

**РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ»
З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.**

1-й курс

Задача 1. Визначити всі числові послідовності $(a_0, a_1, \dots, a_{2016})$, що мають таку властивість: кожне число $i \in \{0, 1, \dots, 2016\}$ зустрічається в цій послідовності рівно a_i разів.

Розв'язання: Очевидно, що всі a_i – невід'ємні цілі числа. Неважко зрозуміти, що $a_i \leq 2016$ ($a_i \leq 2017$, оскільки всього елементів 2017; якщо $a_i = 2017$, то всі елементи мають дорівнювати i , включаючи a_i , тобто $i = 2017$, протиріччя). Отже, суму чисел можна записати двома способами: $a_0 + a_1 + \dots + a_{2016} = a_1 + 2a_2 + \dots + 2016a_{2016}$ (справа ми додаємо спочатку нулі, потім одиниці, потім двійки і так далі). Нехай $a_0 = m$. Тоді $m = a_2 + 2a_3 + \dots + 2015a_{2016}$. Очевидно, $m \geq 3$ (інакше справа принаймні 2013 ненульових доданків). Оскільки $a_m \geq 1$, то серед решти доданків правої частини, починаючи з a_3 , зустрічаються тільки нулі, а $a_m = 1$ (інакше права частина більша за m). Щоб рівність досяглась, повинно бути $a_2 = 1$. Тоді $a_1 = 2$ (оскільки всі інші члени послідовності відомі, і серед них рівно два – це a_2 і a_m – дорівнюють 1), $m = 2013$ (оскільки $2013 = 2017 - 4$ членів послідовності (всі, крім a_0 , a_1 , a_2 і a_m) дорівнюють нулю). Перевіряємо, що така послідовність задовольняє умову.

Відповідь: $a_0 = 2013, a_1 = 2, a_2 = 1, a_{2013} = 1$, решта a_i дорівнюють 0.

Задача 2. Нехай A та B – квадратні матриці однакової розмірності, причому B є невиродженою. Розглянемо функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задану співвідношенням $f(x) = \det(Ax + B)$. Довести, що $f'(0) = \det B \cdot \text{tr}(AB^{-1})$. Тут через tr позначено слід матриці, тобто суму елементів її головної діагоналі.

Розв'язання: Нехай A і B мають розмірність n . Позначимо $C = AB^{-1}$. Тоді $f(x) = \det B g(x)$, де $g(x) = \det(Cx + E)$. Тоді $f'(0) = \det B g'(0)$. Оскільки $g(x)$ – многочлен, то $g'(0)$ – його коефіцієнт при x . Всі елементи матриці $Cx + E$, окрім елементів на головній діагоналі, мають вигляд $c_{ij}x$, а елементи на головній діагоналі мають вигляд $c_{ii}x + 1$. Розписуючи визначник як суму добутків елементів матриці, взятих з тим чи іншим знаком, розуміємо, що якщо в такому добутку є елемент не з діагоналі, то в ньому є ще принаймні один елемент не з діагоналі, отже такий добуток буде многочленом від x з коефіцієнтом при x рівним 0. Добуток же елементів з діагоналі дорівнює

$$\prod_{i=1}^n (c_{ii}x + 1).$$

Розкриваючи скобки, отримаємо, що коефіцієнт при x рівний

$$\sum_{i=1}^n c_{ii}, \text{ що й є } \text{tr}(AB^{-1}).$$

Задача 3. Числову послідовність $(x_n, n \geq 0)$ задано початковою умовою $x_0 = a$ та рекурентним співвідношенням

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{b+x_n}{1-x_n}, \text{ якщо } x_n \neq 1, \\ -1, \text{ якщо } x_n = 1, \end{cases}$$

де $a \in \mathbb{R}, b > 0$.

Визначити, за яких умов на параметри a та b всі члени послідовності $(x_n, n \geq 0)$ будуть різними числами.

Розв'язання: Розширимо \mathbb{R} до $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ і введемо функцію

$$f(x) = \frac{b+x}{1-x} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (\text{тут } f(1) = \infty, f(\infty) = -1), \quad \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо в нашій послідовності $x_k = 1$, $x_{k+1} = -1$, «розсунемо» їх і помістимо між ними ∞ . Тоді для нової, «розсунутої», послідовності буде виконуватись $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 0$. В новій послідовності всі елементи різні тоді і тільки тоді, коли вони всі різні в початковій. Дійсно, якщо в новій зустрічається 2 рази ∞ , за ними йдуть два різних рівних -1 елемента.

Нехай $\beta = \arctg \sqrt{b}$, $\gamma = \arctg \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right)$. Доведемо за індукцією, що

$\forall t \geq 0, x_t = \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + t\beta)$. Для $t=0$ твердження очевидне. Якщо твердження виконується для $t=l \geq 0$, то

$$x_{l+1} = \frac{b + \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + l\beta)}{1 - \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + l\beta)} = \sqrt{b} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\gamma + l\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \operatorname{tg}(\gamma + l\beta)} = \frac{\sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + (l+1)\beta)}{\sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + (l+1)\beta)}.$$

Якщо $\frac{\beta}{\pi}$ раціональне і дорівнює $\frac{m}{n}$, то, підставляючи $t=n$, отримаємо

$$x_0 = \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma) = \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + m\pi) = \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + n\beta) = x_n,$$

тобто серед елементів послідовності є співпадаючі елементи.

Якщо серед елементів послідовності є співпадаючі елементи x_k і x_l , то

$$\sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + k\beta) = x_k = x_l = \sqrt{b} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + l\beta),$$

звідки $(k-l)\beta = v\pi$, $v \in \mathbb{Z}$, тобто β – раціональне, що й треба було довести.

Відповідь: Всі члени послідовності будуть різними числами тоді і тільки тоді, коли $\frac{\arctg \sqrt{b}}{\pi}$ – ірраціональне число.

Задача 4. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n .
Знайти

(a) $\sum_{k=1}^{2016} S(k)$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 10^n} \sum_{k=1}^{10^n} S(k)$.

Розв'язання:

б) Неважко зрозуміти, що $\forall m \in \{1, 2, \dots, 10^n - 2\}$ виконується $S(m) + S(10^n - 1 - m) = 9n$ (оскільки якщо десятковий запис числа $m = a_n a_{n-1} \dots a_1$, то десятковий запис числа $10^n - 1 - m = (9 - a_n)(9 - a_{n-1}) \dots (9 - a_1)$ (тут на перших позиціях дозволяються нулі)). Розбиваючи числа на пари, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{10^n} S(k) = \frac{10^n - 2}{2} 9n + S(10^n - 1) + S(10^n) = \frac{9}{2} 10^n \cdot n + 1$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 10^n} \sum_{k=1}^{10^n} S(k) = \frac{9}{2}.$$

а)

$$\sum_{k=1}^{2016} S(k) = \sum_{k=1}^{1000} S(k) + \sum_{k=1001}^{2000} S(k) + \sum_{k=2001}^{2016} S(k) = i$$

$$\left(\frac{9}{2} 10^3 \cdot 3 + 1 \right) + \left(\frac{9}{2} 10^3 \cdot 3 + 1 + 1000 \right) + 105 = 28107$$

(другий доданок рівно на 1000 більше за перший (оскільки $S(1000+m) = 1 + S(m) \forall m \in \{1, 2, \dots, 1000\}$), третій рахується вручну).

Задача 5. Знайти всі дійсні корені рівняння

$$\sum_{n=1}^{2015} \frac{x^n}{n^{2016}} = 0.$$

Розв'язання: Позначимо $f(x) = \sum_{n=1}^{2015} \frac{x^n}{n^{2016}}$. Очевидно, $x=0$ є коренем.

Нехай ϵ ще дійсний корень. Тоді він також є коренем $\frac{f(x)}{x}$. Для протиріччя достатньо довести, що $\frac{f(x)}{x} > 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Дійсно,

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=0}^{2014} \frac{x^k}{(k+1)^{2016}} = \frac{1}{2} + i$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1006} x^{2k} \left(\frac{1}{(2k+1)^{2016}} + 2 \frac{x}{(2k+2)^{2016}} + \frac{x^2}{(2k+3)^{2016}} \right) + \frac{1}{2} \frac{x^{2014}}{2015^{2016}}.$$

Перший доданок ($1/2$) є додатним, третій – невід'ємним, а другий є невід'ємним, оскільки $\forall k \in \{0, 1, \dots, 1006\} x^{2k} \geq 0$,

$$\frac{1}{(2k+1)^{2016}} + 2 \frac{x}{(2k+2)^{2016}} + \frac{x^2}{(2k+3)^{2016}} > 0$$

(дискримінант від'ємний: $\left(\frac{1}{(2k+2)^{2016}} \right)^2 < \left(\frac{1}{(2k+2)^2 - 1} \right)^{2016} = \frac{1}{(2k+1)^{2016}} \cdot \frac{1}{(2k+3)^{2016}}$).

Відповідь: $x=0$.

Задача 6. Про двічі диференційовану функцію $f:(0,+\infty) \rightarrow R$ відомо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x)) = 1.$$

Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Розв'язання: Позначимо $g(x) = x^2 \cdot f(x)$. Тоді $\lim_{x \rightarrow +\infty} g''(x) = 1$. Згідно з правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g''(x)}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2/2} = 1,$$

звідки й випливає відповідь. Законність використання правила Лопітала випливає з умови задачі.

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Задача 7. З точки A на параболі $y=x^2$ проведено дотичні AB та AC до параболи $y=x^2+1$, після чого точки дотику B та C з'єднано відрізком. Довести, що площа параболічного сегмента, обмеженого відрізком BC та дугою параболи BC , не залежить від вибору точки A .

Розв'язання: Позначимо координати точок $A(a, a^2)$, $B(b, b^2+1)$ і $C(c, c^2+1)$, причому нехай $b < c$, тоді, записуючи рівняння дотичних, отримаємо $a^2 - (b^2+1) = (a-b) \cdot 2b$, тобто $(a-b)^2 = 1$, аналогічно $(a-c)^2 = 1$, звідки $b = a-1$, $c = a+1$. Рівняння прямої BC має вигляд $y = 2ax - (a^2 - 2)$. Тоді шуканий інтеграл дорівнює

$$\int_{a-1}^{a+1} (2ax - (a^2 - 2) - (x^2 + 1)) dx = I$$

$$\left(\frac{-x^3}{3} + x^2 - x(a^2 - 2) + ax^2 \right) \Big|_{a-1}^{a+1} = [\text{розкриваючи скобки}] = \frac{4}{3}.$$

Задача 8. Графік функції $f:(0,+\infty) \rightarrow (0,+\infty)$ перетинає кожну пряму $y=kx, k>0$, рівно один раз, причому точка перетину знаходиться на відстані $\frac{1}{\sqrt{k}}$ від початку координат. Знайти $\int_0^a f(x) dx$, де a – точка максимуму функції f .

Розв'язання: Перейдемо до полярних координат. У них функція матиме вигляд $\rho(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}}$. Знайдемо максимум

$$y = \rho \sin \varphi = \left[\text{підставляючи } \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\rho^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}}}. \text{ Очевидно, він}$$

досягається при $\rho=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Графік функції f лежить над відрізком, який з'єднує початок координат і точку максимуму функції. Шуканий інтеграл дорівнює площі під графіком функції, яка дорівнює сумі площ трикутника і сегмента:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \rho^2(\varphi) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \rho^2(\varphi) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} \varphi dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln |\sin \varphi| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{4} (1 + \ln 2)$$

Відповідь: $\frac{1}{4}(1 + \ln 2)$