'язання задач управління, що виникають у процесі навчання або у практичній діяльності майбутнього спеціаліста

Для досягнення мети викладання згаданої навчальної дисципліни важливе місце займає мотивація навчання. Так, у тезах доповіді Чернобай (2016) розглядалися наступні прийоми підвищення мотивації в навчальній діяльності студентів економічних спеціальностей:

— залучення студентів до активної позааудиторної роботи, зокрема, проведення олімпіад, оформлення стінгазет, складання математичних задач про податки для шкільних підручників;

— наукова робота студентів, виступи на конференціях, підготовка тез доповідей до друку, участь у математичних читаннях;

— вирішення проблемних ситуацій на різних етапах навчального процесу, творча робота студентів;

— участь студентів у роботі проблемних груп, які працюють у вищих навчальних закладах.

Але найважливішою мотивацією в навчанні математичних дисциплін є зв'язок з майбутньою професійною діяльністю. Підготовка спеціалістів першого бакалаврського рівня галузі знань «Управління та адміністрування», спеціальності «Менеджмент» передбачає здатність розв'язувати складні, спеціалізовані задачі та практичні проблеми у відповідній професійній діяльності або у процесі навчання, що потребує застосування теорій та методів відповідної науки і характеризується комплексністю і невизначеністю умов.

Вищою формою розумової та професійної діяльності майбутнього менеджера є теоретичне мислення. Серед різноманітних методів пізнання навколишнього світу, структури економічних процесів та алгоритму професійних дій надзвичайно потужним і своєрідним є математичний метод. Він займає особливе місце в пізнанні і за масштабами застосовності, і за мірою довіри до істини, які отримує математика та її методи. Справді, математика має справу з абстракціями, які створюються в нашій свідомості. Проте, вона вивчає, хоча й опосередковано, кількісні відношення та просторові форми навколишнього світу.

Найбільш поширене застосування математичних дисциплін — це побудова математичної моделі. Основним принципам побудови та застосування математичного моделювання присвячено багато наукової та методичної літератури. Деякі аспекти цього питання розглянуто також у доповіді Чернобай (2016), де сказано, що модель повинна правильно відображати властивості предмету чи явища, що вивчається.

Як один з різновидів математичних моделей, при викладанні курсу «Вища та прикладна математика» доцільно розглянути модель системи масового обслуговування. Основним завданням теорії масового обслуговування є встановлення з найвищою точністю залежності між кількістю обслуговуючих та якістю обслуговування. Такі математичні моделі можуть бути використані для опису різноманітних економічних та управлінських процесів. За допомогою створеної моделі масового обслуговування можна описати роботу різноманітних підприємств, податкових інспекцій, адміністративних установ, банків, страхових компаній, торгівельних мереж, поліклінік, лікарень і т. д.

Список літератури

- Чернобай, О. Б. (2015). Про деякі особливості викладання курсу «Вища та прикладна математика». У кн. *Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 211—212). Київ: НТУУ «КПІ».
- Чернобай, О. Б. (2016). Мотивація у навчанні вищої математики студентів економічних спеціальностей. У кн. *Збірник тез Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»* (с. 125). Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова.

ДЕЯКІ ВИПАДКИ ІНТЕГРОВАНOSTІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

І. Л. Шинковська, І. П. Заєць

Національна металургічна академія України, Дніпро, Україна

irina1963mail@gmail.com

Розглянемо задачу пошуку загального розв'язку диференціального рівняння

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^n, \quad (1)$$

де $P(x), Q(x), R(x)$ – деякі функції від x , n — дійсне число ($n \neq 0, n \neq 1$).

Як відомо, в загальному випадку рівняння (1) не розв'язується у квадратурах. Але при певних умовах це можна зробити. Нагадаємо деякі з таких випадків:

- 1) при $R(x) = 0$ маємо лінійне рівняння;
- 2) при $P(x) = 0$ маємо рівняння Бернуллі;
- 3) при $n = 2$ маємо рівняння Ріккати;
- 4) якщо $P(x), Q(x), R(x)$ постійні або пропорційні, то рівняння зводиться

до рівняння з відокремлюваними змінними.

Алгоритми розв'язування таких рівнянь відомі.

Займаємося ціллю знайти деякі інші випадки, коли рівняння (1) інтегрується у квадратурах. Скористаємось для цього методом Бернуллі. Запровадимо нову змінну u , таку що

$$y = uv, \quad (2)$$

де v — деяка невизначена функція від x . Тоді $y' = u'v + uv'$. Зробивши підстановку (2) в рівняння (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} u'v + uv' &= P(x) + Q(x)uv + R(x)u^n v^n; \\ u'v + uv' - Q(x)uv &= P(x) + R(x)u^n v^n; \\ u'v + u(v' - Q(x)v) &= P(x) + R(x)u^n v^n. \end{aligned} \quad (3)$$

За функцію v можна взяти будь-який частковий розв'язок рівняння $v' - Q(x)v = 0$. Отже, в останньому рівнянні зникає перша степінь змінної u .

Отже:

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)v; \quad \int \frac{dv}{v} = \int Q(x)dx; \quad \ln|v| = \int Q(x)dx.$$

Звідки

$$v = e^{\int Q(x)dx}. \quad (4)$$

Знайдену функцію v підставимо в рівняння (3):

$$u' e^{\int Q(x)dx} = P(x) + R(x)u^n e^{n \int Q(x)dx}. \quad (5)$$

Розділивши обидві частини рівняння на $P(x)$, отримаємо:

$$\frac{u'}{P(x)} e^{\int Q(x) dx} = 1 + \frac{R(x)}{P(x)} u^n e^{n \int Q(x) dx}. \quad (6)$$

В рівнянні (6) змінні u та x можуть бути відокремлені за умови, якщо

$$\frac{R(x)}{P(x)} e^{n \int Q(x) dx} = k, \quad (7)$$

де $k = \text{const}$.

Насправді, з умови (7) маємо:

$$R(x) = \frac{kP(x)}{e^{n \int Q(x) dx}}.$$

Тоді рівняння (6) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{P(x)} e^{\int Q(x) dx} &= 1 + \frac{kP(x)}{e^{n \int Q(x) dx}} \cdot \frac{1}{P(x)} u^n e^{n \int Q(x) dx} \\ \text{або } u' \cdot \frac{e^{\int Q(x) dx}}{P(x)} &= 1 + ku^n. \end{aligned}$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Виконавши відповідні перетворення та інтегрування, отримаємо:

$$\frac{du}{1 + ku^n} = \frac{P(x) dx}{e^{\int Q(x) dx}}; \quad \int \frac{du}{1 + ku^n} = \int \frac{P(x)}{e^{\int Q(x) dx}} dx + C.$$

З останнього рівняння можна знайти змінну u . Тоді, враховуючи рівність (4), загальний розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$y = e^{\int Q(x) dx} \cdot u. \quad (8)$$

Отже, якщо виконується умова (7), то рівняння (1) за допомогою підстановки (8) інтегрується у квадратурах.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$.

Розв'язуючи рівняння відносно y' , зведемо його до вигляду (1):

$$y' = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} y - y^2.$$

Це рівняння Ріккаті, в якому

$$P(x) = \frac{4}{x^2}, \quad Q(x) = -\frac{1}{x}, \quad R(x) = -1, \quad n = 2.$$

Нагадаємо, що в загальному випадку рівняння Ріккаті інтегрується у квадратурах тільки у випадках, коли відомий один частинний розв'язок цього рівняння.

Перевіримо, чи виконується умова інтегрованості (7):

$$\frac{R(x)}{P(x)} e^{n \int Q(x) dx} = -1 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = -1 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot e^{-2 \ln x} = -\frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4} = \text{const}.$$

Отже, умова (7) виконується і можна застосувати підстановку (8):

$$y = e^{\int Q(x)dx} \cdot u = e^{-\ln x} \cdot u = \frac{u}{x}.$$

Знайдемо похідну $y' = \frac{u'x - u}{x^2}$ та підставимо y та y' в вихідне рівняння. Будемо мати:

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} - \frac{u^2}{x^2}.$$

Це рівняння після елементарних перетворень стає рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$u' = \frac{4 - u^2}{x}. \text{ Тоді } \frac{du}{4 - u^2} = \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Після інтегрування отримаємо: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u+2}{u-2} \right| = \ln |x| + \ln C_1; \quad \frac{u+2}{u-2} = Cx^4.$$

$$\text{Звідки } u = \frac{2Cx^4 + 2}{Cx^4 - 1}.$$

$$\text{Отже, загальний розв'язок рівняння: } y = \frac{2Cx^4 + 2}{Cx^5 - x}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = 2e^{3x} + 2y - \frac{e^{5x}}{y}$.

$$\text{Тут } P(x) = 2e^{3x}, \quad Q(x) = 2, \quad R(x) = -e^{5x}, \quad n = -1.$$

Впевнимось у виконанні умови (7):

$$\frac{R(x)}{P(x)} e^{n \int Q(x)dx} = -\frac{e^{5x}}{2e^{3x}} \cdot e^{-\int 2dx} = -\frac{e^{5x}}{2e^{3x}} \cdot e^{-2x} = -\frac{1}{2} = \text{const}.$$

Виконуючи підстановку $y = e^{\int 2dx} \cdot u = e^{2x} \cdot u$, отримаємо рівняння, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними відносно u :

$$\begin{aligned} 2e^{2x} \cdot u + e^{2x} \cdot u' &= 2e^{3x} + 2e^{2x} \cdot u - \frac{e^{5x}}{e^{2x} \cdot u}; \\ e^{2x} \cdot u' &= 2e^{3x} - \frac{e^{5x}}{e^{2x} \cdot u}; \quad u' = e^x \left(2 - \frac{1}{u} \right). \end{aligned}$$

Після відокремлення змінних та інтегрування отримаємо:

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \ln |2u - 1| = e^x + C.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$\frac{y}{2e^{2x}} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y}{e^{2x}} - 1 \right| = e^x + C.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{y'}{x^3} = \sqrt{1+x^2} + \frac{2y}{x^2(1+x^2)} + \sqrt{y}$.

Зведемо рівняння до вигляду (1), помноживши обидві його частини на x^3 :

$$y' = x^3 \sqrt{1+x^2} + \frac{2xy}{1+x^2} + x^3 \sqrt{y}.$$

$$\text{Тут } P(x) = x^3 \sqrt{1+x^2}, Q(x) = \frac{2x}{1+x^2}, R(x) = x^3, n = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\frac{R(x)}{P(x)} e^{n \int Q(x) dx} = \frac{x^3}{x^3 \sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} = 1 = \text{const}.$$

Отже, умова інтегрованості (7) виконується. За допомогою підстановки

$$y = e^{\int Q(x) dx} \cdot u = e^{\ln(1+x^2)} \cdot u = (1+x^2) \cdot u$$

вихідне рівняння розв'язується у квадратурах. А саме:

$$2xu + (1+x^2)u' = x^3 \sqrt{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} (1+x^2)u + x^3 \sqrt{(1+x^2)u};$$

$$(1+x^2)u' = x^3 \sqrt{1+x^2} + x^3 \sqrt{(1+x^2)u};$$

$$u' = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} (1 + \sqrt{u});$$

$$\int \frac{du}{1 + \sqrt{u}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Обчисливши інтеграли від обох частин рівняння, отримаємо:

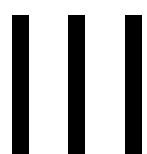
$$2\sqrt{u} - 2 \ln |\sqrt{u} + 1| = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Повертаючись до змінної y , запишемо загальний інтеграл рівняння:

$$2\sqrt{\frac{y}{1+x^2}} - 2 \ln \left| \sqrt{\frac{y}{1+x^2}} + 1 \right| = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Список літератури

- Коновалова, Л. В. (1986). Даламбер и общая теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Историко-математические исследования*, 30, 81—97.
- Токмачев, М. С. (2009). Алгоритм интегрирования дифференциальных уравнений некоторого класса. *Вестник Новгородского государственного университета*, 50, 44—47.
- Шинковська, І. Л., Розенберг, О. С. (2014). Застосування інтегрального множника до знаходження загального розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. В кн. *Матеріали П'ятнадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука* (Т. 4, с. 206—208). Київ: НТУУ «КПІ».



ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

BORN'S "MYSTERIOUS NUMBER 137" AND REFLECTION LIGHT FROM GRAPHENE

O. Zhivkov, R. Studenyuk

*NTUU "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine,
zhivkov@yandex.ua, crewcutradik@gmail.com*

R. Feynman (1985) wrote: "When you know what it is you are talking about, that some symbols represent forces, others masses, inertia, and so on, then you can use a lot of commonsense, seat-of-the-pants feeling about the world. You have seen various things, and you know more or less how the phenomenon is going to behave. But the poor mathematician translates it into equations. And the symbols do not mean anything to him, he has no guide but precise mathematical rigour and care in the argument. The physicist, who knows more or less how the answer is going to come out, can sort and guess part way, and so go along rather rapidly. The mathematical rigour of great precision is not very useful in physics."

While thinking, like Feynman, about the mysterious fine structure constant $\alpha = 137$ we set eyes on one recently found property of heavily cooled graphene in strong magnetic field. As it happens graphene picks up light (in visible spectrum) with reflection index $\Gamma = \alpha\pi$ (Geim, 2012).

The unique property of graphene is its electroconductivity, which has the same order of values with the velocity of light. Electroconductivity of materials is caused by movement of electrons in atoms. But at the extra-low temperatures and in strong magnetic field atomic nuclei "are refrigerated" and only self-oscillations of atoms can be operated. Max Born noticed this fact in his famous paper "Mysterious number 137". This paper is written in those days when it was no knowledge about graphene (according to Feynman, we have dealings with basic process of quantum electrodynamics — interaction between electron and photon). Nevertheless, some in this paper seems to be related to reflection light from graphene. So let's try to view and compare the results of different investigations, like Babylonian scholars.

We need to write here some correlations from Born's paper. The relative width of spectrum line:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\alpha^3\pi}{2}, \quad (1)$$

where $\Delta\nu$ — the bandwidth; ν — the center frequency of spectrum line.

It stands to mention, M. Born envisaged this correlation as correlation of interaction energy between electron orbit and radiation field ($h\Delta\nu$) to emitted energy ($h\nu$).

The reciprocal value to (1) is called quality factor. Quality factor — the parameter of oscillation system that describes how under-damped an oscillator or resonator is, and characterizes a resonator's bandwidth relative to its center frequency (Tooley & Mike, 2006, p. 77–78).

Using Born's terminology we can write energy of the first spectroscopic level of Hydrogen:

$$E_1 = \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \quad (2)$$

Let us suppose that E_1 is the energy of interaction between electron orbit and eradiation field ($h\Delta\nu$). So we can modify correlation (1):

$$\frac{\frac{\alpha^2}{2} \varepsilon}{h\nu} = \frac{\alpha^3 \pi}{2} \quad (3)$$

Then:

$$\frac{\varepsilon}{h\nu} = \alpha\pi \quad (4)$$

Now we can conclude that the correlation of electron's energy and eradiation energy equals to:

$$\frac{E_{3anac}}{e_{u3l}} = \alpha\pi \quad (5)$$

And reflection index of graphene:

$$\Gamma = \alpha\pi \quad (6)$$

It is simple to recognize the equality between (5) and (6).

There is possible explanation of this equality. S-orbits of every atom of carbonium in graphene does not take part in formation interatomic bingings, so it (s-orbit of carbonium atom) can be analogue to the first Born's orbit of hydrogenium. The nuclear charge of carbonium is six time more than nuclear charge of hydrogenium, so atom of "carbohydrogenium" conduct itself "stronger" than atom of hydrogenium. Nuclear charges of hydrogenium and carbonium don't take part in calculations, because of that it is possible to use the results of Born (1935) obtained for "hydrogen-like" atoms, in case of graphene.

Graphene absorb incoming light with the aid of his s-orbits and then "re-shed" it and turn into: reflect signal". Let us one more repeat — M. Born envisaged the correlation (1) (equivalent to (6)) as correlation of interaction energy between electron orbit and eradiation field to emitted energy.

If "Babylonian" method proves itself not altogether let's remember Faynman's words: "The method of guessing the equation seems to be a pretty effective way of guessing new laws. This shows again that mathematics is a deep way of expressing nature, and any attempt to express nature in philosophical principles, or in seat-of-the-pants mechanical feelings, is not an efficient way" (Faynman, 1989).

References

- Born, M. (1935). The mysterious number 137. *Proceedings Mathematical Sciences*, 2(6), 533–561.
- Feynman, R. P. (1989). The character of physical law (6th ed.). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.
- Geim, A. K. (2012). Fine structure constant defines visual transparency of graphene. *Bravia*, 320, 1308.
- Tooley, M., & Mike, T. (2006). *Electronic circuits: Fundamentals and applications* (3rd ed.). Oxford: Newnes (an imprint of Butterworth-Heinemann Ltd).

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННИХ СТАТИСТИЧНИХ СИСТЕМ

В. А. Болух

Житомирський базовий фармацевтичний коледж ім. Г. С. Протасевича,

Житомир, Україна

vira_shevchuk@ukr.net

Статистична механіка виникла в кінці XIX — на початку XX століття завдяки роботам Больцмана, Максвелла та Гібса. Їх дослідження були присвячені створенню математичного апарату для опису та вивчення фізичних систем, що складаються з надзвичайно великої кількості елементів. Дослідження специфічних закономірностей таких систем є одним з основних завдань статистичної механіки.

Зауважимо, що нескінченні статистичні системи є деякою математичною ідеалізацією великих статистичних систем, яку зручно використовувати при вивченні реальних великих систем. Такі фізичні системи моделюють гази, рідини, кристали, а також можуть описувати взаємодії у великих біологічних, екологічних, економічних системах тощо.

Поняття стану є ключовим для математичного опису нескінченних систем взаємодіючих частинок. Оскільки поведінці таких систем притаманний ймовірнісний характер, то виникає проблема у побудові деякої ймовірнісної міри на фазовому просторі таких систем. Вілард Гібс на початку XX століття запропонував замість детерміністичного опису однієї системи розглядати статистичний опис поведінки ансамблів ідентичних систем. Для рівноважної скінченної системи цією ймовірнісною мірою є міра Гібса, яку можна будувати в мікро-канонічному, канонічному та великому канонічному ансамблях у залежності від потреб конкретної фізичної задачі. Фізичне обґрунтування вигляду такої міри в обмеженому об'ємі було запропоноване вченим ще в 1902 році (Gibbs, 1902).

Важливою характеристикою міри Гібса є послідовність кореляційних функцій. Їх використовують для опису мікроскопічної поведінки системи, а також для запису середніх значень спостережуваних величин. У 1946 році в монографії Боголюбова (1946) були намічені шляхи математичного обґрунтування термодинамічного граничного переходу в рамках формалізму канонічного ансамблю Гібса, а також розроблений загальний метод відшукування кореляційних функцій у вигляді формальних рядів за степенями густини частинок у системі. Строге обґрунтування збіжності таких рядів для випадку позитивного парного потенціалу взаємодії було опубліковано М. М. Боголюбовим (1949) та Б. І. Хацетом (1956). Для випадку парних стійких потенціалів взаємодії подібні результати були отримані М. М. Боголюбовим, Б.І. Хацетом та Д. Я. Петриною (1969).

Статистичні властивості нескінченних систем взаємодіючих частинок у практичному аспекті доцільно описувати, використовуючи кореляційні функції. З точки зору теорії міри кореляційні функції є в певному сенсі аналогом моментів міри. Великий інтерес у дослідників викликають рівняння Кірквуда —

Зальцбурга та Боголюбова — Борна — Гріна — Івона (ББГІ) як ключових рівнянь для математичного дослідження кореляційних функцій. Дослідженнями рівнянь Кірквуда — Зальцбурга займалися Д. Рюель, О. Ленфорд, Р. А. Мінлос, Д. Я. Петрина, Л. А. Пастур, В. І. Герасименко, П. В. Малишев, О. Л. Ребенко та інші. Існують й інші рівняння, яким задовольняє кореляційний функціонал рівноважних систем статистичної механіки. Це рівняння Майєра — Монтрола, рівняння Боголюбова, яке виводиться з еволюційних рівнянь ББГІ, рівняння Гончара та інші (Рюель, 1971).

Зауважимо також, що вперше проблему побудови стану в розумінні ідей Гібса для нескінченної статистичної системи розглянули незалежно один від одного Д. Рюель та Р. А. Мінлос в 1967 році. Рюель розробив алгебраїчний підхід, що базувався на ідеях Сігала, Хаага, Кастлера і тому був більш абстрактним. Натомість Мінлос побудував сімейство мір на циліндричних множинах нескінченновимірного конфігураційного простору і визначив гіббсівську міру як граничну міру. Завдячуючи дослідженням Р. Л. Добрушина вдалося привести більш загальне визначення гіббсівської міри за допомогою умовних розподілів. Практично в той же час майже аналогічний підхід був запропонований Ленфордом і Рюелем (Gielera, 1996). Критерієм існування гіббсівської міри на просторі нескінченних конфігурацій є умова, що міра задовольняє рівняння Добрушина — Ленфорда — Рюеля (ДЛР).

Важливим напрямом вивчення класичних неперервних систем статистичної механіки є дослідження розв'язків еволюційних рівнянь ББГІ. Ланцюжок рівнянь Боголюбова вивчає всі можливі стани системи. Окремий напрям дослідження рівнянь ББГІ був створений Д. Я. Петриною та його учнями. Їм вдалось розробити новий підхід до еволюційних рівнянь Боголюбова, побудувати в явному вигляді еволюційний оператор та довести існування термодинамічної границі для нерівноважних станів класичної та квантової систем (Петрина, 1985).

Для 80—90-х років минулого століття характерними є активні наукові дослідження К. Престона, Г. Георгії, Білецького-Печерського, Кондратьєва та його учнів, що стосувались вирішенню проблем теорії міри Гібса. Саме в цих роботах методи нескінченновимірного аналізу дозволили значно розвинути теорію мір Гібса для класичних систем статистичної механіки. В 1993 році і пізніше в 1998 році О. Л. Ребенко вперше запропонував нові кластерні розклади, побудова яких базується на одній з фундаментальних властивостей точкових мір — властивості нескінченної подільності (Ребенко, 2014). Ученим було помічено, що використання цієї властивості при побудові кластерних розкладів для кореляційних функцій значно спрощує саму побудову і оцінки коефіцієнтів розкладу.

Популярність методу нескінченновимірного аналізу при дослідженні статистичних систем у наш час різко зростає, адже даний метод є надзвичайно зручним для отримання нових математичних результатів, а також не лише спрощує запис фізичних характеристик системи, а й доведення громіздких комбінаторних формул (Ребенко, 2014).

Список літератури

- Gibbs, W. (1902). *Elementary principles in statistical mechanics*. New Haven, CT: Yale Univ. Press.
- Gielerak, R., & Rebenko, A. L. (1996). Poisson Integrals Representation in the Classical Mechanics of Continuous Systems. *J. Math. Phys.*, 37(7), 3354–3374.
- Боголюбов, Н. Н. (1946). *Проблемы динамической теории в статистической физике*. Москва: Гостехиздат.
- Боголюбов, Н. Н., Петрина, Д. Я., Хацет, Б. И. (1969). Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля. *Теор. и матем. физика*, 1(2), 251—274.
- Боголюбов, Н. Н., Хацет, Б. И. (1949). О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия. *Доклады АН СССР*, 66(3), 321—324.
- Петрина, Д. Я., Герасименко, В. И., Малышев, П. В. (1985). *Математические основы классической статистической механики*. Киев: Наукова думка.
- Ребенко, О. Л. і Болух, В. А. (2014). Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка. У кн. *Збірник праць Інституту математики НАН України «Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань»*, 11(1), 257—315.
- Рюэль, Д. (1971). *Статистическая механика. Строгие результаты*. Москва: Мир.
- Хацет, Б. І. (1956). Асимптотичні розклади за степенями густини функції розподілу систем в стані статистичної рівноваги. *Наукові записки Житомирського педагогічного інституту, фіз.-мат. серія*, 3, 103—139.

**ЖАН ЛЕРОН Д'АЛАМБЕР — ЖИТТЯ, ВІДДАНЕ НАУЦІ
(ДО 300-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ)
(16.11. 1717—29.10.1783)**

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, І. Ю. Мельник

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна

g.nefyodova@gmail.com, irinam_5656@mail.ru



Математика — моя сама стара, сама вірна любов.

Працуйте, працюйте, а розуміння прийде згодом.

Д'Аламбер Жан Лерон

Жан Лерон д'Аламбер — французький математик, механік, філософ-просвітитель, учений-енциклопедист, член Паризької академії наук (1740), Французької академії наук (1754), Петербурзької академії наук (1764). Д'Аламбер — учитель Лапласа і Лагранжа. Його життя, творчість та праця є гідними його великого розуму.

Жан Лерон д'Аламбер — позашлюбний син шевальє Луї Камю Детуш-Канона, генерал-лейтенанта французької артилерії, та відомої на той час письмен-

ниці-романістки маркізи Клодіни Герен де Тансен. Небажане немовля в дерев'яному коробі було підкинута на паперть паризької церкви Сен-Жан-ле-Рон. Дитина у тяжкому стані була знайдена поліцією під час обходу. Пізніше на честь покровителя церкви врятований хлопчик був названий Жаном Лероном.

Батько, повернувшись з-за кордону, та дізнавшись про вчинок матері, був пригнічений горем. Він забрав дитину з притулку та знайшов для сина годувальницю. Родина скляра-ремісника Руссо погодилась утримувати хлопчика і пообіцяла генералу Детушу дбати про його сина. У цій люблячій його родині д'Аламбер жив до 48-річного віку. Батько Жана Лерона часто відвідував сина, радів його успіхам, бачив у хлопчика прояв надзвичайного розуму. Генерал Детуш наполегливо просив мадам де Тансен провідати сина, й одного разу йому це вдалося.



Мадам де Тансен лише один раз у своєму житті відвідала свого талановитого сина. Батько, з любов'ю пестячи сина, зауважив: «А правда, мадам, дуже шкода, що таке миле, обдароване створіння і так безжалісно покинуте?» Семирічний Жан Лерон д'Аламбер запам'ятав на все життя цей візит матері, його вразили слова батька і те, що мадам де Тансен відразу після них зібралась піти, сказавши: «Мені тут недобре — не вистачає свіжого повітря». Мадам де Тансен була талановитою письменницею, власницею модного салону, який охоче відвідували відомі митці, вчені, письменники, артисти, мала широкі можливості, великий вплив, але так і не признала свого єдиного сина, яким би могла

лише пишатися. Д'Аламбер говорив, що ніколи б не відмовився обійняти свою матір, якби тільки вона захотіла його признати, бо він не в силах позбавити себе такого щастя.

Генерал Детуш забезпечив сина річним доходом у 1200 ліврів, подбавши про отримання класичної освіти для своєї дитини, яка дозволила надалі йому досягнути астрономічних висот у науці. У тринадцять років Жан Лерон д'Аламбер вступив до Колежу Мазаріні, там він вивчав грецьку, латинську мови. Рівень його знань був таким, що він міг в оригіналі читати Архімеда і Птолемея. Вивчав він також риторику, літературу, фізику, математику. Математику Жан Лерон любив надзвичайно, чому сприяв його вчитель, професор Карон. Вийшов з колежу д'Аламбер прекрасним оратором, що йому дуже згодилося в житті. У 1735 році він отримав ступінь магістра мистецтв.

Пізніше протягом двох років д'Аламбер навчався у юридичній академії, закінчивши освіту в 1738 році у званні ліценціата прав (проміжний ступінь між бакалавром та доктором). Блискучий розум, красномовність, фундаментальна освіта гарантували йому славне майбутнє на терені адвокатури, але ця професійна діяльність не припала д'Аламберу до серця, і він почав вивчати медицину. Паралельно займався для задоволення й математикою, аж поки повністю не віддався цьому захопленню.

У двадцять років д'Аламбер остаточно вирішив стати математиком, а у двадцять шість років був уже світилом цієї науки. Усе життя д'Аламбера було заповнене невтомною працею, він знаходив велику насолоду в заняттях математикою, не гадаючи про майбутню славу.

Перші праці д'Аламбера з математики та фізики були присвячені руху твердих тіл в рідині та інтегральному численню. Відомим став д'Аламбер завдяки «Трактату з динаміки» (1743), де був описаний принцип д'Аламбера (Федорче-

нко, 1975). У 1746 році в роботі «Дослідження з інтегрального числення» д'Аламбер дав перше (не зовсім строге) доведення основної теореми алгебри про існування коренів алгебраїчного рівняння, яку пізніше довів Карл Гаус. У Франції ця теорема називається теоремою д'Аламбера — Гауса.

У 1745 році д'Аламбер представив Берлінській академії наук мемуар «Про причину вітрів» чудовий за своїм змістом. Епіграф до цього мемуару містить у собі не яскраво визначену, але мудро і сердечно виражену подяку королю — покровителю наук і мистецтв. Мемуар викликав захоплення берлінських академіків і заслужив премію, а епіграф привернув до себе увагу прусського короля Фрідріха Великого (1712—1786).

У 1747 році вчений опублікував статтю з теорії поперечних коливань струни, де розглянув метод розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними (формула д'Аламбера) (Тихонов, Самарский, 1966). Д'Аламбер отримав також важливі результати в теорії звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У теорії рядів відомий математик довів достатню ознаку збіжності додатних рядів (1768) (Дороговцев, 1993), отримав також значні результати в теорії ймовірностей (парадокс д'Аламбера) (Седов, 1970).

Разом з Дідро д'Аламбер був головним редактором знаменитої «Енциклопедії» або Тлумачного словника наук, мистецтв і ремесел (28 томів), де вів математичний та фізичний розділи. Крім того, він написав вступну главу про походження і розвиток наук, де подав класифікацію різних областей і знань і проголосив наступ ери природничих наук, вперше поклав початок сучасному поняттю «гуманітарні науки».

Жан Лерон Д'Аламбер вніс серйозний вклад у розвиток фундаментальних принципів сучасної механіки, заклав основи математичної фізики.

У 1752 році прусський король Фрідріх Великий запропонував д'Аламберу місце президента Академії наук. Д'Аламбер був небагатою людиною, але він уважав, що в нього є обов'язки перед Батьківщиною, яка завжди визнавала його заслуги, нагороджувала його старання, і було б у вищій мірі невдячно залишати свою країну, тому відмовив навіть королю. Відмова д'Аламбера дуже засмутила Фрідріха Великого, але повага короля до вченого та філософа тільки збільшилась. Король назначив йому пенсію у 1200 ліврів. Цей вчинок образив французького короля Людовіка XV, і він вирішив також назначити пенсію вченому: «У Парижі живе один з достойних у світі людей, можливості якого значно нижчі його заслуг і талантів. Я надіюсь, що він прийме від мене пенсію і доставить мені задоволення бути корисною людині, яка поєднує в собі надзвичайну красу характеру з чудовими талантами».

У 1762 році д'Аламбер гостював три місяці у прусського короля, але особиста симпатія до Фрідріха Великого не могла змінити його тверде рішення не залишати своїх друзів і Батьківщину.

Ще одна велика сучасниця д'Аламбера російська імператриця Катерина II (1729—1796) помітила його і попросила в 1762 році д'Аламбера зайнятись вихованням та освітою її сина і спадкоємця Павла, запропонувавши великий річ-

ний оклад у сто тисяч ліврів (від прусського і французького королів він щорічно отримував 1200 ліврів). Д'Аламбер відповів відмовою Катерині II, пояснивши, що надає перевагу скромному життю в себе на батьківщині, аніж насолоді розкоші на чужині.

Уже 300 років ім'я д'Аламбера так велично і гордо звучить в математиці. На його честь названо математичні об'єкти:

- принцип д'Аламбера;
- формула д'Аламбера;
- ознака збіжності д'Аламбера;
- парадокс д'Аламбера;
- рівняння д'Аламбера (Пискунов, 1985);
- оператор д'Аламбера (Владимиров, Жаринов, 2000).

У 1752 році при розв'язанні одного диференціального рівняння з частинними похідними еліптичного типу, що зустрічаються в гідродинаміці, д'Аламбер уперше застосував функції комплексної змінної. У д'Аламбера (а також і в Ейлера) зустрічаються ті диференціальні рівняння, які пов'язують дійсну та уявну частини аналітичної функції, які пізніше назвали умовами Коші — Рімана.

Д'Аламбер зробив серйозний внесок у розвиток фундаментальних принципів сучасної механіки, заклав основи математичної фізики. Він автор ряду праць з теорії музики й естетики. Д'Аламбер допомагав багатьом ученим. За його пропозицією прусський король Фрідріх II назначив президентом Берлінської академії наук Лагранжа.

В особистому житті д'Аламбер не був щасливим. Протягом шістнадцяти років він віддано кохав Жюлі де Леспинас, позашлюбну дочку графині д'Альбон, блискучу світську даму, компаньйонку власниці відомого паризького салону мадам дю Деффан. З часом Жюлі де Леспинас стала господинею невеликого власного салону. Спочатку кохання було щирим і взаємним, не зважаючи на те, що д'Аламбер був на 15 років старшим за неї.



Пізніше мадам Жюлі палко покохала іспанського маркіза Гонсальве де Мора, молодшого її на 10 років. Надалі її серце належало молодому графу де Гіберу, який мав славу світського гульвіси. Зберіглося значне листування між Жюлі де Леспинас та її коханими, яке проливає світло на щирі почуття д'Аламбера. Віддано доглядаючи Жюлі під час хвороби на віспу, д'Аламбер урятував коханій жінці життя. Пізніше, коли захворів д'Аламбер, Жюлі доглядала його.

Жюлі де Леспинас страждала, дізнавшись про одруження графа де Гібера з сімнадцятирічною Луїзою де Курсень і рано пішла з життя. Померла мадам де Леспинас у 43 роки (1776). До останньої хвилини

д'Аламбер був поряд. Перед смертю Жюлі просила вибачення в д'Аламбера. Він був розпорядником її волі, очолював жалобну процесію. Лише після смерті коханої д'Аламбер, перебираючи її листи, дізнався, що не мав першого місця в її серці. Це глибоко вразило його, підірвавши моральні та фізичні сили. Горе втрати було невтішним. Життя знецінилось. У той час йому виповнилось 60 років.

Останні роки вчений перебував у важкому надломленому стані. Не зважаючи на опір короля Людовіка XV, у 1772 році він був обраний незмінним секретарем Французької Академії, яку вважав головною цитаделлю в боротьбі з невіглаством.

Помер д'Аламбер 29 жовтня 1783 року в Парижі від тяжкої хвороби. Усе життя вчений з недовірою ставився до релігії, перед смертю відмовився від причастя, паризький архієпископ заборонив служити заупокійну службу. Тому поховали д'Аламбера у спільній могилі.

Пам'ятником вченому є його наукова слава, визначні творчі здобутки. На честь д'Аламбера названий кратер на зворотній стороні Місяця.

Статуя д'Аламбера роботи скульптора Ф. Леконта вже в XVIII сторіччі прикрашала залу інституту Франції, пізніше вона була передана до ушанованого музею Лувру.



Список літератури

- Владимиров, В. С. , Жаринов, В. В. (2000). *Уравнения математической физики*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.
- Дороговцев, А. Я. (1993). *Математичний аналіз* (Ч. 1). Київ: Либідь.
- Литвинова, Е. Ф. (1891). *Д'Аламбер: Его жизнь и научная деятельность*. Санкт-Петербург: (б. и.)
- Пискунов, Н. С. (1985). *Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов* (13-е изд.; Т. 2). Москва: Наука.
- Седов, А. И. (1970). *Механика сплошной среды* (Т. 2). Москва: Наука.
- Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. (1966). *Уравнения математической физики* (3-е изд.). Москва: Наука.
- Федорченко, А. М. (1975). *Теоретическая механика*. Киев: Вища школа.

ІСТОРІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОЗНАКИ ЄРМАКОВА

Н. В. Ічанська

¹Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка,
Полтава, Україна,
natasha.ichanska@mail.ru

Історія математики завжди цікавить дослідників. Є ціла низка робіт, де описано історію математики в цілому з точки зору наукознавства, але не менш цікавими є праці, що присвячені окремим розділам математики. Одним з таких розділів є теорія числових рядів. Цей розділ викликає особливий інтерес завдяки тому, що має численні практичні застосування. Розглянемо один з аспектів історії розвитку теорії збіжності нескінченних додатних числових рядів, а саме історію дослідження ознаки Єрмакова.

Український математик Єрмаков Василь Петрович був професором кафедри чистої математики Київського університету, членом-кореспондентом Академії наук, заступником голови Київського фізико-математичного товариства. Професор В. П. Єрмаков сприяв організації та був засновником Київських вищих жіночих курсів (1889 р.), математичних бібліотек та математичних кабінетів, видання (у 1884—1886 рр.) «Журналу елементарної математики» — одного з кращих тогочасних друкованих математичних джерел в Україні (Добровольський (1981)).

У 1870 р. В. П. Єрмаков відкрив нову важливу ознаку збіжності нескінченних рядів (Ermakof, 1871; Єрмаков, 1872).

У 1871 р. професор В. П. Єрмаков (1845—1922) у своїй доповіді на III з'їзді російських природознавців і лікарів зробив доповідь «Признак сходимости знакоположительных рядов», в якій сформулював своєрідну ознаку з тією ж областю застосування, що і інтегральна ознака Коші. Формулювання не містить в собі понять інтегрального числення.

Повідомлення В. П. Єрмакова зацікавило присутніх на з'їзді математиків. Найвидатніші математики колишньої Росії тих часів, серед них П. Л. Чебишев, О. М. Коркін, Є. І. Золотарьов, М. В. Бугайов (див. Бугаев (1889)), поставилися з великим інтересом до праці молодого автора, визнали її за подію в науковому світі; вперше київська математика звернула на себе увагу наукових авторитетів.

Теорема Єрмакова (Єрмаков, 1872)) в загальному вигляді може бути сформульована так: якщо $f(k) \geq 0$, $f(k) \geq f(k+1)$, то ряд $f(0) + f(1) + f(2) + \dots$ збіжний або розбіжний в залежності від того до якої границі — менше чи біль-

ше одиниці — прямує відношення $\frac{\varphi'(x) \cdot f[\varphi(x)]}{f(x)}$, при $x \rightarrow \infty$. Тут $\varphi(x)$ — до-

датна, неперервна і диференційовна функція, причому $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) > x$, починаючи з деякого x .

Функція $\varphi(x)$ може бути замінена іншою додатною неперервною монотонно зростаючою і неперервно диференційовною функцією, що задовольняє

перерахованим умовам. Отже, використовуючи теорему Єрмакова, можна отримати цілу низку нових ознак з тією ж областю застосування.

Досліджуючи це питання, В. П. Єрмаков намагався знайти більш чутливу і разом з тим простішу ознаку. Припустивши, що $\varphi(x) = e^x$, він отримав ознаку, що може бути якісним прикладом простої та чутливої ознаки і формулював її так (див. Єрмаков (1872)):

Визначений інтеграл, а також ряд $f(0) + f(1) + f(2) + \dots$ будуть збіжними, якщо відношення $\frac{e^x \cdot f(e^x)}{f(x)}$ із зростанням x до ∞ прямує до границі меншої за

одиницю та розбіжними, якщо це відношення для величин x , що більші деякої постійної величини більше або рівне одиниці. Сумнівний випадок отримується тоді, коли це відношення менше одиниці і прямує до одиниці, коли $x \rightarrow \infty$.

Ознака Єрмакова в такому формулюванні за думкою О. М. Коркіна та Є.І. Золотарева є більш чутливою ніж інші ознаки (див. Korpin (1871)).

У сучасній математичній літературі ознаку Єрмакова формулюють так (Фихтенгольц, 1966):

Нехай ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

де $f(x)$ — неперервна додатна і монотонно спадна функція для $x \geq 1$. Тоді, якщо для достатньо великих x ($x \geq x_0$) буде виконуватись нерівність

$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде збігатися при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Або в граничній формі: якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде збігатися при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Деякі вчені (і сам Єрмаков був такої думки) вважали якийсь час, що на практиці навряд чи знайдеться випадок, коли ознака Єрмакова не буде ефективною, адже ознака Єрмакова є, до певної міри, в застосуванні до монотонних рядів, цілком загальна, тобто виключає сумнівні випадки, що фігурують в усіх ознаках збіжності, крім достатньої і необхідної ознаки Больцано — Коші.

Ознака Єрмакова дійсно є досить сильною, проте В. П. Єрмаков переоцінив її силу, стверджуючи, що для його ознаки на практиці ніколи не зустрінеться сумнівного випадку. За його думкою: «Теоретично довести це важко і мабуть неможливо» (Задерей, Нефьодова (2015)). Але дуже швидко він виправив цю помилку — Єрмаков (Єрмаков, 1874) подав приклад ряду, для якого його ознака не вирішує питання збіжності. Він пише: «Оставалось еще показать: существуют ли сомнительные ряды для моего признака или нет. Скоро по приезде в

Берлин я отыскал такой сомнительный ряд для моего признака. Ряд этот можно составить следующим образом. Пусть x произвольное положительное число, означим через ξ наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству: $\log \xi(x) \geq 1$, где логарифмы берутся по основанию e .

Составим теперь функцию:

$$\theta(x) = \prod_{k=0}^{k=\xi} \frac{1}{\log^k(x)}.$$

Ряд $\theta(0) + \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) \dots$ даст сомнительный случай для моего признака, ибо функция $\theta(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$e^x \theta(e^x) = \theta(x)^n \gg.$$

Доведення ознаки Єрмакова були предметом глибокого дослідження як самого автора ознаки, так і інших вчених. Так в 1882 році О. М. Коркін присвячує цьому питанню свій лист до Ерміта (Korkin (1882)). Згодом оригінальне нове доведення ознаки Єрмакова було одержано А. Принсгеймом (Pringsheim (1890)). Цьому ж питанню присвячені роботи Д. М. Синцова (1899)), Б. Я. Букреева (Букреев, 1930), А. М. Островського (Ostrowski, 1956).

Основну цінність дослідження Єрмакова складає не тільки практично зручна форми його ознаки, а і її загальне формулювання. Наприкінці 50-х років ХХ століття це питання було глибоко вивчене та досліджене В. А. Зморовичем. (1958). Видатний український математик, учень М. П. Кравчука, відомий фахівець у галузі теорії аналітичних функцій Валентин Анатолійович Зморович також багато уваги приділяв теорії збіжності знакододатних числових рядів та різним питанням аналізу і теорії класичних спеціальних функцій. В. А. Зморович провів доведення цієї ознаки ще в 1956 році. Він показав необхідність та достатність умов ознаки Єрмакова в загальній формі, а також і те, що ніякий із її варіантів не є універсальним. У цьому відношенні ознака Єрмакова нагадує відому ознаку Куммера, але має перед нею велику перевагу в тому сенсі, що, як показав Зморович, вона є одночасно необхідною та достатньою ознакою збіжності невластних визначених інтегралів 1-го роду від знакододатних функцій.

Ознака Єрмакова була і є важливим елементом теорії збіжності нескінченних додатних числових рядів. Історія дослідження ознаки Єрмакова є одним із цікавих аспектів історії розвитку теорії збіжності рядів, історії розвитку математики.

Список літератури

- Ermakof, V. (1871). Caractère de convergence des séries. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2, 250–256.
- Korkin, A. N. (1882). Sur un probleme d'interpolation. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 6, 228–242.
- Korkin, A. N., Solotarjev (1871). *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 100.
- Ostrowski, A. (1956). Sur les criteres de convergence et divergence aus a V. Ermakof. *L'Enseignement Mathématique*, 1(4), 224–257.

- Pringsheim, A. (1890). Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. *Mathematische Annalen*, 35, 297–394.
- Бугаев, Н. В. (1889). К теории сходимости рядов. *Математический сборник*, 14(2), 279–282.
- Букреев, В. Я. (1930). Элементарна форма ознаки В. П. Ермакова. *Записки Київського інституту народної освіти*, (4), 182–186.
- Добровольський, В. А. (1981). *Василь Петрович Ермаков (1845–1922)*. Москва: Наука.
- Ермаков, В. П. (1872а). Новый признак сходимости и расходимости знакопостоянных рядов. *Университетские известия*, (3), 1–20.
- Ермаков, В. П. (1872б). Теория сходимости бесконечных строк и определенных интегралов. *Математический сборник*, 6(1), 39–76.
- Ермаков, В. П. (1874). Отчет о заграничном путешествии кандидата В. П. Ермакова. *Университетские известия*, (1), 1–14.
- Задерей, М., Нефьодова, Д. (2015). Василь Петрович Ермаков (27.02.1845 — 16.03.1922) — фундатор математичної підготовки в Київському політехнічному інституті. *Математика в сучасному технічному університеті*, 1(1), 164–171. Одержано з mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_17.pdf
- Зморевич, В. А. (1952). О признаке Н. И. Лобачевского сходимости знакоположительных числовых рядов и одном обобщении этого признака. *Успехи математических наук*, 7(1), 162–170.
- Зморевич, В. А. (1958). О некоторых вопросах теории сходимости знакоположительных рядов. *Известия высших учебных заведений. Математика*, (1), 60–79.
- Синцов, Д. М. (1899). К вопросу о сходимости строк. *Математический сборник*, 20(4), 616–619.
- Фихтенгольц, Г. М. (1966). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 2). Москва: Наука.

ЕРАЗМ КОРНЕЛІЙОВИЧ ШПАЧИНСЬКИЙ (1848—1912)

Т. С. Клецька, А. Ю. Андрейцев

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна
tsk9@mail.ru



Наприкінці XIX століття в наукових, університетських та педагогічних колах Російської імперії було добре знано ім'я Еразма Корнелійовича Шпачинського — редактора найбільш відомого та поширеного природничого науково-популярного журналу того часу «Вісник дослідної фізики та елементарної математики», який став прикладом і зразком для наступних видань.

Е. К. Шпачинський народився у 1848 році в Кам'янці-Подільському в родині нащадків польських емігрантів. Незважаючи на невеликий статок родини, талановитий хлопчик отримав найкращу освіту, яку сім'я могла собі дозволити. У 1866 він закінчив Кам'янець-Подільську класичну чоловічу гімназію, а у 1873 — фізико-математичний факультет Київського університету св. Володимира зі ступенем кандидата наук. Завдяки своїм здібностям отримав рекомендацію на призначення йому професорської стипендії, але отримати цю стипендію йому не вдалося. С. О. Дахія у своїй статті в «Історико-математичних дослідженнях» (Дахія, 1956) вважає, що причиною відмови були політичні мотиви.

Молодий науковець не зміг знайти місце в Києві та був змушений шукати роботу в провінційних гімназіях. Декілька років він викладав фізику та математику спочатку в Лубнах, потім в Кременчуці.

У 1880 році він вийшов у відставку і повернувся з дружиною до Києва, плекаючи мрію повернутися до наукової роботи. Наступні чотири роки він займався дослідженнями під керівництвом професора М. П. Авенаріуса при кафедрі експериментальної фізики Київського університету на добровільних засадах, намагаючись довести існування електромагнітних хвиль і підтвердити теорію світла Джеймса Максвела, але недостатня експериментальна база не дозволила йому досягти впевнених результатів. Через декілька років це блискуче зробив німецький фізик Генріх Рудольф Герц. Успіх Герца змусив Шпачинського припинити дослідження. Головним досягненням Шпачинського за ці роки було встановлення зв'язків та здобуття наукової репутації в університетських колах. Треба зазначити, що весь цей час він не мав постійної роботи і виживав за рахунок разових підробітків, більшою частиною приватних уроків та перекладів.

У 1884 році Василь Петрович Єрмаков почав видавати в Києві науково-популярний «Журнал елементарної математики». Журнал був розрахований на учнів та викладачів гімназій, а також студентів і був сприйнятий із зацікавленням. Завдяки ентузіазму професора Єрмакова та великій кількості його колег,

знайомих та учнів, які безкоштовно писали статті журнал отримав багато схвальних відгуків.

Основна частина матеріалу була присвячена задачам з елементарної математики, а особливо тим розділам, які мало висвітлювались у шкільній програмі. Наприклад, геометричним задачам на побудову, основам теорії чисел. Крім цього друкувалося багато статей з вищої математики, які могли бути подані мовою елементарної математики. Наприклад, з теорії ймовірностей та аналітичної геометрії. Також користувалися увагою різні методи та підходи до розв'язання задач та доведення деяких теорем. Пізніше в журналі почали публікувати ще й статті методичного характеру.

Обсяг робіт був настільки великим, що В. П. Єрмаков був змушений зашукати ще одного редактора. Він запропонував цю роботу Шпачинському. Популяризацію наукових знань Шпачинський вважав «Священним обов'язком, який лежить на кожному з нас за даром майже отриману в наших навчальних закладах освіту», як він писав у редакційній статті. Шпачинський з радістю погодився і одразу приступив до роботи. Розподіл обов'язків був таким: за Єрмаковим залишалося загальне керівництво, відбір математичного матеріалу та запрошення авторів, уся інша робота покладалася на Шпачинського. Це був як пошук матеріалу по інших темах, так і загальна редактура, бухгалтерія, друкування та розповсюдження журналу. Усі спроби отримати офіційну фінансову підтримку видання не мали успіху, Міністерство народної освіти обмежувалося невеликими одноразовими виплатами, які навіть не покривали витрат. Цікаво те, що незважаючи на постійний дефіцит коштів, Єрмаков зі Шпачинським рішуче відмовлялися від приватної матеріальної підтримки, щоб не втратити незалежність.

У 1886 році Єрмаков за пропозицією Шпачинського вирішує розширити тематику журналу та збільшити його обсяг, приділивши частину місця іншим наукам, у першу чергу — фізиці. Видавці сподівалися, що таким чином вони зможуть зацікавити ширше коло читачів і відповідно збільшити наклад журналу. Керівництво журналу поступово переходить Шпачинському за повної підтримки його засновника.

Нове видання отримало назву «Вісник дослідної фізики та елементарної математики». Головним редактором журналу став Шпачинський. Отримавши журнал з рук Єрмакова, Шпачинський отримує і певний статус у наукових колах.

На той час журнал вже мав коло постійних авторів, які працювали безкоштовно. Більшою частиною це були викладачі кафедри чистої математики та кафедри експериментальної фізики Київського університету. Єрмаков також продовжував підтримувати журнал. Крім цього, значну кількість авторів складали викладачі гімназій, студенти і навіть школярі.

Шпачинський активно пропагував тісний зв'язок між усіма природничими науками. Він уважав, що неможливо вивчати фізику окремо від математики, а математику у відриві від її практичних застосувань. Він виступав за модернізацію шкільного курсу фізики, який сильно відставав від сучасного йому рівня

науки. Ураховуючи більш високий у середньому науковий рівень викладачів математики, Шпачинський пропонував передати викладання фізики в гімназіях математикам. Ця пропозиція стає зрозумілою, якщо врахувати, що дуже часто фізику разом іншими «другорядними» дисциплінами, такими як хімія, географія та ін., викладали люди, які не мали спеціальної освіти.

«Вісник» розповсюджувався не тільки на території Російської імперії, а й за кордоном. Декілька передплатників, наприклад, проживало в Болгарії.

У ці роки Шпачинський також бере участь у роботі Київського товариства природознавців. У 1889 році, коли від нього відокремилась математична секція, на базі якої було створено Київське фізико-математичне товариство, Шпачинський став одним з 37 його членів-засновників.

Шпачинський виступав на засіданнях товариства з доповідями не дуже часто, але регулярно. Основними темами його виступів були питання викладання математики та фізики, загальні питання математичних досліджень (наприклад, питання про синтез і аналіз в математиці).

У 1891 році, не витримуючи фінансового тиску, Шпачинський був змушений шукати додаткову роботу. Він отримує місце столоначальника в канцелярії попечителя Одеського учбового округу і переїжджає до Одеси. Туди ж переводиться й видавництво журналу. Фінансове становище покращується, але часу катастрофічно не вистачає. З ранку — робота в канцелярії, увечері — знайомство з науковою літературою, листування з колегами та робота над журналом. У ці роки йому з редактурою починає допомагати дружина. За відгуками його колег по канцелярії, Шпачинський був акуратним та сумлінним чиновником — спочатку столоначальником, потім бухгалтером. А за спогадами його друзів, Шпачинський ненавидів свою роботу. Це було «систематичне, неперервне придушення душі та особистості» за словами В. А. Гернета.

У 1895 році Еразму Корнелійовичу вдалося позбавитися від канцелярської роботи. Він за власним бажанням переходить на посаду викладача математики в Одеському реальному училищі. Треба зазначити, що при цьому він постраждав як фінансово, так і статусно. Але викладання — це справа, якою від насолоджувався. До того ж вона дозволяла відпрацьовувати деякі його методичні ідеї, підказувала нові теми публікацій, давала змогу залучати учнів до наукової роботи. Його учні згадували Шпачинського з великою повагою та вдячністю. М. Пистарка писав: «Ми всі його любили та поважали саме яке викладача. Він зумів у більшості з нас порушити допитливість, спостережливість і любов до точних наук... Багато з його учнів під його впливом присвятили себе вивченню фізики та математики. Один з них є конструктором в «Ecole de l'aviation» в Парижі, інший був залишений у Сорбонні при кафедрі математики, третій є приват-доцентом в одному з німецьких університетів».

Тоді ж Шпачинський починає шукати собі помічника для роботи з журналом. Ним стає В. А. Гернет, який поступово перебирає на себе все більше обов'язків. У 1898 році Шпачинський остаточно передає справи своєму правонаступнику.

Після цього Шпачинський недовго залишався в Одесі, вже в наступному, 1900 році, від переїжджає до Польщі, де і працює до останніх своїх днів у Лодзинському Комерційному училищі.

Помер Еразм Корнелійович Шпачинський у 1912 році в місті Лодзі, де й був похований.

Список літератури

- Антонов, О. М. (1957). *История Киевского университета*. Киев: Вища школа.
- Боголюбов, А. Н. (1984). Киевское физико-математическое общество. В кн. *Из истории математического естествознания*. Киев: Наукова думка.
- Гнеденко, Б. В. (1956). О развитии математики на Украине. *Историко-математические исследования*, 9, 403—426.
- Дахия, С. А. (1956). «Журнал элементарной математики» и «Вестник опытной физики и элементарной математики». *Историко-математические исследования*, 9, 546—553.
- Охременко, Д. В. (1973). *Развитие математической культуры в России XIX века и роль «Журнала элементарной математики» и «Вестника опытной физики и элементарной математики» в усовершенствовании научно-педагогической культуры учителей математики России XIX-XX века: дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02*. Москва.
- Э. К. Шпачинский (1848—1912): Некролог (1913). *Вестник опытной физики и элементарной математики*, (1 (577)), 3—8.

РЕЗУЛЬТАТИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА В ТЕОРІЇ РЯДІВ

С. П. Коваленко, В. В. Листопадова

НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»,

Київ, Україна

seregakovalenko@yandex.ru vlistopadova@mail.ua

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716) — німецький математик, фізик і філософ, організатор і перший президент Берлінської Академії Наук. Одержав чимало важливих результатів у математиці й фізиці, зокрема, паралельно з Ньютоном розробив диференціальне та інтегральне числення.

Метою статті є висвітлення деяких результатів Лейбніца в теорії рядів.

1. Підсумовування телескопічного ряду (Körle, 2015). Можливо першим, хто звернув увагу Лейбніца на глибоке вивчення математики, був голландський математик Крістіан Гюйгенс (1629—1695). Він, щоб перевірити математичні здібності Лейбніца, запропонував йому дослідити збіжність ряду чисел обернених до трикутних чисел.

n -те трикутне число T_n — це кількість точок, що утворює рівнобічний трикутник зі стороною в n точок, яке рівне сумі натуральних чисел від 1 до n (Triangular number, n. d.):

$$T_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

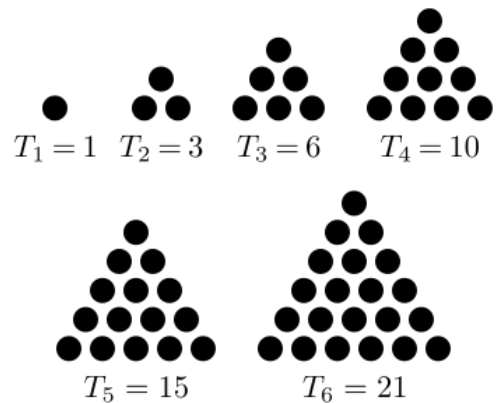


Рис. 1. Трикутні числа

Отже, чи збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots,$$

що складається з членів достатньо «прорідженого гармонічного ряду, який, як відомо, розбігається?

Лейбніц розглянув гармонічний ряд, та ряди, що утворені з різниць членів гармонічного ряду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \\ \Delta \frac{1}{k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots \\ \Delta^2 \frac{1}{k} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots \end{aligned}$$

Лейбніц помітив, що члени досліджуваного ряду з'являються у другому рядку. Це означає, що члени досліджуваного ряду можна подати як різниці сусідніх членів гармонічного ряду, тобто розкласти дріб $\frac{1}{k(k+1)}$ на суму елементарних:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Отже, тоді досліджуваний ряд, можна «розгорнути» як трубу телескопа:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + 0 + 0 + \dots = 1. \end{aligned}$$

Тобто досліджуваний ряд збігається до 1. З сучасного погляду, звісно треба розглядати не різницю розбіжних рядів, а різницю часткових сум:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, \text{ коли } n \rightarrow \infty$$

2. Ряд Мадгави —Ґреґорі — Лейбніца. Формулу для розвинення $\arctg x$ у степеневий ряд за степенями x і суму числового ряду, що виражається через число π було відкрито (перевідкрито, але не забуваймо про відсутність у ті часи швидкої наукової комунікації) принаймні трьома математиками: індійським математиком Мадгавою з Санґамаграми (1350—1425), шотландським математиком Джеймсом Ґреґорі (1638—1675) 1671 р. і Лейбніцем 1676 р.

Степеневий ряд для арктангенса

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

який збігається для $|x| \leq 1$ можна одержати інтегруванням геометричного ряду:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \right) du, |x| < 1.$$

Збіжність x у точках $x = \pm 1$ можна довести за допомогою теореми Абеля (Фихтенгольц, 2003, с. 485):

Якщо степеневий ряд збігається при $x = R$, то його сума зберігає неперервність і при цьому значенні x , тобто

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Якщо підставити в цей ряд $x = 1$, то одержимо числовий ряд Мадгави — Грегорі — Лейбніца:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \approx 0,78539816339744\dots$$

Лейбніц довів цю формулу суто геометрично (Leibniz's Formula for Pi, n. d.).

Хоча результат є красивим, одержаний ряд майже не придатний для практичного обчислення наближених значень числа π . Ряд збігається дуже повільно: обчислення 10 правильних десяткових знаків числа π потребувало б підсумовування 5 мільярдів членів ряду.

3. Ознака Лейбніца для знакопозначених рядів. Розгляньмо ряд, знаки членів якого чергуються:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n-1}U_n + \dots, U_i > 0$$

Теорема (Лейбніц, 1682). *Якщо члени знакопозначеного ряду справджують умови:*

$$1) U_i > 0, U_1 > U_2 > \dots > U_n > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0,$$

то ряд збігається, при чому його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Доведення можна знайти, зокрема, в книжці Фихтенгольц (2003, с. 381).

Список літератури

- Borwein, J., Bailey, D., & Girgensohn, R. (2004). *Experimentation in mathematics: Computational paths to discovery*. Wellesley, MA: A. K. Peters.
- Gupta, R. C. (1973). The Madhava—Gregory series. *Math. Education*, 7, B67–B70.
- Körle, H.-H. (2015). *Infinite series in a history of analysis: Stages up to the verge of summability*. Berlin: de Gruyter.
- Leibniz's Formula for Pi. (n. d.). In *ProofWiki*. Retrieved from https://proofwiki.org/wiki/Leibniz's_Formula_for_Pi#Historical_Note
- Triangular number. (n. d.). In *Wikipedia*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number
- Бородин, А. И., Бугай А. С. (1979). *Биографический словарь деятелей в области математики*. Киев: Радянська школа.
- Фихтенгольц, Г. М. (2003). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (8 изд.; Т. 2). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

ПРО ВНЕСОК М. В. ОСТРОГРАДСЬКОГО В РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В. О. Коваль, В. В. Листопадова

НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ, Україна

va67dim@gmail.com, listopadovavv@gmail.com

М. В. Остроградський видатний вчений, який зробив великий внесок у розвиток математичних наук, а саме працював у таких сферах, як: математичний аналіз, математична фізика, механіка, алгебра, теорія чисел та теорія ймовірності, гідромеханіка, теорія пружності та ін.

У математичному аналізі його досягнення полягають у дослідженнях на теми: «Варіація кратних інтегралів», «Метод послідовних наближень», «Перетворення змінних в кратних інтегралах», «Лінійні диференціальні рівняння», «Інтегрування раціональних дробів».

У статті «Заметка по теории теплоты», надрукованій в 1828 р. Остроградським була виведена формула, яка увійшла в усі підручники математичного аналізу під назвою формули Остроградського — Гауса:

$$\int_V \operatorname{div} F dV = \oint_S F dS. \quad (1)$$

Формула, яка пов'язує інтеграл, узятий за об'ємом, з поверхневим інтегралом за поверхнею, що обмежує цей об'єм, була застосована Михайлом Васильовичем до розв'язання деяких питань розповсюдження тепла в твердому тілі. Формулу (1) називають формулою Остроградського — Гауса, так-як вперше її показав К. Ф. Гаус в 1813 та 1830 роках на прикладі задач електродинаміки. У 1828 р. Остроградський вивів формулу (1) в загальному вигляді і представив її в вигляді теореми. Ця формула була узагальнена Остроградським на випадок n -кратних інтегралів у роботі 1834 р. «Мемуар об исчислении вариации кратных интегралов». У двох пізніших працях: «Об одном замечании относительно определенных интегралов, относящихся к теории ортогональных поверхностей», 1840 р. і «Об одном определенном интеграле», 1860 р. він вивчив цікаві виняткові випадки.

У роботах Остроградського формула (1) записана у вигляді:

$$\int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) \omega = \int (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) s, \quad (2)$$

де ω і s представляють собою диференціал об'єму і поверхні відповідно.

У сучасному вигляді $\omega = d\Omega$ — елемент об'єму, $s = dS$ — елемент поверхні, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функції, неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкнутій області простору, обмеженого замкнутою гладкою поверхнею.

У роботі «Заметка по теории теплоты», Михайло Васильович доводить формулу (3), яка являє собою інший запис формули (1):

$$\iiint_V \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) dx dy dz = \iint_S (P dy dz + Q dx dz + R dx dy). \quad (3)$$

До теорії інтегрування алгебричних функцій відноситься п'ять статей Остроградського (три з них від 1833 р.): «Мемуар об интегрировании рациональных дробей», «Продолжение мемуара об интегрировании рациональных дробей» і «Заметка о соотношении, которое может быть между интегралами алгебраических функций» і дві більш пізні – «Об интегрировании алгебраических функций» 1842 р. і «Мемуар об интегрировании рациональных функций» 1844 р.

В останній із вказаних робіт Остроградський запропонував свій метод знаходження інтеграла від раціональних функцій. Цей метод ефективний у тому випадку, якщо знаменник раціональної функції має кратні корні:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (4)$$

де P_1, P_2 — деякі многочлени, степені яких на одиницю менше степеней многочленів Q_1, Q_2 відповідно.

Розглянемо правильний дріб: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Розкладемо знаменник на множники:

$$Q(x) = (x - a)^k (x - b)^l \dots (x^2 + px + q)^m (x^2 + rx + s)^n \dots$$

Многочлен $Q_1(x)$ містить такі ж множники як $Q(x)$, але в степені на один менше; многочлен $Q_2(x)$ містить такі ж множники як $Q(x)$, але в першому степені. Тоді можна показати, що справедливий розклад за формулою (4).

Метод Остроградського полягає в тому, що ми записуємо многочлени, з невизначеними коефіцієнтами. Потім обчислюємо ці невизначені коефіцієнти та знаходимо інтеграл, що стоїть у правій частині рівності. В останньому інтегралі формули (4) стоїть більш проста раціональна функція, ніж у початковому інтегралі, тому його простіше обчислювати.

Розглянемо приклад (Орловський, 2006):

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Згідно з методом Остроградського, ми шукаємо розклад:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{Ex + F}{x^2 + 1} dx.$$

З парності підінтегральної функції випливає, що $B = 0, D = 0, E = 0$. Це дозволяє спростити розклад:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{Ax^3 + Cx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{F}{x^2 + 1} dx.$$

Диференціюючи і зводячи до спільного знаменника, отримуємо рівність

$$(F - A)x^4 + (3A - 3C + 2F)x^2 + (C + F) = 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях зліва і справа, отримуємо систему

$$\begin{cases} F - A = 0, \\ 3A - 3C + 2F = 0, \\ C + F = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, знаходимо

$$A = \frac{3}{8}, C = \frac{5}{8}, F = \frac{3}{8}.$$

Отже

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{x(3x^2 + 5)}{8(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

Роботи Остроградського по математичному аналізу мають не тільки і не стільки історичне значення: вони увійшли до сучасної математики як невід'ємна її складова і представляють собою те необхідне знаряддя, без якого математика уже не зможе приймати участь у вивченні явищ природи.

Список літератури

Орловский, В. Г. (2006). *Неопределённый интеграл: Практикум*. Санкт-Петербург: Лань.
Остроградский, М. В. (1958). *Избранные труды*. Москва: Издательство АН СССР.

ЕРМАКОВ ВАСИЛИЙ ПЕТРОВИЧ. ЧАСТНАЯ ЖИЗНЬ

Маловичко Т. В.

НТУУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,

Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Василий Петрович Ермаков — великий математик, автор около 150 работ, член-корреспондент Петербургской Академии наук, профессор Киевского университета, первый заведующий кафедрой высшей математики Киевского политехнического института. Он работал в таких областях как теория рядов, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, теория специальных функций, алгебра и теория чисел. Ему принадлежит один из важнейших результатов в теории рядов — общий признак сходимости рядов с неотрицательными невозрастающими членами.



Что же известно о его жизни помимо его достижений в математике? Кто были его родственники? Как вспоминали его современники? Что интересовало его помимо любимой науки?

Василий Петрович родился 27 февраля (11 марта) 1845 г. в селе Терюха, близ Гомеля. Отец его Петр Иванович, по происхождению крестьянин, сначала был писарем в имении Паскевича, а позже — учителем церковноприходской школы. Пахотной земли у семьи не было, и всё имущество состояло из избы с огородом. В семье было три сына: Михаил, Василий и Петр. После окончания Киевского университета старший Михаил работал врачом в Одессе, а младший Пётр — преподавателем математики в 1-й киевской гимназии, а затем в коллегии Павла Галагана (среднее учебное заведение в Киеве, преимущественно для детей из высшего общества) (Добровольский, 1981). Школа в деревне Грабовке Гомельской области гордится тем, что её основал Ермаков Григорий Иванович, дядя Василия Петровича (Пшеборский, 1922).

Первоначальное образование Василий Петрович получил в той же школе, где учительствовал отец. Для дальнейшей учёбы он был определён сначала в Гомельскую, а затем в Черниговскую гимназию. По окончании курса в последней в 1864 г. он получил первую премию за ученическое сочинение. В том же году он поступил в Киевский университет на математическое отделение физико-математического факультета.

В первое время студенту Ермакову приходилось очень тяжело материально, так как он находился на собственном обеспечении. Позже ему была назначена небольшая стипендия из частного фонда до окончания второго курса. На

третьем курсе ему приходилось жить за счёт частных уроков, и лишь на последнем курсе он стал получать пособие от университета — 200 руб. в год.

12 сентября 1868 г. Ермаков получил степень кандидата за работу «Статика, изложенная с помощью метода кватернионов». К концу 1879 г. Ермаков успешно сдал устные и письменные испытания на степень магистра.

В августе 1871 г. в Киеве В. П. Ермаков представил открытый им новый признак сходимости рядов, что сделало его имя известным математической общественности. 23 декабря 1873 г. В. П. Ермаков защитил диссертацию на тему «Общая теория интегрирования линейных дифференциальных уравнений высших порядков с частными производными и с постоянными коэффициентами. В начале 1874 г. Ермаков был избран доцентом по кафедре чистой математики Киевского университета, где проработал 25 лет. Также с 1871 г. в течении нескольких лет Ермаков был учителем в Киевской женской гимназии, с 1874 г. по 1880 г. состоял преподавателем в военной гимназии, а также читал геометрию на Высших женских курсах.

В. А. Добровольский (1981) пишет, что 1876 г. Василий Петрович был женат на Елизавете Степановне Лукомской — преподавательнице женской гимназии. У них было трое детей: сын Вадим и две дочери — Ольга и Нина.

Однако по версии *Geni* — интерактивного сервиса, который был создан 16 января 2007 года и позволяет создавать генеалогическое древо онлайн и интегрировать собственное древо с родословными других участников, женой Василия Петровича была Эмилия Степановна Лукомская рождённая в 1853 г., дочь Степана Ниловича Лукомского и Надежды Ивановны Лукомской. Елисавета Степановна же, сестра её, вышла замуж за станового пристава Сенковского.

13 сентября 1877 г. он защитил диссертацию для получения степени доктора на тему «Интегрирование дифференциальных уравнений механики» и вскоре получил звание экстраординарного профессора. В 1884 г. он был избран в члены-корреспонденты Петербургской Академии наук. В 1888 г. он получил звание ординарного профессора. В марте 1899 г. В. П. Ермаков получил звание заслуженного профессора и был переведён в сверхштатные профессора. В августе 1889 г. он был приглашён на кафедру высшей математики, которую и возглавил, только что организованного тогда Киевского политехнического института с оставлением на службе в университете. В 1884—1886 годы издавал «Журнал элементарной математики». В 1889 г. стал одним из организаторов Киевского физико-математического общества.

После 35-летней работы в Киевском университете в 1909 г. в связи с преклонным возрастом и ухудшением здоровья В. П. Ермаков полностью перешел в Политехнический институт, где продолжил работать до 21 февраля 1919 г., когда подал написанный кем-то из членов семьи рапорт: «Довожу до Вашего сведения, что, заболев сего числа, служебные обязанности нести не могу». Студенты ещё долго приходили к любимому профессору, находящемуся в постели, сдавать экзамены. Силы постепенно оставляли Ермакова, он страдал от склероза, жить приходилось в тяжёлых материальных условиях. Кроме того, на Васи-

лия Петровича обрушилось личное горе: сын и старшая дочь умерли от туберкулеза (Грацианская, 1956).

16 марта 1922 г. Василий Петрович скончался. Он был похоронен на институтском кладбище, а перед второй мировой войной его останки были перенесены на Лукьяновское кладбище г. Киева.

Творческая манера Василия Петровича была очень самобытна. В частности, весьма оригинален был его взгляд на метод знакомства с новой работой. Он считал, что сначала надо прочесть введение, чтобы узнать, что хочет доказать автор, потом заключение, чтобы установить, чего он достиг, наконец, ознакомиться с серединой работы, чтобы понять, каким методом пользуется автор. После этого надлежит закрыть книгу и, если изучаемый вопрос достоин внимания, попробовать получить все результаты самостоятельно. Применяя этот метод, Ермаков действительно получал многие известные результаты в более простой и краткой форме.

Ученики и близкие В. П. Ермакова в своих воспоминаниях отмечают его обаяние, душевную красоту и доброту. Один из его учеников, а впоследствии профессор Харьковского университета А. П. Пшеборский вспоминал: «Когда я узнал о смерти Василия Петровича, в моей памяти встал мой дорогой учитель «Василь», с его оригинальной внешностью, несколько трясущейся головой, длинной бородой, живым добродушно-лукавым взглядом, несколько заикающийся, подчас резкий, но какой-то незлобивый и вместе с тем особый, непохожий на других». Также он писал: «Как профессор В. П. пользовался глубоким уважением и огромной любовью. В своих отношениях к учащимся он был иногда резок и грубоват, но вместе с тем крайне незлобив и незлопамятен, поэтому многое, или вернее все прощалось «Василю», как его называли в моё время между собой студенты. Всякий знал, что у В. П. он всегда найдет самую горячую поддержку в своей научной работе». Куда как менее сдержанно Василия Петровича вспоминал Андрей Белый: «В Москве математики тихие, а в Киеве есть математик-буян Ермаков, борода Черномора; и все-то воюет, кричит» (Белый, 1930). А. П. Пшеборский же писал: «Для нас, его учеников, и для тех, кто с ним непосредственно соприкасался, может быть и лучше, что Василий Петрович был таким, каким он был: человеком не только ума, но и чувства. Он всегда горел сам и воспламенял окружающих, которые хоть немного были способны воспламеняться» (Пшеборский, 1922).

Страстью В. П. Ермакова была не только математика, но и трогательная любовь к природе. На своей даче в Китаево он развёл прекрасный сад из лучших фруктовых и южных декоративных растений, где вынужден был вести борьбу с муравьями, которой даже посвятил публикацию (Ермаков, 1914).

Список литературы

Белый, А. (1930). *На рубеже двух столетий*. Москва: Земля и фабрика.

Гісторыя школы (б. д.). Одержано з <http://grabovka.gomel.by/index.php/history>

Грацианская, Л. Н. (1956). Василий Петрович Ермаков. *Историко-математические исследования*, 9, 667—690.

- Добровольский, В. А. (1981). Василий Петрович Ермаков. Москва: Наука.
- Ермаков, В. П. (1914). Вред, приносимый муравьями в садоводстве. *Прогрессивное садоводство и огородничество*, (8), 557—559.
- Пшеборский, А. П. (1922). В. П. Ермаков. *Наука на Украине*, (3), 285—287.

**ПІДРУЧНИКИ З МАТЕМАТИКИ
ЧАСІВ УКРАЇНСЬКОЇ РЕВОЛЮЦІЇ 1917—1921 РР.
У ФОНДАХ ПЕДАГОГІЧНОГО МУЗЕЮ УКРАЇНИ**

О. П. Міхно¹, В. О. Гайдей^{1, 2}

*Педагогічний музей України, Київ, Україна
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна
amihno@ukr.net*

У 2015 р. Педагогічним музеєм України започатковано видавничу серію «Бібліофонд Педагогічного Музею», мета якої — оприлюднення результатів наукового опрацювання фондів музею у формі каталогів книжкових музейних колекцій (Міхно, 2016). У 2017 р. науковцями музею підготовлено третій випуск цієї серії — каталог-путівник «Українська книга 1917—1921 рр.» (Гайдей, Міхно, 2017), у якому представлено всі видання зазначеного періоду, що зберігаються у фондах музею і входять до складу наукового об'єкту «Колекція стародруків Педагогічного музею України» (рукописи, стародруки та рідкісні видання 1477—1923 рр.), що становить національне надбання.

Мета і завдання каталогу-путівника «Українська книга 1917—1921 рр.» — не простий бібліографічний перелік літератури, а й представлення фактологічних відомостей, які допомагають розкрити історію створення та подальшу долю конкретної книги. Ці відомості систематизовано у анотованих покажчиках «Автори, упорядники, редактори, перекладачі, художники», «Видавничі організації», «Культурно-освітні організації, педагогічні товариства». Крім того, каталог-путівник містить такі покажчики: іменний, назв творів друку, друкарень, видавничих організацій і установ, видавців і видавництв, місць видань творів друку, екслібрисів, печаток, штампів, присвят, епіграфів та інших поміток.

Загалом колекція видань 1917—1921 рр., що зберігаються у фондах Педагогічного музею України, нараховує 162 одиниці зберігання, з-поміж них — 11 підручників з математики. Відповідно до Порядку відбору рукописних книг, рідкісних і цінних видань до Державного реєстру національного культурного надбання (2016), науковцями музею віднесено до українських видань періоду 1917—1921 рр. книги та періодичні видання, надруковані українською мовою, та надруковані іншими мовами на території сучасної України.

Усі видання, уміщені в каталозі-путівнику, укладачами опрацьовані *de visu*, що дало змогу застосувати повний бібліографічний опис, без скорочень, зі збереженням усіх відомостей, представлених на титульному аркуші та у змісті. Укладачами розкрито псевдоніми та криптоніми, встановлені місце і рік видання книги, відсутні на титульному аркуші; повністю збережено особливості орфографії описуваних видань.

Подаємо в алфавітному порядку авторів і назв повні бібліографічні описи підручників з математики з розкриттям змісту та короткою інформацією про авторів.

1. Коваленко О. Практична геометрія: Підручник для вищих початкових шкіл та для молодших клас шкіл середніх. Книжка 1: з 67 рисунками у тексті / Олександр Коваленко. — Київ; Відень; Харків: Товариство «Дзвін». Українська школа. Під редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка. [Відень: Друк Кароля Горішека], 1919. — 117 с.

Від автора. Вступ. Геометричні тіла. 1. Брус. 2. Куб. 3. Поле замкненої фігури. 4. Поле поверхні тіл. 5. Об'єм тіл. 6. Призма. 7. Трикутники. 8. Задачі на будівництво. 9. Многокутники. 10. Многостінні призми. 11. Піраміда. 12. Циліндр. 13. Конус.

Коваленко Олександр Михайлович (псевдоніми і криптоніми: О. Коваленко-Журбенко, О. К. Журбенко, О. К.; 1875—1963) — український учений, дипломат, громадсько-політичний діяч, педагог. Закінчив Харківський технологічний інститут (1903). Відтоді служив на Чорноморському флоті. 1905 брав участь у повстанні на броненосці «Потьомкін». Потім перебував на еміграції у Франції та Швейцарії. Викладав математику та фізику в середній школі в Парижі, 1915—1916 редагував двотижневик «L'Ukraine» (м. Лозанна, Швейцарія). 1917 повернувся в Україну, очолював департамент морської освіти Міністерства морських справ, 1919—1922 був дипломатом УНР (консулом у Женеві, потім — у Парижі; восени 1920 — секретар делегації УНР на асамблеї Ліги Націй у Женеві). Від 1922 — у Чехо-Словаччині: викладав механіку, геометрію, опір матеріалів в Українській господарській академії та техніко-господарському інституті у Подєбрадах. Після 2-ї світової війни жив і працював у Мюнхені (Німеччина) та Женеві. Автор підручників з математики та механіки.

2. Степовик О. Арифметичний задачник задля початкової школи, на три книжки. Книжка друга (2-й та 3-й роки вчення). Задачі на числа більші сотні, на гуртові названі числа та на простіші частки / зложив О. Степовик [О. Комаров]. — Видання четверте. — Харків: Видання Харківського Губернського Земства [Друкарня «Просвещение»], 1918. — 112 с.

Задачі на сотні. Задачі на тисячі. Задачі на всі дії. Названі числа. Відповіді на задачі.

3. Комаров А. Арифметический задачник для начальных городских и сельских училищ в трех выпусках. Выпуск I. Задачи, примеры и вопросы на числа первой сотни / составил А. Ф. Комаров. — 24 изд. (напечатанное с 19-го изд.). Харьков: Издание Харьковского Губернского Земства, 1918. — 56 с.

Предисловие. 1. Задачи на числа первого десятка. 2. Задачи на десятки. 3. Простейшие случаи действий с двузначными и однозначными числами. 4. Сложнейшие случаи действий с двузначными и однозначными числами.

Комаров Олександр Федорович (псевдонім: О. Степовик; 1842—1918) — український математик, педагог. Закінчив природниче відділення фізико-математичного факультету Харківського університету. Під псевдонімом Степовик був зачинателем жанру української науково-художньої літератури, автором шкільних підручників та методичних посібників з математики, які перевидавалися багато разів, навіть на початку радянської доби. Він був одним з найактивніших членів створеного у 1898 р. українською громадою у Санкт-Петербурзі «Благодійного товариства видання загальнокорисних і дешевих книг» (першого в Російській імперії українського видавництва, офіційно дозволеного царською владою).

4. Лебединцев К. Концентрическое руководство алгебры: для средних учебных заведений. Часть 2-я / К. Ф. Лебединцев. — 4-е изд. (без перемен со 2-го изд.). — Петроград; Киев: Сотрудник. Типография «Мир науки», 1919. — 48 с. [203 с.][неповний примірник 48 с.].

Предисловие. VII. Учение об уравнениях и неравенствах. VIII. Дополнительные статьи. IX. Основы учения о числе.

5. Лебединцев К. Ф. Лічба й міра: Арифметика в зв'язку з початками геометрії: Для трудової школи або самонавчання / К. Лебединцев. — Київ: Державне видавництво. 8-ма Радянська друкарня, 1921. — 152 с.; іл.

Передмова. 1. Як звуться й записуються числа. 2. Як розв'язувати арифметичні задачі. Де-які штучні засоби розв'язання задачі. 3. Міри та міряння. 4. Додавання, віднімання, множення й ділення цілих чисел, абстрактних та йменованих. 5. Міряння площі і об'ємів, в зв'язку з необхідними відомостями з геометрії. 6. Короткі відомості про степенування та корінювання чисел. Додаток [викройки геометричних тіл].

6. Лебединцев К. Основы алгебры: Применительно к курсу высших начальных училищ, торговых школ, мариинских женских гимназий и женских епархиальных училищ / К. Ф. Лебединцев. — 4-е изд. Петроград; Киев: Сотрудник. Тип. Всероссийского Земского Союза, Одесса, 1919. — 144 с.

Предисловие к 1-му изданию. Предисловие ко 2-му изданию. 1. Введение. 2. Первые четыре действия над алгебраическими числами. 3. Четыре действия над алгебраическими выражениями и их приложение к решению уравнения. 4. Общее понятие о равенствах; уравнения первой степени. 5. Основы учения о корнях. 6. Квадратные уравнения.

Лебединцев Костянтин Феофанович (1878—1925) — український математик-методист, педагог, представник славетного роду Лебединцевих. Випускник фізико-математичного відділення природничо-історичного факультету Київського університету Св. Володимира (1900). Викладав математику в різних навчальних закладах Києва: в 2-й гімназії, 1-му комерційному училищі, на Вищих жіночих курсах А. Жекуліної. Протягом 1909—1919 жив і працював у Москві. З 1919 — консультант Народного комісаріату освіти УСРР. Викладач (з 1921), професор (з 1923) Київського інституту народної освіти. Автор підручників з алгебри.

7. Лубенец Т. Арифметические задачи: Пособие при обучении арифметике в классах для взрослых / составил Т. Лубенец. — 3-е изд., исправл. — Киев: Тип[ография] Отдела Войсковой Кооперации, 1918. — 80 с.

1. Единицы первого разряда (от 1 до 10). 2. Единицы второго разряда (от 10 до 100). 3. Единицы третьего разряда (от 100 до 1000). 4. Четырехзначные числа. 5. Многочисленные числа. 6. Составные числа. 7. Счетоводство. 8. Квадратные меры. 9. Кубические меры. 10. Приложение.

Лубенец Тимофій Григорович (1855—1936) — український педагог, фахівець з теорії та методики початкового навчання, дошкільного виховання та освіти дорослих. У 1873 закінчив Чернігівську земську вчительську семінарію. Був учителем початкової школи, початкового училища, інспектором народних училищ при Управлінні Київського навчального округу. Автор підручників і посібників для початкової школи. У фондах Педагогічного музею України зберігається комплекс матеріалів Тимофія Лубенця, який нараховує близько 200 одиниць зберігання (фото, документи, рукописи, вітальні листи тощо).

8. Слетов Н. Прямолинейная тригонометрия для средних учебных заведений: с 78 чертежами в тексте / Н. П. Слетов, директор Митавского реального училища в Пятигорске. — 3-е изд. (без перемен со 2-го, исправл.) — Петроград; Киев: Сотрудник. Киев: Типография «Мир Науки», 1918. — 177 с.

Часть 1. Решение треугольников. 1. Решение прямоугольных треугольников. 2. Решение косоугольных треугольников. 3. Формулы преобразования тригонометрических выражений и их применение к решению треугольников. 4. Вычисление значений тригонометрических величин. Часть 2. Гониметрия. Приложение (Трехзначная таблица натуральных тригоном. величин с табличками поправок на минуты).

Сльотов Микола Павлович (1872—1943) — російський і латвійський математик, педагог. Жив і працював у Ризі, викладав у середніх навчальних закладах: Жіночій реальній нео-

гімназії Н. С. Вінзарас-Веркшанської, Урядовій реальній гімназії, Гімназії 1-го товариства викладачів (завідувач), у 1915 — директор Митавського реального училища.

9. Чепіга Я. Арифметичні правила для початкових шкіл / склав Я. Чепіга. — 2-ге вид. — [Київ]: Українська школа. Під орудою С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка. Друкарня Акц[іонерного] Т[оварист]ва «Петро Барський» у Києві, 1918. — 40 с.

Від автора. Числення (лічба, нумерація). Додавання (складання). Віднімання (одліч). Перевірка додавання та віднімання. Зміна суми й різниці або остачі. Множення (помноження). Ділення (поділ). Перевірка множення й ділення. Зміна добутку й частки. Скабки. Іменовані (мірні) числа. Таблиці державних мір. Додавання (складання) багатоіменних чисел. Віднімання (одліч) багатоіменних чисел. Множення багатоіменних чисел. Ділення (поділ) багатоіменних чисел. Задачі на лік часу. Дробі. Збільшення й зменшення дроба. Додавання й віднімання дробів. Множення дробів. Ділення дробів. Десяткові дробі. Додавання й віднімання десяткових дробів. Множення десяткових дробів. Ділення десяткових дробів. Проценти.

10. Чепіга Я. Задачник для початкових народних шкіл. Рік перший / Я. Чепіга. — 3-тє вид. — Київ; Відень: Товариство «Дзвін». Видавництво «Українська школа». Під орудою С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка. Друкарня Гольцгавзена, Відень, 1918. — 64 с.

Один, багато, нічого. Два. Складання й одліч одиницями. Знайомство з числами і цифрами від 5 до 10. Складання й одліч одиницями до 10. Повторення вивченого. Складання та одліч кількома одиницями. Повторення. Повторення. Скоря лічба. Повторення вивченого. Скоря лічба. Гроші — мідні й срібні, купівля й продаж. Скоря лічба. Лічба до 100. Складання десятками. Помноження. Поділ. Всі дії з десятками. Збільшення і зменшення на кілька одиниць. Одліч з переходом через десяток. Складання й одліч. Помноження. Таблиця помноження. Поділ. Таблиця поділу. Всі дії. В скільки разів більш і менше. Повторення всіх дій. Скоря лічба.

Чепіга (Зеленкевич) Яків Феофанович (1875—1938) — український педагог, психолог, громадський діяч. У 1898 закінчив Новобузьку вчительську семінарію. Вчителював у Донбасі. З 1918 жив у Києві, викладав у вищих навчальних закладах. У 1926 переїхав до Харкова, де працював в Українському науково-дослідному інституті педагогіки УРСР (1928—1934). Автор праць з проблем морального і трудового виховання, методичних посібників і підручників з української мови й арифметики для початкової школи. Заарештований 1937. Помер 22 серпня 1938 в заслання.

11. Шарко В. Арифметика: Систематичний курс. Частина перша (Цілі числа). — Київ: Видання Товариства Шкільної Освіти. Друкарня Акц[іонерного] Т[оварист]ва «Петро Барський в Києві», 1917. — 76 с.

I. Вступ. II. Нумерація. III. Додавання. IV. Віднімання. V. Зміна суми та різниці. VI. Множення. VII. Ділення. VIII. Зміна добутку та частки. IX. Іменовані, або мірні числа. Дії з іменованими числами. Задачі на обчислення часу. Від автора.

Шарко Вадим Вікторович (1882 — 1930?) — український математик, педагог. Закінчив Колегію Павла Галагана та Київський університет. В 1917—1921 і 1923—1925 викладав математику в Першій українській гімназії ім. Т. Шевченка й одночасно був професором математики в Київському кооперативному інституті. У 1918 — директор підготовчих курсів Українського народного університету, який було урочисто відкрито 5 жовтня 1917 у приміщенні Педагогічного музею в Києві. Співавтор проєктів шкільних програм з арифметики, алгебри і геометрії, автор українського підручника з арифметики для початкових шкіл. Член Математичної та Фізичної Секцій Природничого Відділу Інституту української наукової мо-

ви ВУАН, а з 1926 — штатний редактор. 1929 заарештований і засуджений за сфабрикованою справою СБУ до висилки за межі України строком на 3 роки. Подальша доля невідома.

З метою надання зацікавленому читачеві якнайширшого доступу до серії «Бібліофонд Педагогічного Музею» видання виходить у двох варіантах: друкованому та електронному, який розміщено на сайті Педагогічного музею України <http://pmu.in.ua/> у розділі «Публікації».

Список літератури

- Гайдей, В. О., Міхно, О. П. (2017). *Українська книга 1917—1921 рр. у фондах Педагогічного музею України: Каталог-путівник*. О. В. Сухомлинська (наук. консультант). Бібліофонд Педагогічного Музею» (Вип. 3). Київ: ПМУ.
- Міхно, О. (2016). Реалізації місії Педагогічного музею України у видавничій діяльності. У кн. Я. Ткачук, А. Королько (ред.). *Сучасний контент. Музейна галузь. Історія, здобутки та перспективи. Матеріали Міжн. наук. конф. з нагоди 90-річчя заснування Національного музею народного мистецтва Гуцульщини та Покуття імені Й. Кобринського (м. Коломия, 6—8 жовтня 2016 р.)* (с. 340—344). Коломия: Вік.
- Порядок відбору рукописних книг, рідкісних і цінних видань до Державного реєстру національного культурного надбання (2016). [Електронний ресурс]. Одержано з <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/z0936-16>

МЕТОДУ ЗАДАЧІ РІМАНА — ГІЛЬБЕРТА (МЕТОДУ АМШ) — 55

В. В. Хорошун

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна

khoroshun_vv@ukr.net

У квітні наступного року виповнюється 55 років із дня опублікування в Журналі Технічної Фізики (1962, № 4, 381—394) одного із найвідоміших чисельно-аналітичних методів *математичної теорії дифракції*, який вже давно став класичним, методу задачі Рімана — Гільберта, названого на честь його авторів методом АМШ.



З. С. Агранович



В. А. Марченко



В. П. Шестопапов

Ураховуючи те, що метод АМШ достатньо відомий, зупинимося лише на деяких маловідомих фактах із створення, застосування та його подальшого розвитку.

Математики З. С. Агранович і В. О. Марченко на прохання їхнього товариша фізика В. П. Шестопапова вирішили у строгій постановці запропоновану ним задачу про дифракцію плоскої монохроматичної лінійно поляризованої електромагнітної хвилі на періодичній ґратці з нескінченно тонких та ідеально провідних стрічок. Було розглянуто випадок нормального падіння хвилі на ґратку. Для визначення невідомих амплітуд дифракційних спектрів була одержана нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, матричні елементи якої виражалися через поліноми Лежандра.

В. П. Шестопапов — ініціатор та активний організатор всього проекту, дуже усвідомлював усю важливість розв'язання даної задачі у зв'язку з актуальною проблемою освоєння діапазону міліметрових та субміліметрових хвиль. Будучи завідувачем кафедри теоретичної радіофізики ХДУ, він виділив на допомогу З. С. Аграновичу, який займався визначенням коефіцієнтів одержаної СЛАР-2, м. н. с. А. Ю. Титаренка, який робив необхідні розрахунки на арифмометрі та будував графіки, за що одержав щиру подяку від авторів у надрукованій ними статті. Копії цих фотоматеріалів і досі зберігаються в моєму особистому архіві.

Робота по застосуванню методу АМШ для розв'язання задач дифракції електромагнітних хвиль на стрічкових ґратках була розпочата за рік до публікації статті. Це дало змогу вже у червні 1962 року зробити доповіді на II Всесоюзному симпозиумі по дифракції хвиль (м. Горький, зараз Н.-Новгород) Тартаковский (1962).

На секції «Періодичні ґратки» були представлені доповіді О. А. Третьякова, В. В. Хорошуна, В. П. Шестопалова (випадок нормального падіння електромагнітної хвилі на подвійну ґратку), та А. І. Адоніної і В. П. Шестопалова (випадок похилого падіння). Слід також відзначити роботу В. В. Маліна, який методом Л. Левіна звів задачу дифракції на ґратці до сингулярного інтегрального рівняння. Заслуговує на увагу також доповідь С. О. Масалова, Є. М. Подольського і Є. І. Тарапова, у якій уперше розглянуто дифракцію хвиль на періодичній ґратці з ідеально провідних брусів прямокутного поперечного перетину, а також випадок довільного падіння електромагнітної хвилі на стрічкову ґратку. Роботу секції відкрив Л. А. Вайнштейн. Його доповідь була присвячена дифракції плоских хвиль на періодичних ґратках із кругових нескінченних циліндрів.

Таким чином, із п'яти представлених на секції доповідей три були зроблені харківськими вченими, із них дві доповіді — із використанням методу задачі Рімана — Гільберта, причому в роботі А. І. Адоніної і В. П. Шестопалова матричні елементи нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для дифракційних спектрів виражалися через поліноми Лежандра і функції Лежандра першого роду.

Саме ця група дослідників здійснила масований прорив у резонансну область електродинаміки періодичних структур. До вказаних вище робіт слід додати роботи: Гестрин (1964), Агранович (1964), Марченко (1965), Третьякова (1965), Кошпаренок (1971), Радін (1973), Дорошенко (2009), Хорошун (1967; 1990; 1998) як нові напрямки досліджень в математичній теорії дифракції хвиль на періодичних структурах.

Особливо слід підкреслити, що метод АМШ є математичним полігоном для випробування своїх математичних здібностей для всіх тих дослідників, які вирішили опанувати цей метод. Тут доречно згадати про слова одного шотландського професора математики, який на питання, чому він не використовує в своїх дослідженнях метод АМШ, відповів, що йому потрібен рік, щоб оволодіти цим методом. Доцільно відзначити також, що цей метод стимулює пошук нових підходів до розв'язання дифракційних задач, а саме — перейти від термінів напруженості полів на апертурах ґратки до токових представлень на стрічках ґратки та інше. Дуже цікаві результати недавніх досліджень Хорошун (2015) стосовно поліномів $\mu_n(x)$, які були введені в методі АМШ при визначенні коефіцієнтів одержаної СЛАР-2. Унаслідок тривалого пошуку вдалося встановити, що такі поліноми вперше було розглянуто в 1890 році

Р. Семпсоном (R.Sampson) у гідродинаміці як частковий випадок поліномів Генбауера, а також через поліноми Лежандра $P_n(x)$, а саме:

$$\mu_n(x) = \frac{P_{n-2}(x) - P_n(x)}{2n-1}, \quad (n \geq 2).$$

Це дає можливість інакше підійти до проблеми визначення матричних елементів СЛАР-2.

Метод АМШ хочеться порівняти з еталоном метру, який виготовлено з платино-іридієвого сплаву і який знаходиться в Луврі. Незважаючи на те, що зараз існують досконаліші лазерні технології, він залишається ЕТАЛОНОМ.

Список літератури

- Khoroshun, V. V. (1990). Optimization of the spectral characteristics of strip-type arrays. *Telecommun. and Radioing.*, 45(3), 131–133.
- Агранович, З. С, Шестопапов, В. П. (1964). Распространение электромагнитных волн в кольцевом волноводе. *ЖТФ*, 34(11), 1950—1961.
- Гестрин, Г. Н., Литвиненко, Л. Н., Маслов, К. В., Шестопапов, В. П. (1964). Дифракция и распространение электромагнитных волн в плоских и цилиндрических периодических структурах специальной геометрической формы. *ЖТФ*, 34(11), 1962—1970.
- Дорошенко, В. А., Кравченко, В. Ф. (2009). *Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах*. Москва: Физматлит.
- Кошпаренко, В. Н., Шестопапов, В. П. (1971). Дифракция плоской волны на круговом цилиндре с продольной щелью. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 11(3), 719—737.
- Марченко, В. А., Сологуб, В. Г. (1965). Возбуждение кольцевого волновода диполем. В кн. *Сб. Радиотехника*, (1). Харьков: Изд-во ХГУ.
- Радин, А. М., Шестопапов, В. П. (1973). Дифракция волн на сфере с отверстиями. *ДАН СССР*, 212(4), 838—841.
- Тартаковский, Б. Д. (1962). Второй Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. *УФН*, 78(4), 701—721.
- Третьякова, С. С., Третьяков, О. А., Шестопапов, В. П. (1965). Излучение электромагнитных волн электронным потоком, движущимся над дифракционной решеткой. *Радиотехника и электроника*, 10(7), 1233—1244.
- Хорошун, В. В. (1967). Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решетке с гиромангнитной средой. В *Сб. Радиотехника*, (4). Харьков: Изд-во ХГУ.
- Хорошун, В. В. (1998). О модификации метода задачи Римана-Гильберта для случая наклонного падения плоской электромагнитной волны на решетку из лент. *Вестн. Харьковск. ун-та*, (405), 137—141.
- Хорошун, В. В. (2015). О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала $[-1,1]$. В кн. *Матеріали Шістнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (с. 258—259). Київ: НТУУ «КПІ».

IV

СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

СХЕМА РОБОТИ ВИКЛАДАЧА З ТЕСТАМИ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

**І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко,
Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова**

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

a.dyx@mail.ru

У доповіді розглянуто схему роботи викладача з тестами для контролю знань студентів з вищої математики.

У сучасних умовах реформування освітньої галузі актуальною є проблема розвитку професійної компетентності викладачів вищих навчальних технічних закладів. Стрімкий розвиток засобів і технологій організації освітнього процесу породжує проблему відповідності професійного рівня викладачів вимогам розвитку інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ)

Контроль знань студентів є одним з найважливіших складових навчального процесу. Завдяки такому контролю між викладачем і студентами встановлюється «зворотний зв'язок», який дозволяє оцінити динаміку засвоєння навчального матеріалу, рівень володіння системою знань, умінь і навичок.

Для визначення якості знань студентів необхідні відповідні методи контролю засвоєння матеріалу. Одним з таких методів є тестування — один з найоб'єктивніших методів оцінювання знань, що не залежить від настрою викладача та його ставлення до конкретного студента (Аванесов, 1994).

Тестові технології контролю знань і умінь студентів усе ширше застосовуються у вищих навчальних закладах України. Стримуючим фактором застосування тестування є відсутність даних про якість тестів і надійності одержуваних результатів контролю. У багатьох випадках на сьогоднішній день тестування в навчальний процес упроваджується непрофесійно.

Обмежене застосування тестування з вищої математики має місце у зв'язку з тим, що викладачі сприймають тести лише як певні психодіагностичні методи, більше придатні до гуманітарних наук. Це зумовлено недостатнім упровадженням математичної теорії, яка може допомогти зробити тест надійним засобом вимірювання знань. Саме тому є актуальним питання розроблення схеми роботи викладача з тестами з вищої математики, яка включає оцінювання якості розроблених тестів та забезпечує об'єктивність контролю знань студентів.

Загальну схему роботи викладача з тестами з вищої математики зображено на рис. 1. Розберімо її детальніше. На першому етапі викладач вирішує питання *вибору підходу до розробки тестів*, яке полягає у визначенні місця тестів з вищої математики серед критеріально- та нормативно-орієнтованих тестів. Це питання є важливим з точки зору визначення мети створення, рівня деталізації області змісту тесту, методів відбору тестових завдань, методів аналізу тестових завдань і тесту у цілому, принципу інтерпретації результатів тестування. Воно детально розглянуто в роботі Дудко (2014). Для тестів з вищої математи-

ки є необхідним об'єднання критеріально- та нормативно-орієнтованого підходів при оцінці навчальних досягнень. Таке об'єднання рекомендується при створенні тестів з вищої математики. Саме за такої реалізації інтерпретація результатів тесту по відношенню до певного змісту навчальної дисципліни не знімає можливості диференціації індивідуальних відмінностей учнів.



Рис. 1

На другому етапі викладач *складає специфікацію тесту*, яка містить основні характеристики змісту тесту в цілому, а також змісту і форм тестових за-

вдань. У специфікації необхідно вказати інформацію про мету тестування, структуру тесту, а також основні вимоги до правил і умов проведення тестування, обробки результатів тестування та їх інтерпретації.

На третьому етапі викладач розв'язує *задачу оцінювання змістовної валідності*. Процес оцінювання змістовної валідності тестів з використанням Google Docs додатку детально описаний у роботі Диховичний, Дудко (2016).

Коли розробник переконається, що тест володіє високою змістовною валідністю, він переходить до наступного етапу, *формування тестів у системі комп'ютерного тестування*. Пропонується для розміщення тестів використовувати систему Moodle, яка є потужним інструментарієм для створення тестів

Після розміщення тестів у системі комп'ютерного тестування викладач переходить до наступного етапу — *проведення пробного тестування*. При цьому виникає ряд питань, пов'язаних з організацією та проведенням тестування. Викладачу необхідно вжити спеціальних заходів, що забезпечують стандартизацію процедури виконання тесту. Стандартизація цієї процедури торкається питань формування репрезентативної вибірки випробовуваних, правильного інструментування, вибору оптимального часу тестування, вибору місця проведення.

Після проведення тестування викладач імпортує результати тестування у форматі .xls. Далі оцінюється якість тесту з використанням авторської *методики комп'ютерно-орієнтованого аналізу якості тестів з вищої математики*, в основу якої покладено сукупність статистичних методів, вбудованих в систему автоматизованого аналізу якості тестових завдань (СААЯТЗ) (Диховичний, Дудко, 2015). На основі проведеного аналізу *приймаються рішення щодо якості тесту та подальшої роботи з ним*, а тест та завдання тесту разом з їх статистичними характеристиками *зберігаються у базі каліброваних завдань*.

Якщо на основі аналізу зроблено висновок, що тест складений правильно, його в подальшому використовують для оцінювання знань з вищої математики для студентів технічних спеціальностей.

Якщо ж виявлено, що тест потребує деякої корекції, то шляхом видалення з нього неправильно складених завдань або додання нових завдань (з бази каліброваних завдань) тест оновлюється. Далі цикл повторюється. Знову оцінюється змістовна валідність тесту, тест формується або оновлюється в системі комп'ютерного тестування, проводиться ще одне пробне тестування, оцінюється якість тесту з використанням СААЯТЗ, зберігаються дані в базі каліброваних завдань, приймаються рішення щодо якості тесту та подальшої роботи з ним. Цикл завершується, коли прийнято висновок, що тест складений правильно.

Упровадження наведеної схеми роботи з тестами з вищої математики у процес підвищення кваліфікації викладачів сприятиме розвитку компетентності викладачів щодо оцінювання якості тестів з вищої математики, їх професійних компетентностей, покращенню контролю знань студентів з вищої математики та, як наслідок, підвищенню рівня навчальних досягнень студентів.

Список літератури

- Аванесов, В. С. (1994). *Научные основы тестового контроля знаний*. Москва: Исследовательский центр.
- Диховичний, О. О., Дудко, А. Ф. (2015). Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць*, (15 (22)), 140—144.
- Диховичний, О. О., Дудко, А. Ф. (2016). Оцінювання змістовної валідності тестів з вищої математики з використанням Google Docs додатку. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 52(2) <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1383/1032>
- Дудко, А. Ф. (2014). Концепція розробки комп'ютерних тестів з вищої математики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи*, (50), 44—48.

ЗНО-2016 З МАТЕМАТИКИ, ЯК ВІДДЗЕРКАЛЕННЯ СТАНУ СУЧАСНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Н. М. Задерей¹, Г. Д. Нефьодова¹, І. Ю. Мельник²

¹НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», Київ, Україна

²Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна
g.nefyodova@gmail.com, irina_m_5656@mail.ru

Хто не знає математики, не може взнати ніякої іншої науки
і навіть не може виявити свого неучтва.

*Роджер Бекон (1214—1294),
філософ, учений, викладач
Оксфордського університету*

З розвитком цивілізацій постійно та невпинно збільшувалася роль математики та її методів у пізнанні всесвіту. Усе глибшою ставала інтеграція математики з іншими науками, математичні методи стали потужним інструментом розв'язання складних задач, що виникають у різних сферах людської діяльності, тобто з часом відбувається поступовий процес математизації науки і практики.

У зв'язку з такими процесами майбутні фахівці різних галузей потребують серйозної математичної підготовки. Природничо-математична освіта визначає майбутнє науки та технологій, що є питанням національної безпеки.

Метою математичної підготовки в школі є не тільки підготовка майбутніх математиків, і не тільки поступове накопичування певної суми знань.

Вивчення математики має велике значення для розвитку логічного мислення школярів, пам'яті, уваги, наукової інтуїції, вміння зосереджуватись, наполегливо працювати для досягнення результату та інших важливих якостей, необхідних у повсякденному житті.

Наприклад, цінність у вмінні розв'язувати логарифмічні чи тригонометричні рівняння полягає не тільки в отриманих відповідях. Багатьом з учнів такі рівняння можуть у подальшому ніколи в житті і не зустрічатися. Але творчий пошук, подолання труднощів в освоєнні нового матеріалу, у здобутті нових складних умінь та навичок, успіх та задоволення від перевіреної відповіді вчать наполегливо працювати, не відхилятися від наміченої цілі та досягати її. Успіхи з математики практично гарантують успіх з інших дисциплін!

Публікація результатів зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики за 2016 рік у черговий раз привернула увагу освітян до якості шкільної математичної підготовки в Україні Офіційний звіт... Том 1, Том 2 (2016).

Тест ЗНО-2016 з математики складався з 33 завдань, на їх виконання було відведено 180 хвилин. Максимальна кількість балів, яку міг отримати учасник за завдання № 1—28, № 31 та № 32 (вони зараховувались як державна підсумкова атестація ДПА) становила 52 бали. Максимальна кількість балів за виконання всіх завдань ЗНО-2016 № 1—33 становила 62 бали.

Форми тестових завдань

- Завдання з вибором однієї правильної відповіді (№ 1—20) — завдання складається з основи та п'яти варіантів відповіді, з яких лише один правильний (оцінюється 0 або 1 бал)
- Завдання на встановлення відповідності («логічні пари») (№ 21—24) — завдання на встановлення відповідності (чотири «логічні пари») оцінюється в 0, 1, 2, 3 або 4 бали: 1 бал — за кожну правильно встановлену відповідність
- Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю (№ 25, 26) — завдання складається з двох частин (оцінюється в 0, 1 або 2 бали)
- Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю (№ 27—30) — завдання передбачає розв'язування задачі (завдання оцінюється в 0 або 2 бали)
- Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю (№ 31—33) — завдання № 31, 32 оцінюються в 0, 1, 2, 3 або 4 бали; завдання № 33 оцінюється в 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6 балів.

Для складання ЗНО-2016 з математики було зареєстровано 132605 осіб, фактично тест складало 123047 осіб.

Кількість осіб, які подолали поріг «склав/не склав» з математики у 2016 році становила 104812 осіб (85,18%), хоча пороговий бал становив лише 9 балів з 62 можливих.

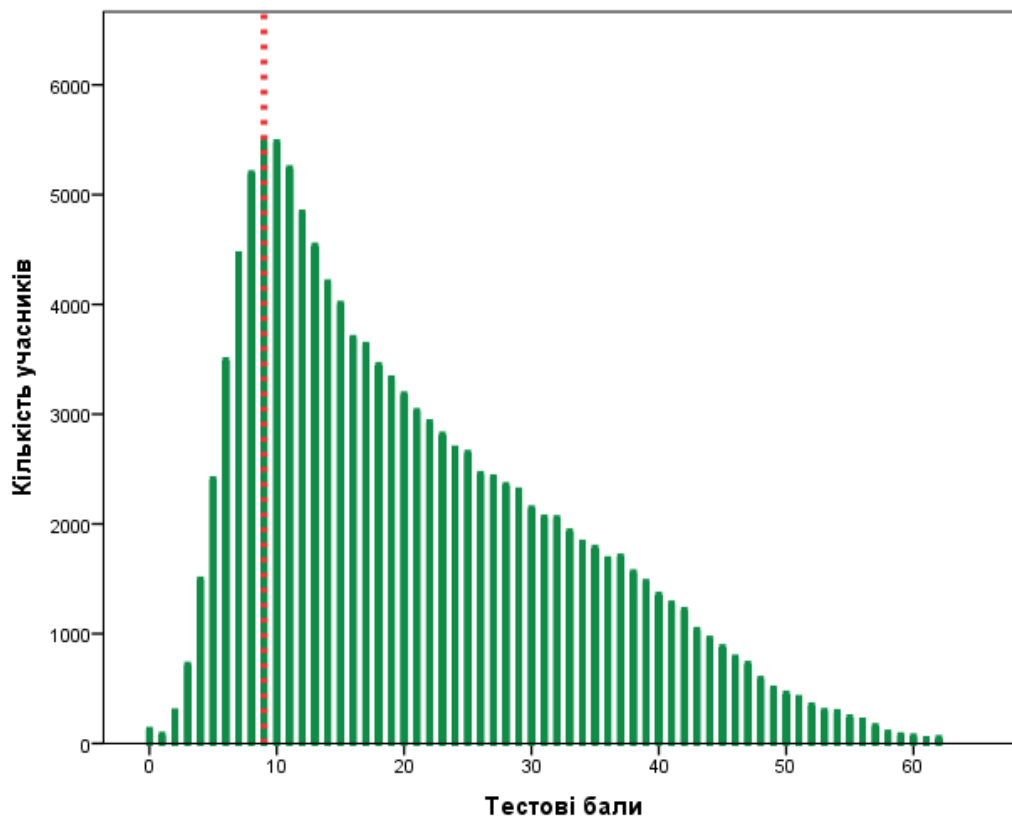
Знижуючи таким чином пороговий рівень (зазначимо, що 9 балів з можливих 62 балів — це лише 14,5% правильних відповідей), Український Центр Оцінювання Якості Освіти (УЦОЯО) досить поблажливо поставився до учасників тесту з математики.

Результати невтішні: за 200-бальною шкалою середній бал з математики становив 138 балів (слід пояснити, що 9-ти набраним балам тесту відповідало одразу 100 балів за 200-бальною шкалою). У тестових балах (з урахуванням тих учасників, що подолали прохідний бар'єр) середній бал з математики становив 21 бал з 62 можливих балів.

Ці показники не стосуються однаковою мірою всіх шкіл України. Випускники гімназій та ліцеїв складають ЗНО з математики в середньому набагато краще, ніж випускники звичайних загальноосвітніх шкіл. Міські школярі мають результати, що суттєво різняться з результатами сільських учнів.

Наступна діаграма, де червоною рисою відмічено пороговий рівень «склав/не склав», наочно демонструє, що більшість випускників шкіл засвоїла лише незначну частину матеріалу, що входив до математичних тестів. Різне зниження діаграми в напрямку нечисленних відмінників вказує на велику різницю в підготовці майбутніх розбудовувачів нашого суспільства. Школа, суспільство, вищі і насамперед роботодавці мають усіляко заохочувати кращих учнів та майбутніх студентів, що буде мотивувати тих, хто не встигає. Українська школа виявила недосконалість у викладанні предмету «Математика». Це підтвердили і середньої складності тести з математики (що спрощуються щорічно), і занижений бар'єрний поріг.

Розподіл учасників ЗНО-2016 з математики за кількістю набраних балів



Аналізуючи тестові завдання, розглядають такі статистичні характеристики, як складність тестового завдання (P-value), розподільна здатність тестового завдання (D-index) та коефіцієнт α -Кронбаха надійності та узгодженості тесту:

Складність тестового завдання (P-value) — визначається як відношення (у %) кількості балів, набраних усіма учасниками за виконання цього завдання, до максимальної кількості балів, яку вони могли б отримати за його виконання.

Розподільна здатність тестового завдання (D-index) — визначається як різниця складності завдання для сильної та слабкої груп учасників ЗНО (здатність виділяти учасників з різним рівнем навчальних досягнень).

Досліджуючи статистичні дані, можна визнати, що виникає парадоксальна ситуація: з одного боку математика стає все більш рушійною силою в розвитку суспільства, промисловості, технологій. А з другого боку, у суспільстві спостерігається втрата інтересу до цієї науки в сучасних школярів та, що суттєво, у їх батьків. Навчання математики перетворилося в гонку за оволодіння фрагментами знань, засвоюються алгоритми розв'язання різнотипних задач без фундаментальних загальноматематичних понять, строгих означень, умінь, навичок.

Статистичні характеристики результатів ЗНО з математики

Назва характеристики	Кількісне значення
Кількість учасників	123047
Максимально можливий бал	62 бали
Максимально набраний бал	48 учасників
Середній набраний бал	20,94 бали
Стандартне відхилення	12,33
Асиметрія	0,74
Екссес	2,77
Середня складність тесту (%)	36,05%
Середня розподільна здатність тесту (%)	53,41%
Коефіцієнт α -Кронбаха	0,92

Масивне, бездумне, без стрижня накопичення знань на короткочасний екзаменаційний період лише для складання тестів створює ілюзію освіченості. Домінуюча маса сучасних студентів має недопустимо низький рівень фрагментарної математичної підготовки. У переважної більшості студентів є значні проблеми навіть в елементарних питаннях шкільної математики: операції з дробами, навички роботи з дужками, знання і застосування формул скороченого множення, тотожні перетворення виразів, розв'язання найпростіших алгебраїчних рівнянь, знання властивостей та графіків елементарних функцій, тригонометричні формули, означення та властивості логарифмів тощо.

Велика відповідальність і навантаження падає на викладачів вищої математики в технічних вузах, особливо в першому семестрі. Потрібно не лише ліквідувати шкільні прогалини, а разом з тим і читати курс диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної та курс лінійної алгебри й аналітичної геометрії.

Середня і вища школи повинні тісно співпрацювати, щоб забезпечити якісну математичну освіту учням, студентам, так як вона є фундаментом процесів комп'ютеризації та інформатизації всіх сфер людської діяльності. Складові такої математичної освіти мають містити:

- розвиток мислення, інтелектуальних здібностей особистості;
- надання переваги активним методам навчання;
- навчання через співпрацю всіх суб'єктів освітнього процесу (учень — вчитель, студент — викладач);
- використання креативних інформаційних технологій, прозорість процесу навчання;
- збільшення арсеналу сучасних засобів пізнавальної діяльності, опанування сучасними методами наукового пізнання, пов'язаними із застосуванням інформаційних і комунікаційних технологій;
- індивідуальний підхід, безпосереднє, неперервне (можливо, інтерактивне) спілкування з учнями та студентами;

- точність, швидкість, прозорість контролю та розширення доступу до освітніх та наукових відомостей через інтернет;
- посилення мотивації, інтересу до навчання, насамперед до способів та методів здобування знань

Тільки спільна наполеглива праця викладачів вишів, учителів шкіл та гімназій, викладачів підготовчих курсів, учнів, студентів та їх батьків, що спрямована на покращення якості освіти, може призвести до результату, який зупинить шлях до неутца середньої освіти. Освітні реформи мають пропонувати ті освітяни, що повсякденно стикаються з викладанням та педагогічною діяльністю. Їх думки та пропозиції повинні братися до уваги та мати незаперечну перевагу.

Список літератури

- Офіційний звіт про проведення в 2016 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 1 (2016). Одержано з http://testportal.gov.ua/files/reports/ZVIT_ZNO_2016_Tom_1.pdf
- Офіційний звіт про проведення в 2016 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: Том 2 (2016). Одержано з http://testportal.gov.ua/files/reports/ZVIT_ZNO_2016_Tom_2.pdf
- Руденко, Н. М. (2016). Розвиток вітчизняної математичної освіти на рубежі тисячоліть. *Освітологічний дискурс*, (1 (13)), 169—171.
<http://od.kubg.edu.ua/index.php/journal/article/view/330/302>
- Триус, Ю. В., Бакланова, М. І. (2004). Інновації навчання математики та інформаційно — комунікаційні технології. У кн. *Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих науковців ІТОНТ-2004* (Ч. 2, с. 68—69). Черкаси: ЧНУ.

СПЕЦІАЛІЗАЦІЯ «СТРАХОВА ТА ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА» НА ФМФ: ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ

Т. Кулумбегова, О. А. Тимошенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

zorot@ukr.net

Запити ринку праці ХХІ сторіччя висунули нові вимоги до підготовки майбутніх математиків, що зумовило потребу у відкритті на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» нової спеціалізації «Страхова та фінансова математика». Студенти фізико-математичного факультету розпочали 2016—2017 навчальний рік за новими планами та програмами, в яких з'явилися такі нові дисципліни, як фінансова математика фондового ринку, статистичні методи в ризиковому страхуванні, методи математичної економіки, комп'ютерна статистика, аналіз часових рядів, біноміальні моделі фінансових ризиків. Наразі, студенти ФМФ навчаються досліджувати випадкові процеси та явища за допомогою математичного апарату. З одного боку, вони отримують фундаментальну сучасну математичну й аналітичну підготовку, можливу тільки на математичних факультетах класичних університетів. З іншого, їх підготовка тепер ще й стала чітко орієнтованою на вивчення, створення і застосування методів аналізу інформації, що має випадкову природу.

Водночас, введення нових предметів зумовило впровадження у процес навчання нових сучасних методів. Варто зауважити, що для ефективності навчання математичних дисциплін навчальний процес повинен базуватися на класичних методах, але студенти також з неабияким ентузіазмом сприймають різні новітні підходи до навчального процесу зі залученням сучасних технологій, мультимедійних чи онлайн-ресурсів.

Далі наведемо враження магістрів групи ОМ-61м, які обрали нову спеціалізацію, від нових програм та методичних підходів.

На одному із практичних занять з дисципліни «Фінансова математика фондового ринку» викладач попередила нас, що на наступному тижні ми пишемо контрольну роботу, але в новому форматі: без ручки і аркуша. Кожен мав принести на пару або ноутбук, або планшет, адже контрольна робота полягає у проходженні онлайн-тесту. Така цікава пропозиція викликала пожвавлення та неабияке зацікавлення серед студентів. Ми навіть забули думати про те, що контрольна — це, як завжди, серйозна справа, до якої нам доведеться готуватися. Також ніхто не висловив незадоволення з приводу того, що доведеться нести з собою гаджет, а це зайві кілограми в студентському рюкзаку.

На початку заняття студенти отримали особисті логіни та паролі для доступу до онлайн-тесту. Тест складався з 10 задач. Кожна задача мала від 4 до 6 варіантів відповідей, з яких лише один варіант є правильним.

Поговоримо детальніше про структуру самого тесту та оцінимо всі позитивні та негативні аспекти.

Почнемо з негативного, тим паче, що мінус, можна відмітити єдиний. Це стосується саме технічного оформлення. Правильні відповіді на деякі задачі програма сприймала, як помилкові, це впливало на кількість правильних відповідей у підсумку.

Розглянемо інший бік медалі, а саме — переваги такого тест-контролю. По-перше, серед запропонованих варіантів відповідей були варіанти «не достатньо даних». Такі варіанти змушують студента не просто розв'язати задачу, а й проаналізувати чи взагалі можна отримати розв'язок. По-друге, кожен студент перед собою бачив часовий відлік і міг розрахувати свої сили. Також хотілося б відмітити серед плюсів те, що правильна відповідь на кожну окрему задачу з'являється не відразу, а в підсумку. Це не відволікає студента і дає змогу додатково перевірити свої відповіді. Хоч ми вже й 5-курсники, але на оцінку за свою роботу чекаємо так само, як і першокурсники. Тому великою перевагою такого виду контролю є експрес-оцінка, яку кожен студент отримує по закінченню тесту.

Усі вище вказані переваги не зрівняються з тим, що відбулося після закінчення контрольної роботи. Серед студентів в аудиторії почалося жваве обговорення пройденого онлайн-тесту. Усі обмінювалися своїми враженнями, обговорювали можливі варіанти розв'язків. Кожен хотів поділитися своїм методом розв'язання. Для студентської аудиторії було дуже важливо, що викладач практичних занять прийняв активну участь в обговоренні. Це створило невимушену атмосферу в аудиторії, яка в результаті посприяла плідній праці. Адже за відведений нам аудиторний час ми встигли розв'язати всі задачі, тим самим, нівелювали помилки, які допускала система при перевірці.

Узагальнюючи враження всіх студентів ОМ-61м, хотіли б звернути увагу викладацького складу на тому, що студенти з неабияким ентузіазмом сприймають різні новітні підходи із залученням сучасних технологій. Та справа не лише в технологіях. Можна, наприклад, змінити саму структуру проведення практичних занять. Наприклад, побудувати заняття, як диспут двох команд стосовно тієї теми, яку необхідно засвоїти; або ж зробити, свого роду, інтерактивну гру, у якій би студенти брали безпосередню участь.

Отже, можна зробити висновок, що неординарні та креативні підходи, що крокують у ногу з часом, зацікавлюють студентів. Різні інтерактивні методи в навчальному процесі не просто створюють невимушену атмосферу в аудиторії, а й приносять реальні результати, бо це не просто «зазубрений» матеріал, а пізнання через «живу» бесіду. Саме завдяки такому підходу до навчального процесу студенти і викладачі зближуються, адже ніщо так не об'єднує людей, як гаряче обговорення задачі, яка захоплює всю аудиторію.

Як сказав Генрі Томас Бокль «Знання — зовсім не пасивний відвідувач, який самотійно прийде до нас незалежно від бажання, його потрібно шукати

перед тим, як воно буде нам належати. Це результат величезної праці і тому — величезної жертви.» Пропонуємо використовувати різноманітні нововведення для того, щоб пошук так званого «знання» не був результатом великої жертви, а був лише результатом плідної співпраці студентів з викладачами.

Список літератури

- Крокер, Л., Алгина, Дж. (2002). *Введение в классическую и современную теорию тестов: учебник*. Москва: Логос.
- Нагаєв, В. М. (2001). Досвід використання тестового контролю залишкових знань за модульно-рейтинговою технологією навчання. У кн. *Засоби початкової та науково-дослідної роботи: Зб. наук. пр.* (с. 171—180). Харків: ХППУ.
- Омельяненко, В. Л., Кузьмінський, А. І. (2009). *Педагогічна мудрість віків*. Київ: Знання.

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

О. М. Омелян, С. П. Рендюк

*Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
aomelyan@ukr.net, sergeyrendyuk@yandex.ua*

Концепція модернізації сучасної української освіти вимагає створення умов для підготовки кваліфікованих, компетентних фахівців на рівні світових стандартів, соціально й професійно затребуваних, конкурентоспроможних на вітчизняному, європейському і світовому ринках праці (Слепкань, 2006). З цією метою кількість дисциплін, які обов'язкові для вивчення технічними спеціальностями ВНЗ IV рівня акредитації невідомо зростає. Унаслідок цього виникає проблема перевантаження навчального плану багатьох спеціальностей, що призводить до скорочення кількості аудиторних годин для вивчення фундаментальних дисциплін. При цьому одним із шляхів забезпечення якості знань студентів з такої важливої дисципліни як вища математика є ефективна організація самостійної роботи студентів.

В умовах сьогодення окрім оволодіння фундаментальними та фаховими знаннями кожному майбутньому фахівцю у своїй професійній діяльності необхідно вміти використовувати інноваційні розробки науки і техніки, програмне забезпечення. Тому при вивченні математичних дисциплін у вищих технічних навчальних закладах поряд з традиційними методами й формами аудиторної та позааудиторної самостійної роботи доцільно ширше застосовувати можливості мобільних телекомунікаційних пристроїв та нових ІТ-технологій, що сприятиме підвищенню її ефективності та формуванню творчої особистості студента.

Питання організації самостійної роботи студентів у процесі навчання широко обговорюються провідними науковцями й педагогами-практиками. Зокрема, цій проблемі присвячені праці А. М. Алексюка, В. К. Буряка, С. У. Гончаренка, О. А. Дубасенюк, Л. В. Жарової, Н. В. Кузьміної, Н. Г. Сидорчук, М. М. Солдатенка, В. В. Ягупова, але питання реалізації підходів до організації пізнавальної діяльності, її розвитку залишається вкрай необхідним і потребує подальшого вивчення і розв'язання (Пидкасистий, 1979).

Організація самостійної роботи студентів — це процес впорядкування та взаємодії її структурних компонентів за певними критеріями, принципами, правилами з метою реалізації поставленої мети (Гулецька, 2009).

Під час самостійної роботи при вивченні вищої математики студенти водночас набувають практичних умінь і навичок проведення обчислень та оперування формулами, оцінювати результат з практичного та наукового погляду та ін. У них розвивається дослідницька майстерність, логічне мислення, формуються вміння виділяти головне, знаходити різні варіанти вирішення проблеми тощо. Викладачеві важливо скерувати процес навчання таким чином, щоб студенти у

процесі вивчення дисципліни набули навичок до самостійної організації своєї діяльності, які могли б використовувати при розв'язанні фахових задач.

Пріоритетна роль в організації самостійної пізнавальної діяльності студентів належить викладачеві. У той же час він має враховувати, що в сучасній вищій освіті відбувається процес зміни традиційної концепції суб'єкт-об'єктних відносин викладача та студента на концепцію суб'єкт-суб'єкт-об'єктних відносин, при яких об'єктом виступає обрана студентом спеціальність підготовки. У такій концепції роль викладача вже полягає менше в навчанні студента, а більше — у створенні умов для самостійного здобуття знань студентом. У роботі Bar & Tagg (1995) таку концепцію названо «новою парадигмою вищої освіти».

Тому необхідно розвивати взаємодію в системі «викладач — студент» у напрямі розширення й удосконалення суб'єкт-суб'єктних відносин у рамках співробітництва, при якому викладач здебільшого виконує роль тренера, який показує напрям, у якому необхідно розвиватися студентові, знаходить шляхи розвитку пізнавальної діяльності студента та створює середовище для цього.

Провідну роль у реалізації такої взаємодії відіграє самостійна робота. Як впливає з роботи П. І. Підкасистого (Пидкасистый, 1979), самостійна робота у ВНЗ є специфічним засобом організації і управління самостійною діяльністю студента в учбовому процесі.

На нашу думку, організація самостійної роботи студента повинна включати аудиторну й позааудиторну форми. Для отримання міцних знань студентом запровадження позааудиторної форми самостійної роботи має спиратися на попереднє відпрацювання навичок самостійного розв'язання студентом типових вправ з конкретної теми під безпосереднім керівництвом викладача під час аудиторного заняття.

Аудиторна самостійна робота повинна базуватись на основі індивідуально-орієнтованого підходу. Цей підхід зокрема може бути реалізований через розробку завдань різного рівня складності як для кожного студента, так і для різних типологічних груп; надання консультативної допомоги; створення позитивного емоційного середовища на занятті; поєднання групової та індивідуальної форм роботи студентів; застосування методів і засобів контролю за результативністю виконання самостійної роботи.

Домінуючим принципом організації самостійної роботи має бути така індивідуальна робота всіх студентів, при якій вони поетапно проходять усі рівні самостійних вправ: а) репродуктивні; б) частково-пошукові або евристичні; в) дослідницькі, тобто від формального виконання ними навчального навантаження до розвитку пізнавальної діяльності з формуванням особистої думки під час вирішення проблемних і творчих питань (Слепкань, 2006).

Репродуктивні самостійні роботи складаються із вправ, що вимагають знання типових методів розв'язання, які призначені для засвоєння студентами навчального матеріалу, що передбачений програмою і відіграють у процесі вивчення математики важливу роль для формування фонду дійових знань (Слепкань, 2006).

Частково-пошукові або евристичні завдання самостійних робіт призначені для поглиблення математичних знань студентів. Ці завдання можна розподілити на два класи:

1) модифіковані задачі: задачі на виявлення протиріч, задачі з відсутністю повної інформації, або з її надлишком; задачі на виявлення помилок; задачі з параметрами тощо;

2) задачі, що вимагають вміння застосовувати математичні методи до розв'язання задач професійного спрямування.

Дослідницькі самостійні роботи виконують студенти, які показали гарні результати при виконанні репродуктивних та частково-пошукових робіт та зацікавлені в поглибленому опрацюванні курсу вищої математики і здатні розв'язувати прикладні задачі професійного змісту з елементами математичного моделювання.

Таким чином, формування умінь самостійного навчання відбувається у процесі активної самостійної пізнавальної діяльності, коли оптимально поєднуються репродуктивні та творчі дії суб'єктів навчання. Озброєння студентів першого курсу певними способами самостійної пізнавальної діяльності необхідне для їх переходу від нижчого репродуктивного рівня пізнання до вищого творчого.

Розвитку творчості студентів сприяють різноманітні *форми та методи* позааудиторної роботи (Слепкань, 2006):

1) самостійне опрацювання навчального матеріалу та виконання практичних вправ;

2) обговорення ситуацій (організація дискусійних клубів, читань, конференцій, клубів за інтересами);

3) спільний пошук правильного рішення;

4) пошук форми соціальної активності студента.

Завдання для самостійного вивчення мають добиратись з урахуванням вивченого матеріалу і, одночасно, вимагати напруженої роботи думки. Таке навчання завжди буде ефективним і розвиваючим. Запорукою успішного розвитку пізнавальних інтересів студентів є їх активна творча робота. Радість від одержаних нових знань у процесі самостійного пошуку є джерелом глибокого вивчення математичних дисциплін. Діяльність викладача в організації самостійної роботи студентів має включати такі напрямки:

1) забезпечення студентів інформаційними матеріалами;

2) розробка завдань для самостійного виконання;

3) створення механізмів взаємодії студента з викладачем під час виконання самостійних завдань у випадку виникнення труднощів;

4) змістовна перевірка результатів самостійної роботи студента;

5) розробка ефективних засобів заохочення студента до самостійної роботи.

Сучасний розвиток ІТ-технологій надає додаткові можливості для реалізації вказаних складових. Зокрема сайт дистанційної освіти університету, де розміщені конспекти лекцій з дисципліни, дозволяє студентам мати постійний дос-

туп до теоретичних знань, необхідних для розв'язування індивідуальних та самостійних завдань та отримувати он-лайн підтримку викладача за рахунок чат-сервісу.

Популярність та масове поширення засобів мобільного зв'язку дозволяє використати наявні у студентів пристрої для ілюстрації геометричних властивостей ліній, поверхонь при вивченні аналітичної геометрії, а також для перевірки проведених розрахунків при вивченні інших розділів вищої математики за допомогою таких сучасних математичних пакетів, як Gran, Derive, Maple, Mathematica та ін.

Для перевірки знань студентів зручно застосувати різноманітні тестуючі програми, такі як ADTester. Відомо, що серед студентів такі пакети користуються значною популярністю.

Таким чином, самостійна пізнавальна діяльність є невід'ємною частиною навчального процесу, що у процесі вивчення вищої математики дозволяє показати студентам значущість математичних методів у майбутній професійній діяльності та формує усвідомлену потребу у самостійній роботі, як засобу професійної самопідготовки.

Список літератури

- Bar, B. B., & Tagg, J. (1995). From Teaching to Learning: A New Paradigm for Undergraduate Education. *Change*, 27(6), 13—25.
- Гулецька, Я. Г. (2009). Організація самостійної роботи магістрів з використанням інформаційних технологій при вивченні іноземної мови. *Вісник НТУУ «КПІ». Філософія. Психологія. Педагогіка*, (3), 75—80.
- Кузьменко, Г. М. (2011). *Формування пізнавальної мотивації студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі вивчення загальної фізики: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02* (с. 40—41). Полтава.
- Пидкасистый, П. И. (1979). Сущность самостоятельной работы и психолого-дидактические основы её классификации. В кн. *Проблемы активизации самостоятельной работы студентов: Материалы Всесоюзного совещания-семинара* (с. 23—34). Пермь: Пермский ун-т.
- Слепкань, З. І. (2006). *Методика навчання математики*. Київ: Вища школа.
- Янченко, О. І. (2008). *Планування та організація самостійної роботи студентів: Методична розробка*. Одержано з <http://yancholga5.narod.ru/samrob.pdf>.

САМОСТІЙНА РОБОТА І КОНТРОЛЬ ЗА ЇЇ ВИКОНАННЯМ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ІНОЗЕМНИМИ СТУДЕНТАМИ НУ «ОМА»

Г. О. Петропавловська

НУ «Одеська морська академія», Одеса, Україна

petropavlovskiy@ukr.net

Із впровадженням нових стандартів вищої освіти, які звертають саме серйозну увагу на її фундаментальність, але при цьому скорочують обсяги годин на вивчення фундаментальних дисциплін, зокрема вищої математики, різко зростає роль самостійної роботи студентів. Для цього потрібна організація такої системи занять з математики, при якій учень і зацікавлений, і змушений багато працювати самостійно. Для цього формально у програмах виділено достатньо великий обсяг годин.

Слід пам'ятати, що вищу математику вивчають на першому курсі й іноземні студенти в цей час мають певні труднощі мовного характеру. Тому форми контролю в навчальному процесі треба використовувати такі, щоб уникнути цієї проблеми. Окрім того, перший семестр є періодом адаптації першокурсника до вишівського середовища. Слід зазначити, що в останні роки до складу студентів першого курсу потрапляють абітурієнти з низьким рівнем базових знань, які не вміють організувати повсякденно самостійну роботу, не вміють працювати з інформаційними матеріалами. Деякі з них не встигають не лише осмислити, але і записати лекційний матеріал; інші — не можуть впоратися з великим обсягом досліджуваного матеріалу і з тим фактом, що кожен раз на заняттях розглядається нова тема. У результаті до екзаменаційної сесії студент приходить у стресовому стані, не може ліквідувати прогалини і показати які-небудь задовільні знання. При такій ситуації підготовка фахівців з вищою освітою вимагає нових методів і прийомів, адаптованих на індивідуальну особливість студента і спрямованих на активізацію самостійної діяльності.

У системі вищої освіти стоїть завдання не просто навчити студентів тим чи іншим наукам, а навчити їх вчитися і поповнювати свої знання протягом усього життя, тобто володіти навичками самостійного отримання знань і підвищення кваліфікації, щоб бути конкурентоспроможними на ринку праці.

Досягти цих цілей можна в ході самостійної роботи студентів, яка являє собою, з одного боку, вид навчальної праці, здійснюваної без безпосереднього втручання, але під керівництвом викладача, а з іншого — засіб залучення студентів у самостійну пізнавальну діяльність, формування в них методів організації такої діяльності. При вивченні кожної дисципліни організація самостійної роботи здійснюється у вигляді єдності трьох її взаємопов'язаних форм: позааудиторної самостійної роботи; аудиторної самостійної роботи, яка проводиться під безпосереднім керівництвом викладача; творчої, в тому числі науково-дослідної роботи. Види позааудиторної роботи різноманітні: підготовка і написання рефератів, доповідей; виконання домашніх та індивідуальних завдань рі-

зноманітного характеру, розрахунково-графічних робіт; підготовка до участі в олімпіадах.

Слід відзначити, що видавання на кожному занятті домашнього завдання малоефективна, здебільшого через неможливість виявити самостійність його виконання, а у останні роки часто і в силу відсутності виконання. Набагато ефективніше проводити регулярні мініконтрольні роботи (10—15 хв.) на кожному занятті, причому тематика майбутньої роботи має чітко обумовлюватися. Такі контрольні з математики включають теоретичні питання і задачі для самостійної роботи. Результати цих контрольних використовуються для визначення підсумкових оцінок. Значний резерв в активізації самостійної роботи студентів міститься в диференційованому підході при видачі індивідуальних розрахунково-графічних завдань.

Існують три рівні самостійної роботи:

- 1) репродуктивний (тренувальний);
- 2) реконструктивний;
- 3) творчий, пошуковий.

Для організації та успішного функціонування самостійної роботи студентів необхідно комплексно підходити до організації такої діяльності за всіма формами аудиторної роботи, поєднувати всі типи самостійної роботи, забезпечувати контроль за якістю виконання роботи. Результативність самостійної роботи визначається і наявністю активних методів її контролю, до яких можна віднести: вхідний контроль знань і умінь студентів при початку вивчення дисципліни; поточний контроль, що включає відстеження рівня засвоєння матеріалу; проміжний контроль по закінченні вивчення розділу; самоконтроль, здійснюваний студентом у процесі вивчення дисципліни при підготовці до контрольних заходів; підсумковий контроль у вигляді заліку або іспиту; контроль залишкових знань та умінь через певний час після завершення вивчення дисципліни. Поряд з традиційними формами контролю досить широко запроваджують нові методи: рейтингова система контролю, тестування. Тестування допомагає виявити структуру знань студентів і на цій основі переоцінити методичні підходи до навчання і індивідуалізувати його.

При використанні тестування для поточного контролю знань можна виділити наступні переваги:

- скорочення часу опитування;
- повнота і всебічність контролю;
- об'єктивне оцінювання знань;
- відсутність двозначного варіанту відповіді.

Ефективність тесту визначається якісною перевіркою знань при відносно невеликому числі завдань і можливістю оптимізувати час контролю знань.

У структурі тестів використовуються наступні основні форми:

- закриті завдання — завдання з вибором однієї або кількох правильних відповідей з числа запропонованих;

— відкриті завдання — завдання, у яких студент дописує відповідь у відведеному для цього місці або вирішує завдання;

— завдання на встановлення відповідностей між множинами.

Тестова перевірка має ряд переваг перед традиційними формами і методами, вона природно вписується в сучасні педагогічні концепції, дозволяє раціональніше використовувати час занять, охопити більший обсяг змісту, швидко встановити зворотний зв'язок з курсантами (студентами) і визначити результати засвоєння матеріалу, зосередити увагу на прогалинах у знаннях та внести в них корективи. Тестовий контроль забезпечує одночасну перевірку знань курсантів (студентів) всієї групи та формує у них мотивацію для підготовки до кожного заняття.

При всіх перевагах тестових форм контролю, захоплюватись ними не варто.

Треба пам'ятати про те, що сьогодні Україні дуже потрібні люди, здатні створювати інноваційні продукти і технології, і управлінці, здатні втілювати їх у сучасних умовах. А тепер — увага — питання: чи може випускник, якого 11 років у школі і 5 років у вищому навчальному закладі вчили розв'язувати тести, вибираючи один з п'яти готових правильних відповідей, запропонувати інноваційне рішення?

Слід зазначити, що застосування тестового контролю знань є доцільним у випадку проміжного контролю. Підсумковий контроль найдоцільніше проводити у розгорнутій письмовій роботі.

Якість освіти визначається сукупністю показників, що характеризують різні аспекти навчальної діяльності установи освіти, які створюють умови для успішної професійної підготовки фахівця. Це стосується цілей, форм і методів навчання, забезпеченості відповідною матеріально-технічною базою та професійними педагогічними кадрами. Головна мета навчання в закладі вищої освіти — це розкриття здібностей кожного студента, виховання особистості, готової до життя в конкурентному світі. Тому організація навчального процесу у закладах вищої освіти повинна бути багатоплановою і поєднувати різні форми і методи навчання.

Список літератури

- Вірченко, Н. О. (2006). Методика проведення занять з вищої математики. У кн. *«Теорія та методика навчання математик, фізики, інформатики: Збірник наукових праць»*, (6) (Т. 1. Теорія та методика навчання математики, с. 268—273). Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2014). З досвіду викладання деяких питань математичного аналізу іноземним студентам у рамках англomовного проекту НАУ. У кн. *Матеріали Третьої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 184—187). Київ: НТУУ «КПІ».
- Лейко, С. В. (2013). Поетапність при вивченні курсу «Вища математика». У кн. *Матеріали Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 181—183). Київ: НТУУ «КПІ».
- Слепкань, З. І. (1999). *Наукові засади педагогічного процесу в вищій школі: Конспект лекцій*. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова.

КОНТЕНТ-АНАЛІЗ ЯКОСТІ ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Н. П. Селезньова, С. В. Селезньов

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

koniwa@yandex.ua

Контент-аналізом називається аналіз змісту (*англ.* contents — зміст, вміст, склад). Предметом такого аналізу є зміст текстових масивів. Також він визначається як кількісний аналіз текстів та текстових масивів з метою наступної змістовної інтерпретації виявлених числових закономірностей. За допомогою контент-аналізу можна здійснити повний цикл дослідження будь-якого документального об'єкта. Цей вид аналізу суттєво відрізняється від інших методів дослідження документів і має самостійний шлях наукового дослідження, тобто метод (Алексеев, 1974).

Кількісний контент-аналіз базується на дослідженні слів, тем, повідомлень. При цьому основна увага зосереджується на змісті тексту. Отже, аналізуючи елементи тексту, у першу чергу необхідно скласти певний тезаурус, у якому кожне окреме спостереження матиме визначення і буде віднесено до певного класу. Тобто на базі виділених класів формується вибірка, що складається з тих типів ключових понять, сповіщень, означень, понять, які з найбільшою ймовірністю зустрічаються в досліджуваному тексті. Елементи цієї вибірки є деякими смисловими одиницями, які можна позначити певними числами. Тоді на базі цих чисел можна скласти варіаційний ряд, який вже можна досліджувати статистичними методами.

Проведемо контент-аналіз завдань ЗНО з математики за 2009, 2013 та 2016 роки з метою дослідження структури завдань. Для початку виділимо основні теми, згідно яких складено завдання ЗНО. Ці теми вказані в програмі ЗНО з математики від 03.02.2016, №77 (Програма..., 2016). Умови завдань ЗНО з математики за 2009, 2013 та 2016 роки — Тести...(2016).

Перелік тем

1. Дійсні числа, порівняння чисел та дії з ними; числові множини
2. Відношення та пропорції, відсотки.
3. Текстові задачі.
4. Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їхні перетворення.
5. Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні рівняння, нерівності та їхні системи.
6. Числові послідовності: арифметична та геометрична прогресії
7. Функціональна залежність, властивості функції, графіки елементарних функцій.
8. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст.
9. Первісна, та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур.

10. Елементи комбінаторики. Ймовірність випадкової події.
11. Коло та круг.
12. Основні задачі планіметрії. Трикутники, чотирикутники, багатокутники
13. Прямі та площини у просторі.
14. Елементи векторної алгебри. Декартова система координат.
15. Многогранники, тіла й поверхні обертання.
16. Задачі з параметрами.

Визначивши кількості (частоти) завдань, згідно названих тем, побудуємо гістограму (рис. 1) по відповідних роках та обчислимо деякі статистичні показники, які представимо у вигляді таблиці 1.

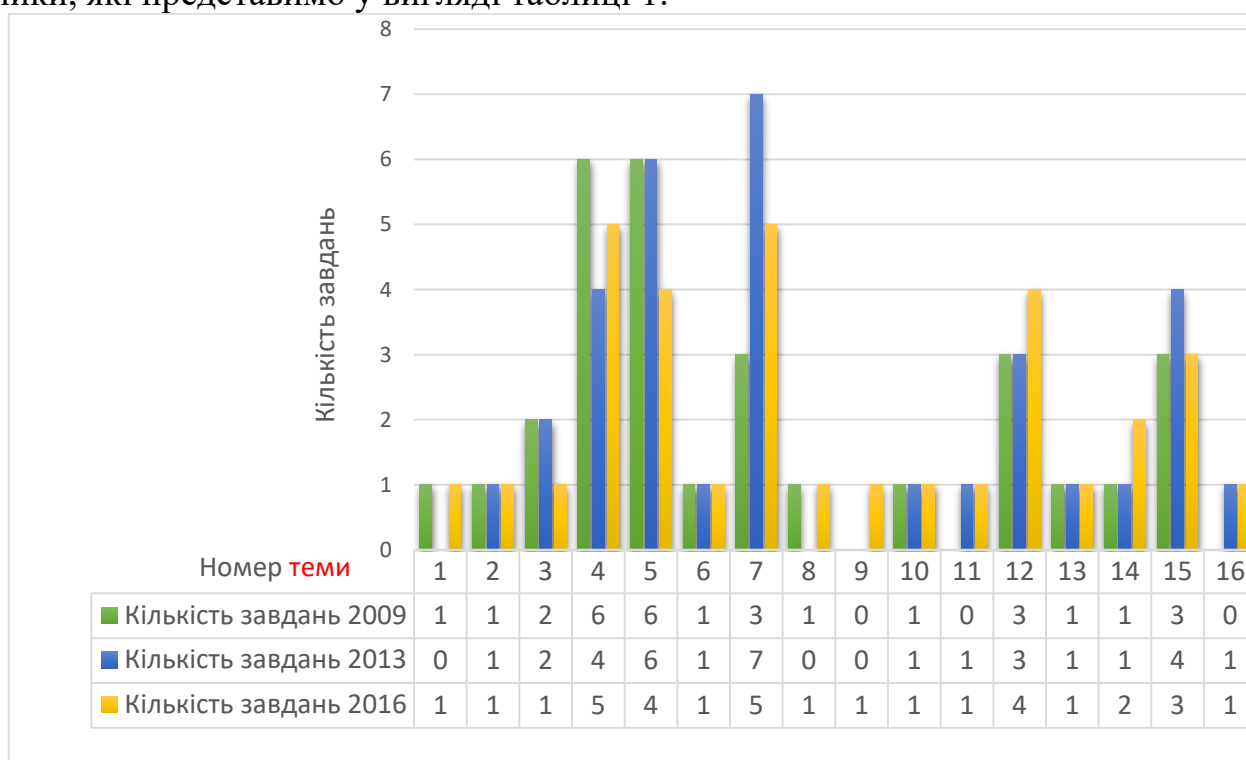


Рис. 1

Таблиця 1

Статистичні показники	2009 рік	2013 рік	2016 рік
Мода	4; 5	7	4; 7
Варіація	58,5%	52,1%	51,9%
Ентропія	3,33	3,29	3,65
Надлишок інформації	0,32	0,35	0,27

Нагадаємо суть деяких понять, згаданих у табл. 1.

Означення ентропії (Алексеев, 1974; Селезнєва, Селезнєва, 2010): нехай U — деякий дослід, який може мати n різних результатів $A_1, A_2, \dots, A_n$ з ймовірностями $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$; B — інший дослід, що має результати $B_1, B_2, \dots, B_n$ з ймовірностями $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Якщо через $P(A_i B_k)$ позначити ймовірність суміщення результатів дослідів U та B , то згідно з Шен-

ноном (Алексеев, 1974) середня кількість інформації, що міститься в результатах дослідів U відносно результатів дослідів B обчислюється за формулою

$$I(U, B) = \sum P(A_i B_k) \log_2 \frac{P(A_i B_k)}{P(A_i)P(B_k)}.$$

Кількість інформації, що міститься в результатах дослідів U відносно самого себе (тобто повна кількість інформації, що міститься в результатах дослідів U), називається *ентропією* і обчислюється за формулою:

$$H = -\sum P(A_i) \log_2 P(A_i).$$

Всі можливі значення ентропії містяться у проміжку: $0 \leq H(X) \leq \log_2 N$ (у нашому випадку: $\log_2 30 = 4,91$; $\log_2 33 = 5,04$, для 2009 р. $N = 30$, для 2013 та 2016 років $N = 33$). Нижня грань відповідає виродженому розподілу. У цьому випадку невизначеність є відсутньою. У варіаційному ряду це відповідає $x_i = const$. Верхня межа відповідає рівномірному розподілу. У цьому випадку всі N значень x_i зустрічаються з однаковою ймовірністю. У варіаційному ряду це відповідає лінійному тренду. Чим меншою є ймовірність якоїсь події, тим більшу невизначеність має звістка про її появу, і отже, тим більшу інформацію вона несе.

Надлишковість інформації оцінюється коефіцієнтом надлишку інформації:

$$R = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}}.$$

Наявність надлишку означає, що частину сповіщень можна і не передавати по каналу зв'язку, а поновити за відомими статистичними зв'язками. Але при збільшенні надлишку є можливість зменшення похибок передачі інформації і при цьому з'являється кілька варіантів розвитку системи.

В таблиці 1 представлено обчислені показники ентропії та надлишку інформації для тестів ЗНО за різні роки. Величина ентропії за різні роки не суттєво відрізняється, отже можна вважати, що розподіли частот різних завдань за ці роки практично не відрізняються одне від одного, а надлишок інформації вказує, що залишаючись у межах того, ж розподілу можна моделювати різні інші варіанти тестових завдань.

Коефіцієнти варіації (відношення середньоквадратичного відхилення до середнього значення, визначається у відсотках) вказують у нашому випадку на помірну неоднорідність тестових завдань.

Зі значення моди, можна зробити висновки відносно того, які теми тестових завдань найчастіше є присутніми в ЗНО. Так як рівень знань та навичок випускників шкіл оцінюється результатом складання ЗНО, то і вчителі у процесі викладання математики у школі орієнтуються на підготовку учнів до успішного складання ЗНО. У результаті такі важливі у ВНЗ теми як числові послідовності, похідна, елементи інтегрального числення, комбінаторика, елементи теорії ймовірностей, вкрай необхідні для засвоєння курсу вищої математики, залиша-

ються поза увагою шкільних вчителів. У результаті це суттєво знижує рівень математичної підготовки абітурієнтів, а відтак і студентів, з огляду на те, що у ВНЗ за останні роки відбулось суттєве скорочення годин для вивчення математики.

Список літератури

- Алексеев, А. Н. (1974). Контент-анализ, его задачи, объекты и средства. В кн. С. Н. Плотников (ред.). *Труды Научно-исследовательского института культуры, 9: Социология культуры*, (1) (с. 131—162). Москва: б. и.
- Колмогоров, А. Н. (1987). *Теория информации и теория алгоритмов*. Москва: Наука.
- Селезньова, Н. П., Селезньова, Н. В. (2010). Ентропійний підхід до визначення узгодженості експертних оцінок. У кн. *Матеріали XIII Міжнародної наукової практичної конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 3, с. 104). Київ: НТУУ «КПІ».
- Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики* (2016). Одержано з <http://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/mathematics2017.pdf>
- Тести ЗНО онлайн з математики* (2016). Одержано з <http://zno.osvita.ua/mathematics/>

ПЕРЕВІРКА АДЕКВАТНОСТІ ФУНКЦІЇ РЕГРЕСІЇ

Н. П. Селезньова, О. В. Українець

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

koniwa@yandex.ua, saharoza48@gmail.com

Для встановлення впливу рівня знань студентів першого курсу ФМФ НТУУ «КПІ» з курсу шкільної математики на їх успішність з математичного аналізу проведено регресійний аналіз між оцінками, отриманими абітурієнтами із ЗНО з математики та вже студентами з математичного аналізу на першій сесії у 2015 році.

У роботі Селезньова, Українець (2016) на основі отриманих емпіричних даних (оцінок студентів) обчислено коефіцієнт кореляції Спірмена (Селезньова, Селезньова, Селезньов, 2012) між оцінками з математичного аналізу та оцінками отриманими тими ж студентами із ЗНО з математики: $\rho = 0,293$. Цей коефіцієнт дорівнює лінійному коефіцієнту кореляції. Його величина вказує на те що певний кореляційний зв'язок між успішністю студентів з математичного аналізу у ВНЗ та рівнем знань з математики у школі (на рівні тестів ЗНО) існує, але очевидно цей зв'язок не є лінійним. За допомогою регресійного аналізу спробуємо встановити форму такого зв'язку. Для цього оцінки отримані із ЗНО переведемо у сто-бальну систему, оскільки оцінки з математичного аналізу — поставлено за сто-бальною системою.

На наступних діаграмах представлено лінії лінійної та нелінійної регресії. Під кожною діаграмою у вигляді таблиць наведено результати обчислень таких параметрів:

$$Q = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 n_i \text{ — загальна сума квадратів (SST);}$$

$$Q_p = \sum (y_{i, \text{теор}} - \bar{y})^2 n_i \text{ — сума квадратів, що пояснює регресію (SSR);}$$

$$Q_0 = \sum_{i=1}^k (y_{i, \text{теор}} - y_i)^2 n_i \text{ — сума квадратів помилок (SSE);}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum \bar{y}_{x_i} n_i.$$

Основне варіаційне рівняння

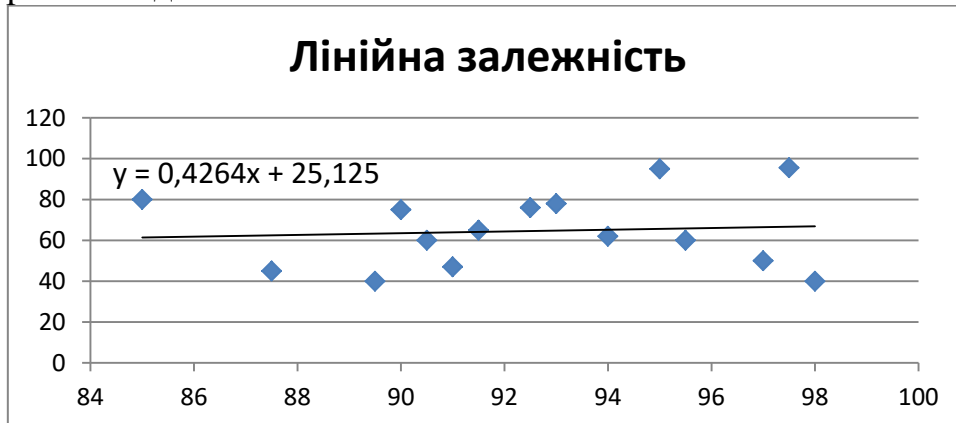
$$Q = Q_p + Q_0. \quad (1)$$

Для кожної із побудованих ліній регресії обчислено ці показники. Уважатимемо найбільш адекватною моделлю ту модель, для якої рівняння (1) виконується з найменшою похибкою.

Для перевірки статистичної значущості рівняння регресії, у кожному випадку знайдено F статистику за такою формулою:

$$F = \frac{Q_p(n-l)}{Q_0(l-1)},$$

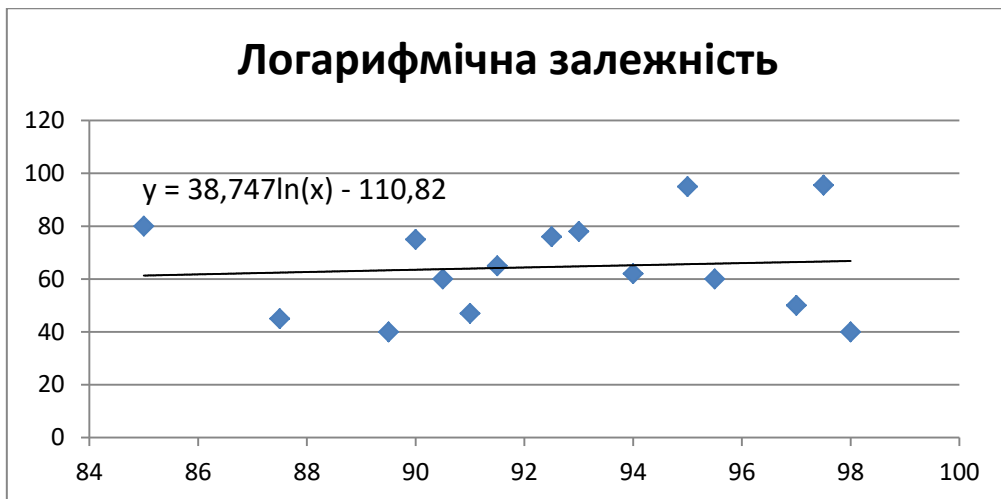
де n — обсяг вибірки, l — кількість параметрів лінії регресії, F_{kr} — знайдено за статистичними таблицями F -розподілу Фішера і рівнем значущості $\alpha = 0,001$. Якщо $F > F_{kr}$, то побудована нами регресійна модель є цілком відповідною реальній дійсності.



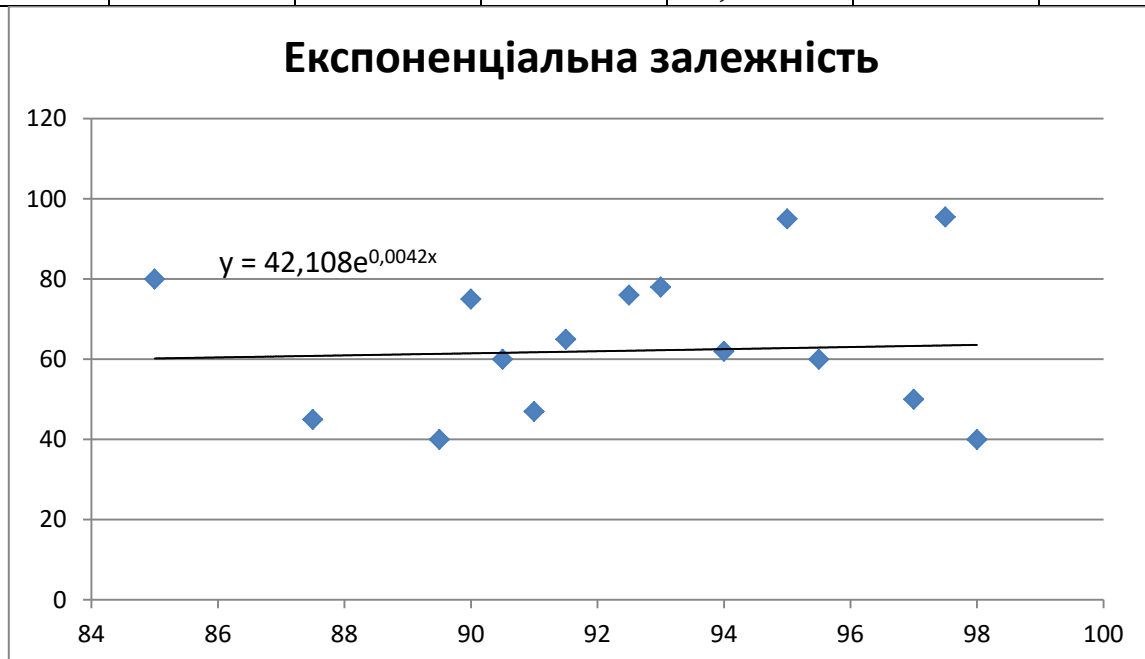
Q	Q_p	Q_0			α	0,001
7473,62	98,87	7245,91	F_{kr}	12,896	n	37
			F	0,478	l	2



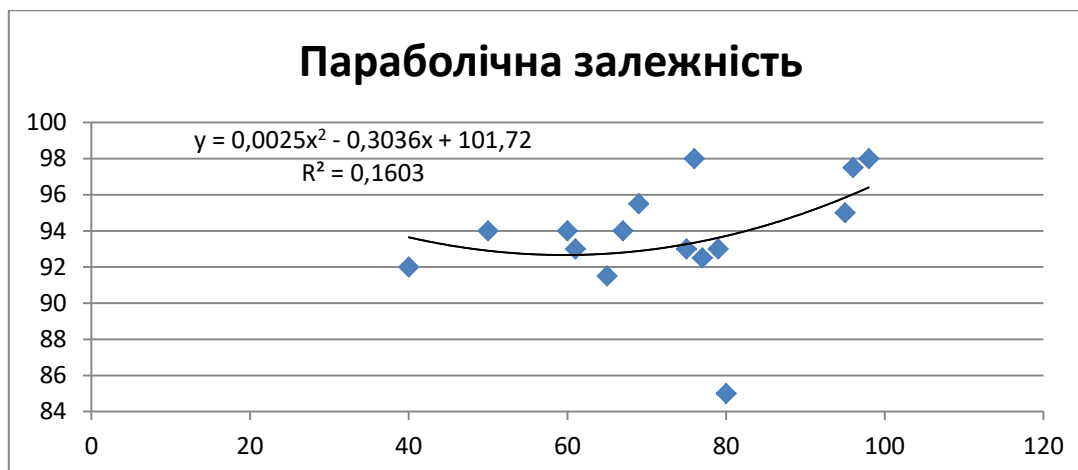
Q	Q_p	Q_0			α	0,001
9906,057	1198,901	7543,404	F_{kr}	12,896	n	37
			F	5,563	l	2



Q	Q_p	Q_0			α	0,001
9906,057	2388,277	7249,707	F_{kr}	12,89634	n	37
			F	11,53008	l	2



Q	Q_p	Q_0			α	0,001
9906,057	1185,277	7548,544	F_{kr}	12,896	n	37
			F	5,496	l	2



Q	Q_p	Q_0			α	0,001
199,676	241,550	199,172	F_{kr}	8,522	n	37
			F	3,617	l	3

Зведемо отримані дані до такої таблиці:

	Параболічна	Степенева	Лінійна	Логарифмічна	Експоненціальна
$ Q - Q_0 - Q_p $	41,88	1163,75	128,85	268,73	1172,24
$ F_{kr} - F $	4,91	7,33	12,42	1,366	7,40

Як видно з останньої таблиці, найменша похибка, з якою може виконуватись рівняння (1) відповідає параболічній залежності. У той же час найкраще відповідає критерію Фішера логарифмічна залежність. Як видно з наведених досліджень, обрати «найкращу» лінію регресії досить складно.

Список літератури

- Селезньова, Н. П., Селезньова, Н. В., Селезньов, С. В. (2012). Кореляційний аналіз навчального процесу на прикладі підсумкових оцінок учнів. *Вісник НТУУ «КПІ». Філософія, психологія, педагогіка*, (1), 136—138.
- Селезньова, Н. П., Українець, О. В. (2016). Моніторинг якості освіти через призму кореляційного аналізу. У кн. *Матеріали Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука*. (Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики, с. 146—149). Київ: НТУУ «КПІ».

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЕКТНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

О. М. Чернега, В. О. Броніцька

Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,

Миколаїв, Україна

chernega19@gmail.com

В сучасному світі відбулося чимало змін. Серед них особлива увага приділяється соціально-економічним, які в суспільстві викликали потребу в активних, працьовитих людях, які б могли швидко пристосовуватися до змін трудових умов, виконувати роботу з оптимальними енергозатратами, здібних до самоосвіти, самовиховання та саморозвитку. Тому на педагога покладається велика відповідальність. Необхідною є зміна існуючої стандартної освіти, яка спрямована на репродуктивне відтворення знань, за рахунок зміни форм і методів навчання, широкого застосування нових технологій. Нова освіта повинна орієнтуватися на активніші види самостійної індивідуальної роботи.

Провести урок цікаво — означає, що навчання і мислення супроводжуються почуттями піднесення, схвилюваності в учнів, подиву, інколи навіть зачарування перед істиною, яка відкривається, усвідомленням і відчуттям своїх розумових сил, радістю творчості, гордістю за велич розуму й волі людини (Сомик, 2014).

Вдало підібрана освітня технологія, застосована з урахуванням конкретних умов нашого сьогодення, допомагає (насамперед викладачеві, вчителю) наблизити теорію до життя, сформувані педагогічні вміння. Тим більше, роботу доповнюють практичні розробки, які покращують розуміння теоретичного матеріалу і створюють умови для набуття практичних вмінь.

Вітчизняні та зарубіжні дослідники в останнє десятиліття приділили достатню увагу проблемі інноваційної діяльності освітніх закладів. Проблеми педагогічної інноватики на сучасному етапі розвитку знайшли своє відображення в роботах І. М. Богданової, Л. І. Даниленко, В. Ф. Паламарчук, І. П. Підласого, А. І. Пригожина, О. Я. Савченко, В. А. Сластьоніна та ін.

Зокрема, обґрунтуванням проектної технології стало предметом вивчення багатьох науковців, а саме: наукові праці, присвячені аналізу окремих типів проектувальної діяльності (І. Бабін, М. Бойко, В. Кондратюк, І. Коновальчук, О. Падалка, А. Нісімчук, І. Чечіль, В. Юсупов та ін.); теоретичні розробки загальнонаукових основ здійснення проектувальної діяльності (Дж. К. Джонс, Я. Дітріх, Н. Зотова, О. Крюкова, О. Новіков та ін.); дослідження, у яких конструювання й проектування розглядається в аспекті формування відповідних умінь майбутнього педагога (А. Акімов, Ю. Бабанський, С. Вітвицька, В. Гінецинський, О. Дубасенюк, Н. Кузьміна, М. Поташнік, В. Сластьонін та ін.).

Дослідження проблеми використання проектної технології у процесі підготовки майбутніх вчителів тривають давно, але питання особливостей використання проектів саме для підготовки майбутніх вчителів математики залишається, на нашу думку, недостатньо розкритим.

Мета статті: полягає в тому щоб теоретично обґрунтувати та проаналізувати ефективність методу проектів в системі підготовки вчителів математики.

Початкові основи професіоналізму вчителя математики закладаються під час його навчання у ВНЗ, зокрема, і в процесі навчання фахових дисциплін. Саме від рівня якості отриманих початкових знань залежить те, як же швидко молодий педагог зможе реалізувати себе як вчитель. Підвищення рівня підготовки майбутнього фахівця може бути реалізовано в результаті використання інтерактивних методик навчання, які повністю змінюють ставлення до студента, перетворивши його з об'єкта навчання на суб'єкт. Однією з інтерактивних методик, що сприяє формуванню професіоналізму майбутніх вчителів математики є використання проектної технології як методу навчання.

Навчальне проектування – це не нова технологія. Метод проектів виник ще в 20-ті роки нашого століття у США. Спочатку його називали «метод проблем» і розвивався він у межах гуманістичного напрямку в філософії та освіті. Більш детально його було розкрито в педагогічних працях американського філософа і педагога Дж. Дьюї (Пехота, 2001).

Метод проектів — це комплексний навчальний метод, який дозволяє індивідуалізувати навчальний процес, дає можливість виявити самостійність у плануванні, організації та контролі своєї діяльності (Пехота, 2001).

Виконуючи проекти студенти досконало вивчають деяку проблему працюючи самостійно або в колективі під керівництвом викладача. Отримавши завдання вони проводять дослідження та роблять певні власні висновки.

При підготовці майбутніх вчителів математики одним з головних є вивчення курсу «Методика навчання математики», що передбачає вироблення в них фахових умінь і навичок, які забезпечать їх професійний розвиток у житті. Саме у процесі вивчення даного курсу викладач ознайомлює студентів з інноваційними методами навчання, одним з яких є метод проектів. На практичних заняттях майбутні вчителі аналізують готові конспекти уроків з використанням методу проектів, аналізують методи і прийоми, які застосовують досвідчені вчителі у процесі організації проектної діяльності учнів школи. Також на практичному занятті можна запропонувати кожному студенту самостійно виготовити навчальний проект за темою, що має безпосереднє відношення до шкільного курсу математики. Мета розробки такого проекту полягає в поєднанні знань шкільного курсу математики та методики навчання математики із самостійним набуттям знань щодо заданої теми.

Прикладом впровадження методу проектів у навчальний процес ВНЗ є створений на базі механіко-математичного факультету Миколаївського національного університету ім. В. О. Сухомлинського проект «Крок до науки», автором якого є доцент кафедри фізики І. В. Манькусь. Метою даного проекту є створення у ВНЗ освітнього середовища, яке забезпечує:

- формування і розвиток творчої майстерності студентів;
- пошук та підтримку творчої, обдарованої молоді;
- набуття студентами практичних навичок зацікавлення і роботи з учнями.

Проект має наступні завдання:

- розвиток та підтримка творчої, обдарованої молоді;
- співпраця учасників проекту;
- впровадження в навчальний процес вищої школи сучасних педагогічних технологій;
- осучаснення методів, засобів та форм навчального процесу у вищій школі;
- розробка освітніх продуктів для навчальних закладів різних рівнів;
- впровадження розроблених освітніх.

Ідея проекту полягає в поєднанні академічної підготовки фахівця у вищому навчальному закладі з вимогами на ринку праці. Команда студентів створюється відповідно до мотивів їх майбутньої професійної діяльності, прагнень та потреб. Студентам пропонується працювати в чотирьох університетських студіях: майстер-класу, освітніх проектів, фундаментальних фізичних досліджень, інформаційно-комунікаційних технологій. Кожна студія розробляє, створює і впроваджує відповідні освітні продукти, якість яких визначає рівень професійної майстерності їх як майбутніх фахівців.

Вивчаючи курс «Освітні технології», під керівництвом викладача студенти розробляють освітні проекти для закладів освіти різних рівнів. Проект «Крок до науки» дає можливість студентам побачити як працює, створений ними проект, проаналізувати його «плюси» і «мінуси» та помилки, які слід врахувати під час створення наступного проекту.

Отже, суть проектної технології полягає в тому, що учні стають не слухачами предмету, а справжніми дослідниками, експертами з теми. Дану технологію можна застосовувати як в класі на уроці так і факультативно, поєднуючи декілька навчальних предметів

На нашу думку, проектна технологія навчання як відносно нова, набуває все більшої популярності серед вчителів навчальних закладів різних рівнів. Її роль і внесок у розвиток особистості вже не можна не оцінити: дані матеріали використовуються у процесі навчання на уроках математики та інших предметів у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах, на курсах підвищення кваліфікації.

Список літератури

- Монахов, В. М. (1995). *Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса*. Волгоград: Перемена.
- Пахомова, Н. Ю. (2004). Проектное обучение — что это? *Методист*, (1), 39—46.
- Пехота, О. М. (2001). *Освітні технології*. Київ: «А.С.К.».
- Полат, Е. С., Бухаркина, М. Ю., Моисеева, М. В., Петрова, А. Е. (2008). *Новые педагогические и информационные технологии в системе образования*. Москва: Академия.
- Сисоєва, С. О., Алексюк, А. М., Воловик, П. М. (2001). *Педагогічні технології у неперервній професійній освіті*. Київ: ВІПОЛ.
- Сомик, Л. П. (2014). Дидактичні ігри на уроках математики. *Математика в школах України*, (10—11), 2—7

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В. А. Шилинец

Международный университет «МИТСО», Минск, Беларусь

shilinets@bspu.by

Совершенствование методики преподавания и методов обучения в УВО неразрывно связано с вопросами самостоятельности студентов. Именно в развитии самостоятельности сохраняются большие возможности улучшения всего образовательного процесса, повышения его эффективности. Основатель педагогической науки Ян Амос Коменский писал: «Руководящей основой нашей дидактики пусть будет: исследование и открытие метода, при котором учащиеся менее бы учили, учащиеся больше бы учились ...».

Рассмотрим некоторые конкретные пути активизации управляемой самостоятельной работы студентов (УСРС) экономических специальностей по высшей математике, используемые преподавателями кафедры информационных технологий и высшей математики, которые приводят, на наш взгляд, к воспитанию познавательной активности и развитию творческой самостоятельности мышления студентов.

Оптимальная эффективность самостоятельной работы студентов в учебном процессе зависит от правильной ее организации на всех этапах обучения. Особого внимания требует организация самостоятельной работы студентов на первом курсе. В УВО студент с первых дней сталкивается с другими условиями, с другой организацией образовательного процесса по сравнению со школой. У студента возникает противоречие между отношением к самостоятельной работе и условиями организации учебного процесса. Это в конечном итоге является одним из факторов, снижающих эффективность его работы.

Обучение в УВО начинается, как правило, с лекции. Задача лектора состоит не только в передаче информации, но и в мобилизации обучающихся на самостоятельную работу, на продуктивное творческое мышление, основными показателями которого являются самостоятельность, гибкость, осознанность, глубина, устойчивость.

Один из путей активизации самостоятельной работы в условиях современного образовательного процесса заключается в создании мотивации к активной учебно-познавательной деятельности. На первый курс приходят юноши и девушки, почти не имеющие представления о специальности, со слабой мотивацией к учебной деятельности. Потребность в новых знаниях возникает у обучающихся только в случае осознания их значимости для будущей профессиональной деятельности.

Курс высшей математики должен быть личностно ориентированным и направленным на формирование общенаучных знаний, умений и навыков и на удовлетворение профессиональных требований студентов. Программа обуче-

ния при изучении абстрактных математических понятий должна быть наполнена задачами с профессионально-ориентированным содержанием. Изучение каждого раздела высшей математики следует начинать с постановки соответствующей экономической задачи, которую затем предстоит решить средствами полученного математического аппарата. Например, при изучении первой темы линейной алгебры можно предложить студенту задачу определения выручки предприятия, если задана матрица цены реализации единицы товара какого-то типа в каждом регионе и матрица количества реализованной продукции в этом регионе. Можно также рассмотреть задачу о межотраслевом балансе — модели В. Леонтьева. При изучении, например, раздела «Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных» можно рассмотреть следующие вопросы: экономический смысл производной; производная функции объёма производства как производительность труда; производная производственной функции как: предельные издержки, предельная выручка, предельный доход, предельный доход производства; эластичность функции одной переменной и частные эластичности функции многих переменных производственных функций, функции спроса и предложения; максимизация дохода и прибыли и минимизация расходов в случае производственных функций одной и многих переменных; минимальность транспортных расходов.

При рассмотрении указанных задач студенты видят практическое применение имеющегося математического аппарата. Эффективность применения экономических задач при изучении различных тем учебной дисциплины «Высшая математика» заключается в том, что они способствуют развитию творческого менеджерского мышления и позволят студентам в дальнейшем принимать оптимальные решения в любой экономической, управленческой или жизненной ситуации. Так мы сможем сформировать у студентов потребность и интерес к самостоятельной работе над дисциплиной «Высшая математика».

Возрастание роли самостоятельной работы в высшей школе с необходимостью требует новых условий организации самостоятельной учебной деятельности студентов. Одним из важнейших условий является создание дидактических средств, способных упорядочить и активизировать процесс самостоятельного освоения обучающимися дисциплин учебного плана. На наш взгляд, дидактические средства, применяемые в УСПС, должны отражать личностно-деятельностный, дифференцированный, вариативный характер обучения, наиболее полно учитывать индивидуальные возможности и интересы обучаемых, выполнять ряд новых функций, обеспечивающих результативность обучения. В качестве такого современного дидактического средства в системе УСПС, по мнению авторов, может быть рабочая тетрадь (РТ) студента. На данный момент авторами разработаны и внедрены в образовательный процесс РТ по темам, изучаемым студентами в 1 семестре, и РТ по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика», который студенты изучают в 3 семестре обучения. Рабочие тетради позволяют организовать индивидуальную и групповую работу студентов на занятиях. Таким образом, РТ как современное дидактическое сред-

ство способствует: организации учебно-познавательной деятельности студентов по овладению учебной дисциплиной и формированию компетенций; созданию условий индивидуализации процесса обучения; сопровождению студента в ходе самостоятельной работы; целостному отражению системы УСПС по дисциплине.

На наш взгляд, для повышения качества освоения дисциплины «Высшая математика», организации активной самостоятельной работы студентов и формирования у них творческого подхода к изучению данной дисциплины необходим комплекс рабочих тетрадей, состоящий из трех взаимосвязанных взаимодополняющих друг друга рабочих тетрадей: по лекционному курсу, для практических занятий и самостоятельной работы студентов.

Используя рабочую тетрадь по лекционному курсу, студенты смогут активно участвовать в процессе освоения теоретического материала дисциплины «Высшая математика». РТ по лекционному курсу позволит увеличить объём учебного материала, выносимого на лекцию, предоставит возможность более детально и глубоко рассмотреть отдельные понятия и темы. Рабочая тетрадь для практических занятий позволит студентам систематизировать теоретические знания и научиться применять их при решении различных практических задач. В РТ для практических занятий следует включать и задачи творческого характера, поскольку один из путей активизации самостоятельной работы в условиях современного образовательного процесса заключается в привлечении студентов к научно-исследовательской работе, в активном использовании методов исследовательского обучения. Рабочая тетрадь для самостоятельной работы должна быть предназначена для самостоятельной подготовки и проведения обучающимися самоконтроля и самопроверки усвоения и понимания основных понятий, правил, теорем и методов высшей математики и умения использовать их для решения практических задач. Для этого в неё следует включать тесты по каждой теме данной дисциплины, примерные варианты контрольных работ, варианты индивидуальных заданий, итоговые тестовые вопросы и задания по всему курсу высшей математики для подготовки к экзамену и рекомендуемую литературу (основную и дополнительную).

Разработка и внедрение в образовательный процесс такого комплекса РТ и планируется преподавателями кафедры информационных технологий и высшей математики УО ФПБ «Международный университет «МИТСО».

Практическая ценность применения указанного комплекса рабочих тетрадей состоит в интенсификации процесса освоения учебного материала данной дисциплины, формировании у студентов навыков самостоятельной работы, повышении ее эффективности, усилении математической подготовки студентов и развитии у них творческого подхода к освоению учебной дисциплины «Высшая математика».

Считаем, что предложенные направления активизации УСПС будут способствовать решению проблемы качества подготовки будущих специалистов.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Babenko M., Bakmaiev P., Pavlus A., Svystun R., Zhivkov A. <i>Spectrum investigation of the Helmholtz cavity oscillations — the “atom” of acoustic metamaterials</i>	5
Dykach J., Semeniv O. <i>Deep statistical learning in genotyping quality control</i>	7
Kalosha J., Zuyev A. <i>Precompactness of the trajectories of a hybrid mechanical system with a flexible beam</i>	9
Makaseyev A. M. <i>Influence of delay on dynamics of nonideal pendulum systems</i>	13
Авдеева Т. В., Ильичева Л. М. <i>Применение математической теории информации в теории кодирования</i>	18
Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А. <i>Эволюция движений твёрдого тела, близких к спящему волчку Лагранжа</i>	20
Безклубенко І. С, Баліна О. І. <i>Завдання вектора напряму розвитку інженерної мережі</i>	25
Боровик С. О. <i>Побудова експертної системи з адапційними правилами</i>	27
Буценко Ю. П., Веретюк С. М., Пілінський В. В. <i>Модель технологічного розриву (між двома незалежними системами)</i>	30
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Математична модель мажоритарного голосування для діагностування техногенно небезпечних систем</i>	34
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. <i>Прихований канал передавання повідомлень на основі «книжкового» шифру та пустого контейнера</i>	36
Волошина В. О. <i>Про влативості та застосування W^n-зображення</i>	39
Голінко І. М., Галицька І. Є. <i>Математична модель електричного калорифера у просторі станів</i>	41
Горленко С. В. <i>Про розвиток підходу Морери до дослідження аналітичної функції</i>	45
Доля С. О., Савченко Ю. Г. <i>Проектування генераторів псевдовіадкових числових послідовностей як задача синтезу цифрового автомата</i>	48
Дрозденко В. О. <i>Характеризаційні теореми для властивості мультиплікативної інваріантності індивідуальних методів підрахунку вартості страхових контрактів</i>	52
Євзютін П. Ю., Листопадова В. В. <i>Застосування статичних гіпотез у хімії</i>	56
Живков А. П., Шалик А. И., Назаров А. В., Личик В. В., Мазурок В. О. <i>Исследование ячеек метаматериалов програмными средствами Mathcad и Microwave office</i>	59
Іванчук Н. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. <i>Модифікована кінематична гранична умова на депресійній поверхні в ґрунтовій греблі</i>	61

Калініченко А. О, Буценко Ю. П., Калініченко С. О. Підходи до аналізу відгуків електронного носу: нові параметри та моделі	64
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р. Оцінка похибок вимірювань показників якості відбитків плоского офсетного друку.....	68
Лебідь В. О. Застосування спектральної теорії графів у суміжних науках.....	71
Лупіна Т. О. Оцінка впливу вантажу на рівновагу понтона.....	73
Міцюхін А. І. Эффектынае кадаванне мяжы аб'екта	78
Новікова Ю. В. Стабілізація руху твердого тіла з ізотропною пластиною	81
Ногін М. В. Застосування аналітичних функцій у теорії потенціальної нестисливої рідини.....	85
Ногін Н. В. Стационарный процесс обтекания тонкого профиля потоком идеальной жидкости.....	87
Поліщук Н. В. Дослідження надійності деякої системи масового обслуговування	89
Рожок Л. С. Вплив зміни кривизни поперечного перерізу на напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів	92
Розанов А. В., Потемкина С. Н., Лиманова Н. И., Сизова Ю. В. Моделирование краевых эффектов для электростатического поля плоского конденсатора.....	96
Скасків Л. В., Ярова О. А. Про групи, у яких підгрупи, що не є нормальними, близькі до абелевих груп	100
Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Некласичні задачі теплопровідності у спеціальних курсах математики	103
Чепок О. Л. Якісні математичні знання як чинник успішної підготовки фахівця з фізики	109
Швець О. Ю. Про існування сімейства хаотичних атракторів у деяких неідеальних гідродинамічних системах	111
Штефан Д. І., Штефан Т. О. Застосування математики під час розв'язання задач теми «Фізика атомного ядра».....	113
Южакова Г. О. Деякі співвідношення для τ -узагальнених приєднаних функцій Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$	116

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Блажко Л. М., Карпалюк Т. О., Рассоха І. В. Диференціальні рівняння. Діяльнісний підхід вивчення як основоположний чинник подолання проблеми неусвідомлення студентами зв'язків між реаліями життя та теоретичними знаннями	123
Вініченко І. В. Математичні софізми під час вивчення математики в школі	126
Глоба С. О., Юрчук І. А. Про одну границю з курсу математичного аналізу	130
Гончаренко Я. В, Сушко О. С. Методика навчання елементів стохастичної фінансової математики	135
Гречко А. Л. Сучасні математичні моделі в курсі диференціальних рівнянь	138
Довгай В. В. Особливості процесу викладання вищої математики в сучасному технічному університеті під час підготовки спеціалістів для машинобудівної галузі	141
Дрозд В. В. Реалізація наступності у викладанні математики	143
Жданова Ю.Д., Шевченко С. М., Шевченко Г. В. Усвідомлення абстрактності через прикладну спрямованість дискретної математики	147
Іванець Р. М., Гайдей В. О. Про доведення без слів	150
Калайда О. Ф. До питання інтегровності у квадратурах рівняння Ейлера модифікованої задачі Дідони	154
Калайда О. Ф. Побудова раціональних колокант функцій на основі многочленів С. Бернштейна	156
Калайда О. Ф. Про гладкість неперервних сплайнів з додатковими вузлами	159
Камінчук В., Вигоднер І. В. Типові помилки студентів під час вивчення теми «Числові ряди»	161
Кільчинський О. О., Крижановська Т. В. , Семененко Т. М. До перетворення випадкового процесу лінійною динамічною системою (ЛДС)	165
Клімова Т. І., Сапронова Т. М. Застосування тестової форми завдань для ефективного контролю успішності з вищої математики	169
Коваль Т. В., Олефир Е. И. Об одном универсальном методе в линейной алгебре	172
Новицька О. І. Особливості викладання дисципліни «Числові системи» студентам гуманітарних факультетів	177
Островська О. В., Юрик І. І. Про викладання визначеного інтеграла в технічному університеті	179
Селуянова Т. А., Старун Н. В., Тулученко Г. Я. Позитивне використання недоліків табличного процесора Excel при вивченні методів математичної статистики	181
Чернобай О. Б. Мотивація під час викладання курсу Вища та прикладна математика	183
Шинковська І. Л., Заєць І. П. Деякі випадки інтегрованості диференціальних рівнянь першого порядку	185

Секція 3. Історія точних наук

Zhivkov O., Studenyuk R. Born's "mysterious number 137" and reflection light from graphene.....	191
Болух В. А. Історія створення математичних методів дослідження нескінченних статистичних систем	193
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. Жан Лерон д'Аламбер — життя, віддане науці (до 300-річчя від дня народження) (16.11. 1717—29.10.1783).....	196
Ічанська Н. В. Історія дослідження ознаки Єрмакова	201
Клецька Т. С., Андрейцев А. Ю. Еразм Корнелійович Шпачинський (1848—1912).....	205
Коваленко С. П., Листопадова В. В. Результати Г. В. Лейбніца в теорії рядів.....	209
Коваль В. О., Листопадова В. В. Про внесок М. В. Остроградського в розвиток математичного аналізу.....	212
Маловичко Т. В. Єрмаков Василь Петрович. Частная жизнь	215
Міхно О. П., Гайдей В. О. Підручники з математики часів Української революції 1917—1921 рр. у фондах Педагогічного музею	219
Хорошун В. В. Методу задачі Рімана — Гільберта (методу АМШ) — 55	224

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. <i>Схема роботи викладача з тестами для контролю знань студентів з вищої математики</i>	229
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>ЗНО-2016 з математики, як віддзеркалення стану сучасної середньої освіти</i>	233
Кулумбегова Т., Тимошенко О. А. <i>Спеціалізація «Страхова та фінансова математика» на ФМФ: особливості навчання</i>	238
Омелян О. М., Рендюк С. П. <i>Організація самостійної роботи студентів технічних університетів при вивченні математичних дисциплін</i>	241
Петропавловська Г. О. <i>Самостійна робота і контроль за її виконанням під час вивчення вищої математики іноземними студентами НУ «ОМА»</i>	245
Селезньова Н. П., Селезньов С. В. <i>Контент-аналіз якості ЗНО з математики</i>	248
Селезньова Н. П., Українець О. В. <i>Перевірка адекватності функції регресії</i>	252
Чернега О. М., Броніцька В. О. <i>Використання проектної технології при підготовці майбутніх вчителів математики</i>	256
Шилинець В. А. <i>Совершенствование организации управляемой самостоятельной работы студентов по высшей математике</i>	259

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
V Міжнародної
науково-практичної конференції
29—30 грудня 2016 року

Підписано до друку 30.01.2017.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 16,75
Зам. № 34. Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б