ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.

Старші курси

1. Визначити всі числові послідовності $(a_0, a_1, \ldots, a_{2016})$, що мають таку властивість: кожне число $i \in \{0, 1, \ldots, 2016\}$ зустрічається в цій послідовності рівно a_i разів.

2. Довести, що при $m \geq 2$ для біноміального коефіцієнту C_{2m}^m виконується нерівність
$$C_{2m}^m \leq \frac{4^m}{\sqrt{m}} \prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2}}.$$

3. Числову послідовність $\big(x_n, n \geq 0\big)$ задано початковою умовою $x_0 = a$ та рекурентним співвідношенням
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{b + x_n}{1 - x_n}, & \text{якщо } x_n \neq 1, \\ -1, & \text{якщо } x_n = 1, \end{cases}$$
де $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

   Визначити, за яких умов на параметри a та b всі члени послідовності $\big(x_n, n \geq 0\big)$ будуть різними числами.

4. Позначимо через $\mathcal{S}(n)$ суму цифр натурального числа n. Знайти
   (a) $\sum\limits_{k=1}^{2016} \mathcal{S}(k)$;
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \cdot 10^n} \sum\limits_{k=1}^{10^n} \mathcal{S}(k)$.

5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, де послідовність $\big(a_n, n \geq 0\big)$ задано початковими умовами $a_0 = a_1 = 1$ та рекурентним співвідношенням
$$a_{n+2} = \frac{a_n \sqrt{a_{n+1}}}{1 + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

6. Всередині кола одиничного радіуса навмання проводять інше коло. Для цього спочатку всередині зовнішнього кола випадково вибирають центр внутрішнього кола, а потім його радіус таким чином, щоб внутрішнє коло не вийшло за межі зовнішнього. Знайти ймовірність того, що центр зовнішнього кола буде лежати всередині внутрішнього.

7. Записати лінійне однорідне диференціальне рівняння $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ найменшого порядку n, серед розв'язків якого є функція $\sin^2 x - \operatorname{sh}^2 x$, якщо коефіцієнти $a_0, \ldots, a_{n-1}$ є
   (a) сталими;
   (b) неперервними функціями від x.

8. Графік функції $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ перетинає кожну пряму $y = kx$, $k > 0$, рівно один раз, причому точка перетину знаходиться на відстані $\frac{1}{\sqrt{k}}$ від початку координат. Знайти $\int_0^a f(x)\,dx$, де a — точка максимуму функції f.

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/