РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2016 р.

Старші курси

Задача 1. Визначити всі числові послідовності $(a_0, a_1, \ldots, a_{2016})$, що мають таку властивість: кожне число $i \in \{0,1,\ldots,2016\}$ зустрічається в цій послідовності рівно a_i разів.

Розв'язання: Очевидно, що всі a_i – невід'ємні цілі числа. Неважко зрозуміти, що $a_i \le 2016$ ($a_i \le 2017$, оскільки всього елементів 2017; якщо $a_i = 2017$, то всі елементи, виходить, дорівнюють i, включаючи a_i, тобто $i = 2017$, протиріччя). Отже, суму чисел можна записати двома способами: $a_0 + a_1 + \ldots + a_{2016} = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2016a_{2016}$ (справа ми сумуємо спочатку нулі, потім одиниці, потім двійки і так до a_i, які дорівнюють 2016). Нехай $a_0 = m$. Тоді $m = a_2 + 2a_3 + \ldots + 2015a_{2016}$. Очевидно, $m \ge 3$ (інакше справа принаймні 2013 ненульових доданків). Оскільки $a_m \ge 1$, то серед решти доданків правої частини, починаючи з a_3, зустрічаються тільки нулі, а $a_m = 1$ (інакше права частина більша за m). Щоб рівність досягалась, повинно бути $a_2 = 1$. Тоді $a_1 = 2$ (оскільки всі інші члени послідовності відомі, і серед них рівно два (a_2 і a_m) дорівнюють 1), $m = 2013$ (оскільки 2013=2017-4 членів послідовності (всі, крім a_0, a_1, a_2 і a_m) дорівнюють нулю). Перевіряємо, що така послідовність задовольняє умову.

Відповідь: $a_0 = 2013, a_1 = 2, a_2 = 1, a_{2013} = 1$, решта a_i дорівнюють 0.

Задача 2.Довести, що при $m \geq 2$ для біноміального коефіцієнту C_{2m}^{m} виконується нерівність

$$C_{2m}^{m} \leq \frac{4^m}{\sqrt{m}} \prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}.$$

Розв'язання:Доведемо за індукцією. Для m=2 нерівність легко перевіряється. Нехай вона виконується для m=n-1:

$$C_{2n-2}^{n-1} \leq \frac{4^{n-1}}{\sqrt{n-1}} \prod_{k=1}^{n-2} \sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}.$$

Для доведення кроку індукції достатньо довести, що

$$\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n-2}^{n-1}} \leq \frac{\frac{4^n}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}}{\frac{4^{n-1}}{\sqrt{n-1}} \prod_{k=1}^{n-2} \sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}}$$

Користуючись рівністю $C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, роблячи елементарні перетворення, отримаємо еквівалентну нерівність

$$(2n-1)^2(n-1) \leq n\left(4(n-1)^2+1\right),$$

в якій впевнюємось, розкриваючи дужки.

Задача 3. Числову послідовність $(x_n, n \geq 0)$ задано початковою умовою $x_0 = a$ та рекурентним співвідношенням

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{b + x_n}{1 - x_n}, \text{якщо } x_n \neq 1, \\ -1, \text{якщо } x_n = 1, \end{cases}$$

де $a \in R, b > 0$.

Визначити, за яких умов на параметри a та b всі члени послідовності $(x_n, n \geq 0)$ будуть різними числами.

Розв'язання: Розширимо R до $R \cup \{\infty\}$ і введемо функцію $f(x) = \dfrac{b+x}{1-x} : R \cup \{\infty\} \to R \cup \{\infty\}$ (тут $f(1) = \infty$, $f(\infty) = -1$), $arctg(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Якщо в нашій послідовності $x_k = 1$, $x_{k+1} = -1$, «розсунемо» їх і помістимо між ними ∞. Тоді для нової, «розсунутої», послідовності буде виконуватись $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 0$. В новій послідовності всі елементи різні тоді і тільки тоді, коли вони всі різні в початковій. Дійсно, якщо в новій зустрічається 2 рази ∞, за ними йдуть два різних рівних -1 елемента.

Нехай $\beta = arctg\sqrt{b}$, $\gamma = arctg\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)$. Доведемо за індукцією, що $\forall t \geq 0 \, x_t = \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + t\beta)$. Для $t = 0$ твердження очевидне. Якщо твердження виконується для $t = l \geq 0$, то

$$x_{l+1} = \frac{b + \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + l\beta)}{1 - \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + l\beta)} = \sqrt{b} \cdot \frac{tg(\beta) + tg(\gamma + l\beta)}{1 - tg(\beta) \cdot tg(\gamma + l\beta)} = ¿$$

$$¿ \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + (l+1)\beta).$$

Якщо $\dfrac{\beta}{\pi}$ раціональне і дорівнює $\dfrac{m}{n}$, то, підставляючи $t = n$, отримаємо

$$x_0 = \sqrt{b} \cdot tg(\gamma) = \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + m\pi) = \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + n\beta) = x_n,$$

тобто серед елементів послідовності є співпадаючі елементи.

Якщо серед елементів послідовності є співпадаючі елементи x_k і x_l, то

$$\sqrt{b} \cdot tg(\gamma + k\beta) = x_k = x_l = \sqrt{b} \cdot tg(\gamma + l\beta),$$

звідки $(k - l)\beta = \nu\pi$, $\nu \epsilon Z$, тобто β – раціональне, що й треба було довести.

Відповідь: Всі члени послідовності будуть різними числами тоді и тільки тоді, коли $\dfrac{arctg\sqrt{b}}{\pi}$ – ірраціональне число.

Задача 4. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Знайти

(a) $\sum_{k=1}^{2016} S(k)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 10^n} \sum_{k=1}^{10^n} S(k)$.

Розв'язання:

b) Неважко зрозуміти, що $\forall m \in \{1,2,\dots,10^n-2\}$ виконується $S(m)+S(10^n-1-m)=9n$ (оскільки якщо десятковий запис числа $m=a_n a_{n-1}\dots a_1$, то десятковий запис числа $10^n-1-m=(9-a_n)(9-a_{n-1})\dots(9-a_1)$ (тут на перших позиціях дозволяються нулі)). Розбиваючи числа на пари, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{10^n} S(k)=\frac{10^n-2}{2}9n+S(10^n-1)+S(10^n)=\frac{9}{2}10^n\cdot n+1$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 10^n}\sum_{k=1}^{10^n} S(k)=\frac{9}{2}.$$

a)

$$\sum_{k=1}^{2016} S(k)=\sum_{k=1}^{1000} S(k)+\sum_{k=1001}^{2000} S(k)+\sum_{k=2001}^{2016} S(k)=\text{¿}$$

$$\text{¿}\left(\frac{9}{2}10^3\cdot 3+1\right)+\left(\frac{9}{2}10^3\cdot 3+1+1000\right)+105=28107$$

(другий доданок рівно на 1000 більше за перший (оскільки $S(1000+m)=1+S(m)\,\forall m\in\{1,2,\dots,1000\}$), третій рахується вручну).

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, де послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано початковими умовами $a_0 = a_1 = 1$ та рекурентними співвідношеннями

$$a_{n+2} = \frac{a_n \sqrt{a_{n+1}}}{1 + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

Розв'язання:Доведемо в декілька етапів:

1) $a_n \geq 0$ (очевидно)

2) $a_{n+2} = a_n \cdot \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{1 + \sqrt{a_{n+1}}} \leq a_n$

3) $a_2 = 1 \cdot \frac{\sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < \frac{1}{2}$

З (2) і (3) випливає, що $\forall n \geq 2 \, a_n \leq \frac{1}{2}$. Тому:

4) $a_{n+2} = a_n \cdot \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{1 + \sqrt{a_{n+1}}} \leq a_n \sqrt{a_{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$

5) Кожен з рядів $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$ і $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$ збігається за ознакою Д'Аламбера

6) Шуканий ряд теж збігається.

Відповідь: Ряд збігається.

Задача 6. Всередині кола одиничного радіуса навмання проводять інше коло. Для цього спочатку всередині зовнішнього кола випадково вибирають центр внутрішнього кола, а потім його радіус таким чином, щоб внутрішнє коло не вийшло за межі зовнішнього. Знайти ймовірність того, що центр зовнішнього кола буде лежати всередині внутрішнього.

Розв'язання: Помістимо початок координат у центр зовнішнього кола. Якщо центр внутрішнього кола M потрапив у кільце

$$\frac{1}{2} < r(X) \le 1,$$

де $r(X)$ – відстань від точки X до початку координат, то внутрішнє коло точно не буде містити центр зовнішнього. Якщо ж M потрапила у круг $r(X) \le \frac{1}{2}$, і $r(M) = r \le \frac{1}{2}$, то радіус обирається випадковим чином серед чисел проміжку $[0, 1-r]$, а задовольняють умову радіуси з проміжку $[r, 1-r]$, тобто ймовірність шуканої події для таких М дорівнює $\frac{1-2r}{1-r}$. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{r \le \frac{1}{2}} \frac{1-2r}{1-r} dxdy,$$

де інтеграл береться по кругу $r(X) \le \frac{1}{2}$, π – площа зовнішнього круга. Роблячи полярну заміну, отримаємо

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{r \le \frac{1}{2}} \frac{1-2r}{1-r} dxdy = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\substack{0 \le r \le \frac{1}{2} \\ 0 \le \alpha \le 2\pi}} r \cdot \frac{1-2r}{1-r} dr d\alpha = \text{¿}$$

$$\text{¿}\, 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r - 2r^2}{1-r} dr = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2r + 1 + \frac{1}{r-1} \right) dr = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Задача 7. Записати лінійне однорідне диференціальне рівняння $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 y'+a_0=0$ найменшого порядку n, серед розв’язків якого є функція $\sin^2 x-sh^2 x$, якщо коефіцієнти $a_0,\ldots,a_{n-1}$ є

(a) сталими;

(b) неперервними функціями від x.

Розв’язання: Позначимо

$$f(x)=(\sin x)^2-(shx)^2=1-\frac{1}{2}ch(2x)-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Тоді:

$$f'(x)=-sh(2x)+\sin(2x)$$
$$f^{(2)}(x)=-2ch(2x)+2\cos(2x)$$
$$f^{(3)}(x)=-4sh(2x)-4\sin(2x)$$
$$f^{(4)}(x)=-8ch(2x)-8\cos(2x)$$
$$f^{(5)}(x)=-16sh(2x)+16\sin(2x)$$

Очевидно, рівняння $y^{(5)}-16y'=0$ задовольняє умову.

Нехай $n\leq 4$ і $f(x)$ є коренем. Неважко побачити, що

$$f(0)=f'(0)=f^{(2)}(0)=f^{(3)}(0)=0.$$

Тому рівнянню Коші з початковою умовою

$$f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$$

задовольняють дві різні функції – f і тотожний 0, що неможливо.

Відповідь: $n=5$, $y^{(5)}-16y'=0$. Навіть якщо a_i – неперервні функції, рівняння меншого степеня з коренем $f(x)$ неможливе.

Задача 8. Графік функції $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ перетинає кожну пряму $y=kx, k>0$, рівно один раз, причому точка перетину знаходиться на відстані $\frac{1}{\sqrt{k}}$ від початку координат. Знайти $\int_0^a f(x)\,dx$, де a – точка максимуму функції f .

Розв'язання: Перейдемо до полярних координат. У них функція матиме вигляд $\rho(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{tg\,\varphi}}$. Знайдемо максимум $y=\rho\sin\varphi=[n\,\textit{ідставляючи}\sin\varphi=\frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}, tg\,\varphi=\frac{1}{\rho^2}]=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\frac{1}{\rho^2}}}$. Очевидно, він досягається при $\rho=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Графік функції f лежить над відрізком, який з'єднує початок координат і точку максимуму функції. Шуканий інтеграл дорівнює площі під графіком функції, яка дорівнює сумі площ трикутника і сегмента:

$$\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\rho^2(\varphi)\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\rho^2(\varphi)\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}ctg\,\varphi\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln|\sin\varphi|\text{¿}_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{4}(1+\ln 2)$$.

Відповідь: $\frac{1}{4}(1+\ln 2)$