ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.

Перший курс

1. Визначити всі числові послідовності $(a_0, a_1, \ldots, a_{2016})$, що мають таку властивість: кожне число $i \in \{0, 1, \ldots, 2016\}$ зустрічається в цій послідовності рівно a_i разів.

2. Нехай A та B — квадратні матриці однакової розмірності, причому B є невиродженою. Розглянемо функцію $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задану співвідношенням $f(x) = \det(Ax + B)$. Довести, що $f'(0) = \det B \cdot \operatorname{tr}(AB^{-1})$. Тут через tr позначено слід матриці, тобто суму елементів її головної діагоналі.

3. Числову послідовність $\big(x_n, n \geq 0\big)$ задано початковою умовою $x_0 = a$ та рекурентним співвідношенням
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{b + x_n}{1 - x_n}, & \text{якщо } x_n \neq 1, \\ -1, & \text{якщо } x_n = 1, \end{cases}$$
де $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

   Визначити, за яких умов на параметри a та b всі члени послідовності $\big(x_n, n \geq 0\big)$ будуть різними числами.

4. Позначимо через $\mathcal{S}(n)$ суму цифр натурального числа n. Знайти

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{2016} \mathcal{S}(k)$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \cdot 10^n} \sum\limits_{k=1}^{10^n} \mathcal{S}(k)$.

5. Знайти всі дійсні корені рівняння
$$\sum_{n=1}^{2015} \frac{x^n}{n^{2016}} = 0.$$

6. Про двічі диференційовну функцію $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ відомо, що
$$\lim_{x\to+\infty} \big(x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x)\big) = 1.$$
   Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7. З точки A на параболі $y = x^2$ проведено дотичні AB та AC до параболи $y = x^2 + 1$, після чого точки дотику B та C з'єднано відрізком. Довести, що площа параболічного сегмента, обмеженого відрізком BC та дугою параболи BC, не залежить від вибору точки A.

8. Графік функції $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ перетинає кожну пряму $y = kx$, $k > 0$, рівно один раз, причому точка перетину знаходиться на відстані $\frac{1}{\sqrt{k}}$ від початку координат. Знайти $\int\limits_0^a f(x)\,dx$, де a — точка максимуму функції f.

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/