Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ПРАКТИКУМ

Київ
2016

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (І курс ІІ семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2016. — 188 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 6 від 18.02.2010)

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних.
Диференціальні рівняння.
Практикум

для студентів І курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Алєксєєва Ірина Віталіївна*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз-мат. наук
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *О. І. Клесов,* д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ

Практикум з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння» є складовою навчального комплекту з вищої математики, який становлять: конспект лекцій, практикум, збірник задач, індивідуальних домашніх завдань і тестів.

Матеріал практикуму складено на основі багаторічного досвіду викладання математики авторами в НТУУ «КПІ», він відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить наступні розділи дисципліни «Вища математика»:

— диференціальне числення функцій кількох змінних;
— визначені інтеграли;
— невластиві інтеграли;
— подвійні інтеграли;
— потрійні інтеграли;
— криволінійні інтеграли 1-го і 2-го роду;
— поверхневі інтеграли 1-го і 2-го роду;
— елементи теорії поля;
— диференціальні рівняння 1-го порядку, які інтегруються у квадратурах і рівняння вищих порядків, які зводяться до них;
— лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Практикум містить розгорнутий довідковий матеріал, широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання і сприяють розвитку практичних навичок і є зразком належного оформлення задач для самостійної роботи, певну кількість задач для самостійної роботи в аудиторії та домашнього завдання.

Метою практикуму є:

- допомогти опанувати студентам основ математичного апарату в галузі диференціального числення функцій кількох змінних, усіх типів визначених інтегралів, теорії поля, диференціальних рівнянь;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом практикуму, використанням конспекту лекцій чи підручників.

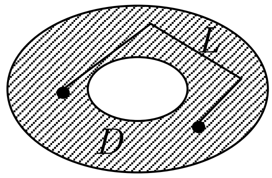
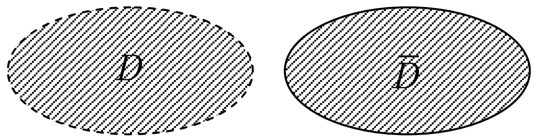
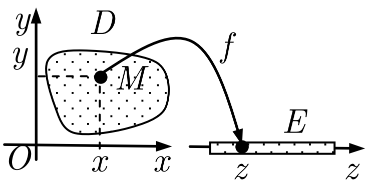
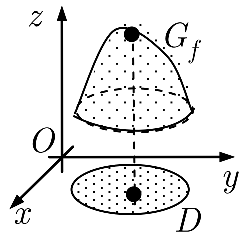
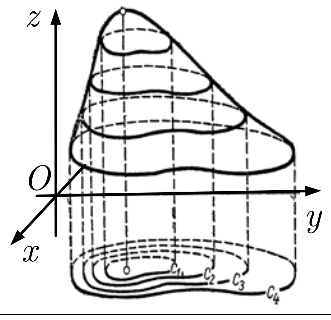
У практичній частині використано такі позначення:

[A.B.C] — посилання на клітинку **C**, у якій вміщено теоретичний факт або формулу, таблиці **A.B.** з теми **A**.

①,②,③,... — посилання у навчальній задачі на коментар, який вміщено після розв'язання.

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1. Функція двох змінних

❶ ε ***-окіл точки*** M_0	$U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid d(M, M_0) < \varepsilon\}$
❷ ***Зв'язна множина.*** Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які її точки можна сполучити ламаною $L \subset D$.	
❸ ***Область.*** Відкриту, зв'язну множину називають *областю*. Об'єднання області D з її межею ∂D називають *замкненою областю* $\overline{D} = D \cup \partial D$.	∂D 
❹ ***Функція двох змінних.*** Якщо вказано правило f, за яким кожній точці $M(x;y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ відповідає єдине значення $z \in E \subset \mathbb{R}^1$, то кажуть, що в області D означено *функцію двох змінних* $$z = f(x,y), (x;y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$ *Графіком* функції $z = f(x,y), (x;y) \in D,$ називають $G_f = \{M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$	 D — *область означення*; E — *множина значень*
	
❺ ***Функція*** n ***змінних***	$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}_n$
❻ ***Лінія рівня*** функції $z = f(x,y)$ $$L_C = \{M(x;y) \mid f(x,y) = C\},$$ $$C = \text{const}$$	
❼ ***Поверхня рівня*** функції $$u = f(x,y,z)$$	$$\Omega_C = \{M(x;y;z) \mid f(x,y,z) = C\},$$ $$C = \text{const}$$

9.2. Границя функції. Неперервність

❶ ***Границя функції.*** $$\lim_{M \to M_0} f(M) = A$$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall M \in U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(M) \in U_\varepsilon(A)$ Границя функції не залежить від напряму руху точки M до точки M_0.
❷ ***Неперервність функції.*** Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* M_0, якщо	вона визначена в околі точки M_0 і $$\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$
Функцію, неперервну в кожній точці множини D, називають ***неперервною на множині*** D.	
❸ ***Частинні*** прирости: функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta_x z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, де $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$
❹ ***Повний*** приріст функції: $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta z(M_0) =$ $= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
❺ ***Умова неперервності*** функції $u = f(M)$ у точці M_0	$$\lim_{M \to M_0} \Delta u(M_0) = 0$$
❻ ***Теореми Веєрштраса.*** Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$, то:	1) $u = f(M)$ обмежена в області $\overline{D}$; 2) $u = f(M)$ набуває в області $\overline{D}$ своїх найбільшого та найменшого значень.

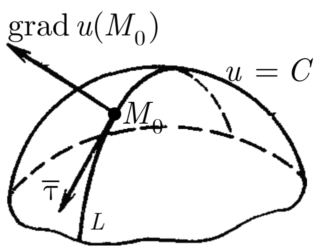
9.3. Похідні функцій кількох змінних

❶ ***Частинна*** похідна функції: $z=f(x,y)$ за змінною x у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\|_{M_0}=z'_x(M_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x}$
$z=f(x,y)$ за змінною y у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\|_{M_0}=z'_y(M_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y}$
❷ Похідна ***складеної*** функції $z=f(x,y), x=x(t), y=y(t),$ $\tilde{z}(t)=f(x(t),y(t))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
$z=f(x,y),$ $x=x(u,v), y=y(u,v),$ $\tilde{z}(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$	$\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},$ $\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$
❸ ***Повна*** похідна функції $z=f(x,y), y=y(x),$ $\tilde{z}(x)=f(x,y(x))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$
❹ Похідна ***неявної*** функції $F(x,y)=0,\quad y=y(x)$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$
$F(x,y,z)=0,\qquad z=z(x,y)$	$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$
❺ Частинні похідні ***2-го порядку*** функції $z=f(x,y)$	
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right);$	*мішані* похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$
❻ ***Теорема Шварца.*** Нехай функція $z=f(x,y)$ та її похідні $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ означені в області D.	Якщо z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в точці $M_0\in D$, то $z''_{xy}(M_0)=z''_{yx}(M_0).$

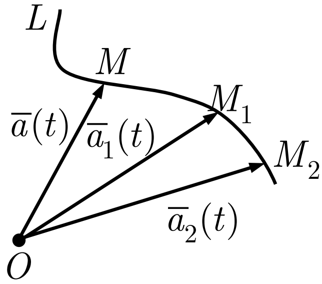
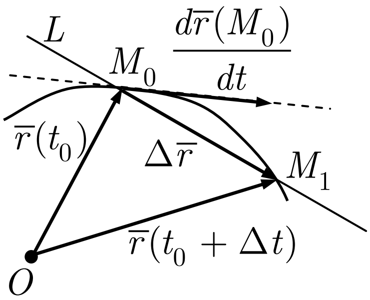
9.4. **Диференціали функцій кількох змінних**

❶ ***Диференційовність функції в точці.*** Функцію $z = f(x,y)$ називають *диференційовною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції має вигляд	$\Delta z(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$ $\rho \to 0$ де $A, B = \text{const};$ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$
Функція $u = f(M)$ диференційовна у точці $M_0 \in \mathbb{R}^n$, якщо	$\Delta u(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho)$
❷ ***Необхідна умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці M_0, то $A = z'_x(M_0), B = z'_y(M_0).$	❸ ***Достатня умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ має в околі точки M_0 неперервні похідні $z'_x(M), z'_y(M),$ то вона диференційовна в точці M_0.
❹ ***Повний диференціал функції в точці.*** Головну лінійну частину приросту диференційовної в точці M_0 функції $u = f(M)$ називають	*повним диференціалом* функції в точці M_0 і позначають $du(M_0)$: $\Delta u(M_0) = du(M_0) + o(\rho), \rho \to 0$
❺ ***Повний*** диференціал функції $z = f(x,y)$	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$
$u = f(x,y,z)$	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$
❻ ***Частинні*** диференціали функції $z = f(x,y)$	$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \ \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$
❼ Диференціал ***2-го порядку*** функції $z = f(x,y)$ незалежних змінних x, y	$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$
❽ Диференціал m***-го порядку*** функції $z = f(x,y)$ незалежних змінних x, y	$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m z$

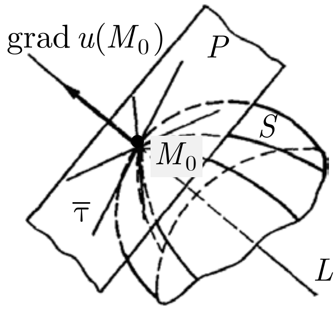
9.5. **Похідна за напрямом. Градієнт**

❶ ***Похідна за напрямом.*** *Похідною* функції $u = f(M)$ *за напрямом* $\overline{l}$ у точці M_0 називають	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{f(\overline{r_0} + t\overline{l}^{\,0}) - f(\overline{r_0})}{t}$, де $\overline{l}^{\,0}$ — орт вектора $\overline{l}, \overline{r_0} = \overline{OM_0}$.
❷ ***Похідна*** функції $u = u(x,y)$ за напрямом $\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha$
$u = u(x,y,z), \overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$
❸ ***Градієнт.*** *Градієнтом* диференційовної функції $u = f(M)$ у точці M_0 називають вектор	$\operatorname{grad} u(M_0) = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}$
❹ ***Правила обчислення градієнта.*** ① $\operatorname{grad} C = \overline{0}, C = \text{const}$; ② $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, C = \text{const}$; ③ $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;	④ $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$; ⑤ $\operatorname{grad} \dfrac{u}{v} = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$; ⑥ $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$
❺ ***Зв'язок*** між похідною за напрямом і градієнтом функції	$\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \overline{l}^{\,0}) = \operatorname{pr}_{\overline{l}^0} \operatorname{grad} u$
❻ ***Властивості градієнта.*** ① Градієнт напрямлений у бік зростання функції. ② Довжина градієнта функції в точці дорівнює найбільшій похідній функції в цій точці, тобто $\max \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lvert \operatorname{grad} u(M_0) \rvert$	❼ ***Властивості похідної за напрямом.*** Величина $\left\lvert \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} \right\rvert$ визначає швидкість зміни функції в точці M_0 за напрямом $\overline{l}$, а знак $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ — характер її зміни (зростання або спадання).
③ Градієнт функції u у точці M_0 напрямлений уздовж нормалі до поверхні рівня $u(x,y,z) = C$, що проходить через точку M_0.	

9.6. Вектор-функція дійсного аргументу

<table>
<tr>
<td>❶ Вектор-функція дійсного аргументу. Якщо кожному значення дійсної змінної $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлено у відповідність вектор $\overline{a}(t) \in \mathbb{R}^3$, то кажуть, що на множині D задано вектор-функцію $\overline{a} = \overline{a}(t)$ дійсної змінної t.</td>
<td colspan="2">$$\overline{a} = a_x(t)\overline{i} + a_y(t)\overline{j} + a_z(t)\overline{k} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}, t \in D$$</td>
</tr>
<tr>
<td>❷ Годограф. Годографом вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ називають лінію, яку описує у просторі кінець вектора $\overline{r}$. Будь-яку лінію у просторі можна розглядати як годограф деякої вектор-функції.</td>
<td>$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Границя вектор-функції
$$\lim_{t \to t_0} \overline{a}(t) = \overline{A}$$</td>
<td colspan="2">$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall t : \\ 0 < \left| t - t_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| \overline{a}(t) - \overline{A} \right| < \varepsilon$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">❹ Неперервність вектор функції.
Вектор-функція $\overline{a} = \overline{a}(t)$ неперервна в точці t_0, якщо $$\lim_{t \to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}(t_0)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>❺ Похідна вектор-функції</td>
<td colspan="2">$$\frac{d\overline{a}(t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{a}(t + \Delta t) - \overline{a}(t_0)}{\Delta t} = \\ = \frac{da_x(t_0)}{dt}\overline{i} + \frac{da_y(t_0)}{dt}\overline{j} + \frac{da_z(t_0)}{dt}\overline{k}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>❻ Дотичний вектор. Якщо $\overline{r} = \overline{r}(t)$, то $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ є вектором, напрямленим за дотичною до годографа вектор-функції $\overline{r}(t)$ у бік зростання аргументу t.</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
</table>

9.7. **Дотична і нормаль**

❶ ***Дотична площина і нормаль до поверхні.*** *Дотичною площиною* до поверхні S у точці M_0 називають площину $P,$ у якій розташовані дотичні до всеможливих кривих, які проведені на S через M_0.	
Нормаллю називають пряму $L,$ що проходить через M_0 перпендикулярно до $P.$	
❷ ***Вектор нормалі*** до поверхні $F(x,y,z)=0$	$\overline{n}=\pm\operatorname{grad}F$
$z=f(x,y)$	$\overline{n}=\pm\left(z'_x\overline{i}+z'_y\overline{j}-\overline{k}\right)$
❸ Рівняння ***дотичної площини*** до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$F'_x(M_0)(x-x_0)+$ $+F'_y(M_0)(y-y_0)+$ $+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$
❹ Рівняння ***нормалі*** до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$
❺ Рівняння ***дотичної площини*** до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$z'_x(M_0)(x-x_0)+z'_y(M_0)(y-y_0)-$ $-(z-z_0)=0,$ $z_0=f(x_0,y_0)$
❻ Рівняння ***нормалі*** до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$\dfrac{x-x_0}{z'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{z'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$
❼ Рівняння ***дотичної*** до кривої $L:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)},$ $x_0=x(t_0),y_0=y(t_0),z_0=z(t_0)$
❽ Рівняння ***нормальної площини*** до кривої L у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+$ $+z'(t_0)(z-z_0)=0$

9.8. Локальні екстремуми функції двох змінних

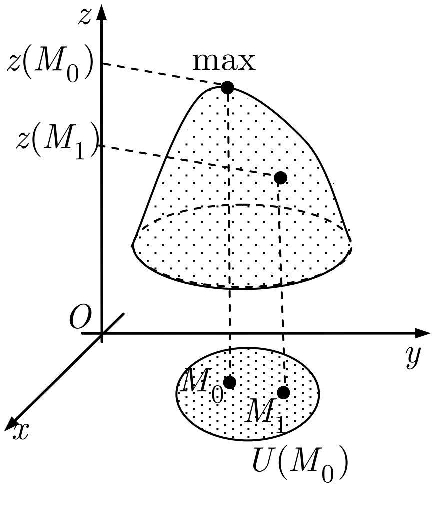
❶ ***Тейлорова формула.*** Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна $(m+1)$ разів у деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$, то для будь-якої точки $M \in U(M_0)$ правдива *Тейлорова формула* з центром у точці M_0.

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(M_\theta)}{(m+1)!}, M_\theta \in U(M_0)$$

❷ ***Локальний максимум (мінімум).*** Функція $z = f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) у точці M_0, якщо існує такий окіл $U(M_0)$, для всіх точок якого, відмінних від точки M_0, виконано нерівність

$$f(M_0) > f(M) \quad (f(M_0) < f(M)).$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають точками *локального екстремуму*.



❸ ***Необхідна умова існування локального екстремуму.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0 і має екстремум у цій точці, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dz(M_0) = 0$$

Точку M_0, в якій $dz(M_0) = 0$, називають *стаціонарною*.

❹ Матриця ***Гессе*** функції $z = f(x, y)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

❺ ***Гессіан*** функції $z = f(x, y)$

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

Позначення

$$A\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}, B\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}, C\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \det H(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

❻ ***Достатні умови локального екстремуму***. Нехай функція $z = f(x, y)$ двічі диференційовна в точці M_0 у деякому її околі і точка M_0 — стаціонарна точка функції f.	1) якщо $\Delta > 0,$ то в точці M_0 функція f має екстремум: а) коли $A > 0,$ мінімум; б) коли $A < 0,$ максимум; 2) якщо $\Delta < 0,$ то в точці M_0 функція f не має екстремуму; 3) якщо $\Delta = 0,$ то функція потребує додаткового дослідження.
❼ Алгоритм дослідження функції ***на локальний екстремум.*** ① Визначають область означення функції. ② Розв'язуючи систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ знаходять стаціонарні точки функції f: $M_1(x_1; y_1), ..., M_n(x_n; y_n)$.	③ Для кожної точки M_i перевіряють достатні умови існування екстремуму і висновують.

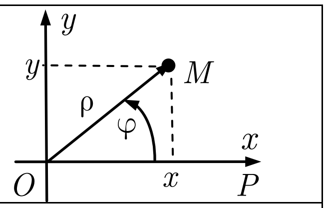
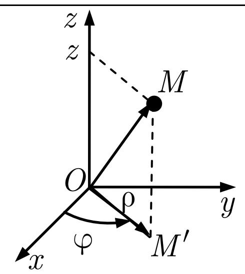
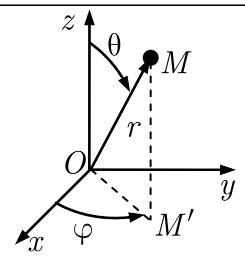
9.9. Глобальний і умовний екстремум функції двох змінних

❶ ***Глобальні екстремуми.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в обмеженій замкненій області $\overline{D} = D \cup \partial D$, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці всередині області D або на межі області ∂D.	❷ ***Умовні екстремуми.*** Функція $z = f(x, y)$ має *умовний максимум* (*умовний мінімум*) в точці $M_0,$ якщо існує такий окіл $U(M_0),$ для всіх точок якого, відмінних від точки $M_0,$ які справджують *умову зв'язку* $\varphi(M) = 0,$ виконано нерівність $f(M_0) > f(M) \quad (f(M_0) < f(M)).$
❸ ***Функція Лаґранжа*** для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ з умовою зв'язку $\varphi(x, y) = 0$	$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

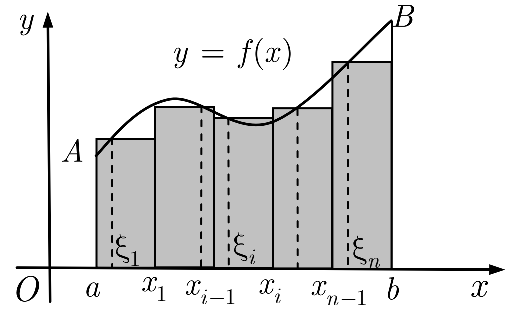
❹ ***Необхідні умови*** умовного екстремуму	$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$
❺ ***Достатні умови умовного екстремуму.*** Нехай функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ двічі неперервно диференційовні в околі стаціонарної точки $(x_0;y_0;\lambda_0)$ функції Лаґранжа $L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$ тоді, якщо	$\begin{cases} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0) < 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0; \end{cases}$ $\left(\begin{cases} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0) > 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0; \end{cases}\right)$ то в точці $M_0(x_0;y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має локальний умовний максимум (умовний мінімум).
❻ Алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ ***на глобальний екстремум у замкненій області*** $\overline{D} = D \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n,$ $L_i : \varphi_i(x,y) = 0, i = \overline{1,n}.$ ① Розв'язуючи систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ знаходять стаціонарні точки функції $f,$ які належать області $D.$	② На кожній ділянці межі $\varphi_i(x,y) = 0$ знаходять стаціонарні точки функції однієї змінної $z_i = f(x,y)\big\vert_{\varphi_i(x,y)=0}$ і долучають до розгляду межові точки цієї ділянки. ③ Обчислюють значення функції у знайдених точках і вибирають серед них найбільше та найменше значення функції в області $\overline{D}.$
❼ Алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ ***на умовний екстремум*** з умовою зв'язку $\varphi(x,y) = 0.$ ① Складають функцію Лаґранжа. $L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$	② Знаходять стаціонарні точки функції Лаґранжа із системи $\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$ ③ У кожній знайденій точці перевіряють достатні умови існування умовного екстремуму і висновують.

Розділ 10. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

10.1. Недекартові системи координат

❶ ***Полярні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$	
❷ ***Узагальнені полярні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$	$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❸ ***Циліндричні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	
❹ ***Узагальнені циліндричні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❺ ***Сферичні координати*** $r \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi], \theta \in [0; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$	$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$	
❻ ***Узагальнені сферичні координати*** $r \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi], \theta \in [0; \pi]$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2}$	$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$	

10.2. **Визначений інтеграл**

<table>
<tr><td>❶ Розбиття відрізка $[a;b]$
$\left(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,n}\right)$</td><td>$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$:
$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$</td></tr>
<tr><td>❷ Інтегральна сума для функції $f(x), x \in [a;b]$</td><td>$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_{i-1};x_i]$</td></tr>
<tr><td>❸ Визначений інтеграл. Якщо існує границя інтегральної суми, коли $\max \Delta x_i \to 0,$ яка не залежить ані від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частини, ані від вибору точок усередині кожної частини, то її називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ за відрізком $[a;b]$ і позначають</td><td>

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$</td></tr>
<tr><td>❹ Геометричний зміст визначеного інтеграла. Площа криволінійної трапеції $aABb$, якщо $f(x) \geq 0$</td><td>$\int\limits_a^b f(x)dx = S$</td></tr>
<tr><td>❺ Функція інтегровна на відрізку. Функцію $f(x)$ називають інтегровною на відрізку $[a;b],$ якщо для неї існує $\int\limits_a^b f(x)dx.$</td><td>❻ Необхідна умова інтегровності. Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b],$ то вона обмежена на цьому відрізку.</td></tr>
<tr><td>❼ Достатні умови інтегровності. Функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b],$ якщо виконано одну з умов:</td><td>1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) функція $f(x)$ обмежена і неперервна на $[a;b],$ за винятком скінченної кількості точок;
3) означена і монотонна на відрізку $[a;b].$</td></tr>
</table>

10.3. **Властивості визначеного інтеграла.**

❶ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ (*незалежність від змінної інтегрування*);	
❷ $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$ (*лінійність*);	
❸ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (*адитивність*);	
❹ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (*орієнтованість*), $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;	
❺ $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, де $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x), M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$;	
❻ якщо $f(x) \ge 0, x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ (*збереження знаку*);	
❼ якщо $f(x) \le g(x), x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ (*монотонність*);	
❽ якщо функція f інтегровна на $[a;b]$ $(a < b)$, то $\left\lvert \int\limits_a^b f(x)dx \right\rvert \le \int\limits_a^b \lvert f(x) \rvert dx.$	
❾ ***Теорема про середнє значення функції.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то знайдеться така точка $c \in (a;b)$, що	$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$
❿ ***Теорема Бароу.*** Якщо функція $f(t)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ є первісною для функції $f(x)$ і правдива *формула Бароу:*	$\left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x), a \le x \le b$

10.4. Обчислення визначеного інтеграла

❶ ***Теорема Ньютона — Лейбніца.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $[a;b]$, то правдива *формула Ньютона — Лейбніца*:	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a),$ $F'(x) = f(x)$
❷ ***Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.*** Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то правдива *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі:	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\|_a^b - \int\limits_a^b vdu$
❸ ***Заміна змінних у визначеному інтегралі.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $x = \varphi(t)$ — неперервно диференційовна функція на $[\alpha;\beta]$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, причому $f(\varphi(t))$ означена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то правдива *формула заміни змінної* у визначеному інтегралі	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
❹ Інтеграл від ***парної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$
❺ Інтеграл від ***непарної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$
❻ Інтеграл від T***-періодичної функції*** f	$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$
❼ ***Формула Валіса*** $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$	

10.5. **Застосування визначеного інтеграла**

❶ ***Площа*** фігури, обмеженої лініями $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b,$ $f(x) \geq g(x), x \in [a;b]$	$S = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$
❷ ***Площа*** криволінійного сектора $\rho = \rho(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$ в ***полярних*** координатах	$S = \dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$
❸ ***Площа*** криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою ***параметрично***: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1;t_2]$	$S = \left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right\|$
❹ ***Об'єм*** тіла за відомими площами ***перерізів*** $S(x)$, перпендикулярних до осі Ox	$V = \int\limits_a^b S(x)dx$
❺ ***Об'єм*** тіла, одержаного ***обертанням*** криволінійної трапеції навколо ***осі*** Ox	$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$
❻ ***Довжина*** дуги кривої $y = f(x), x \in [a;b]$	$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$
❼ ***Площа поверхні обертання,*** утвореної обертанням кривої $y = f(x), x \in [a;b]$, навколо осі Ox	$Q = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

10.6. **Невластиві інтеграли**

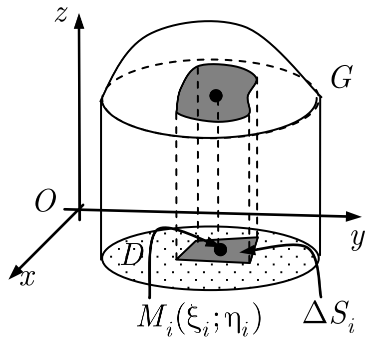
Невластивий інтеграл 1-го роду	***Невластивий інтеграл 2-го роду***
❶ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx,$ f — неперервна на кожному $[a;A]$	❷ $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$ a — точка нескінченного розриву, $f \in C_{(a;b]}$
Якщо існує скінчена границя , то інтеграл *збігається*, якщо ж ні, то — інтеграл *розбігається.*	
❸ $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$	❹ $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha < 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$

❺ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ а з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$	❻ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $(a;b]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = a$ і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x),$ то зі збіжності $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{b} f(x)dx,$ а з розбіжності $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx.$
❼ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ додатні і неперервні, існує скінченна $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.	❽ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $(a;b]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ додатні і неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = a,$ існує скінченна $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$ то $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.
❾ Якщо $\int\limits_a^{+\infty} \left\| f(x) \right\| dx$ збігається, то збігається й $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$	❿ Якщо збігається $\int\limits_a^{b} \left\| f(x) \right\| dx,$ то збігається й $\int\limits_a^{b} f(x)dx.$
⓫ $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^{b} f(x)dx;$ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$	⓬ $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$ $$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx,$$ $$c \in (a;b), \quad \lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

10.7. Подвійні інтеграли

<table>
<tr><td colspan="2">❶ Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ за областю D

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$
$$= \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i,$$</td><td>

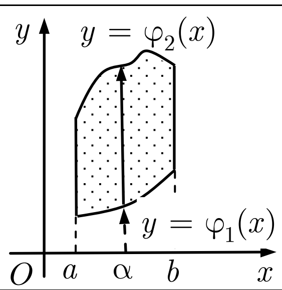

</td></tr>
<tr><td colspan="3">де ΔS_i — площі елементарних ділянок; d_i — їхні діаметри.</td></tr>
<tr><td colspan="2">❷ Геометричний зміст подвійного інтеграла. Об'єм циліндричного тіла G обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$</td><td>

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❸ Основні властивості подвійного інтеграла

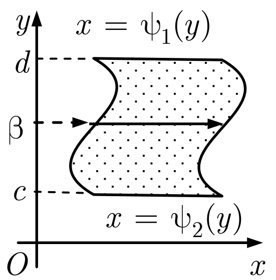
① $\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = S(D)$ (площа D) (нормованість);

② $\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$ (лінійність);

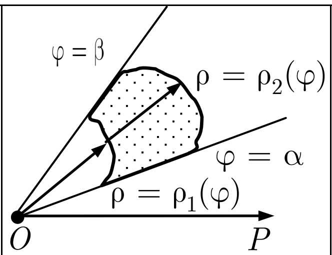
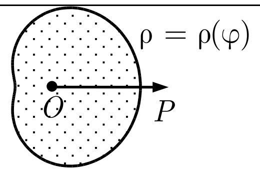
③ $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ (адитивність);</td></tr>
<tr><td colspan="3">Обчислення подвійних інтегралів</td></tr>
<tr><td colspan="3">❹ Перехід до повторних інтегралів у декартових координатах</td></tr>
<tr><td>① Область правильна в напрямі осі Oy</td><td>


</td><td>Пряма $x = \alpha$ $(a < \alpha < b)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$</td></tr>
<tr><td>② Область правильна в напрямі осі Ox</td><td>


</td><td>Пряма $y = \beta$ $(c < \beta < d)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

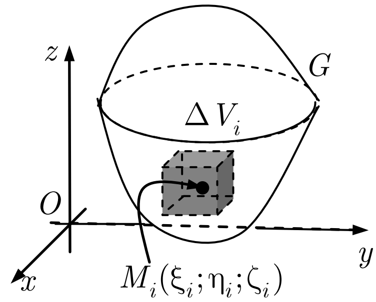
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$</td></tr>
</table>

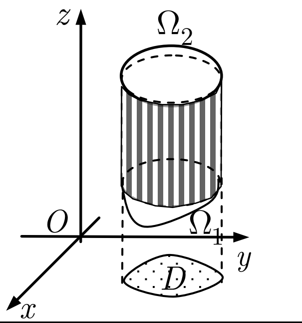
❺ ***Заміна змінних у подвійному інтегралі***		
① ***Перехід до нових координат*** $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ з ***якобіаном*** $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$		$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = = \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v))\left\lvert J(u,v)\right\rvert dudv$
② ***Перехід до полярних координат*** $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ \left\lvert J\right\rvert = \rho \end{cases}$		$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = = \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho$
③ ***Перехід до узагальнених полярних координат*** $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ \left\lvert J\right\rvert = ab\rho \end{cases}$		$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = = \iint\limits_{\tilde{D}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho d\varphi d\rho$
❻ ***Перехід до повторних інтегралів у полярних координатах***		
① ***Криволінійний сектор («радіальна область»)***		$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$
Будь-який промінь $\varphi = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.		
② ***Криволінійний сектор*** охоплює початок координат		$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$

10.8. Застосування подвійного інтеграла

❶ ***Площа плоскої області***	$S(D) = \iint\limits_D dxdy$
❷ ***Маса пластинки*** у формі області D з густиною $\mu = \mu(x, y)$	$m = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy$
❸ ***Статичні моменти*** пластинки щодо осей	$M_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)dxdy,$ $M_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)dxdy$
❹ ***Координати центра мас*** пластинки	$x_c = \dfrac{M_y}{m}, y_c = \dfrac{M_x}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** пластинки щодо осей	$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x, y)dxdy,$ $I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x, y)dxdy$
❻ ***Моменти інерції*** пластинки щодо початку координат	$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)dxdy$

10.9. Потрійні інтеграли

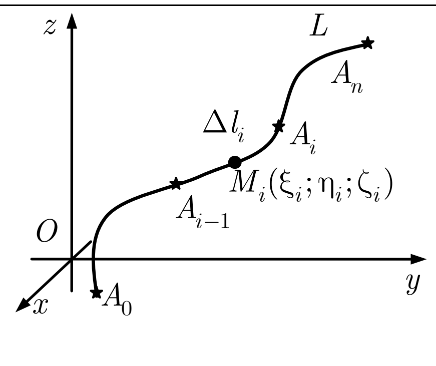
❶ ***Потрійний*** інтеграл від функції $u = f(x, y, z)$ ***за областю*** G $$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i,$$	
де ΔV_i — об'єми елементарних областей; d_i — їхні діаметри.	
❷ ***Фізичний зміст потрійного інтеграла.*** Маса тіла G з густиною $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$	$\iiint\limits_G \mu(x, y, z)dxdydz = m(G)$
❸ ***Основні властивості потрійного інтеграла***	
① $\iiint\limits_G 1dxdydz = V(G)$ (*об'єм* G) (*нормованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*	

<table>
<tr><td colspan="3">Обчислення потрійних інтегралів</td></tr>
<tr><td>❹ Область циліндрична в напрямі осі Oz
$\Omega_2 : z = z_2(x, y),$
$\Omega_1 : z = z_1(x, y)$</td><td></td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Будь-яка вертикальна пряма перетинає межу області не більше ніж у двох точках.</td></tr>
<tr><td colspan="2">❺ Область циліндрична в напрямі осі Oz; проекція D_{Oxy} правильна у напрямі осі Oy:
$$D_{Oxy} : \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❻ Перехід до циліндричних координат
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad \left|J\right| = \rho \\ z = z \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi, \rho, z)\rho d\varphi d\rho dz,$$ $$\tilde{f}(\varphi, \rho, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❼ Перехід до узагальнених циліндричних координат
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \quad \left|J\right| = ab\rho \\ z = z \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi, \rho, z)ab\rho d\varphi d\rho dz,$$ $$\tilde{f}(\varphi, \rho, z) = f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, z)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❽ Перехід до сферичних координат
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad \left|J\right| = r^2\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi, \theta, r)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr,$$ $$\tilde{f}(\varphi, \theta, r) =$$ $$= f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❾ Перехід до узагальнених сферичних координат
$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \left|J\right| = abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi, \theta, r)abcr^2\sin\theta d\varphi d\theta dr,$$ $$\tilde{f}(\varphi, \theta, r) =$$ $$= f(ar\cos\varphi\sin\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\theta)$$</td></tr>
</table>

10.10. **Застосування потрійного інтеграла**

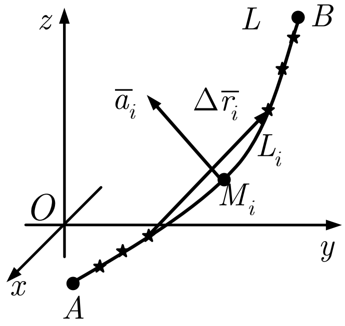
❶ ***Об'єм тіла*** G	$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$
❷ ***Маса тіла*** з густиною $\mu = \mu(x, y, z)$	$m(G) = \iiint\limits_G \mu(x, y, z) dxdydz$
❸ ***Статичні моменти*** тіла щодо координатних площин	$M_{\begin{Bmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} z \\ y \\ x \end{Bmatrix} \mu(x, y, z) dxdydz$
❹ ***Координати центра мас*** тіла	$x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}; y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}; z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** тіла щодо координатних площин	$I_{\begin{Bmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} z^2 \\ y^2 \\ x^2 \end{Bmatrix} \mu(x, y, z) dxdydz$
❻ ***Моменти інерції*** тіла щодо осей координат	$I_{\begin{Bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{Bmatrix} \mu dxdydz$
❼ ***Момент інерції*** тіла щодо початку координат	$I_O = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2) \mu dxdydz$

10.11. **Криволінійні інтеграли 1-го роду**

❶ ***Гладкі криві.*** Криву $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \\ z = z(t), \end{cases}$ називають *гладкою*,	якщо функції $x(t), y(t), z(t)$ — неперервно диференційовні. Криву, що складається зі скінченної кількості гладких кривих і не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою*.
❷ ***Криволінійний інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x, y, z)$ уздовж кривої L $\int\limits_L f(x, y, z) dl =$ $= \lim\limits_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i,$ де Δl_i — довжина ланки $A_{i-1}A_i$.	

❸ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду.*** Маса, розподілена вздовж кривої L з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$	$\int\limits_L \mu(x,y,z)dl = m(L)$
❹ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду*** 1) $\int\limits_L 1 \cdot dl = l(L)$ (*довжина* L); 2) лінійність; 3) адитивність.	
Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду (крива L — кусково-гладка)	
❺ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$	$\int\limits_L f(x,y,z)dl =$ $= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$
$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$	
❻ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_1; t_2]$	$\int\limits_L f(x,y)dl =$ $= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$
$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$	
❼ $L: y = y(x), a \leq x \leq b$	$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}dx$
$dl = \sqrt{1 + y_x'^2}dx$	
❽ $L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$	$\int\limits_L f(x,y)dl =$ $= \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi$
$dl = \sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi$	
Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду	
❾***Довжина дуги*** L	$l(L) = \int\limits_L dl$
❿ ***Маса розподілена вздовж кривої*** з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$m(L) = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl$

10.12. **Криволінійні інтеграли 2-го роду**

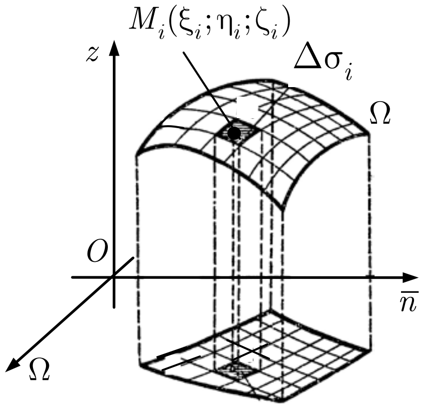
❶ ***Вектор-функція трьох змінних***	$\overline{a} = \overline{a}(M) =$ $= P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$
❷ ***Орієнтовані криві.*** Криву, для якої вибрано початкову та кінцеву точки і вказано напрям руху, називають *орієнтованою*.	
❸ ***Криволінійний інтеграл 2-го роду*** від вектор-функції $\overline{a} = \overline{a}(M)$ уздовж кривої L $$\lim_{\substack{\max\lvert\Delta\overline{r}_i\rvert\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r}_i) =$$ $$= \int_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$	
❹ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 2-го роду.*** Робота, яку виконує змінна сила $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z)$ під час переміщення уздовж кривої L	$\int_L (\overline{F}, d\overline{r}) = \mathrm{A}_L(\overline{F})$
❺ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду*** ① $\int_{AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = -\int_{BA} (\overline{a}, d\overline{r})$ (*орієнтованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду	
❻ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t), \end{cases}$	$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$ $= \int_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt,$
$\tilde{P}(t) = P(x(t),y(t),z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t),y(t),z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t),y(t),z(t))$	
❼ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \le t \le t_2$	$\int_L Pdx + Qdy =$ $= \int_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t)]dt,$
$\tilde{P}(t) = P(x(t),y(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t),y(t))$	
❽ $L: y = y(x), x \in [a;b]$	$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ $= \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx$

❾ ***Теорема Остроградського — Ґріна.*** Якщо в замкненій області, обмеженій кусково-гладким контуром L, функції $P(x,y),\ Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними, то	правдива *формула Остроградського — Ґріна* $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$
Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду	
❿ ***Робота змінної сили*** $\overline{F} = (P;Q;R)$ під час переміщення вздовж кривої L	$\mathrm{A}_L(\overline{F}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$
⓫***Циркуляція*** векторного поля $\overline{F} = (P;Q;R)$ уздовж замкненого контуру Γ	$\mathrm{C}_\Gamma(\overline{F}) = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$
⓬***Площа*** плоскої області, обмеженої замкненим контуром Γ	$S = \dfrac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx$

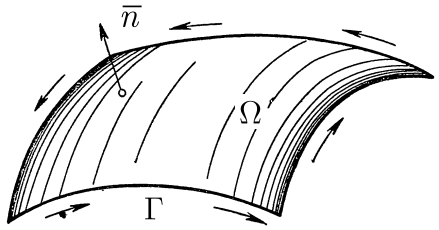
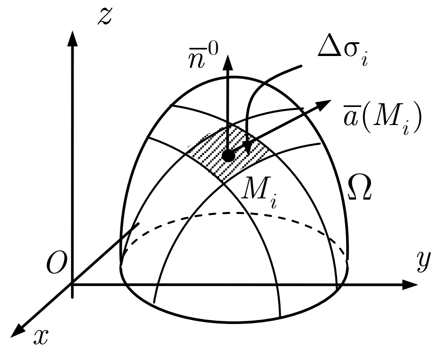
10.13. Криволінійний інтеграл 2-го роду від повного диференціала

❶ ***Теорема про чотири твердження.*** Якщо $P(x,y), Q(x,y)$ — функції, неперервно диференційовні в однозв'язній області D, то рівносильні такі твердження: ① $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0\ \ \forall L \subset D$;	② $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування; ③ вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — є повним диференціалом; ④ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$
❷ Інтеграл від ***повного диференціала***	$\int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$
❸ ***Відновлення функції за її диференціалом***	
$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (умова [10.13.1.4])	$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C$
$du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + {}$ ${}+R(x,y,z)dz$ (умова [10.7.1])	$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + {}$ ${}+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C$

10.14. Поверхневі інтеграли 1-го роду (за площею поверхні)

❶ ***Поверхневий інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x,y,z)$ за поверхнею Ω $$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = $$ $$= \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i,$$	
де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки; d_i — її діаметр.	
❷ ***Фізичний зміст поверхневого інтеграла 1-го роду.*** Маса, розподілена на поверхні Ω з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$	$$\iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma = m(\Omega)$$
❸ ***Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду*** ① $\iint\limits_{\Omega} 1\cdot d\sigma = S(\Omega)$ (*площа* Ω) (*нормованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду.	
❹ Поверхня $\Omega : z = z(x,y)$ ***однозначно проектується в область*** D_{Oxy}	$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma =$$ $$= \iint\limits_{D_{Oxy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$
$$d\sigma = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$	
Застосування поверхневого інтеграла 2-го роду	
❺ ***Площа поверхні*** Ω	$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma$$
❻ ***Маса розподілена на поверхні*** з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma$$

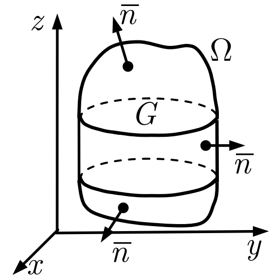
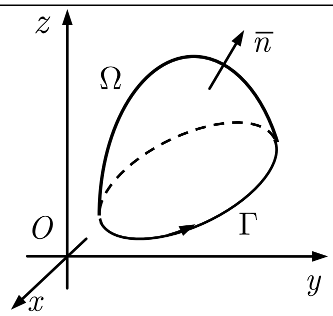
10.15. Поверхневі інтеграли 2-го роду

❶ ***Орієнтовані поверхні.*** Поверхню Ω, у кожній точці якої вказано нормальний вектор $\overline{n}$ й напрям обходу контуру Γ, називають ***орієнтованою.***	
❷ ***Поверхневий інтеграл 2-го роду*** від вектор-функції $\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ за вибраним боком поверхні Ω $\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$ $= \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma =$ $= \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i$	 де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки; d_i — діаметр ділянки; $\overline{n}^0$ — одиничний вектор нормалі.
❸ ***Фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду.*** Потік векторного поля через вибраний бік поверхні Ω	$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \Pi_{\Omega}(\overline{a})$
❹ ***Основні властивості поверхневого інтеграла 2-го роду***	
① $\iint\limits_{\Omega^+} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = -\iint\limits_{\Omega^-} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma$ (*орієнтованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду	
❺ Проектування поверхні $\Omega : F(x,y,z) = 0$ на ***всі координатні площини*** (знаки перед подвійними інтегралами відповідають знакам напрямних косинусів вибраної нормалі $\overline{n} = \pm \operatorname{grad} F$), де $D_{Oyz}, D_{Oyz}, D_{Oxy}$ — проекції поверхні Ω на відповідні координатні площини.	$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$ $= \pm\iint\limits_{D_{Oyz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$ $\pm\iint\limits_{D_{Oxz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm$ $\pm\iint\limits_{D_{Oxy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$

❻ Проектування поверхні $\Omega : z = z(x, y), (x; y) \in D$, ***на площину*** Oxy (знак перед інтегралом відповідає знаку $\cos\gamma$ вибраної нормалі $\overline{n}$ до поверхні).	$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \\ = \pm\iint\limits_{D_{Oxy}} [\tilde{P}(x, y)(-z'_x) + \tilde{Q}(x, y)(-z'_y) + \\ + \tilde{R}(x, y)]dxdy$$ $$\tilde{P}(x, y) = P(x, y, z(x, y)),$$ $$\tilde{Q}(x, y) = Q(x, y, z(x, y)),$$ $$\tilde{R}(x, y) = Q(x, y, z(x, y))$$
	$$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \iint\limits_{D_{Oxy}} \left.\frac{(\overline{a}, \overline{n}^0)}{\lvert\cos\gamma\rvert}\right\rvert_{z=z(x,y)} dxdy$$

10.16. **Характеристики векторних полів**

❶ ***Векторне поле***	$$\overline{a}(M) = \\ = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}, \\ M \in G \subset \mathbb{R}^3$$
❷ ***Векторна (силова) лінія.*** *Векторною лінією* поля $\overline{a}$ називають криву, в кожній точці M якої дотична збігається з напрямом поля $\overline{a}$	$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$
❸ ***Дивергенція*** векторного поля	$$\operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$
❹ ***Правила обчислення дивергенції*** ① $\operatorname{div}\overline{C} = 0, \overline{C} = \overline{\mathrm{const}}$; ② $\operatorname{div}(C\overline{a}) = C\operatorname{div}\overline{a}, C = \mathrm{const}$;	③ $\operatorname{div}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{div}\overline{a}_1 + \operatorname{div}\overline{a}_2$; ④ $\operatorname{div}(u\overline{a}) = u\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} u)$
❺ ***Фізичний зміст дивергенції***.	① якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) > 0$, то в полі $\overline{a}$ у точці M є джерела; ② якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) < 0$, то в полі $\overline{a}$ у точці M є стоки; ③ якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0$, то у точці M немає ані джерел, ані стоків.
❻ ***Ротор*** векторного поля	$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

❼ ***Правила обчислення ротора.*** ① $\operatorname{rot}\overline{C} = \overline{0}, \overline{C} = \overline{\text{const}}$; ② $\operatorname{rot}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{rot}\overline{a}_1 + \operatorname{rot}\overline{a}_2$;	③ $\operatorname{rot}(u\overline{a}) = u\operatorname{rot}\overline{a} + [\operatorname{grad} u, \overline{a}]$
❽ **Фізичний зміст ротора.** ① Ротор векторного поля характеризує обертальну здатність поля в даній точці: вона найбільша в точці M_0 у площині, перпендикулярній ротору.	② Найбільша густина циркуляції векторного поля $\overline{a}$ у точці M_0 дорівнює довжині ротора поля в цій точці: $\max j(M_0) = \left\|\operatorname{rot}\overline{a}(M_0)\right\|.$
❾ ***Потік*** векторного поля $\overline{a}$ через вибраний бік поверхні Ω	$\Pi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma$
❿ ***Циркуляція*** векторного поля $\overline{a}$ вздовж замкненого контуру Γ	$\mathrm{C}_\Gamma(\overline{a}) = \oint\limits_\Gamma (\overline{a}, d\overline{r})$
⓫ ***Формула Остроградського — Ґауса.*** Потік векторного поля $\overline{a}$ через замкнену поверхню Ω, в напрямі її зовнішньої нормалі, дорівнює потрійному інтегралу за областю G, обмеженою цією поверхнею, від дивергенції векторного поля ($\overline{a}$ — неперервно диференційовне поле всередині області G)	$\oiint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_G \operatorname{div}\overline{a}dxdydz$ 
⓬ ***Формула Стокса.*** Циркуляція векторного поля $\overline{a}$ уздовж довільного замкненого контуру Γ дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot}\overline{a}$ через поверхню Ω, напнуту на контур Γ ($\overline{a}$ — неперервно диференційовне поле на поверхні Ω; орієнтація кривої Γ узгоджена з орієнтацією поверхні Ω за правилом правої руки.	$\oint\limits_\Gamma (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma$ 

10.17. **Спеціальні векторні поля**

❶ ***Потенціальне*** поле	$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$
❷ ***Потенціал*** U потенціального поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, $\exists U : \overline{a}(M) = \operatorname{grad} U(M)$	$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C$
❸ ***Соленоїдальне*** поле	$\operatorname{div}\overline{a} = 0$
❹ ***Гармонічне*** поле	$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}, \operatorname{div}\overline{a} = 0$

10.18. **Символічний запис дій над полями**

❶ ***Оператор Гамілтона (набла)***	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$
	$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$
❷ ***Оператор Лапласа***	$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
	$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Диференціальні операції 1-го порядку	
❸ ***Градієнт***	$\operatorname{grad} u = \nabla u$
❹ ***Дивергенція***	$\operatorname{div}\overline{a} = (\nabla, \overline{a})$
❺ ***Ротор***	$\operatorname{rot}\overline{a} = [\nabla, \overline{a}]$
Диференціальні операції 2-го порядку	
❻ $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left[\nabla, \nabla u\right] = \overline{0}$	❼ $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = 0$
❽ $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \Delta u$	❾ $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} = \nabla(\nabla, \overline{a})$
❿ $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a} = [\nabla, [\nabla, \overline{a}]]$	

10.19. **Застосування інтегралів за геометричними об'єктами**

Об'єкт	**Тип інтеграла**	**Геометричне застосування**	**Фізичне застосування**
Область на площині	Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$	Площа області D $S(D) = \iint\limits_D dxdy$	Маса пластинки D $m(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
Просторова область	Потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$	Об'єм тіла G $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$	Маса тіла G $m(G) = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxd$
Крива	Криволінійний інтеграл І роду $\int\limits_L f(x,y,z)dl$	Довжина кривої L $l(L) = \int\limits_L dl$	Маса кривої L $m(L) = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl$
Крива	Криволінійний інтеграл ІІ роду $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$	Робота змінної сили $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ під час переміщення вздовж дуги L $\text{A}_L(\overline{F}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$	
Поверхня	Поверхневий інтеграл І роду $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)d\sigma$	Площа поверхні Ω $S(\Omega) = \iint\limits_\Omega d\sigma$	Маса поверхні Ω $m(\Omega) = \iint\limits_\Omega \mu(x,y,z)d\sigma$
Поверхня	Поверхневий інтеграл ІІ роду $\iint\limits_\Omega Pdydz + Qdxdz +$ $+Rdxdy$	Потік поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ через поверхню Ω $\Pi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_\Omega Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$	

Розділ 11. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

11.1. Диференціальні рівняння 1-го порядку

❶ ***Диференціальне рівняння (ДР) 1-го порядку.*** $$y' = f(x, y), \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$ $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$	❷ ***Задача Коші для ДР 1-го порядку.*** Задачу знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x, y)$, який справджує *початкову умову* $$y(x_0) = y \mid_{x=x_0} = y_0,$$ називають *задачею Коші*.
❸ ***Загальний, частинний і особливий розв'язки ДР.*** Сукупність функцій $y = y(x, C)$, де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* ДР $y' = f(x, y)$, якщо: 1) функція $y = y(x, C)$ є розв'язком цього ДР для будь-якого значення C; 2) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ справджує цю умову.	Загальний розв'язок у неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$ називають *загальним інтегралом* ДР. *Частинним розв'язком* ДР $y' = f(x, y)$ називають розв'язок, який дістають із загального розв'язку за певного значення довільної сталої C. Розв'язок ДР, який не можна одержати із загального розв'язку, за жодного значення довільної сталої, включаючи $\pm\infty$, називають *особливим*.
❹ ***Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.*** Якщо у ДР $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0; y_0)$,	то знайдеться інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ на якому існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який справджує початкову умову $y(x_0) = y_0$.

11.2. Деякі типи диференціальних рівнянь 1-го порядку

<table>
<tr><th>Тип ДР</th><th>Метод розв’язання</th></tr>
<tr><td>❶ Рівняння з відокремленими змінними.
$$f_1(x)dx = f_2(y)dy$$</td><td>$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$$</td></tr>
<tr><td>❷ ДР з відокремлюваними змінними.
$$y' = f(x)g(y)$$</td><td>$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ або $g(y) = 0$</td></tr>
<tr><td>$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$</td><td>$\displaystyle\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$
або $P(x) = 0$ чи $N(y) = 0$</td></tr>
<tr><td>❸ $y' = f(ax + by + c)$</td><td>Заміна $z = ax + by + c$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❹ Однорідні ДР.
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$</td><td>Заміна $y = u(x)x$</td></tr>
<tr><td>$$y' = \frac{du}{dx}x + u$$</td></tr>
<tr><td>❺ ДР, звідні до однорідних
$$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$
$$a, b, c, a_1, b_1, c_1 = \text{const}$$</td><td>1) Заміна $\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = s + \beta \end{cases}$
якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0;$
2) заміна $z = ax + by + c,$
якщо $\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td>❻ Лінійне однорідне рівняння
$$y' + p(x)y = 0$$</td><td>$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$</td></tr>
<tr><td>❼ Лінійне неоднорідне рівняння
$$y' + p(x)y = q(x)$$</td><td rowspan="2">1. Метод Лаґранжа. Шукаємо розв’язок у вигляді
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$
2. Метод Бернуллі. Шукаємо розв’язок у вигляді
$$y = u(x)v(x)$$</td></tr>
<tr><td>❽ Рівняння Бернуллі
$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$
$$\alpha \notin \{0, 1\}$$</td></tr>
</table>

❾ ***Рівняння в повних диференціалах*** $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$	$\int\limits_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,t)dt=C$

11.3. Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Тип ДР	*Метод розв'язання*
❶ $y^{(n)}=f(x)$	Безпосереднє n-кратне інтегрування
❷ $F(x,y^{(k)},...,y^{(n)})=0$	Заміна $y^{(k)}=p(x)$
	$y^{(k+1)}=p'(x),...,y^{(n)}=p^{(n-k)}$
❸ $F(y,y',...,y^{(k)},...,y^{(n)})=0$	Заміна $y'=p(y)$
	$y''=p'p,y'''=p''p^2+p'^2p,...$

11.4. Лінійні диференціальні рівняння

❶ ***Лінійний диференціальний оператор***	$L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y$
❷ ***Лінійне однорідне*** диференціальне рівняння *(ЛОДР)*	$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y=0;$ $L[y]=0$
❸ ***Лінійна залежність і незалежність функцій.*** Систему функцій $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),x\in(a;b)$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+...+\alpha_ny_n(x)=0$ випливає, що $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0.$	Систему функцій $y_1,y_2,...,y_n$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,$ не рівні одночасно нулеві, що $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+...+\alpha_ny_n(x)=0$

❹ ***Вронскіан системи функцій*** $y_1, y_2, ..., y_n$	$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$
❺ ***Властивості вронскіана.*** **1.** Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні на проміжку $[a; b]$, то вронскіан тотожно дорівнює нулеві на цьому проміжку.	**2.** Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні функції, що є розв'язками деякого ЛОДР n-го порядку, то вронскіан такої системи не дорівнює нулеві в жодній точці.
❻ ***Фундаментальна система розв'язків.*** Лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку n має рівно n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$,	які утворюють *фундаментальну систему розв'язків* (ФСР) ЛОДР: $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$
❼ ***Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР.*** Якщо $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ — ФСР ЛОДР, то загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією цих розв'язків.	$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$
❽ ***Лінійне неоднорідне ДР***	$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = f(x)$; $L[y] = f(x)$
❾ ***Теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР***	$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$
❿ ***Принцип суперпозиції***	Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки відповідно ЛНДР $L[y] = f_1(x)$ та $L[y] = f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком ЛНДР $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

11.5. **Лінійні однорідні ДР зі сталими коефіцієнтами**

❶ ***ЛОДР зі сталими коефіцієнтами***	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$
❷ ***Метод Ейлера***	Шукаємо розв'язок у вигляді $y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$
❸ ***Характеристичне рівняння***	$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$
❹ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння***	
1. λ — дійсний корінь кратності 1	$y = e^{\lambda x}$
2. λ — дійсний корінь кратності r	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, ..., y_r = x^{r-1} e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно-спряжених коренів	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
❺ ***Схема методу Ейлера.*** **1.** Записують характеристичне рівняння для ЛОДР. **2.** Розв'язують характеристичне рівняння.	**3.** Знаходять лінійно незалежні розв'язки ЛНДР для кожного кореня характеристичного рівняння (ФСР). **4.** Записують загальний розв'язок ЛОДР.
ЛОДР 2-го порядку	
❻ ***Диференціальне рівняння***	$y'' + py' + qy = 0$
❼ ***Характеристичні рівняння***	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
❽ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння (ФСР)***	
1. Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$
2. Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$
3. Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
❾ ***Загальний розв'язок***	$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

11.6. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$$

де $f(x)$ — ***неперервна функція загального вигляду***

❶ ***Метод Лаґранжа (варіації довільних сталих).***

① Розв'язують відповідне однорідне ДР.

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n.$$

② Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n.$$

③ Знаходять $C_1'(x), ..., C_n'(x)$, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0, \\ .... \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + ... + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

④ Інтегруванням знаходять функції $C_1(x), ..., C_n(x)$.

⑤ Записують загальний розв'язок, підставляючи знайдені функції $C_1(x), ..., C_n(x)$.

❷ ***Метод Лаґранжа для рівняння*** $y'' + py' + qy = f(x)$

① $y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$

② $y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$

③ $\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$$

де $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$ — *функція спеціального вигляду (квазімногочлен)*

❸ ***Схема методу невизначених коефіцієнтів*** (застосовний до ДР зі спеціальною правою частиною).

① Записують теорему про структуру розв'язку ЛНДР.

$$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$$

② Знаходять загальний розв'язок відповідного ЛОДР (метод Ейлера).

③ Записують частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами.

④ Визначають коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР.

⑤ Записують загальний розв'язок ЛНДР.

11.7. Частинний розв’язок ЛНДР залежно від правої частини

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right) \leftrightarrow k = \alpha + i\beta,$$

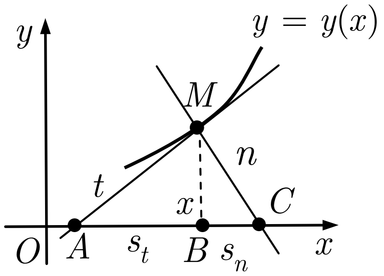
де $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$; ХР — характеристичний многочлен

Права частина спец. вигляду $f(x)$	***Шаблон для частинного розв’язку*** $y_{\text{част. неод.}}$
❶ $P_n(x) \leftrightarrow k = 0$	
$k = 0$ не є коренем ХР	$\overline{P}_n(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$.
$k = 0$ корінь кратності s ХР	$x^s \overline{P}_n(x)$
❷ $P_n(x)e^{\alpha x} \leftrightarrow k = \alpha$	
$k = \alpha$ не є коренем ХР	$\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$k = \alpha$ корінь кратності s ХР	$x^s \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$
❸ $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow k = \alpha + i\beta$	$l = \max(n, m)$
$k = \alpha + i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}\left(\overline{P}_l(x)\cos\beta x + \overline{Q}_l \sin\beta x\right)$
$k = \alpha + i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^s e^{\alpha x}\left(\overline{P}_l(x)\cos\beta x + \overline{Q}_l \sin\beta x\right)$
Окремі випадки	
❹ $ae^{\alpha x} \leftrightarrow k = \alpha$	
$k = \alpha$ не є коренем ХР	$Ae^{\alpha x}$
$k = \alpha$ корінь кратності s ХР	$Ax^s e^{\alpha x}$
❺ $a\cos\beta x + b\sin\beta x \leftrightarrow k = i\beta$	
$k = i\beta$ не є коренем ХР	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
$k = i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^s\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
❻ $e^{\alpha x}\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right) \leftrightarrow k = \alpha + i\beta$	
$k = \alpha + i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
$k = \alpha + i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^s e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$

11.8. Лінійні однорідні системи ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***Лінійна однорідна система ДР зі сталими коефіцієнтами***	$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow$
❷ ***Матричний запис системи***	$\vec{x}' = A\vec{x}$
	де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
❸ ***Метод Ейлера***	Шукаємо розв'язок у вигляді $\vec{x} = \vec{C}e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C},$
❹ ***Характеристичне рівняння***	$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$
❺ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння (ФСР)***	
① Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$\vec{x}_1(t) = \vec{A}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{x}_2(t) = \vec{A}_2 e^{\lambda_2 t}$
② Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
③ Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\vec{x}_1 = \mathrm{Re}\left(\vec{A}e^{(\alpha+\beta i)t}\right),$ $\vec{x}_2 = \mathrm{Im}\left(\vec{A}e^{(\alpha+\beta i)t}\right)$
❻ ***Загальний розв'язок***	$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$

11.9. **Застосування диференціальних рівнянь**

❶ ***Динаміка популяцій.*** Швидкість розпаду (розмноження) пропорційна кількості $x(t)$ речовини, що залишилась.	$x'(t) = kx(t), k > 0$ $k < 0$ — розпад; $k > 0$ — розмноження
❷ ***Другий закон Ньютона***	$mv'(t) = F(v,t) \Leftrightarrow ms''(t) = F(v,t)$
❸ ***Закон Ньютона.*** Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла $T(t)$ і температурою середовища $T_с$ охолодження тіла	$T'(t) = k(T - T_с)$
❹ ***Електричне коло з самоіндукцією.*** $i(t)$ — струм; $E(t)$ — ЕРС; R — опір; L — коефіцієнт самоіндукції	$i'(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E(t)}{L}$
❺ ***Розчинення речовини.*** Швидкість розчинення речовини в рідині пропорційна кількості цієї речовини, яке ще може розчинитись до повного насичення.	$x'(t) = k(P - x(t)),$ де $x(t)$ — кількість речовини; P — максимальна кількість розчиненої речовини.
❻ ***Концентрація розчину.*** Речовина розчинена в об'ємі V рідини. Надходить об'єм V_1 рідини і витікає V_2 рідини ($V_2 \le V_1$).	$x'(t) = -\frac{V_2 x}{V + (V_1 - V_2)t}$
❼ ***Геометричні застосування.*** 	$t = \left\lvert \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right\rvert$ — *дотична* $n = \left\lvert y\sqrt{1 + y'^2} \right\rvert$ — *нормаль* s_t — *піддотична*; s_n — *піднормаль*

Модуль 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Функції кількох змінних

Навчальні задачі

1.1. Знайти і зобразити область означення D функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ і побудувати лінії рівня цієї функції.

Розв'язання. [9.1.4, 9.1.6.]① **[***Знаходимо область означення функції.***]**
Функція означена, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Цю нерівність справджують координати всіх точок, що лежать усередині й на межі круга радіусом $R = 2$ з центром у початку координат.

[*Знаходимо лінії рівня функції.***]**
Рівняння сукупності ліній рівня:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = C \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - C^2, C \in [0;2].$$

Надаючи C різних значень з відрізка $[0;2]$, дістанемо концентричні кола з центром у початку координат.

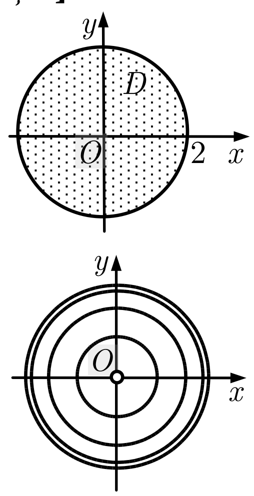


Рис. до зад. 1.1

Коментар. ① Під областю означення функції $u = f(x, y)$ двох змінних, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x; y)$ площини, в яких аналітичний вираз $f(x, y)$ визначений і набуває дійсних значень.

1.2. Знайти область означення D функції $u = \arcsin(x^2 + y^2 - z^2)$ і її поверхні рівня.

Розв'язання. [9.1.4, 9.1.7.]① **[***Знаходимо область означення функції.***]**
Функція означена, якщо

$$-1 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 1.$$

Ця нерівність означує множину точок між двопорожнинним гіперболоїдом $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ і однопорожнинним гіперболоїдом $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

[*Знаходимо поверхні рівні функції.***]**
Рівняння сукупності поверхонь рівня:

$$\arcsin(x^2 + y^2 - z^2) = C, C \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Якщо $C \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right)$, то поверхнями рівня є двопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C;$$

якщо $C = 0$, то поверхнею рівня є конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

якщо $C \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, та поверхнями рівня є однопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C.$$

Коментар. ① Під областю означення функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x;y;z)$ простору, в яких аналітичний вираз $f(x,y,z)$ визначений і набуває дійсних значень.

1.3.1. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. [9.2.1.]①

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left| \begin{matrix} \sin xy \overset{②}{\sim} xy, \\ xy \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2.$$

Коментар. ① Границя існує, якщо вона не залежить від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(2;0)$.

② Для функцій кількох змінних залишаються правдивим еквівалентності.

1.3.2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. **[***Переходимо до полярних координат.***]**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x \to 0, \\ y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \to 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in (-\pi;\pi].$$

Коментар. ① Часто границю $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ обчислюють переходячи до полярних координат із центром у точці $A(a;b)$:

$$x = a + \rho\cos\varphi,$$
$$y = b + \rho\sin\varphi.$$

Якщо $(x;y)\to(a;b)$, то

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\rho\to 0.$$

Задачу зводять до дослідження $\lim\limits_{\rho\to 0}F(\rho,\varphi)$, де

$$F(\rho,\varphi)=f(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi).$$

1.3.3. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x+5y)\sin\dfrac{3}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $(2x+5y)\to 0$, коли $x\to 0$, $y\to 0$, і $\left|\sin\dfrac{3}{x}\right|\le 1$, то за властивістю н. м. ф. маємо, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x+5y)\sin\frac{3}{x}=0.$$

1.3.4. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. **[***Переходимо до полярних координат.***]**

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi;\end{cases}\quad \begin{cases}x\to 0,\\ y\to 0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\rho\to 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\cos 2\varphi.$$

Границя залежить від кута φ, тобто від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$. А це означає, що функція f не має границі.①

Коментар. ① Якщо б границя існувала, то вона не залежала б від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$.

1.4.1. Знайти точки розриву функції $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

Розв'язання. [9.2.2.] Для заданої функції точками розриву можуть бути лише точки, де знаменник дорівнює нулеві:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}=\infty$, то точка $M_0(1;-2)$ є точкою нескінченного розриву.

1.4.2. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Розв'язання. Задана функція може мати розриви лише в точках, де знаменник дорівнює нулеві:

$$x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Отже, функція z має розриви в точках прямої $y = x$.

Нехай $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x_0 = y_0$. Тоді,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{x_0^2+x_0y_0+y_0^2} = \frac{1}{3x_0^2}.$$

Отже, точки прямої $y = x, x \neq 0,$— точки усувного розриву.

Із співвідношення

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \infty$$

випливає, що точка $M_0(0;0)$ — точка нескінченного розриву.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

1.5. Знайдіть і зобразіть область означення і лінії рівня функції:

1) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$; 2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$;

3) $z = \sqrt{4x - y^2}$; 4) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

5) $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)$; 6) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - 1}$.

1.6. Знайдіть і зобразіть область означення функції:

1) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$; 2) $z = \arccos\dfrac{x}{x+y}$;

3) $z = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$;

4) $z = \log_3(x^2+y^2-1) + \sqrt{16-x^2-y^2}$.

1.7. Знайдіть область означення функції і її поверхні рівня:

1) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-9^2}$; 2) $u = \ln(36 - 36x^2 - 9y^2 - 4z^2)$;

3) $u = \arcsin\dfrac{x^2+y^2}{z}$; 4) $u = \dfrac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$;

5) $u = \dfrac{\ln(z^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$; 6) $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - z^2}$;

7) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$; 8) $u = \sqrt{2z^2 - 6x^2 - 3y^2 + 6}$.

1.8. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2 - y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

1.9. Покажіть, що границя не існує:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x - y}{x + y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.

1.10. Знайдіть точки розриву функції:

1) $z = e^{-\frac{3}{x^2+y^2}}$; 2) $z = e^{\frac{2}{x^2-y^2}}$;

3) $z = \dfrac{1}{y - x^2}$; 4) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2 - 1}$.

1.11. Знайдіть точки розриву функції:

1) $u = \dfrac{1}{xyz}$; 2) $u = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$;

3) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$; 4) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 + 1}$.

Відповіді

1.8. 1) -6; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{e^2}{2}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0; 7) e; 8) e^3.

1.10. 1) точка розриву $(0;0)$; 2) лінії розриву — прямі $y = \pm x$; 3) лінія розриву — парабола $y = x^2$; 4) лінія розриву — гіпербола $x^2 - y^2 = 1$.

1.11. 1) поверхні розриву — площини $x = 0, y = 0, z = 0$; 2) точка розриву $(1;-1;0)$;

3) поверхня розриву — однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;

4) поверхня розриву — двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

2. Похідні й диференціали функцій кількох змінних

Навчальні задачі

2.1.1. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = xe^{-xy}$.

Розв'язання. [9.3.1.] **[***Знаходимо частинну похідну за змінною x.***]**

$$z'_x = (xe^{-xy})'_x \overset{①}{=} e^{-xy} - xye^{-xy}.$$

[*Знаходимо частинну похідну за змінною y.***]**

$$z'_y = (xe^{-xy})'_y \overset{②}{=} -x^2e^{-xy}.$$

Коментар. ① Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною x, вважаємо y сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

② Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною y, вважаємо x сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

2.1.2. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $u = z^{xy}$.

Розв'язання. [9.3.1.]①

$$u'_x = yz^{xy}\ln z, u'_y = xz^{xy}\ln z, u'_z = xyz^{xy-1}.$$

Коментар. ① Функція u залежить від трьох змінних x, y, z. Знаходячи частинні похідні за кожною змінною, інші дві вважаємо сталими.

2.2.1. Знайти частинні диференціали і повний диференціал 1-го порядку функції $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. [9.4.5, 9.4.6.]

$$d_x u \overset{[9.4.6]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx; \quad d_y u \overset{[9.4.6]}{=} \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{2y}{x^2 + y^2}dy.$$

$$du \overset{[9.4.5]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

Коментар. ① У формулах для диференціалів диференціали незалежних змінних dx та dy є сталими:

$$dx = \Delta x, dy = \Delta y.$$

2.2.2. Знайти диференціал 1-го порядку функції $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [9.4.5.]

$$du\Big|_{M_0} \overset{[9.4.5]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} dy + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} dz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2x\Big|_{\underset{\textit{підставляємо: } x=1, y=2, z=1}{M_0(1;2;1)}} = -\frac{2}{25};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2y\Big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{4}{25};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = \frac{1}{x^2+y^2}\Big|_{M_0(1;2;1)} = \frac{1}{5}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$du\Big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{1}{25}\big(2dx + 4dy - 5dz\big).$$

2.3. Знайти $\dfrac{d\tilde{u}}{dt}$, якщо $u = x^y, x = \ln t, y = \sin t.$

Розв'язання. [9.3.2.]

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t =$$

$$= \frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t - 1} + \cos t \cdot \ln\ln t \cdot (\ln t)^{\sin t}.$$

2.4. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{d\tilde{z}}{dx}$, якщо $z = \ln(e^x + e^y), y = \dfrac{1}{3}x^3 + x;$

Розв'язання. [9.3.3.]

[*Знаходимо частинну похідну.*]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}.$$

[*Записуємо формулу для повної похідної і знаходимо похідну.***]**

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} \overset{[1.3.3]}{=} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y}(x^2 + 1) = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3 + x}}{e^x + e^{\frac{1}{3}x^3 + x}} = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}}{1 + e^{\frac{1}{3}x^3}}.$$

2.5. Знайти z'_u, z'_v, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy, x = uv, y = \dfrac{u}{v}$.

Розв'язання. [9.3.2.] [*Визначаємо формули.*]

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

[*Обчислюємо всі потрібні похідні.***]**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = v; \frac{\partial x}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 3\frac{u^2}{v^2} - 3uv; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}; \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2};$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формули.***]**

$$z'_u = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)v + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\frac{1}{v} = 3\left(u^2v^3 + \frac{u^2}{v^3} - 2u\right);$$

$$z'_v = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)u + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right) = 3u^3\left(v^2 - \frac{1}{v^4}\right).$$

2.6. Знайти z'_x, z'_y якщо $x + 2y + 3z = e^z$.

Розв'язання. [9.3.4.] **[***Записуємо співвідношення, яке задає неявну функцію у вигляді $F(x, y, z) = 0$.***]**

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z - e^z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \overset{[9.3.4]}{=} -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{3 - e^z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{[9.3.4]}{=} -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2}{3 - e^z}.$$

2.7. Знайти всі похідні 2-го порядку функції $z = xe^{-xy}$.

Розв'язання. [9.3.5, 9.3.6.] ① **[***Знаходимо похідні 1-го порядку.***]**

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{-xy}) = (1 - xy)e^{-xy};$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-xy}) = -x^2e^{-xy}.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.***]**

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}((1 - xy)e^{-xy}) = -2ye^{-xy} + xy^2e^{-xy};$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2e^{-xy}) = x^3e^{-xy};$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}((1 - xy)e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2ye^{-xy};$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2ye^{-xy}.$$

Коментар. ① Для функції двох змінних можна розглядати чотири похідні 2-го порядку. Якщо виконані умови теореми Шварца [9.3.6], то мішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} рівні.

2.8. Знайти диференціали 2-го та 3-го порядку функції $u(x, y) = e^y \sin x$. Обчислити їх у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Розв'язання. [9.4.7, 9.4.8.]

[*Записуємо формулу для диференціала 2-го порядку функції двох змінних.***]**

$$d^2u \overset{[9.4.7]}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.***]**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \sin x; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y \cos x; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^2u = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці* M_0.]

$$d^2u(M_0) = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2\Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} = -dx^2 + dy^2.$$

[*Записуємо формулу для диференціала 3-го порядку функції двох змінних.***]**

$$d^3z \underset{m=3}{\overset{[9.4.8]}{=}} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

[*Знаходимо похідні 3-го порядку.***]**

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -e^y \cos x;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -e^y \sin x;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = e^y \cos x;\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^3u = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2dy + 3e^y \cos x dxdy^2 + e^y \sin x dy^3.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці* M_0.]

$$d^3u(M_0) = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2dy + 3e^y \cos x dxdy^2 + e^y \sin x dy^3 \Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} =$$

$$= -3dx^2dy + dy^3.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.9. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $z = x^3y - y^3x + 2x - 3y + 1$; 2) $z = xy - \dfrac{y}{x} + 3x + 2y - 2$;

3) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 4) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

5) $z = x^y$; 6) $z = (\cos y)^{\sin x}$;

7) $x = \rho \cos \varphi$; 8) $y = \dfrac{t}{\alpha} + t \sin \alpha$.

2.10. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $u = xyz$; 2) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$;

3) $u = x^{yz}$; 4) $u = x^{y/z}$.

2.11. Знайдіть $du(M_0)$, якщо:

1) $u = \dfrac{x}{y^2}, M_0(1;1)$; 2) $u = \dfrac{x + y}{x - y}, M_0(3;2)$;

3) $u = \ln \arcsin(x + y^3), M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$;

4) $u = \operatorname{arcctg} \ln(\sqrt{x} + y^4), M_0(e^2;0)$;

5) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, M_0(3;4;5)$; 6) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z, M_0(1;1;1)$.

2.12. Знайдіть $\frac{du}{dt}$, якщо:

1) $u = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$;

2) $u = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$;

3) $u = xyz, x = t^2 + 1, y = \ln t, z = \operatorname{tg} t$;

4) $u = \frac{yz}{x}, x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$.

2.13. Знайдіть $\frac{dz}{dx}$ та $\frac{\partial z}{\partial x}$, якщо:

1) $z = x^2 y, y = \sin x + \cos x$;

2) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, y = 3x + 1$;

3) $z = \operatorname{arctg}(xy), y = e^x$;

4) $z = \arcsin\frac{x}{y}, y = \sqrt{x^2 + 1}$.

2.14. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ якщо:

1) $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$;

2) $z = x \sin y + y \cos x, x = \frac{u}{v}, y = uv$;

3) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, x = u^v, y = u \ln v$;

4) $z = x^y + y^x, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$.

2.15. Знайдіть dz, якщо:

1) $x^2 e^{2z} - z^2 e^{2x} = 0$;

2) $z \sin x - \cos(x - z) = 0$;

3) $\sin(xz) - e^{xz} - x^2 z = 0$;

4) $z^x = x^z$;

5) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 5$;

6) $z^3 - 4xy + y^2 - 4 = 0$;

7) $z^3 + 3xyz = a^3$;

8) $e^z - xyz = 0$;

9) $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$;

10) $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

2.16. Знайдіть d^2u, якщо:

1) $u = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$;

2) $u = x^3 + 3x^2 y - y^3$;

3) $u = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$;

4) $u = \arcsin(xy)$;

5) $u = (x + y)e^{xy}$;

6) $u = x \ln \frac{y}{x}$;

7) $u = x^y$;

8) $u = y^{\ln x}$;

9) $u = xy + yz + zx$; 10) $u = \ln(x + y + z)$;

11) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 12) $u = e^{xyz}$.

2.17. Знайдіть вказані похідні:

1) $z = xe^{-y}, \dfrac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$. 2) $z = \ln(x^2 + y^2), \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

3) $z = \sin xy, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; 4) $z = e^{xy^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Відповіді

2.9. 1) $z'_x = 3x^2y - y^3 + 2, z'_y = x^3 - 3y^2x - 3$; 2) $z'_x = y + \dfrac{y}{x^2} + 3, z'_y = x - \dfrac{1}{x} + 2$;

3) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$;

4) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$;

5) $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x$; 6) $z'_x = \cos x(\cos y)^{\sin x} \ln\cos y, z'_y = -(\cos y)^{\sin x - 1} \sin x \sin y$;

7) $x'_\rho = \cos\varphi, x'_\varphi = -\rho\sin\varphi$; 8) $y'_t = \dfrac{1}{\alpha} + \sin\alpha, y'_\alpha = -\dfrac{t}{\alpha^2} + t\cos\alpha$.

2.10. 1) $u'_x = yz, u'_y = xz, u'_z = xy$; 2) $u'_x = 3x^2 + 3y - 1, u'_y = z^2 + 3x,\ u'_z = 2yz + 1$;

3) $u'_x = yzx^{yz-1},\ u'_y = zx^{yz} \ln x, u'_z = yx^{yz} \ln x$;

4) $u'_x = \dfrac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}; u'_y = \dfrac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x; u'_z = -\dfrac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$.

2.11. 1) $du(M_0) = dx - 2dy$; 2) $du(M_0) = -4dx + 6dy$; 3) $du(M_0) = \dfrac{6}{\pi} dx$;

4) $du(M_0) = -\dfrac{e^{-2}}{4} dx$; 5) $du(M_0) = -\dfrac{3}{25} dx - \dfrac{4}{25} dy + \dfrac{1}{5} dz$; 6) $2dx + \ln 4 \cdot dz$.

2.12. 1) $e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$;2) $\dfrac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}$;

3) $\dfrac{du}{dt} = 2tyz + \dfrac{xz}{t} + \dfrac{xy}{\cos^2 t}$; 4) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{x(z + 2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$.

2.13. 1) $\dfrac{dz}{dx} = 2x(\sin x + \cos x) + x^2(\cos x - \sin x), \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$;

2) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2x(3x + 2)}{(x^2 + 3x + 1)^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4xy}{(x^2 + y)^2}$;

3) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x(x + 1)}{1 + x^2e^{2x}}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$; 4) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$;

2.14. 1) $z'_u = \dfrac{2u}{v^2}\ln(3u-2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $z'_v = -\dfrac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$;

2) $z'_u = (\sin y - y\sin x)\dfrac{1}{v} + (x\cos y + \cos x)v$,

$z'_u = (\sin y - y\sin x)\left(-\dfrac{u}{v^2}\right) + (x\cos y + \cos x)u$.

3) $z'_u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v$, $z'_v = \dfrac{xu^v}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln u - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\dfrac{u}{v}$;

4) $z'_u = 2u(yx^{y-1} + y^x\ln y + x^y\ln x + xy^{x-1})$, $z'_v = 2v(yx^{y-1} + y^x\ln y - x^y\ln x - xy^{x-1})$.

2.15. 1) $dz = \dfrac{z^2e^{2x} - xe^{2z}}{x^2e^{2z} - ze^{2x}}dx$; 2) $dz = \dfrac{z\cos x + \sin(x-z)}{\sin(x-z) - \sin x}dx$;

3) $dz = \dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{2x + e^{xz} - \cos xz}{\cos xz - e^{xz} - x}dx$; 4) $dz = \dfrac{z^2\ln x - 1}{x^2\ln z - 1}dx$;

5) $dz = \dfrac{(2-x)dx + 2ydy}{z+1}$; 6) $dz = \dfrac{4ydx + (4x-2y)dy}{3z^2}$;

7) $dz = -\dfrac{yzdx + xzdy}{xy + z^2}$; 8) $dz = \dfrac{z}{z-1}\left(\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}\right)$;

9) $dz = \dfrac{y^2(z+3x^2)dx + (3y^4 + ze^{z/y})dy}{y(e^{z/y} - xy)}$; 10) $dz = \dfrac{zdx - z(1+x^2z^2)dy}{y(1+x^2z^2) - x}$.

2.16. 1) $d^2u = 6xdx^2 + 2(2y - 15y^2)dxdy + (2x - 30xy + 20y^3)dy^2$;

2) $d^2u = (6x+6y)dx^2 + 12xdxdy - 6ydy^2$;

3) $d^2u = \dfrac{(2x^2+y^2)dx^2 + 2xydxdy + (x^2+2y^2)dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

4) $d^2u = \dfrac{xy^3dx^2 + 2dxdy + x^3ydy^2}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

5) $d^2u = e^{xy}(y(y^2+xy+2)dx^2 + 2(x+y)(xy+2)dxdy + x(x^2+xy+2)dy^2)$;

6) $d^2u = -\dfrac{1}{x}dx^2 + \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2$;

7) $d^2u = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2(1 + y\ln x)x^{y-1}dxdy + x^y\ln^2 xdy^2$;

8) $d^2u = y^{\ln x}\left(\dfrac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}dx^2 + 2\dfrac{\ln x\ln y + 1}{xy}dxdy + \dfrac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2}dy^2\right)$;

9) $d^2u = 2(dxdy + dxdz + dydz)$;

10) $d^2u = -\dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxdy + dxdz + dydz)}{(x+y+z)^2}$;

11) $d^2u = \dfrac{(y^2+z^2-x^2)dx^2+(x^2+z^2-y^2)dy^2+(x^2+y^2-z^2)dz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} -$

$- \dfrac{4(xydxdy+xzdxdz+yzdydz)}{(x^2+y^2+z^2)^2};$

12) $d^2u = e^{xyz}((yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx))$.

2.17. 1) e^{-y}; 2) $\dfrac{4y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$; 3) $-2x\sin xy - x^2y\cos xy$; 4) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$.

3. Дотична й нормаль до поверхні. Градієнт

Навчальні задачі

3.1.1. Знайти похідну функції $u(M) = xy^2+z^2-xyz$ у точці $M_0(1;1;2)$ за напрямом $\overline{l} = (1;\sqrt{2};1)^T$.

Розв'язання. [9.5.2.] **[***Записуємо формулу для похідної за напрямом.***]**

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \overset{[9.5.2]}{=} \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

де $\overline{l}^{\,0} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)^T$.

[*Обчислюємо частинні похідні.***]**

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (y^2-yz)\,|_{(1;1;2)} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2xy-xz)\,|_{(1;1;2)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z-xy)\,|_{(1;1;2)} = 3.$$

[*Обчислюємо напрямні косинуси вектора* $\overline{l}$.**]**

$$\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = \frac{\overline{l}}{\left|\overline{l}\right|};\ \left|\overline{l}\right| = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2} = 2;$$

$$\overline{l}^{\,0} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)^T \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

[*Підставляємо знайдені частинні похідні і напрямні косинуси у формулу.***]**

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

3.1.2. Знайти одиничний вектор внутрішньої нормалі до поверхні $S:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{1}=1$ у точці $M_0\left(1;1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язання. [9.5.3, 9.7.2.]

[*Записуємо рівняння поверхні у вигляді* $F(x,y,z)=0$.**]**

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}-1.$$

[*Записуємо формулу для вектора нормалі до поверхні* S.**]**

$$\overline{n}(M_0)\overset{[9.7.2]}{=}\pm\operatorname{grad}F(M_0).$$

[*Записуємо формулу для* $\operatorname{grad}F(M_0)$.**]**

$$\operatorname{grad}F(M_0)\overset{[9.5.3]}{=}\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні.***]**

$$F_x'(M_0)=\left.\frac{x}{2}\right|_{M_0}=\frac{1}{2};F_y'(M_0)=\left.\frac{y}{2}\right|_{M_0}=\frac{1}{2};F_z'(M_0)=2z\,|_{M_0}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні*]

$$\operatorname{grad}u(M_0)=\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{1}{2}\overline{j}+\sqrt{2}\overline{k}.$$

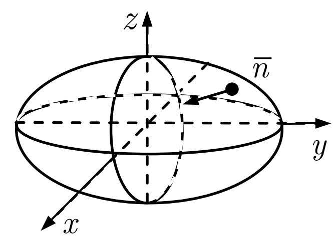


Рис. до зад. 3.1.2

Вектор внутрішньої нормалі до еліпсоїда у точці M_0 утворює тупі кути з осями координат, отже,

$$\overline{l}=\overline{n}(M_0)=-\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)^T.$$

[*Знаходимо орт вектора нормалі.***]**

$$\overline{l}^0=\overline{n}^0=\frac{\overline{n}}{\left|\overline{n}\right|};\qquad\left|\overline{n}\right|=\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$\overline{l}^0=-\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)^T=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T.$$

3.2. Знайти градієнт, величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [9.5.3, 9.5.6.] **[***Записуємо формулу для* $\operatorname{grad}u(M_0)$.**]**

$$\operatorname{grad}u(M_0)\overset{[1.5.4]}{=}\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* $u(M)$.**]**

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

[*Знаходимо* $\operatorname{grad} u(M_0)$.**]** ①

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\overline{k}.$$

[*Обчислюємо довжину* $\operatorname{grad} u(M_0)$.]

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 1.$$

Найбільша зміна функції відбувається у напрямі вектора $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; величина найбільшої зміни дорівнює 1.

Коментар. ① Найбільша зміна функції відбувається у напрямі градієнта. Величина цієї зміни дорівнює довжині градієнта.

3.3. Скласти рівняння дотичної площини P та нормалі L до поверхні $S: x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ у точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. [9.7.3, 9.7.4.] **[***Записуємо рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні* $F(x,y,z)=0$.**]**

$$P: F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0;$$

$$L: \frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* $F(x,y,z)$.**]**

$$F'_x(M_0) = (3x^2+yz)\,|_{(1;2;-1)} = 1;$$

$$F'_y(M_0) = (3y^2+xz)\,|_{(1;2;-1)} = 11;$$

$$F'_z(M_0) = (3z^2+xy)\,|_{(1;2;-1)} = 5.$$

Рівняння дотичної площини P:

$$1(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0,$$

$$x+11y+5z-18=0.$$

Рівняння нормалі L:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

3.4. Знайдіть напрям і величину $\operatorname{grad} u(M_0)$, якщо:

1) $u = x^2 + y^2, M_0(3;2)$; 2) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, M_0(2;1)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, M_0(1;-1;2)$;

4) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, M_0(2;1;1)$.

3.5. Знайдіть кут між градієнтами функції u в точках M_1 та M_2:

1) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, M_1(1;1), M_2(1;-1)$;

2) $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}, M_1(1;1), M_2(3;4)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2, M_1(1;1;\sqrt{7}), M_2(\sqrt{7};-1;-1)$;

4) $u = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1;1;1), M_2(1;2;-1)$.

3.6. Знайдіть похідну функції u у напрямі $\overline{l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = \operatorname{arctg} xy, \overline{l} = (1;1), M_0(1;1)$;

2) $u = x\sin(x+y), \overline{l} = (-2;0), M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(3;1), M_1(6;5)$;

4) $u = 5x + 10x^2y + y^5, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;2), M_1(5;-1)$;

5) $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, \overline{l} = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)^T, M_0(3;3;1)$;

6) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \overline{l} = \left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)^T, M_0(1;2;1)$;

7) $u = xyz, \overline{l} = \overline{M_0M_1},\ M_0(5;1;2),\ M_1(9;4;14)$;

8) $u = x^2y^2z^2, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;-1;3),\ M_1(0;1;1)$.

3.7. Знайдіть найбільше значення $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = xy^2 - 3x^4y^5, M_0(1;1)$; 2) $u = \dfrac{x + \sqrt{y}}{y}, M_0(2;1)$;

3) $u = \ln xyz, M_0(1;-2;-3)$;

4) $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z, M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.8. 1. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(5;1;-8)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(9;4;4)$.

2. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xe^y + ye^x - z^2$ у точці $M_0(3;0;2)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(4;1;3)$.

3.9. 1. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ у точці $M_0(1;1;1)$.

2. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(2;1;-1)$.

3.10. Знайдіть одиничний вектор, напрямлений уздовж нормалі до заданої поверхні у точці M_0:

1) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1;1;2)$;

2) $xy + xz + yz = 3, M_0(1;1;1)$.

3.11. Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні в точці M_0:

1) $z = 2x^2 - 4y^2, M_0(2;1;4)$; 2) $z = x^2 + y^2, M_0(1;-2;5)$;

3) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, M_0(4;3;4)$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, M_0(1;-2;-2)$;

5) $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1, M_0(3;-2;-1)$; 6) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{3} = -1, M_0(4;-3;3)$;

7) $z - y - \ln\dfrac{x}{z} = 0, M_0(1;1;1)$; 8) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, M_0(2;2;1)$.

3.12. 1. До поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.

2. До поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x - y + 2z = 0$.

3. До поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ проведіть дотичну площину, яка перпендикулярна до площин $x - y - z = 2$ та $2x - 2y - z = 4$.

4. Для поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ знайдіть нормаль, яка паралельна прямій $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$.

3.13. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої у точці, що відповідає значення t_0:

1) $x = \sin 2t, y = 1 - \cos 2t, z = \sqrt{2}\cos t, t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $x = a\,\mathrm{ch}\, t, y = b\sin t, z = ct, t_0 = 0$.

3.14. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої у точці M_0:

1) $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3, M_0(1;0;1)$;

2) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}, M_0\left(\dfrac{\pi}{2} - 1;1;2\sqrt{2}\right)$.

Відповіді

3.4. 1) $6\overline{i} + 4\overline{j}, 2\sqrt{13}$; 2) $\dfrac{2}{3}\overline{i} + \dfrac{1}{3}\overline{j}, \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k}, 6\sqrt{3}$; 4) $9\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}, 3\sqrt{11}$.

3.5. 1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{1}{9}$; 4) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{99}}$.

3.6. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.2) -1; 3) 0; 4) -18; 5) 62; 6) $\dfrac{5}{9}$; 7) $\dfrac{98}{13}$; 8) -22.

3.7. 1) $\sqrt{290}$; 2) $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$; 3) $\dfrac{7}{6}$; 4) $\dfrac{\sqrt{137}}{8}$. **3.8.** 1) $-\dfrac{92}{13}$; 2) $\dfrac{e^3}{\sqrt{3}}$.

3.9. 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = 8\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}, \max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 12$.

2) $\operatorname{grad} u(M_0) = -\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}, \max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 3$.

3.10. 1) $\pm\left(\dfrac{2}{3\sqrt{14}};\dfrac{1}{3\sqrt{14}};\dfrac{11}{3\sqrt{14}}\right)^T$; 2) $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.11. 1) $8x - 8y - z = 4, \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-4}{-1}$;

2) $2x - 4y - z - 5 = 0, \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$;

3) $3x + 4y - 6z = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$;

4) $x - 2y + 2z - 9 = 0, \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$;

5) $2x - 3y - 6z - 18 = 0, \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-6}$;

6) $3x - 4y - 12z + 12 = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-3}{-12}$;

7) $x + y - 2z = 0, \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$; 8) $x + y - 4z = 0, \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$.

3.12. 1) $x + 4y + 6z = \pm 21$; 2) $x - y + 2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$;

3) $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$; 4) $\dfrac{x - 1 \pm 1/\sqrt{26}}{1} = \dfrac{y \pm 3/\sqrt{26}}{3} = \dfrac{z \pm 3/\sqrt{26}}{4}$.

3.13. 1) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}, 2y-z-1=0;$ 2) $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, by+cz=0.$

3.14. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3}, 2x-y+3z-5=0;$

2) $\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$

4. Екстремуми функції кількох змінних

Навчальні задачі

4.1. Розвинути функцію $z=e^{x/y}$ за Тейлоровою формулою з центром у точці $M_0(0;1)$ до членів 2-го порядку включно.

Розв'язання. [9.8.1.] **[***Записуємо Тейлорову формулу 2-го порядку з центром у точці* $M_0(0;1)$.**]**

$$z(x,y)=z(0,1)+\frac{1}{1!}\Big(z'_x(0,1)x+z'_y(0,1)(y-1)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2!}(z''_{x^2}(0,1)x^2+2z''_{xy}(0,1)x(y-1)+z''_{y^2}(0,1)(y-1)^2)+R_2(x,y).$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* z *у точці* M_0.**]**

$$z(M_0)=1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\left.\left(e^{x/y}\frac{1}{y}\right)\right|_{M_0(0;1)}=1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\left.\left(e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\right|_{M_0(0;1)}=0;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}=\left.\left(e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\right|_{M_0(0;1)}=1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\partial y}=\left.\left(-e^{x/y}\frac{x}{y^3}-e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\right|_{M_0(0;1)}=-1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}=\left.\left(e^{x/y}\frac{x^2}{y^4}+e^{x/y}\frac{2x}{y^3}\right)\right|_{M_0(0;1)}=0.$$

[*Підставляємо обчислені похідні в Тейлорову формулу*.**]**

$$e^{x/y}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_2(x,y).$$

4.2. Дослідити функцію $z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на екстремум.

Розв'язання. [9.8.2–9.8.7.] ①

[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення функції.*]

$$D(z) = \mathbb{R}^2.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки функції z із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$.]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \quad 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Стаціонарними є точки: $M_0(2;1), \ M_1(-2;-1), M_2(1;2), M_3(-1;-2)$.

[***Крок 3.*** *Для кожної точки перевіряємо достатню умову існування екстремуму і висновуємо.*]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку функції z.*]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x;$$

$$\det H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2.$$

Для $M_0(2;1)$:

$$A_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12, B_0 = 6y\big|_{M_0(2;1)} = 6, C_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12;$$

$$\Delta_0 = 144 - 36 = 108 > 0, A_0 = 12 > 0 \Rightarrow M_0 - \text{ точка } \min.$$

Для $M_1(-2;-1)$:

$$A_1 = -12, B_1 = -6, C_1 = -12;$$

$$\Delta_1 = 144 - 36 = 108 > 0, A_1 = -12 < 0 \Rightarrow M_1 - \text{точка} \max.$$

Для $M_1(1;2)$:

$$A_2 = 6, B_2 = 12, C_2 = 6;$$

$$\Delta_2 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_2 - \text{не є точкою екстремума.}$$

Для $M_3(-1;-2)$:

$$A_3 = -6, B_3 = -12, C_3 = -6;$$

$$\Delta_3 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_3 - \text{не є точкою екстремума.}$$

4.3.1. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

в області $\overline{D} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$

Розв'язання. [9.9.1, 9.9.6.]

[*Зображуємо область* $\overline{D} = D \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$.**]**

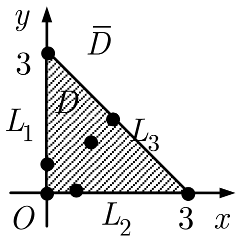


Рис. до зад. 4.3.1

[*Крок 1.* *Знаходимо стаціонарні точки, що є внутрішніми для області* $\overline{D}$ *із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$**]**

$$z'_x = 2x - y - 1, \quad z'_y = 2y - x - 1.$$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad M_0(1;1) \in D.$$

[*Крок 2.* *Знаходимо стаціонарні точки на межі області і долучаємо до них кінцеві точки кожної ланки.***]**

На $L_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 3\}$:

$$z(x,y)\Big|_{x=0} = z_1(y) = y^2 - y, y \in [0;3].$$

$$z'_1 = 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}; M_1\left(0;\frac{1}{2}\right) \in L_1.$$

$$M_2(0;0) \in L_1, M_3(0;3) \in L_1.$$

На $L_2 = \{y = 0, 0 \leq x \leq 3\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=0} = z_2(x) = x^2 - x, x \in [0;3].$$

$$z'_2 = 2x - 1 = 0; x = \frac{1}{2}; M_4\left(\frac{1}{2};0\right) \in L_2.$$

$$M_2(0;0), M_5(3;0) \in L_2.$$

На $L_3 = \{y = 3 - x, 0 \leq x \leq 3\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=3-x} = z_3(x) = 3x^2 - 9x + 6, x \in [0;3].$$

$$z'_3 = 6x - 9 = 0; x = \frac{3}{2}; M_6\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \in L_3.$$

$$M_3(0;3), M_5(3;0) \in L_3.$$

[*Крок 3.* *Порівнюємо значення функції у знайдених точках.***]**

$$z(M_0) = z(1,1) = -1;$$

$$z(M_1) = z\left(0,\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \; z(M_2) = z(0,0) = 0;$$

$$z(M_3) = z(0,3) = 6;\ z(M_4) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4};$$
$$z(M_5) = z(3,0) = 6;\ z(M_6) = z\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

[*Висновуємо.***]**

$\max\limits_{M \in \overline{D}} z(M) = z(0,3) = z(3,0) = 6;$

$\min\limits_{M \in \overline{D}} z(M) = z(1,1) = -1.$

4.3.2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в області $\overline{D} : x^2 + y^2 \le 4.$

Розв'язання. [9.9.1, 9.9.6.]

1. $z'_x = 1, z'_y = 1 \Rightarrow$ стаціонарних точок функція не має.

2. Межу області коло $x^2 + y^2 = 4$ задаємо параметрично $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$

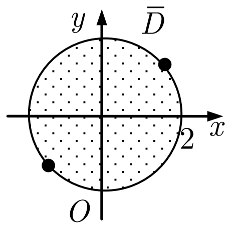


Рис. до зад. 4.3.2

$$z(x,y)\big|_{\substack{x=2\cos t,\\ y=2\sin t}} = \tilde{z}(t) = 2\cos t + 2\sin t, t \in [0; 2\pi].$$
$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t.$$
$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t = 0;\ \operatorname{tg} t = 1;\ t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4}.$$
$$M_1(\sqrt{2}; \sqrt{2}), M_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$
$$z(M_1) = z(\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$$
$$z(M_2) = z(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

$\max\limits_{M \in \overline{D}} z(M) = z(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$

$\min\limits_{M \in \overline{D}} z(M) = z(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$

4.4.1. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6} = 0$ методом виключення змінних.

Розв'язання. [9.9.2.]

[*Виражаємо одну із змінних з рівняння зв'язку.***]**

$$y(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}.$$

[*Підставляємо вираз у функцію*** $z(x, y)$.**]**

$$z(x, y(x)) = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}.$$

[*Досліджуємо на локальний екстремум одержану функцію.***]**

$$\varphi'(x) = x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{3}.$$

[*Перевіряємо виконання достатніх умов існування локального екстремуму.***]**

$$\varphi''\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 > 0.$$

У точці $x_0 = -\dfrac{1}{3}$ функція $\varphi(x)$ має локальний мінімум.

З умови зв'язку знаходимо відповідне значення

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Точка $M_0\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}\right)$ є точкою локального умовного мінімуму функції $z(x, y)$.

[*Обчислюємо значення функції $z(x, y)$ в цій точці.***]**

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

4.4.2. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0$ методом множників Лаґранжа.

Розв'язання. [9.9.2–5, 9.9.7.]

[*Крок 1.* *Записуємо функцію Лаґранжа для задачі.***]**

$$L(x, y; \lambda) = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \lambda\left(\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6}\right),$$

де λ — невизначений Лаґранжів множник.

[*Крок 2.* *Знаходимо стаціонарні точки Лаґранжової функції.***]**

$$\begin{cases} L'_x = 12x(3x^2 - 4y) + \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2}\lambda x = 0; \\ L'_y = -8(3x^2 - 4y) + \dfrac{2}{3} - \lambda = 0; \\ \varphi(x, y) = \dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}, \lambda = 6 \Leftrightarrow M'_0\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 6\right).$$

[***Крок 3.*** *Перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму для функції Лаґранжа в точці* M_0'.]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку Лаґранжової функції.*]

$$L''_{xx} = 12(9x^2 - 4y) + \frac{3}{2}\lambda, L''_{xy} = -48x, L''_{yy} = 32;$$
$$L''_{xx}(M_0') = 9, L''_{xy}(M_0') = 16, L''_{yy}(M_0') = 32.$$

[*Записуємо другий диференціал функції* $L(x, y; \lambda)$ *в точці* $M_0'\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 6\right)$.]

$$d^2L(M_0') = 9dx^2 + 32dxdy + 32dy^2.$$

[*Щоб визначити знак 2-го диференціала при наявності зв'язку, встановлюємо зв'язок між* dx *та* dy *з умови зв'язку*.]

$$d(\varphi(x, y)) = d\left(\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}xdx - dy = 0.$$

У точці M_0':

$$-\frac{1}{2}dx - dy = 0, dy = -\frac{1}{2}dx.$$

[*Підставляємо* dy *у вираз для* $d^2L(M_0')$.]

$$d^2L(M_0') = 9dx^2 + 32dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) + 32\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = dx^2 > 0.$$

У точці M_0' функція $L(x, y; \lambda)$ має локальний мінімум

$$L_{\min} = L(M_0') = \frac{1}{2},$$

а функція

$$z = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

при наявності зв'язку

$$\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6} = 0$$

має у точці $M_0\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ локальний умовний мінімум

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

4.5. Розвиньте функцію f за степенями $x - x_0$ та $y - y_0$, знайшовши члени 2-го порядку включно:

1) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2, x_0 = 1, y_0 = -1$;

2) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x_0 = 1, y_0 = 0$;

3) $f(x,y) = y^x, x_0 = 1, y_0 = 1$;

4) $f(x,y) = \sin x \sin y, x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

4.6. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$; 2) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; 4) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$;

5) $z = x^3y^2(6 - x - y), x > 0, y > 0$; 6) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, x > 0, y > 0$;

7) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$;

8) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

9) $z = e^{x/2}(x + y^2)$;

10) $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2), a > 0, b > 0$.

4.7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

1) $z = x^2 + y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 9$;

2) $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ в області $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$;

3) $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1$;

4) $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 4$;

5) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$ та $x + y + 3 = 0$;

6) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ у трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y + 5 = 0$;

7) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $x = 2, y = -1, y = 2$;

8) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0, x = 1, y = 2$;

9) $z = x^2 + 2xy - 1$ в області, обмеженій лініями $y = 0$ та $y = x^2 - 4$;

10) $z = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$ в області, обмеженій лініями $y = 4$ та $y = x^2$.

4.8. Знайдіть умовні екстремуми функції:

1) $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;

2) $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;

3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

4) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;

5) $z = x^2 + xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

6) $z = 2x^2 + 12xy + y^2$ при $x^2 + 4y^2 = 25$.

4.9. 1. З усіх прямокутних паралелепіпедів, які мають заданий об'єм V, знайдіть той, який має найменшу поверхню.

2. З'ясуйте, яка з відкритих прямокутних ванн місткістю V має найменшу площу поверхні.

4.10. 1. Доведіть, що добуток трьох невід'ємних чисел заданої суми є найбільшим тоді й лише тоді, коли ці числа рівні між собою.

2. Доведіть, що сума трьох додатних чисел, які мають заданий добуток, є найменшою тоді й лише тоді, коли ці числа рівні.

Відповіді

4.5. 1) $5 + 5(x-1) - 5(y+1) + \dfrac{1}{2!}[2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2] + R_2$;

2) $y - (x-1)y + R_2$; 3) $1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + R_2$;

4) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left[\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) + \left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)^2\right] + R_2$.

4.6. 1) $z_{\min}(1,0) = -1$; 2) $z_{\max}(0,0) = 10$; 3) $z_{\min}\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = 0$; 4) $z_{\min}(3,3) = 0$;

5) $z_{\max}(3,2) = 108$; 6) $z_{\min}(5;2) = 30$; 7) $z_{\min}(1,3) = 10 - 18\ln 3$; 8) $z_{\min}(1,2) = 7 - 10\ln 2$;

9) $z_{\min}(-2,0) = -\dfrac{2}{e}$; 10) $z_{\min}(0,0) = 0$; якщо $a > b$, то $z_{\max}(\pm 1, 0) = \dfrac{a}{e}$; якщо $a < b$, то $z_{\max}(0, \pm 1) = \dfrac{b}{e}$; якщо $a = b$, то $z_{\max}(x^2 + y^2 = 1) = \dfrac{a}{e}$.

4.7. 1) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(x^2 + y^2 = 9\right) = 9$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(0,0\right) = 0$;

2) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right) = 1$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(0,0\right) = 0$;

3) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

4) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(2,0) = z(-2,0) = 4$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(0,2) = z(0,-2) = -4$;

5) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(-3,0)=z(0,-3)=6,\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(-1,-1)=-1;$

6) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(0,-5)=41,\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(-2,-1)=-3;$

7) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(2,-1)=13,\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(1,1)=z(0,-1)=-1.$

8) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(1,2)=17,\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(1,0)=-3;$

9) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{20}{9}\right)=\dfrac{181}{27},\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(1,-3)=-6;$

10) $\max\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(0,4)=64,\ \min\limits_{(x;y)\in\overline{D}} z(x,y)=z(\pm 2,4)=-48.$

4.8. 1) $z_{\min}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-2\sqrt{2},\ z_{\max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-2\sqrt{2};$

2) $z_{\min}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5},\ z_{\max}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5};$

3) $z_{\min}\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$; 4) $z_{\min}(1,0)=0, z_{\max}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}.$

5) $z_{\min}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}, z_{\max}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3}{2};$

6) $z_{\min}\left(\pm 3,\mp 2\right)=-50, z_{\max}\left(\pm 4,\pm\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{425}{4}.$

4.9. 1) куб з ребром $\sqrt[3]{V}$; 2) $\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{2V}\times\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

5. Обчислення визначеного інтеграла

Навчальні задачі

5.1.1. Обчислити $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. [10.4.1.]

$$\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \left| d\ln x = \frac{dx}{x} \right| \overset{①}{=} \int\limits_{e}^{e^2} \frac{d\ln x}{\ln x} \overset{[10.4.1]}{=} \ln\left|\ln x\right|\Big|_{e}^{e^2} \overset{②}{=}$$

$$= \ln\left|\ln e^2\right| - \ln\left|\ln e\right| = \ln 2.$$

Коментар. ① Знаходимо первісну для підінтегральної функції методом уведення функції під знак диференціала.
② За формулою Ньютона — Лейбніца від значення первісної у верхній межі віднімаємо значення первісної у нижній.

5.1.2. Обчислити $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Розв'язання. [10.4.1.]

$$\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x^2+2x+10} \overset{①}{=} \int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{(x+1)^2+9} \overset{[10.4.1]}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\Big|_{2}^{5} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{12}.$$

Коментар. ① Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу.

5.1.3. Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

Розв'язання. [10.4.2.]

$$\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}\,dx & \to & v = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| \overset{[10.4.2]}{=}$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi} + 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx = -2\pi\cos\frac{\pi}{2} + 0 + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi} = 4\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin 0 = 4.$$

5.1.4. Обчислити $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

Розв'язання. [10.4.3, 10.4.7.]

$$\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx \overset{①}{=} \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ dx = 3\cos t dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = 3\left|\cos t\right| = 3\cos t. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t(1-\sin^2 t)dt =$$

$$= 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t dt - 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt \overset{[10.4.7]}{=} 81\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = \frac{81\pi}{16}.$$

Коментар. ① Обчислюючи визначений інтеграл заміною змінних, на відміну від невизначеного інтегрування, не потрібно вертатись до старої змінної. Використовуємо тригонометричну підстановку і не забуваємо змінити межі визначеного інтеграла:

$$x = 0 \Leftrightarrow 3\sin t = 0;\ t = 0.$$

$$x = 3 \Leftrightarrow 3\sin t = 3,\ t = \frac{\pi}{2}.$$

5.1.5. Обчислити $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

Розв'язання. [10.4.3.]

$$\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}; \\ 1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^5 t dt}{\cos^2 t} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^3 t dt = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\sin^2 t)d\sin t =$$

$$= \sin t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24}.$$

5.1.6. Обчислити $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

Розв'язання. [10.4.3.]

$$\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{2}{\cos t}, t \in [0; \dfrac{\pi}{2}) \\ dx = \dfrac{2\sin t dt}{\cos^2 t}. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 2 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/6} \cos t \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}\,\frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = 2\operatorname{tg} t\Big|_0^{\pi/6} - 2t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}.$$

5.2.1. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x} dx.$

Розв'язання. [10.4.5.]

Оскільки $\sqrt[3]{\sin x}$ — непарна функція, то $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x} dx \overset{[2.3.6]}{=} 0.$

5.2.2. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx.$

Розв'язання. [10.4.4.]

Оскільки $\left|\operatorname{tg} x\right|$ — парна функція, то

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx \overset{[10.4.4]}{=} 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = -2\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -2\ln\cos\frac{\pi}{4} + 2\ln\cos 0 = \ln 2.$$

5.2.3. Обчислити $\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^5 x dx.$

Розв'язання. [10.3.3, 10.4.5, 10.4.6.]

Функція $\sin^5 x$ має період 2π.

$$\int_0^{6\pi} \sin^5 x dx \overset{[10.3.3]}{=} \int_0^{2\pi} \sin^5 x dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^5 x dx + \int_{4\pi}^{6\pi} \sin^5 x dx \overset{[10.4.6]}{=}$$

$$= 3\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx \overset{[10.4.5]}{=} 3 \cdot 0 = 0.$$

Коментар. ① Використовуючи властивість адитивності, розбиваємо проміжок інтегрування на відрізки завдовжки 2π.

5.2.4. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x dx.$

Розв'язання. [10.4.7.]

Функція $\sin^4 x$ має період $T = \pi$.

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx \overset{[10.3.3]}{=} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^4 x dx \overset{[10.4.5]}{=} 2\int_0^{\pi} \sin^4 x dx =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx \overset{[10.4.4]}{=} 4\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx \overset{[10.4.7]}{=} 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3!!}{4!!} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

5.3. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$

2) $\displaystyle\int_{2}^{-29} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}};$

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} (e^x - 1)^4 e^x dx;$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;$

5) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}};$

6) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$

7) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x} dx}{x^2};$

8) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}};$

9) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$

10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx.$

5.4. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2};$

3) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}};$

4) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}};$

6) $\displaystyle\int\limits_{4}^{5} \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}\,dx;$

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{5x-2}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx;$

9) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx;$

10) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}\,dx;$

11) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx;$

12) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,dx;$

13) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi;$

14) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x\, dx;$

15) $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\, dx;$

16) $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3\varphi\, d\varphi;$

17) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x};$

18) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}2/3} \frac{6+\operatorname{tg} x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx.$

5.5. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \left|1+x\right| dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \left|x^2-3x+2\right| dx;$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx;$

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx;$

5) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx,$ якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$

6) $\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx,$ якщо $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

5.6. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx;$

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \cos^2 x + x^2 \sin x) dx;$

3) $\int\limits_{-2}^{2} (x^5 e^{-x^2} + 5x^4 - 3x^3 + x) dx;$

4) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{\cos^2 x} dx;$

5) $\int\limits_{-6}^{6} (x^5 - 3x^3 + x) \cos x dx;$

6) $\int\limits_{-2}^{2} (x^7 - 7x) \ln^3 (x^4 + 1) dx;$

7) $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx;$

8) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1 + x}{1 - x} dx.$

5.7. Знайдіть похідну функції:

1) $F(x) = \int\limits_{1}^{x} \ln t dt, x > 0;$

2) $F(x) = \int\limits_{x}^{0} \sqrt{1 + t^4} dt;$

3) $F(x) = \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin t}{t} dt;$

4) $F(x) = \int\limits_{0}^{1} \cos t^2 dt;$

5) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt;$

6) $F(x) = \int\limits_{x}^{x^2} e^{-t^2} dt.$

5.8. За допомогою інтегруванням частинами, обчисліть:

1) $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x} dx;$

2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x};$

3) $\int\limits_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1) \cos 3x dx;$

4) $\int\limits_{0}^{3} (x^2 - 6x + 9) \sin 2x dx;$

5) $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$;

6) $\int\limits_{0}^{1} x \ln(1+x^2) dx$;

7) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$;

8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$;

9) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$;

10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$.

5.9. Застосовуючи Валісову формулу, обчисліть:

1) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^5 x dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^8 x dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^7 2x dx$;

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^9 x dx$;

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^8 x dx$.

5.10. За допомогою заміни змінної, обчисліть:

1) $\int\limits_{3}^{8} \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$;

3) $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;

4) $\int\limits_{1}^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}} dx$;

5) $\int\limits_{0}^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$;

6) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$;

7) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$;

8) $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

9) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$;

10) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$;

11) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$;

12) $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$;

13) $\displaystyle\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$; 14) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$;

15) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$; 16) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x}$.

Відповіді

5.3. 1) $\frac{7}{72}$; 2) -5; 3) $\frac{(e-1)^5}{5}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\ln(1+\sqrt{2})$; 6) $1-\cos 1$; 7) $e-\sqrt{e}$; 8) $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 9) $\frac{3}{32}(12-7\sqrt[3]{4})$; 10) $\frac{2}{7}$.

5.4. 1) $\frac{\pi}{16}$; 2) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\arcsin\frac{1}{3}$; 5) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 6) $\ln\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$; 7) $10\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$; 8) $5\sqrt{10}-5\sqrt{5}+12\ln\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{10}}$; 9) $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$; 10) $\ln\frac{9}{2}-1$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\ln 2\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; 13) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$; 14) $\frac{\pi}{16}$; 15) $\frac{\pi}{6}+\frac{8}{9\sqrt{3}}$; 16) $\frac{3}{2}-\ln 2$; 17) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{36}\ln 4$.

5.5. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{4}{3}-\frac{\sqrt[4]{2}}{3}$; 4) 2; 5) $\frac{5}{6}$; 6) 9. **5.6.** 1) 0; 2) 0; 3) 64; 4) 8., 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 0;

5.7. 1) $\ln x$; 2) $-\sqrt{1+x^4}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$; 6) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

5.8. 1) $1-\frac{2}{e}$; 2) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{9}-\frac{2}{27}\sin 3$; 4) $\frac{17}{4}+\frac{1}{4}\cos 6$; 5) $6-2e$; 6) $\ln 2-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\sqrt{2}\pi-4$; 9) $\frac{1}{16}+\frac{\pi}{32}$; 10) $\frac{\pi}{32}$.

5.9. 1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{35\pi}{256}$; 3) $\frac{5\pi}{16}$; 4) $\frac{8}{35}$; 5) 0; 6) $\frac{35\pi}{64}$.

5.10. 1) $\frac{32}{3}$; 2) $2-\frac{\pi}{2}$; 3) $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$; 4) $6\ln\frac{4}{3}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$; 6) $4-\pi$; 7) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 8) $\frac{\pi}{6}$; 9) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; 10) $\frac{1}{8\sqrt{3}}$; 11) $\sqrt{7}-\sqrt{3}+\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{8}{15}$; 13) $\frac{1}{24\sqrt{3}}$; 14) $\frac{\pi}{32}+\frac{7\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{4}$; 15) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; 16) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. Застосування визначеного інтеграла

Навчальні задачі

6.1. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3,\ x = 0$.

Розв'язання. [10.5.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.***]**

Площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x), y = g(x)$, $x = a, x = b$ знаходять за формулою

$$S \overset{[10.5.1]}{=} \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

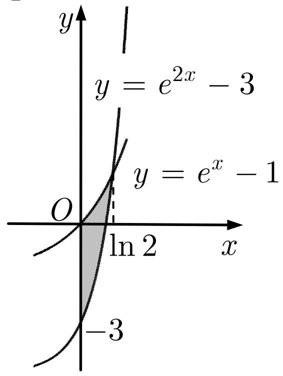


Рис. до зад. 6.1

Знаходимо точку перетину графіків функцій:

$$e^{2x} - 3 = e^x - 1;\ t = e^x.$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \Rightarrow x \in \varnothing; \\ t_2 = 2 \Rightarrow x = \ln 2. \end{array}\right.$$

На відрізку $[0; \ln 2]$ маємо $e^x - 1 \geq e^{2x} - 3$:

$$S = \int_0^{\ln 2} \left((e^x - 1) - (e^{2x} - 3)\right) dx = \int_0^{\ln 2} (e^x + 2 - e^{2x}) dx =$$

$$= \left(e^x + 2x - \frac{1}{2} e^{2x}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

6.2.1. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$

Розв'язання. [10.5.3.]

Параметризуємо рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$ знаходять за формулою

$$S \overset{[10.5.3]}{=} \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \right|$$

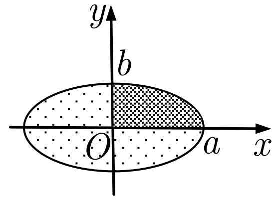


Рис. до зад. 6.2.1

Ураховуючи симетрію фігури, одержимо:

$$S=4\left|\int_0^{\pi/2} b\sin t(-a\sin t)dt\right|=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt=4ab\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pi ab.$$

6.2.2. Знайти площу фігури, обмеженої циклоїдою $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$ та прямою $y=3\,(0<x<4\pi, y\geq 3)$.

Розв'язання. [10.5.3.]

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, що задана параметрично знаходять за формулою

$$S=\left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right|.$$

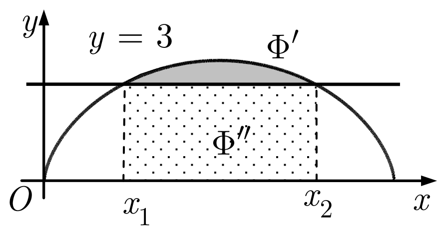


Рис. до зад. 6.2.2

Обмеження $0<x<4\pi$ вказує на те, що розглядають лише І арку циклоїди. Пряма перетинає циклоїду в точках з абсцисами x_1 та x_2. Шукану площу фігури Φ' можна знайти віднявши від площі під циклоїдою в межах $x_1\leq x\leq x_2$ площу прямокутника Φ''. Знайдімо значення параметра t в точках перетину прямої і циклоїди:

$$\begin{cases}y=2(1-\cos t),\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow 3=2(1-\cos t)\Leftrightarrow \cos t=-\frac{1}{2}\ \ (0\leq t\leq 2\pi);$$

$$t_1=\frac{2\pi}{3}, t_2=\frac{4\pi}{3}.$$

$$x_1=2\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},\ \ x_2=2\left(\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi''}=3(x_2-x_1)=3\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)=4\pi+6\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'\cup\Phi''}=4\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}(1-\cos t)^2dt=4\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{4\pi/3}=4\left(\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)=4\pi+9\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'}=(4\pi+9\sqrt{3})-(4\pi+6\sqrt{3})=3\sqrt{3}.$$

6.3. Знайти площу фігури, обмеженої кривими: $\rho = 4\cos 3\varphi, \rho = 2\ (\rho \ge 2)$.

Розв'язання. [10.5.2.]

Площу фігури, обмеженої трипелюстковою розою та колом знаходимо, враховуючи симетрію:

$$S = 3S_{\Phi'}.$$

Знайдімо за якого значення кута (для розглядуваної пелюстки), перетинаються коло і роза:

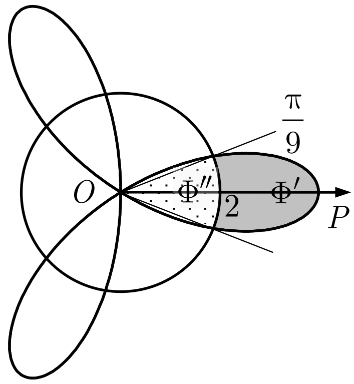


Рис. до зад. 6.3.

$$\begin{cases}\rho = 2,\\ \rho = 4\cos\varphi,\end{cases} \Leftrightarrow 4\cos 3\varphi = 2 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2}.$$

$$3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} - S_{\Phi''},$$

де S_{Φ} — площа «розового» сектора $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, $S_{\Phi''}$ — площа кругового сектора.

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 16\cos^2 3\varphi d\varphi = 16\int\limits_{0}^{\pi/9} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/9} =$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\Phi''} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 4d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{\pi/9} = \frac{4\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$S = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

6.4. Обчислити об'єм тіла Ω, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

Розв'язання. [10.5.4.]

Об'єм тіла за відомою площею перерізу його площиною, перпендикулярною до осі Ox знаходять за формулою:

$$V \overset{[10.5.4]}{=} \int\limits_a^b S(x)dx$$

Кожний переріз тіла, обмеженого еліпсоїдом, площиною $x = x_0, -a \le x_0 \le a$, є плоскою фігурою, що обмежена еліпсом:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=1,$$

з півосями $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$ та $\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$, $-a\le x\le a$.

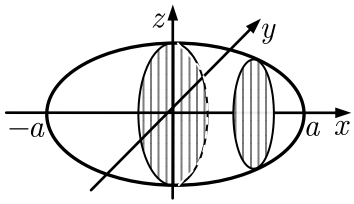


Рис. до зад. 6.4

Площа фігури (задача **6.2.1**):

$$S(x_0)=\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x_0^2),-a\le x_0\le a.$$

Отже, позначаючи x_0 через $x,-a\le x\le a$, одержимо:

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{bc}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

6.5. Обчислити об'єм, обмежений тором, і площу тора, утвореного обертанням кола $x^2+(y-b)^2=a^2$ навколо осі $Ox\,(b>a)$.

Розв'язання. [10.5.5.]

1. Об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox знаходять за формулою

$$V=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)dx.$$

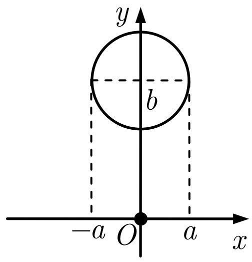


Рис. до зад. 6.4.2

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійних трапецій, обмежених зверху лініями

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}\text{ та }y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$$

знаходимо за формулою:

$$V_{\text{т}}=V_2-V_1=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx=$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\pi b\frac{\pi a^2}{2}=2\pi^2a^2b.$$

2. Площу поверхні обертання, утвореної обертанням кривої $y=f(x),x\in[a;b]$, навколо осі Ox знаходять за формулою

$$Q=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Площу поверхні обертання, утвореної обертанням ліній

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}\text{ та }y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$$

знаходимо за формулою:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx +$$
$$+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx =$$
$$= 4\pi ba\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 4\pi ba\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab.$$

6.6. Матеріальна точка M рухається прямолінійно зі швидкістю

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 1 \text{ м/с.}$$

Знайти шлях, який пройде точка від моменту $t_0 = 0$ за 3 секунди.

Розв'язання.

Шлях, пройдений матеріальною точкою із швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1; t_2]$, знаходять за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Отже,

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\,\Big|_0^3 = 39\,\text{м.}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

6.7. Знайдіть площу фігур, обмежених:

1) параболою $y = x^2 + 2x$ і прямою $y = x + 2$;

2) параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = -x$;

3) параболами $y^2 + 8x = 16$ та $y^2 - 24x = 48$;

4) параболами $y = x^2 + 8x - 12$ та $y = 18x - x^2$;

5) колом $x^2 + y^2 = 16$ і параболою $y^2 = 6x$;

6) колом $x^2 + y^2 = 8$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.

7*) еліпсом $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і гіперболою $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

6.8. Знайдіть площу фігур, обмежених лініями:

1) $y = x(x-1)^2, y = 0;$ 2) $x = y^2(y-1), x = 0;$

3) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1;$ 4) $y = \operatorname{tg} x, y = \dfrac{2}{3}\cos x, x = 0.$

6.9. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ та віссю абсцис;

2) астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

3) кардіоїдою $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ 4) еліпсом $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$

6.10. Знайдіть площу петлі лінії:

1) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

6.11. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) двопелюстковою розою $\rho = a\sin 2\varphi$;

2) п'ятипелюстковою розою $\rho = a\cos 5\varphi$;

3) лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho = 2 - \cos 4\varphi$;

4) лінією $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, що лежить поза лінією $\rho = 2 + \sin\varphi$;

5). лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

6) лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

6.12. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо осі Ox:

1) $y = x^3, x = 0, y = 8;$ 2) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}, y = 0, x = 0, x = 1;$

3) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0;$ 4) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}, y = 0, x = -a, x = a.$

6.13. Крива обертається навколо осі $Ox.$ Обчисліть площу поверхні обертання:

1) $y^2 = x, x \in [0;4];$ 2) $y^2 = 4 + x, x \in [0;2];$

3) $y = \sin x, x \in [0;\pi];$ 4) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}, x \in [0;a].$

6.14. 1. Знайдіть об'єм кулі радіусом R.
2. Знайдіть об'єм конуса з радіусом основи R і висотою H.

6.15. Знайдіть шлях, який проходить тіло під час прямолінійного руху зі швидкістю $v(t)$ м/с за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1, t_1 = 0, t_2 = 4$; 2) $v(t) = 2t^2 + t, t_1 = 1, t_2 = 3$.

Відповіді

6.7. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$; 4) $\frac{343}{3}$; 5) $S_1 = \frac{16\pi}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}, S_2 = \frac{32\pi}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$;
6). $S_1 = 2\pi + \frac{4}{3}, S_2 = 6\pi - \frac{4}{3}$; 7) $S_1 = S_3 = \pi - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 3 - 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,46, S_2 = 2(\pi - S_1)$.

6.8. 1). $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $e + \frac{1}{e} - 2$; 4) $\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.9. 1) $3\pi a^2$; 2) $\frac{3\pi a^2}{8}$; 3) $6\pi a^2$; 4) 6π.

6.10. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$.

6.11. 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) $\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$; 4) $\frac{51\sqrt{3}}{16}$; 5) a^2; 6) $a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.12. 1) $\frac{768}{7}\pi$; 2) $\frac{\pi^2 + 2\pi}{2}$; 3) 12π; 4) $\pi a^3\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\right)$.

6.13. 1) $\frac{52}{3}\pi$; 2) $\frac{62}{3}\pi$; 3) $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 4) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$.

6.14. 1) $\frac{4}{3}\pi R^3$; 2) $\frac{\pi R^2 H}{3}$.

6.15. 1) 68 м; 2) $\frac{64}{3}$ м.

7. Обчислення і дослідження невластивих інтегралів

Навчальні задачі

7.1.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.1.] Маємо невластивий інтеграл 1-го роду.①

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx \overset{[10.6.1]}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}\right)dx \overset{①}{=} \lim_{A\to+\infty} \left(\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A \overset{①}{=}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\ln\frac{A}{A+1} - \frac{1}{A} + \ln 2 + 1\right) = \ln 2 + 1.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① Проміжок інтегрування нескінчений, і підінтегральна функція на ньому неперервна.

② Інтеграл від суми дорівнюватиме сумі інтегралів лише в разі їхньої збіжності. Границя від суми тут теж не дорівнює сумі границь.

7.1.2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax}dx \quad (a > 0)$, або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.1.] Маємо невластивий інтеграл 1-го роду.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} xe^{-ax}dx = \left| \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = e^{-ax}dx & \to & v = -\dfrac{1}{a}e^{-ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{a}xe^{-ax}\Bigg|_0^A + \frac{1}{a}\int\limits_0^A e^{-ax}dx\right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{A}{a}e^{-aA} - \frac{1}{a^2}e^{-ax}\Bigg|_0^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{A}{a}e^{-aA} - \frac{1}{a^2}e^{-aA} + \frac{1}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{e^{aA}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{①}{=} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{ae^{aA}} = \frac{1}{a^2}.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① За правилом Бернуллі — Лопіталя.

7.1.3. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.2.] Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ має дві точки розриву: $x_1 = 0 \notin [1;5], x_2 = 1 \in [1;5]$.

Оскільки $x = 1$ є точкою нескінченного розриву, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду. ①

$$\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x} \overset{[10.6.2]}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^5 \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\left|\ln x\right|\Big|_{1+\varepsilon}^5 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\ln\ln 5 - \ln\ln\big(1+\varepsilon\big)\Big) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

Коментар. ① Межі інтегрування є скінченними. Досліджуючи невластивий інтеграл за означенням, відступаємо всередину проміжку інтегрування.

7.1.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.4.3.] Підінтегральна функція має розриви в точках $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right], x_3 = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Оскільки $x = \frac{1}{3}$ є точкою нескінченного розриву, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду.

$$\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \left| \begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{t}, & \begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline t & 3 & \frac{3}{2} \end{array} \\ dx = -\dfrac{dt}{t^2}. & \end{array} \right| = \int\limits_{3/2}^{3} \frac{dt}{t\sqrt{\dfrac{9}{t^2}-1}} =$$
$$= \int\limits_{3/2}^{3} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 3 - \text{ точка} \\ \text{нескінченного розриву} \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{3/2}^{3-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{t}{3}\Bigg|_{3/2}^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right) - \arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Інтеграл збігається.

7.2.1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Розв'язання. [10.6.3, 10.6.7.] **[***Плануючи використати ознаку порівняння, розбиваємо невластивий інтеграл 1-го роду на суму двох інтегралів так, щоб точка* 0 *не належала проміжку інтегрування невластивого інтеграла.***]**

$$\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}} = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}} + \int\limits_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}.$$

Перший доданок — визначений інтеграл. А другий — невластивий інтеграл 1-го роду①

Дослідімо $\int\limits_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ за ознакою порівняння.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} > 0, x \in [1;+\infty);$$

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{5/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = g(x), x \to +\infty.$$

Оскільки $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ збігається[10.6.3], то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається за граничною ознакою порівняння.

Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається як сума визначеного і збіжного невластивого інтеграла.

Коментар. ① Точка $x=-1$ у якій підінтегральна функція стає необмеженою, не належить проміжку інтегрування.

7.2.2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{x^2}-1}$.

Розв'язання. [10.6.4, 10.6.8.] **[***З'ясовуємо в яких точках підінтегральна функція стає необмеженою.***]**

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1} > 0, x \in (0;1]; \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x^2}-1} = +\infty.$$

Точка $x=0$ — точка нескінченного розриву й досліджуваний інтеграл є невластивим інтегралом 2-го роду.

[*Застосовуємо граничну ознаку порівняння.***]**

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1} \sim \frac{1}{x^2} = g(x), x \to 0.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ – розбігається[10.6.4], то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{x^2}-1}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

7.3. Обчисліть невластивий інтеграл (або встановіть його розбіжність):

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx \ (a>0)$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

5) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

6) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

11) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin xdx$;

12) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx$.

7.4. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$;

2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1}dx$;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^{14}dx}{(x^3+x+1)^5}$;

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^7dx}{(x^3+2x+1)^3}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^3+1}}$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$;

7) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\sqrt{x}}dx$;

8) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x^2+5)}{x^2}dx$;

10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

7.5. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

5) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 8) $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$;

9) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; 10) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$;

11) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 12) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$.

7.6. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$; 4)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,dx$.

7.7. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)-x}$. 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$;

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\, dx$; 10) $\int\limits_0^1 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

7.8. З'ясуйте, для яких значень k збігається:

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$; 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$.

7.9. Швидкість прямолінійного руху матеріальної точки $v(t)$. Знайдіть шлях, який пройде точка від початку руху до повної зупинки, якщо:

1) $v = te^{-0{,}01t}$ м/с; 2) $v = 4te^{-t^2}$ м/с.

Відповіді

7.3. 1) розбігається; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) розбігається; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{\pi^2}{8}$; 8) розбігається; 9) π;

10) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$; 11) розбігається; 12) $\frac{a}{a^2+b^2}$, $a > 0$, розбігається, $a \le 0$.

7.4. 1) збігається; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) збігається; 7) збігається; 8) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

7.5. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) 1; 5) π; 6) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) $-\frac{2}{e}$;

9) $\frac{10}{7}$; 10) розбігається; 11) розбігається; 12) розбігається.

7.6. 1) розбігається; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}(3 + 2\sqrt{3})$.

7.7. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

7.9 1) $k > 1$; 2) $k > 1$. **7.10.** 1) 10^4 м; 2) 2 м.

8. Подвійний інтеграл у декартових координатах

Навчальні задачі

8.1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xy dy$, написати рівняння ліній, що обмежують область інтегрування відповідного подвійного інтеграла.

Розв'язання. [10.7.4.]

Область обмежена відрізками прямих $x = 1, x = 3$ і лініями $y = 0$, $y = x$.

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xy dy = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^x xy dy \right) dx \overset{①}{=} \int\limits_1^3 x \frac{y^2}{2}\bigg|_0^x dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{8}\bigg|_1^3 = 10.$$

Коментар. ① Повторні інтеграли обчислюють справа на ліво (із середини назовні). Інтегруючи за змінною y, змінну x вважають сталою.

8.2.1. Обчислити $\iint\limits_D dxdy$, де область D обмежена лініями $y^2 = x,\ x = 1.$

Розв'язання. [10.7.4.]

[*Зображуємо область інтегрування і визначаємо у напрямі якої осі область інтегрування є правильною.***]**

Область інтегрування D є правильною в напрямі осі Ox: ①
фігура проектується у відрізок $-1 \le y \le 1$

і обмежена: зліва параболою $x = y^2$, справа прямою $x = 1$.

$$\iint\limits_D dxdy \overset{[10.7.4.1]}{=} \left| \begin{array}{l} -1 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = 1, \\ \text{зліва } x = y^2 \end{array} \right| = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

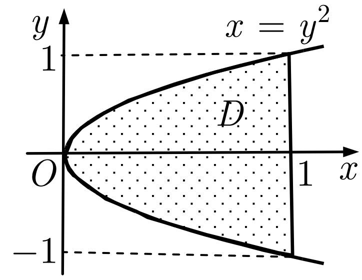


Рис. до зад. 8.2.1

Коментар. ① Область D правильна також і в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$;

обмежена: знизу параболою $y = -\sqrt{x}$, зверху параболою $y = \sqrt{x}$ (рівняння кривої $y^2 = x$ треба розв'язати щодо y). Отже, інтегрувати можна і в напрямі осі Oy:

$$\iint\limits_D dxdy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = \sqrt{x}, \\ \text{знизу } y = -\sqrt{x} \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{4}{3}.$$

8.2.2. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, де область D обмежена лініями: $xy = 2,\ y = \frac{1}{2}x,$

$y = 2x\ \ (x \ge 0).$

Розв'язання. [10.7.4.]

Оскільки область інтегрування D не є правильною, то зображуємо її як суму правильних областей:

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Область D_1 є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$

і обмежена: знизу прямою $y = \dfrac{x}{2}$, зверху прямою $y = 2x$.

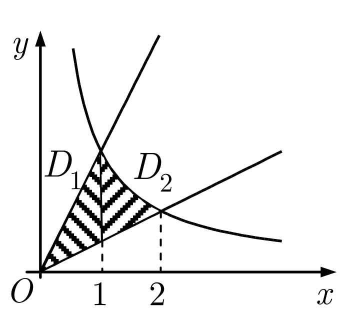


Рис. до зад. 8.2.2

Область D_2 є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $1 \le x \le 2$
і обмежена: знизу прямою $y = \dfrac{x}{2}$, зверху гіперболою $y = \dfrac{2}{x}$.
За властивістю адитивності

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} x dx dy = \iint\limits_{D_1} x dx dy + \iint\limits_{D_2} x dx dy \overset{[10.7.4.2]}{=}$$

$$= \int\limits_0^1 x dx \int\limits_{x/2}^{2x} dy + \int\limits_1^2 x dx \int\limits_{x/2}^{2/x} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xy \Big|_{x/2}^{2x} dx + \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

8.3.1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy$, де область D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;1)$.

Розв'язання. [10.7.4.] ①

1. Область інтегрування є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$;
обмежена знизу прямою $y = x$, зверху прямою $y = 1$.

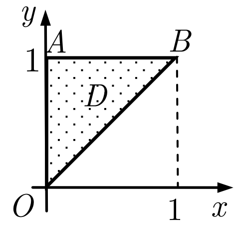


Рис. до зад. 8.3.1

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy \overset{[10.7.4.1]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = 1, \\ \text{знизу } y = x \end{array} \right| = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 e^{-y^2} dy.$$

Інтеграл $\int e^{-y^2} dy$ не виражається через елементарні функції.

2. Область інтегрування є правильною в напрямі осі Ox:
проектується у відрізок $0 \le y \le 1$,
обмежена: зліва прямою $x = 0$, справа прямою $x = y$.

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = y, \\ \text{зліва } x = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 e^{-y^2} dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2} y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{-y^2} d(y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Вибір напряму інтегрування залежить не тільки від форми області, а й від підінтегральної функції.

8.3.2 Обчислити інтеграл $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$, де область D обмежена прямими

$$y = \ln 3,\ y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання. [10.7.4.2.]

Область інтегрування D є правильною в напрямах обох осей. Інтегруватимемо у напрямі осі Ox. ①

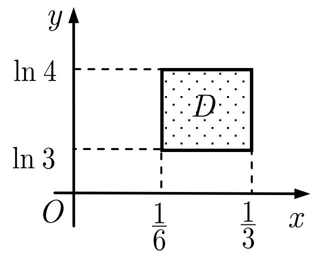


Рис. до зад. 8.3.2

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} \ln 3 \le y \le \ln 4; \\ \text{справа } x = \dfrac{1}{3}, \\ \text{зліва } x = \dfrac{1}{6} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx = 12\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} y\frac{e^{6xy}}{6y}\Bigg|_{1/6}^{1/3} dy =$$

$$= 2\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4}(e^{2y} - e^y)dy = 2\left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4} = 2\left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 4 + 3\right) = 5.$$

Коментар. ① Інтегрування вздовж осі Oy призвело б до інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі.

8.4. Змінити порядок інтегрування

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. [10.7.4.]

[*Записуємо рівняння ліній, які обмежують область D і відновлюємо область інтегрування.***]**

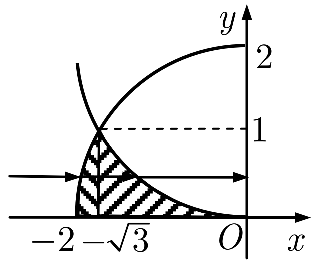


Рис. до зад. 8.4

З першого доданку:

$$-2 \le x \le -\sqrt{3}; y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}.$$

З другого доданку:

$$-\sqrt{3} \le x \le 0; y = 0, y = 2 - \sqrt{4 - x^2}.$$

Точка $(-\sqrt{3};1)$ є точкою перетину кіл.

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Область D є правильною в напрямі осі Ox і проектується у відрізок $0 \le y \le 1$.

[*Розв'язуємо рівняння кіл щодо x.***]**

$$y = \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4 - y^2};$$

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4y - y^2}.$$

Область D обмежена:

зліва дугою кола $x = -\sqrt{4 - y^2}$, справа дугою кола $x = -\sqrt{4y - y^2}$.

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x, y)dx.$$

Коментар. ① Корені беремо зі знаком мінус тому, що всі точки області D мають недодатні абсциси.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

8.5. Обчисліть повторний інтеграл і відновіть область інтегрування:

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^1 (x + 3y^2)dy$; 2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)dy$;

3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} xydy$; 4) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$;

5) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho$; 6) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi d\rho$.

8.6. 1. За якою змінною взято зовнішній інтеграл у повторному інтегралі $\int\limits_1^2 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y)dydx$ і яка область інтегрування?

2. Після витирання з дошки залишилось не витертим $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$. Який це інтеграл: внутрішній чи зовнішній? За якою змінною він узятий? Що можна зауважити про область інтегрування?

8.7. Розставте межі інтегрування в $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, якщо область:

1) D — прямокутник з вершинами $O(0;0), A(2;0), B(2;1), C(0;1)$;
2) D — прямокутник з вершинами $A(-3;0), B(-3;2), C(0;2), O(0;0)$;
3) D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(1;1)$;
4) D — трикутник зі сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 5$;

5) D — паралелограм з вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;7), D(1;5)$;

6) D — паралелограм зі сторонами $y = x, y = x - 4, y = 0, y = 2$;

7) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, x + y = 2$;

8) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, y = 4$;

9) D — фігура, обмежена лініями $x = \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4y - y^2}, y = 2$;

10) D — фігура, обмежена лініями $x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x$.

8.8. Змініть порядок інтегрування:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{x/2} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{(x+2)/2} f(x,y)dy + \int\limits_2^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{R/\sqrt{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$;

6) $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^0 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

8.9. Обчисліть подвійний інтеграл:

1) $\iint\limits_D xydxdy, D$ — трикутник з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;0)$;

2) $\iint\limits_D ydxdy, D$ — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;2), B(2;1)$;

3) $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy,\ D$ — область, обмежена параболами $y = x^2,\ y^2 = x$;

4) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ D$ — область, обмежена прямими $x = 2, y = x$ і гіперболою $xy = 1$;

5) $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy$, D — область, обмежена лініями $x=y^2, x=0, y=1$;

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}}$, D — область, обмежена лініями $x=0, y^2=a^2-ax$;

7) $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$, D — область, обмежена лініями $y=0, y=x, x=1$;

8) $\iint\limits_D \sin(x^3-1)dxdy$, D — область, обмежена лініями $y=0, y=x^2$, $x=1$.

8.10. Оцініть:

1) $I_1=\iint\limits_D (x+y+1)dxdy$, де D — круг $x^2+y^2\le 4$;

2) $I_2=\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, де D — круг $x^2+y^2\le 2x$.

Відповіді

8.5. 1) 12; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{15}{4}$; 4) $\frac{9}{4}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{12}{5}$.

8.6. 1. За змінною x; область інтегрування обмежена лініями $y=-\sqrt{x}, y=x^3, x=1$, $x=2$. 2. Це внутрішній інтеграл узятий за змінною x. Область інтегрування правильна у напрямі осі Ox.

8.7. 1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-3}^0 f(x,y)dx=\int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_0^2 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_0^5 dx\int\limits_0^{5-x} f(x,y)dy=\int\limits_0^5 dy\int\limits_0^{5-y} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{y+4} f(x,y)dx$; 7) $\int\limits_{-2}^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$;

8) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{x^2}^4 f(x,y)dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$; 9) $\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$; 10) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{e^x} f(x,y)dy$.

8.8. 1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{3^x}^{4-x} f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{y^2+3}} f(x,y)dx$; 4) $\int\limits_0^{8/3} dy\int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$; 6) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx\int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

8.9. 1) $\dfrac{1}{24}$; 2) $\dfrac{3}{2}$; 3) $\dfrac{33}{140}$; 4) $\dfrac{9}{4}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 6) $4a$; 7) $\dfrac{e-1}{2}$; 8) $\dfrac{\cos 1 - 1}{3}$.

8.10. 1) $(-2\sqrt{2}+1)4\pi \le I_1 \le (2\sqrt{2}+1)4\pi$; 2) $-\dfrac{\pi}{2} \le I_2 \le 4\pi$.

9. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Навчальні задачі

9.1. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1, x = 0, y = 0$, виконати заміну змінних за формулами: $x = au\cos^4 v$, $y = bu\sin^4 v$.

Розв'язання. [10.7.5.1.]

Для взаємно однозначності вимагаймо, щоб $v \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Рівняння ліній перейдуть відповідно в рівняння:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \Rightarrow u = 1;$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ або } v = \frac{\pi}{2};$$

$$y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ або } v = 0.$$

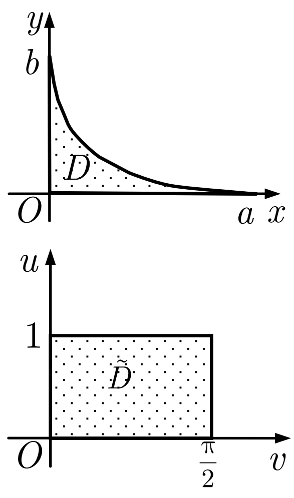


Рис. до зад. 9.1

[*Зображуємо стару і нову області інтегрування.*]

[*Обчислюємо якобіан переходу від змінних (x,y) до змінних (u,v).*]

$$J \overset{[10.7.5.1]}{=} \begin{vmatrix} a\cos^4 v & -4au\cos^3 v\sin v \\ b\sin^4 v & 4bu\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} =$$

$$= 4abu\sin^3 v\cos^5 v + 4abu\cos^3 v\sin^5 v =$$

$$= 4abu\sin^3 v\cos^3 v.$$

[*Заміняємо змінні в подвійному інтегралі.*]

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{[10.7.5.1]}{=} \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv =$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 v\cos^3 v\,dv \int\limits_0^1 f(au\cos^4 v, bu\sin^4 v)udu.$$

9.2.1. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, де область D обмежена колами $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$ і прямими $y=x, y=2x$.

Розв'язання. [10.7.5.2, 10.7.6.]

[*Побудуймо область D.***]**

$$x^2+y^2=4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4,$$

$$x^2+y^2=8x \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=16.$$

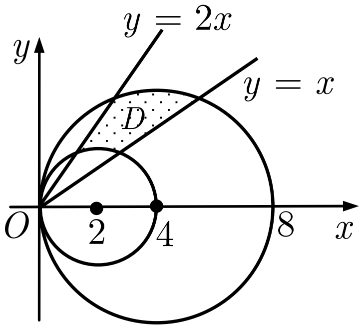


Рис. до зад. 9.2.1

[*Вибираємо систему координат, у якій обчислюватимемо інтеграл.* ① **]**

Інтеграл обчислимо в полярних координатах:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \quad x^2+y^2=\rho^2, \varphi\in(-\pi;\pi]. \\ \left|J\right|=\rho; \end{cases}$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в полярних координатах.***]**

$$x^2+y^2=4x;\ \ \rho^2=4\rho\cos\varphi;\ \ \rho=4\cos\varphi.$$

$$x^2+y^2=8x;\ \ \rho^2=8\rho\cos\varphi;\ \ \rho=8\cos\varphi.$$

$$y=x;\ \ \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi;\ \ \begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=1, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\end{cases}\ \ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$$y=2x;\ \ \rho\sin\varphi=2\rho\cos\varphi;\ \ \begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=2, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\end{cases}\ \ \varphi=\operatorname{arctg}2.$$

[*Записуємо подвійний інтеграл у полярних координатах.***]**

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint\limits_{\tilde D} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4} = \iint\limits_{\tilde D} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^3} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\operatorname{arctg}2, \\ 4\cos\varphi\le\rho\le 8\cos\varphi \end{matrix} \right| \overset{[10.7.6]}{=} \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} \frac{1}{\rho^2}\Bigg|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} d\varphi = \frac{3}{128}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{3}{128}\operatorname{tg}\varphi\Bigg|_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} = \frac{3}{128}.$$

Коментар. ① Змінюючи систему координат чи залишаючись у декартовій, зважаємо на таке:

1) правильна чи неправильна щодо якоїсь з осей область у декартових координатах (якщо неправильна, то на скільки правильних областей її треба розбити);
2) чи спрощує відповідним чином підібрана заміна змінних область інтегрування (скажімо, вона стає правильною) і підінтегральну функцію.
До **полярних** координат [10.1.1] доцільно переходити, якщо:
1) областю інтегрування є круг (кругове кільце) або круговий сектор;
2) підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ (у разі переходу до полярних координат $x^2 + y^2 = \rho^2$).

9.2.2. Обчислити $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dy.$

Розв'язання. [10.7.5.3]①

Переходимо до узагальненої полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ |J| = ab\rho; \end{cases} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2, \varphi \in (-\pi;\pi].$$

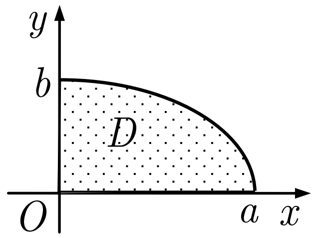


Рис. до зад. 9.2.2

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в узагальнених полярних координатах.***]**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ \rho^2 = 1;\ \rho = 1;$$

$$0 \le x \le a;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \iint\limits_D \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy \overset{[10.7.5.3]}{=}$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{9-\rho^2}\, ab\rho\, d\varphi d\rho = ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\rho d\rho \overset{②}{=}$$

$$= -\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\, d\left(9-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi ab}{6}\left(27 - 16\sqrt{2}\right).$$

Коментар. ① До **узагальнених полярних** координат [10.1.2] доцільно переходити, якщо:

1) область інтегрування обмежена еліпсами (еліпсом) $\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1;$

2) підінтегральна функція залежить від $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (за такого переходу $\left.\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\rho^2\right)$.

Оскільки область інтегрування D еліптичний сектор, то переходимо до узагальненої полярної системи координат.

② Такі повторні інтеграли (сталі межі інтегрування в обох інтегралах і підінтегральна функція кожного інтеграла залежить лише від однієї змінної) можна обчислювати незалежно.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

9.3. Розставте межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, перейшовши до полярних координат, якщо:

1) D — частина круга $x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$;

2) D — частина круга $x^2+y^2\le 9, x\le 0, y\ge 0$;

3) D — круг $x^2+y^2\le ax, a\ge 0$;

4) D — круг $x^2+y^2\le by, b\ge 0$;

5) D — область, обмежена колами $x^2+y^2=4y, x^2+y^2=8y$ і прямими $y=x, y=2x$;

6) D — область, обмежена колами $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x$ і прямими $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x$.

9.4.* 1. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $xy=2$, $xy=1, y=3x, y=4x$, замінити змінні за формулами: $xy=u, y=vx$.

2. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2=ay$, $x^2=by, y^2=px, y^2=qx$ $(0<a<b, 0<p<q)$, замінити змінні за формулами: $x^2=uy, y^2=vx$.

9.5. Обчисліть подвійні інтеграли, перейшовши до інших координат:

1) $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$; 2) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$;

3) $\iint\limits_D (h-2x-3y)dxdy, D$ — круг $x^2+y^2\le R^2$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, D$ — круг $x^2+y^2\le 16$;

5) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy,\quad D$ — частина кільця $x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2\le 4,$ $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}$;

6) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D$ — кільце $\dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2$;

7) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,\ D$ — круг $x^2+y^2\le Rx$;

8) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ D$ — круг $x^2+y^2\le Ry$;

9) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,\ D$ — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$;

10) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D$ — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$;

11) $\iint\limits_D (x^2+y^2)^4dxdy, D$ — круг $x^2+y^2=2Rx$;

12) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy, D$ — область, обмежена лініями $x^2+y^2=ax,$ $x^2+y^2=2ax, y=0\ (y>0)$.

13) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}}, D$ — область, обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

14) $\iint\limits_D \sqrt{16-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}dxdy, D$ — область, обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

Відповіді

9.3. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^3 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 4) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

5) $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.

9.4. 1. $\frac{1}{2}\int\limits_3^4 \frac{dv}{v}\int\limits_1^2 f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)du$. 2. $\frac{1}{3}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q f\left(\sqrt[3]{u^2v}, \sqrt[3]{uv^2}\right)dv$.

9.5. 1) $\frac{\pi}{4}\Big((1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big)$; 2) $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$; 3) $\pi R^2 h$; 4) 4π; 5) $\frac{\pi^2}{16}$; 6) $2\pi - \pi^2$; 7) $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$; 8) $\pi R - 2R$; 9) $\frac{a^3(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}}{18}$; 10) $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$; 11) $\frac{126}{5}\pi R^{10}$; 12) $\frac{45}{64}\pi a^4$; 13) 12π; 14) $4\pi(64 - 15\sqrt{15})$.

10. Застосування подвійного інтеграла

Навчальні задачі

10.1.1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geq 0)$.

Розв'язання. [10.8.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.***]**

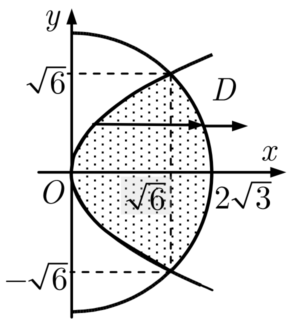


Рис. до зад. 10.1.1

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.8.1]}{=} \iint\limits_D dxdy.$$

Область D є правильною в напрямі осі Ox

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ x\sqrt{6} = y^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6}.$$

але $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, а отже $y_1 = -\sqrt{6}$, $y_2 = \sqrt{6}$.

Область D проектується на вісь Oy у відрізок $-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$,

і обмежена: зліва параболою $x = \frac{1}{\sqrt{6}}y^2$, справа дугою кола $x = \sqrt{12 - y^2}$.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}dy - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{6}} = \left| \begin{matrix} y = 2\sqrt{3}\sin t, \\ dy = 2\sqrt{3}\cos t dt. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \sqrt{6} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{12 - 12\sin^2 t} 2\sqrt{3}\cos t dt - 4 = 24\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 t dt - 4 =$$

$$= 12\int\limits_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t)dt - 4 = 12\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/4} - 4 = 3\pi + 2.$$

10.1.2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = \sqrt{3}y, x = 0$.

Розв'язання. [10.8.1.]

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.8.1]}{=} \iint\limits_D dxdy.$$

Область D обмежена колами

$$(y-4)^2 + x^2 = 16, (y-2)^2 + x^2 = 4,$$

і прямими $x = 0$, $x = \sqrt{3}y$.

Виходячи з форми області D, доцільно перейти до полярних координат [10.7.5.2]:

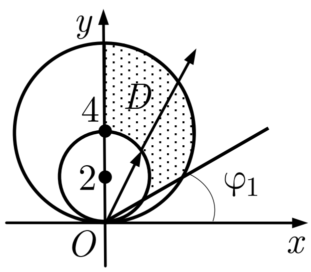


Рис. до зад. 10.1.2

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \varphi \in (-\pi; \pi]. \\ |J| = \rho; \end{cases}$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0; \ \rho^2 - 4\rho\sin\varphi = 0; \ \rho = 4\sin\varphi.$$

$$y^2 - 8y + x^2 = 0; \ \rho = 8\sin\varphi$$

$$\rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}}; \ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \in [0;\pi]; \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\rho\cos\varphi = 0; \cos\varphi = 0, \varphi \in [0;\pi]; \ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$S = \iint\limits_D dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint\limits_{\tilde{D}} \rho d\varphi d\rho = \left| \begin{matrix} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 4\sin\varphi \le \rho \le 8\sin\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = 24\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 12\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 - \cos 2\varphi\right) d\varphi = 12\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

10.2.1. Знайти масу пластинки D, яка обмежена лініями $2y = x^2$, $x + y = 4$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y) = 2$.

Розв'язання. [10.8.2.]

Масу пластинки D з густиною $\mu(x, y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.8.2]}{=} \iint\limits_D \mu(x, y) dxdy = \iint\limits_D 2dxdy.$$

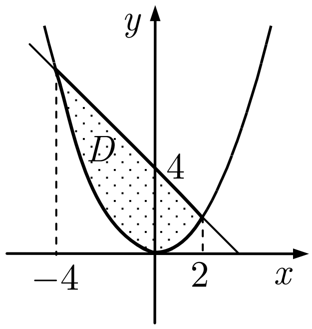


Рис. до зад. 10.2.1

Область D правильна в напрямі осі Oy.

Залишаємось у декартових координатах.

[*Щоб визначити межі інтегрування знайдемо абсциси точок перетину параболи з прямою.***]**

$$\begin{cases} 2y = x^2, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = -4, \\ x_2 = 2. \end{matrix} \right.$$

$$m = 2\iint\limits_D dxdy = \left| \begin{matrix} -4 \le x \le 2, \\ \text{зверху } y = 4 - x, \\ \text{знизу } y = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = 2\int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy =$$

$$= 2\int\limits_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = 36.$$

10.2.2. Знайти масу пластинки D, яку задано нерівностями $y \ge \dfrac{x}{4} \ge 0$, $1 \le \dfrac{x^2}{16} + y^2 \le 3$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y) = \dfrac{x}{y^5}$.

Розв'язання. [10.8.2.]

Масу пластинки D з густиною $\mu(x, y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.8.2]}{=} \iint_D \mu(x,y)dxdy = \iint_D \frac{x}{y^5}dxdy.$$

Виходячи з форми пластинки доцільно перейти до узагальнених полярних координат [10.7.3]:

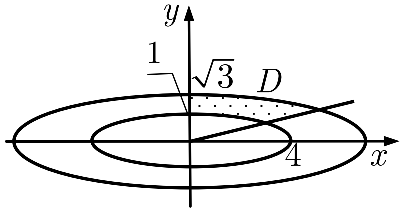


Рис. до зад. 10.2.2

$$\begin{cases} x = 4\rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ \left|J\right| = 4\rho. \end{cases}$$

$$1 \le \rho^2 \le 3;\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}.$$

$$4\rho\sin\varphi \ge 4\rho\cos\varphi \ge 0;\ \operatorname{tg}\varphi \ge 1;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$m = \iint_D \frac{x}{y^5}dxdy = \iint_{\tilde{D}} \frac{4\cos\varphi}{\rho^4\sin^5\varphi}4\rho d\rho d\varphi = 16\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}d\varphi\int_1^{\sqrt{3}}\frac{d\rho}{\rho^3} = 4.$$

10.3. Знайти координати центра маси однорідної матеріальної пластини, обмеженої кривими $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$.

Розв'язання. [10.8.4]

Пластина однорідна, тому $\mu(x, y) = \mu_0 = \text{const}$.

Пластина симетрична відносно осі Ox, тому $y_C = 0$.

Абсцису центра маси шукають за формулою

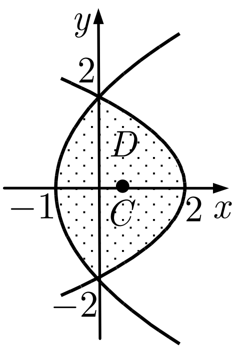


Рис. до зад. 10.3

$$x_C = \frac{M_y}{m},$$

де $M_y = \frac{1}{m}\iint_D \mu_0 xdxdy; \quad m = \iint_D \mu_0 dxdy.$

$$M_y = \iint_D x\mu_0 dxdy = \mu_0\int_{-2}^{2}dy\int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2}xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2\right)dy =$$

$$= \frac{3}{16}\mu_0\int_0^2\left(16 - 8y^2 + y^4\right)dy = \frac{3}{16}\mu_0\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{5}\mu_0.$$

$$m = \iint\limits_D \mu_0 dxdy = \mu_0 \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx = \mu_0 \int\limits_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}\left(4 - y^2\right) - \frac{1}{4}\left(y^2 - 4\right) \right) dy =$$

$$= 2\mu_0 \int\limits_{0}^{2} \left(3 - \frac{3}{4} y^2 \right) dy = 2 \left(3y - \frac{y^3}{4} \right) \Bigg|_0^2 = 8\mu_0.$$

$$x_c = \frac{16\mu_0}{5} \cdot \frac{1}{8\mu_0} = \frac{2}{5}.$$

Центр маси даної пластини міститься в точці $C\left(\frac{2}{5}; 0\right)$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

10.4. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями:

1) $y^2 = 2x, y = x$; 2) $y = x^2, y = 2x - x^2$;

3) $x = 0, y = x, y = 2 - x^2\, (x \geq 0)$; 4) $x^2 + y^2 = 4, y^2 = 4 - 4x, x < 1$;

5) $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$;

6) $x^2 + y^2 = 3y, x^2 + y^2 = 5y, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$;

7) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, x^2 + y^2 - \sqrt{2}x = 0$;

8) $\rho = a(1 + \cos\varphi), \rho = a\cos\varphi\, (a > 0)$;

9) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ (лемніската);

10) $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 = 4xy$ (лемніската);

11) $x^2 = 3y, x^2 = 4y, y^2 = x, y^2 = 2x$;

12) $y^2 = ax, y^2 = bx, xy = \alpha, xy = \beta\ (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$.

10.5. Знайдіть масу пластини D з густиною $\mu(x, y)$:

1) $D : x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x \leq 0,\ y \geq 0, \mu(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$;

2) $D : x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x \geq 0,\ y \geq 0, \mu(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $D : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\ (x \geq 0),\ \mu(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $D : (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)\ (x \geq 0, y \geq 0),\ \mu(x, y) = x^2 + y^2$;

5) $D: x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = 2ax, y \geq 0, \mu(x,y) = x^2 + y^2$;

6) $D: 1 \leq \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 2, x \geq 0, x \leq \dfrac{4}{3}y, \mu(x,y) = \dfrac{27x}{y^5}$.

10.6. Для пластинки D з густиною $\mu(x,y)$ знайдіть: а) масу; б) координати центру мас; в) моменти інерції щодо осей Ox та Oy, якщо:

1) $D: x^2 + y^2 \leq 2ax, \mu(x,y) = \mu_0\sqrt{x^2 + y^2}$;

2) $D: x + y \geq a, a \geq x \geq 0, a \geq y \geq 0, \mu(x,y) = x$.

Відповіді

10.4. 1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{7}{6}$; 4) $\dfrac{6\pi + 8}{3}$; 5) $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3}{2}$; 6) $\dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$; 7) $\dfrac{\pi - 1}{2}$; 8) $\dfrac{5}{4}\pi a^2$; 9) 6; 10) 72; 11) $\dfrac{1}{3}$; 12) $\dfrac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\dfrac{b}{a}$.

10.5. 1) 4; 2) 4; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}a^4$; 4) $\dfrac{81\pi}{32}$; 5) $\dfrac{45}{64}\pi a^4$; 6) 1.

10.6. 1) а) $\dfrac{32}{9}a^3\mu_0$; б) $x_C = \dfrac{6}{5}a, y_C = 0$; в) $I_{xx} = \dfrac{512}{525}a^5\mu_0, I_{yy} = \dfrac{1024}{175}a^5\mu_0$;

2) а) $\dfrac{a^3}{3}$; б) $x_C = \dfrac{3a}{4}, y_C = \dfrac{5a}{8}$; в) $I_{xx} = \dfrac{3a^5}{20}, I_{yy} = \dfrac{a^5}{5}$.

11. Потрійний інтеграл

Навчальні задачі

11.1. Обчислити $I = \iiint\limits_G z\,dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями:

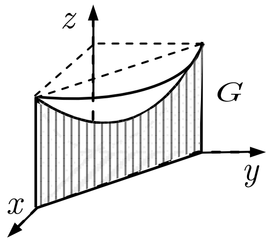
$z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x, y, z = 0.$

Розв'язання. [10.9.4.]

Область інтегрування G є циліндричною в напрямі осі Oz. Вона обмежена: знизу площиною $z = 0$, зверху — параболоїдом $z = x^2 + y^2$. Проектуємо тіло на площину Oxy.

$$\iiint\limits_G z\,dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \text{зверху } z = x^2 + y^2, \\ \text{знизу } z = 0 \end{array} \right| = \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_0^{x^2+y^2} z\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{Oxy}} \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{x^2+y^2} dxdy =$$



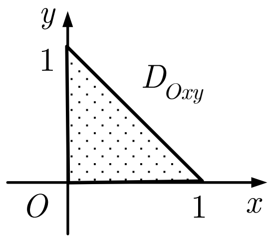


Рис. до зад. 11.1

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2 + y^2)^2 dxdy \overset{①}{=} \begin{vmatrix} 0 \le x \le 1, \\ \text{зверху } y = 1 - x, \\ \text{знизу } y = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4 y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4(1-x) + \frac{2}{3}x^2(1-x)^3 + \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = \frac{7}{180}.$$

Коментар. ① Оскільки область D_{Oxy} є трикутником, залишаємось у декартовій системі координат. Вибираємо інтегрування вздовж осі Oy (область правильна в обох напрямах.)

11.2. Обчислити $\displaystyle\iiint\limits_{V: x^2+y^2+z^2 \le z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz.$

Розв'язання. [10.9.8.]

Оскільки область є кулею, обмеженою сферою

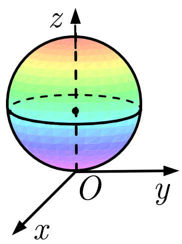


Рис. до зад. 11.2

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

то інтеграл зручніше обчислювати у сферичній системі координат [10.1.5]:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \\ \left|J\right| = r^2\sin\theta; \end{cases} \quad \begin{matrix} r \ge 0, \\ \varphi \in (-\pi; \pi], \theta \in [0; \pi], \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \end{matrix}$$

[*Записуємо рівняння поверхонь у сферичній системі координат.*]

$$x^2 + y^2 + z^2 = z;\ r^2 = r\cos\theta;\ r = \cos\theta.$$

$$r = \cos\theta \ge 0;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$-\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz \overset{[10.9.8]}{=} \iiint\limits_{\tilde{G}} r^3 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 d\rho = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

Коментар. ① Від декартових до сферичних координат [10.1.5] у потрійних інтегралів доцільно переходити для областей, обмежених сферами, конусами та площинами, які проходять через вісь Oz.

11.3.1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}$, $z = 0, x + z = 2$.

Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) \overset{[10.10.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

Тіло G① — циліндричне в напрямі осі Oz; на площину Oxy воно проектується в область D_{Oxy}, яка є правильною у напрямі осі Oy.

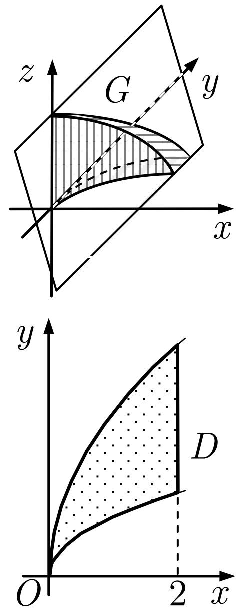


Рис. до зад. 11.3.1

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \left|\begin{array}{c} 0 \le x \le 2, \\ \sqrt{2x} \le y \le 16\sqrt{2x}, \\ 0 \le z \le 2 - x \end{array}\right| \overset{[10.9.5]}{=}$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} dy \int\limits_0^{2-x} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} (2-x)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (2-x)15\sqrt{2x}dx = 15\sqrt{2}\left(2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 15\sqrt{2}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right) = 32.$$

Коментар. ① Тіло G обмежено поверхнями: параболічними циліндрами $y = 16\sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x}$, твірні яких паралельні осі Oz; площиною $Oxy : z = 0$, площиною $x + z = 2$, яка паралельна осі Oy.

11.3.2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2, z = 2$.

Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

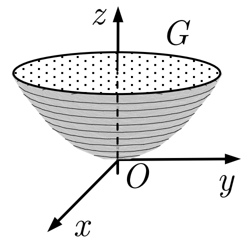
$$V(G) \overset{[10.10.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

Тіло $G^{①}$ циліндричне в напрямі осі Oz і проектується на площину Oxy в область D_{Oxy}, обмежену колом:

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2} dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{Oxy}} \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy.$$



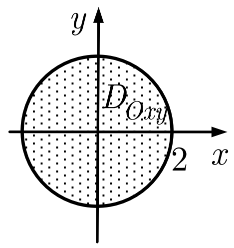


Рис. до зад. 11.3.2

У подвійному інтегралі переходимо до полярних координат [10.1.1]:

$$x^2 + y^2 = 4; \ \ \rho^2 = 4; \ \rho = 2;$$
$$0 \le \rho \le 2; \ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$V \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint\limits_{\Delta} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 4\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежено поверхнями: параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і площиною $z - 2 = 0$.

11.3.3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4x, z = x$, $z = 2x$.

Розв'язання. [10.10.1.]^{①}

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Тіло циліндричне в напрямі осі Oz. Проекція D тіла на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \le 4x$.

Обчислимо інтеграл у циліндричній системі координат $[10.1.3]^{②}$:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \\ y = \rho\sin\varphi, & \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \\ z = z, & \rho \ge 0, \varphi \in (-\pi; \pi] \\ \left|J\right| = \rho; & \end{cases}$$

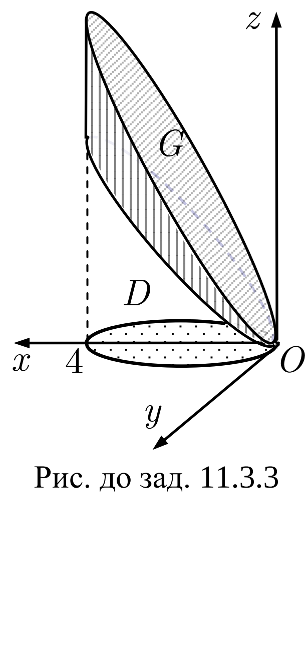


Рис. до зад. 11.3.3

[*Записуємо рівняння поверхонь у циліндричних координатах.***]**

$$x^2 + y^2 = 4x;\ \ \rho^2 = 4\rho\cos\varphi;\ \ \rho = 4\cos\varphi.$$

$$z = x;\ \ z = \rho\cos\varphi;$$

$$z = 2x;\ z = 2\rho\cos\varphi;$$

$$\rho(\varphi) = 4\cos\varphi \geq 0;\ \ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.9.6]}{=} \iiint\limits_{\tilde{G}} \rho d\varphi d\rho dz =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi} dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho z\,\Big|_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi}\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^2\cos\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{64}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi \overset{[10.4.4]}{=} \frac{128}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi \overset{[10.4.7]}{=} \frac{128}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 8\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежене коловим циліндром $x^2 + y^2 = 4x$ і площинами $z = x$ і $z = 2x$.
② Від декартових до циліндричних координат [10.1.3] у потрійних інтегралах доцільно переходити для областей з осьовою симетрією.

11.3.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2Rz$.

Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$

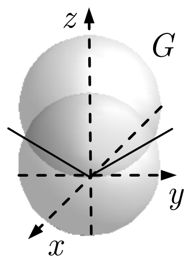


Рис. до зад. 11.3.4

Тіло G обмежено сферами:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$$

і міститься ззовні сфери з центром у точці O.

Переходимо до сферичних координат [10.1.5]:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ r^2 = R^2;\ r = R;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz;\ \ r^2 = 2Rr\cos\theta;\ \ r = 2R\cos\theta.$$

$$\begin{cases} r = R, \\ r = 2R\cos\theta; \end{cases} \cos\theta = \frac{1}{2};\ \ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.9.8]}{=} \iiint\limits_{\tilde G} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_R^{2R\cos\theta} r^2 dr = 2\pi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_R^{2R\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \int\limits_0^{\pi/3} (8\cos^3\theta - 1)\sin\theta d\theta = \frac{11\pi R^3}{12}.$$

11.4. Знайти масу тіла G, заданого нерівностями $\frac{z^2}{64} \le x^2 + y^2 \le 4,\ y, z \ge 0,$ з густиною розподілу маси $\mu(x, y, z) = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$

Розв'язання. [10.10.2.]

Масу тіла G з густиною $\mu(x, y, z)$ знаходять за формулою

$$m(G) \overset{[10.10.2]}{=} \iiint\limits_G \mu(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_G \frac{5(x^2 + y^2)}{4} dxdydz.$$

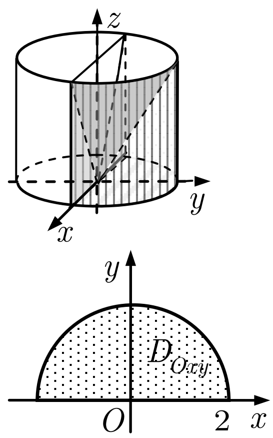


Рис. до зад. 11.4

Тіло G① — циліндричне в напрямі осі Oz.
Обмежене: знизу площиною $z = 0$, зверху — конусом $z = 8\sqrt{x^2 + y^2}$; і проектується на площину Oxy у півкруг.

$$m(G) = \iiint\limits_G \frac{5(x^2 + y^2)}{4} dxdydz \overset{[10.9.4]}{=}$$

$$= \frac{5}{4} \iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2 + y^2) dxdy \int\limits_0^{8\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$

$$= 10 \iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2 + y^2)^{3/2} dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} 10 \iint\limits_{\Delta} \rho^4 d\varphi d\rho =$$

$$= 10 \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho = 10\varphi \,|_0^{\pi} \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^2 = 10\pi \cdot \frac{32}{5} = 64\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежують поверхні: конус $z^2 = 64(x^2 + y^2)$ $(z \ge 0)$; циліндр $x^2 + y^2 = 4$ і площини Oxz $(y = 0)$ та Oxy $(z = 0)$.

11.5. Знайти координати центра мас тіла G, заданого нерівностями $\dfrac{x}{6} \le y^2 + z^2 \le 3, x \ge 0,$ з густиною розподілу маси $\mu(x,y,z) = \mu_0$.

Розв'язання. [10.10.4.]

Оскільки вісь Ox є віссю симетрії тіла, то

$$y_C = z_C = 0.$$

Абсцису x_C центра мас тіла знаходять за формулою

$$x_c \overset{[10.10.4]}{=} \frac{M_{Oyz}}{m},$$

де

$$M_{Oyz} \overset{[10.10.3]}{=} \iiint\limits_G x\mu(x,y,z)dxdydz;$$

$$m \overset{[10.10.2]}{=} \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz.$$

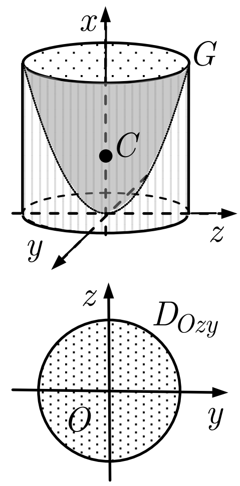


Рис. до зад. 11.5

Тіло циліндричне в напрямі осі Ox і проектується на площину Oyz у круг $y^2 + z^2 \le 3$.

$$m(G) = \iiint\limits_G \mu_0 dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} dx =$$

$$= 6\mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} (y^2 + z^2)dydz \overset{[10.7.5.2]}{=} 6\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{Oyz}} \rho^3 d\varphi d\rho =$$

$$= 6\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 6\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{9}{4} = 27\pi\mu_0.$$

$$M_{Oyz} = \iiint\limits_V \mu_0 xdxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} xdx =$$

$$= 18\mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} (y^2 + z^2)^2 dydz \overset{[10.7.5.2]}{=} 18\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{Oyz}} \rho^5 d\varphi d\rho =$$

$$= 18\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^5 d\rho = 18\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{27}{6} = 162\pi\mu_0.$$

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m} = \frac{162\pi\mu_0}{27\pi\mu_0} = 6.$$

Центр мас $C(6;0;0)$.

Коментар. ① Тіло G обмежене поверхнями: параболоїдом обертання $x = 6(y^2 + z^2)$, коловим циліндром $y^2 + z^2 = 3$, твірні якого паралельні осі Ox, площиною Oyz.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

11.6. Обчисліть потрійний інтеграл:

1) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, G — область, обмежена площинами $x = 0$, $y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

2) $\iiint\limits_G (x+z)dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x + y = 1$, $x - y = 1, x + z = 1, z = 0, x = 0$;

3) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+z^2}dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $y = x^2 + z^2, y = 1$;

4) $\iiint\limits_G xydxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0, z = 1, x \geq 0, y \geq 0$;

5) $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz, G : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$;

6) $\iiint\limits_G \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, $G : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;

7) $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, G — область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

8) $\iiint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}}dxdydz$, G — область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

11.7. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x = 4, y = 4, z = x^2 + y^2 + 1, x = 0,\ y = 0, z = 0$;

2) $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$;

3) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$;

4) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2;$

5) $az = x^2 + y^2, 2az = a^2 - x^2 - y^2;$

6) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2, az = x^2 + y^2;$

7) $x^2 + y^2 = 2az, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2;$

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 - y^2;$

9) $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 - z^2 = -a^2;$

10) $2(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 - z^2 = -a^2;$

11) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le 60,\ z = 1;$

12) $z = 0, z = ae^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 = R^2;$

13) $z = 0, x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2;$

14) $x^2 + y^2 = 2Rx, z = x^2 + y^2, z = 0;$

15) $x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y, z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2};$

16) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le ax, z \ge 0;$

17) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le z^2;$

18) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \le z^2;$

19) $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}, y \ge 0, y \ge -\sqrt{3}x;$

20) $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}, y \le 0, y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

21) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$

22) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} \le \dfrac{z^2}{9}.$

11.8. 1. Знайдіть масу сферичного шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, якщо густина в кожній його точці обернено пропорційна віддалі точки від початку координат.

2. Знайдіть масу циліндра з радіусом R та висотою H, якщо густина пропорційна висоті та дорівнює 1 на нижній основі.

3. Знайдіть масу тіла, обмеженого еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, з густиною $\mu(x, y, z) = k\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right).$

4. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(y\ge 0)$, $y^2\ge x^2+z^2$, з густиною $\mu(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$.

5. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $z=h$ та $x^2+y^2=z^2$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті цієї точки.

6. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $z=h$ та $x^2+y^2=z^2$, якщо густина в кожній точці дорівнює $\mu_0 z^2$.

11.9. Знайдіть координати центра мас тіла з густиною μ:

1) $x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0,\ \mu=\dfrac{\mu_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2) $1\le x^2+y^2+z^2\le 4, y\ge 0,\ \mu=\mu_0(x^2+y^2+z^2)$;

3) $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h, \mu(x,y,z)=\mu_0 z^2$;

4) $x^2+y^2\le z\le h, \mu(x,y,z)=\mu_0\sqrt{h-z}$;

5) $z=\dfrac{y^2}{2}, x=0, y=0, z=0, 2x+3y-12=0, \mu(x,y,z)=1$;

6) $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, z=0, x+z=6, \mu(x,y,z)=1$.

11.10. Знайдіть моменти інерції щодо осі Oz однорідного $(\mu=1)$ тіла:

1) $x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le H$; 2) $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$.

Відповіді

11.6. 1) $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5}{16}$; 2) $\dfrac{5}{12}$; 3) $\dfrac{4\pi}{15}$; 4) $\dfrac{1}{8}$; 5) $\dfrac{31\pi}{10}$; 6) $\dfrac{\pi R^3}{6}$; 7) $\dfrac{4}{5}\pi abc$; 8) $\dfrac{3\pi^2}{2}$.

11.7. 1) $\dfrac{560}{3}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$; 4) $\dfrac{88}{105}$; 5) $\dfrac{\pi a^3}{12}$; 6) $\dfrac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 7) $\dfrac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}\pm 5)$; 8) $\dfrac{32}{3}\pi$; 9) $\dfrac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$; 10) $\dfrac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$; 11) 276π; 12) $\pi a(1-e^{-R^2})$; 13) $\dfrac{32}{9}a^3$; 14) $\dfrac{3\pi R^4}{2}$; 15) 28; 16) $\dfrac{a^3}{9}(3\pi-4)$; 17) $\dfrac{2\pi a^3}{3}(2-\sqrt{2})$; 18) πa^3; 19) 337π; 20) 52π; 21) $\dfrac{4\pi abc}{3}$; 22) $4\pi(2-\sqrt{2})$.

11.8. 1) $6k\pi R^2$; 2) $\dfrac{\pi R^2 H}{2}(H+2)$; 3) $\dfrac{4}{5}k\pi abc$; 4) $\dfrac{k\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$; 5) $\dfrac{\pi k h^4}{4}$; 6) $\dfrac{\pi\mu_0 h^5}{5}$.

11.9. 1) $\left(\dfrac{8R}{3\pi^2};0;0\right)$; 2) $\left(0;\dfrac{105}{124};0\right)$; 3) $\left(0;0;\dfrac{5h}{6}\right)$; 4) $\left(0;0;\dfrac{4h}{7}\right)$; 5) $\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5};\dfrac{8}{5}\right)$; 6) $\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{15\sqrt{6}}{16};\dfrac{12}{7}\right)$. **11.10.** 1) $\dfrac{\pi}{2}HR^4$; 2) $\dfrac{4\pi R^5}{15}$.

12. Криволінійний інтеграл 1-го роду

Навчальні задачі

12.1.1. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl$, де L — відрізок прямої AB, між точками $A(1;1;1)$ та $B(3;0;3)$.

Розв'язання. [10.11.5.]

Запишімо параметричні рівняння прямої $AB^{①}$:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t+1, \\ z=2t+1. \end{cases}$$

Відрізку AB прямої відповідає відрізок $t\in[0;1]$.

[*Записуємо формулу для диференціала дуги і обчислюємо його.***]**

$$dl \overset{[10.11.5]}{=} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dy.$$

$$x_t'=2, y_t'=-1, z_t'=2;$$

$$dl=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3dt.$$

[*Обчислюємо інтеграл.***]**

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl \overset{[10.11.5]}{=} 3\int\limits_0^1((2t+1)^2+(1-t)^2+(2t+1)^2)dt=$$

$$=3\int\limits_0^1(9t^2+6t+3)dt=27.$$

Коментар. ① Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

12.1.2. Обчислити $\int\limits_L ydl$, де $L: y=x^3, 0\le x\le 1$.

Розв'язання. [10.11.7.]

$$dl \overset{[10.11.7]}{=} \sqrt{1+y_x'^2}dx;$$

$$y_x'=3x^2,\ dl=\sqrt{1+9x^4}dx.$$

$$\int\limits_L ydl \overset{[10.11.7]}{=} \int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx = \frac{1}{36}\int\limits_0^1 \sqrt{1+9x^4}d(1+9x^4) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}\left(1+9x^4\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

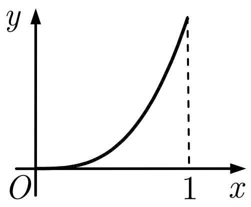


Рис. до зад. 12.1.2

12.1.3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де $L:\rho = a(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\pi$.

Розв'язання. [10.11.8.] ①

$$dl \overset{[10.11.8]}{=} \sqrt{\rho_\varphi'^2+\rho^2}d\varphi.$$

$$\rho_\varphi' = -a\sin\varphi;$$

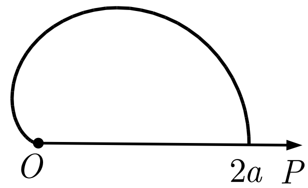


Рис. до зад. 12.1.3

$$dl \overset{[10.11.8]}{=} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= a\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl \overset{[10.11.8]}{=} \int\limits_0^\pi a(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \overset{[10.4.7]}{=} 8a^2\frac{2}{1\cdot 3} = \frac{16}{3}a^2.$$

Коментар. ① Крива $\rho = a(1+\cos\varphi), -\pi\le\varphi\le\pi$, є кардіоїдою.

12.2.1. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$.

Розв'язання. [10.11.9.]

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l \overset{[10.11.9]}{=} \int\limits_L dl.$$

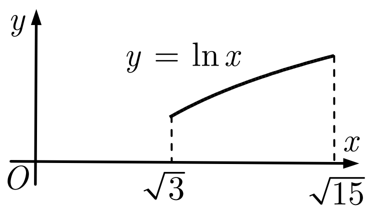


Рис. до зад. 12.2.1

$$dl \overset{[10.11.7]}{=} \sqrt{1+\left(\left(\ln x\right)'\right)^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx.$$

$$l = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx \overset{①}{=} \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-1}\left(1+x^2\right)^{1/2}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} m=-1, n=2 & 1+x^2 = t^2 \\ p = \dfrac{1}{2} & d(1+x^2) = dt^2 \\ \frac{m+1}{n} = 0\in\mathbb{Z} & xdx = tdt \end{array}\right| = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-2}\left(1+x^2\right)^{1/2}xdx =$$

$$=\int\limits_{2}^{4}\frac{t}{t^2-1}tdt=\int\limits_{2}^{4}\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int\limits_{2}^{4}dt+\int\limits_{2}^{4}\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^4=\left(4-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)\right)=2+\ln\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Коментар. ① Скористаємось теоремою Чебишова.

12.2.2. Знайти довжину дуги кривої $\rho=3e^{3\varphi/4},-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

Розв'язання. [10.11.9.] ①

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l(L)=\int\limits_{L}dl.$$

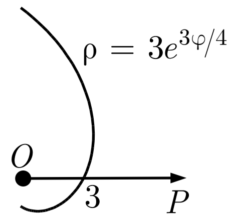


Рис. до зад. 12.2.2

$$dl\overset{[10.11.8]}{=}\sqrt{\frac{81}{16}e^{3\varphi/2}+9e^{3\varphi/2}}d\varphi=\frac{15}{4}e^{3\varphi/4}d\varphi.$$

$$l=\frac{15}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{3\varphi/4}d\varphi=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{3\varphi/4}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=5\left(e^{3\pi/8}-e^{-3\pi/8}\right)\overset{②}{=}$$

$$=10\cdot\frac{e^{3\pi/8}-e^{-3\pi/8}}{2}=10\,\mathrm{sh}\frac{3\pi}{8}.$$

Коментар. ① Крива $\rho=3e^{3\varphi/4}$ є логарифмічною спіраллю.

② $\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}.$

12.3. Знайти масу, розподілену з густиною $\mu=2z-\sqrt{x^2+y^2}$ уздовж кривої $L\colon x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0;2\pi]$.

Розв'язання. [10.11.10.] ①

Масу кривої L з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(L)\overset{[10.11.10]}{=}\int\limits_{L}\mu(x,y,z)dl=\int\limits_{L}(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl.$$

$$dl\overset{[10.11.6]}{=}\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=\sqrt{2+t^2}dt.$$

$$m(L) = \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\right)\sqrt{2+t^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}d\left(2+t^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(2+4\pi^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right).$$

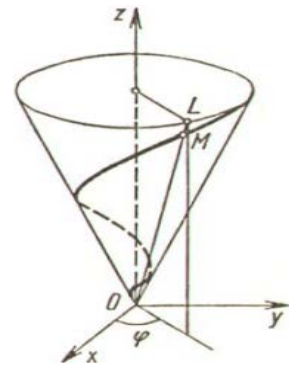


Рис. до зад. 12.3

Коментар. ① Крива L є конічною гвинтовою лінією.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

12.4. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, де L — відрізок прямої $y = x+2$, який з'єднує точки $A(2;4)$ та $B(1;3)$;

2) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L — відрізок прямої $y = \frac{x}{2} - 2$, який з'єднує точки $A(0;-2)$ та $B(4;0)$;

3) $\int\limits_L (2x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $A(1;0), B(0;4)$, $O(0;0)$;

4) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $O(0;0), A(1;0)$, $B(0;1)$;

5) $\int\limits_L xdl$, де L — дуга параболи $y = x^2$ між точками $A(2;4)$ та $B(1;1)$;

6) $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}dl$, де L — дуга гіперболи $xy = 1$ між точками $A(1;1)$ та $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

7) $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, де L — дуга синусоїди $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$;

8) $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, де L — дуга косинусоїди $y = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

9) $\int\limits_L xy^2 dl$, де L — дуга кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка лежить у 1-й чверті;

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L — дуга розгортки кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

11) $\int\limits_L \sqrt{2y} dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

12) $\int\limits_L y^2 dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

13) $\int\limits_L xy dl$, де L — частина еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у 1-й чверті;

14) $\int\limits_L x^2 y dl$, де L — дуга астроїди $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

15) $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L — перший виток циліндричної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t,\ z = bt$;

16) $\int\limits_L z dl$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t,\ z = t$;

17) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L — верхня половина кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

18) $\int\limits_L (x - y) dl$, де L — коло $x^2 + y^2 = ax$;

19) $\int\limits_L (x + y) dl$, де L — права частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

20) $\int\limits_L \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dl$, де L — верхня частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$;

21) $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, де L — дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ між точками $A(0;a)$ до точки $O(-\infty;0)$;

22) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}dl$, де L — дуга спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ $(a>0)$ між точками $A(0;0)$ та $B(a;a^2)$;

23) $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}dl$, де L — коло $x^2+y^2+z^2=a^2, x=y$;

24) $\int\limits_L xyzdl$, де L — чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, яка лежить у 1-му октанті.

12.5. Знайдіть довжину кривої:

1) $y=\sqrt{x}$ від точки $x=0$ до точки $x=1$;

2) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ від точки $x=0$ до точки $x=a$;

3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

4) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi; \end{cases}$

5) $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$;

6) $\rho = a\varphi$, перший виток;

7) $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\le t\le 2$;

8) $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t, -\infty<t\le 0$.

12.6. Визначте масу, розподілену з лінійною густиною μ вздовж кривої L:

1) $L: y=\dfrac{x^2}{2}, A\left(1;\dfrac{1}{2}\right), B(2;2), \mu=\dfrac{y}{x}$;

2) $L: y=\sqrt{x}, A(1;1), B(4;2), \mu=y$;

3) $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \mu=|y|$;

4) $L: \begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} 0\le t\le 2\pi,\ \mu=y^{3/2}$;

5) $L: \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \mu = k\rho;$

6) $L: \rho = a(1+\cos\varphi), \mu = k\sqrt{\rho};$

7) $L: x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,\ 0 \le t \le 2\pi, \mu = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$

8) $L: x = ae^t\cos t, y = ae^t\sin t, z = ae^t,\ -\infty < t \le 0, \mu = kz.$

12.7. Визначте координати центра мас однорідної:

1) дуги циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), 0 \le t \le \pi; \end{cases}$

2) кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

12.8. Знайдіть момент інерції I_x однорідного кола $x^2+y^2 = R^2$.

Відповіді

12.4. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{3}{2}$; 2) $5\ln 2$; 3) $3+2\sqrt{5}$; 4) $1+\sqrt{2}$; 5) $\dfrac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 6) $\dfrac{17\sqrt{17}-2\sqrt{2}}{6}$; 7) $\dfrac{\pi}{2}$; 8) $\dfrac{2}{3}$; 9) $\dfrac{R^4}{3}$; 10) $\dfrac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$; 11) $4\pi a\sqrt{a}$; 12) $\dfrac{256}{15}a^3$; 13) $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$; 14) $\dfrac{16}{385}a^4$; 15) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{2\pi b}{a}$; 16) $\dfrac{2\sqrt{2}((1+2\pi^2)^{3/2}-1)}{3}$; 17) $\dfrac{16a^2}{3}$; 18) $\dfrac{\pi a^2}{2}$; 19) $a^2\sqrt{2}$; 20) a^4; 21) $\dfrac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$; 22) $\dfrac{a^5}{3}+a^3$; 23) $2\pi a^2$; 24) $\dfrac{R^4\sqrt{3}}{32}$.

12.5. 1) $\dfrac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $a\,\mathrm{sh}\,1$; 3) $6a$; 4) $8a$; 5) $16a$; 6) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$; 7) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$; 8) $a\sqrt{3}$.

12.6. 1) $\dfrac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; 2) $\dfrac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 3) $2\left(b^2+\dfrac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\pi a^{5/2}$; 5) $k\pi a^2$; 6) $\pi k(2a)^{3/2}$; 7) $\dfrac{4\left((1+2\pi^2)^{3/2}-1\right)}{3}$; 8) $\dfrac{\sqrt{3}ka^2}{2}$.

12.7. 1) $\left(\dfrac{4a}{3};\dfrac{4a}{3}\right)$; 2) $\left(\dfrac{4a}{5};0\right)$.

12.8. πR^3.

13. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

Навчальні задачі

13.1.1. Обчислити $\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz$, де L: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases} \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. [10.12.6.] ①

Інтеграл обчислюємо за формулою [10.12.6]:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt,$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t))$

$$P(x, y, z) = xy, Q(x, y, z) = z, R(x, y, z) = x^2 + y^2;$$

$$\tilde{P}(t) = a^2 \sin t \cos t, \tilde{Q}(t) = bt, \tilde{R}(t) = a^2.$$

$$x' = -a\sin t, y' = a\cos tdt, z' = bdt.$$

$$\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz = \int\limits_0^{\pi/2} \Big(-a^3 \cos t \sin^2 t + bat \cos t + a^2 b\Big)dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi/2} t\cos tdt + a^2 b\int\limits_0^{\pi/2} dt - a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 tdt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & \to & du = dt \\ dv = \cos tdt & \to & v = \sin t \end{matrix} ; \cos tdt = d(\sin t) \right| \overset{[10.4.2]}{=}$$

$$= \left(ab\cos t + abt\sin t + a^2 bt - \frac{a^3}{3}\sin^3 t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{a^3}{3} - ab + \frac{\pi}{2}ab + \frac{a^2 b\pi}{2}.$$

Коментар. ① Крива L є циліндричною гвинтовою лінією.

13.1.2. Обчислити $\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, уздовж ламаної ABC, якщо $A(1;1),\ B(3;1), C(3;5)$.

Розв'язання. [10.12.8.]

Оскільки ламана складається з ланок AB та BC, то

$$\int\limits_{ABC} \overset{[10.12.8]}{=} \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} .$$

Інтеграли обчислюємо за формулою [10.12.8].

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \overset{[10.12.8]}{=} \int\limits_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx.$$

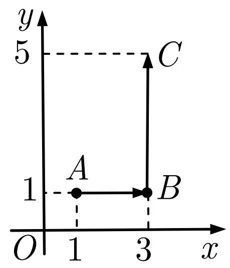


Рис. до зад. 13.1.1

На відрізку AB: $y = 1, y' = 0, x \in [1;3]$.

$$\int\limits_{AB} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int\limits_1^3 (x^3 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 = 22.$$

На відрізку BC : $x = 3, x' = 0, y \in [1;5]$.

$$\int\limits_{BC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int\limits_1^5 (3 + y^3)dy = \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 = 168.$$

$$\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = 22 + 168 = 190.$$

13.2.1. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L: x^2+y^2=R^2} (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ за формулою Остроградського — Ґріна і безпосередньо.

Розв'язання. [10.12.7, 10.12.9.]

[*Записуємо формулу Остроградського — Ґріна і перевіряємо умови її застосовності.***]**

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

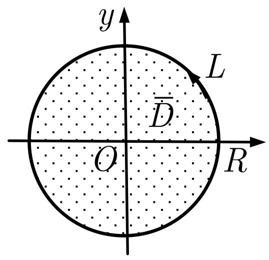


Рис. до зад. 13.2.1

де

$$P(x,y) = (1 - x^2)y, Q(x,y) = x(1 + y^2).$$

Оскільки ці функції неперервні і мають неперервні частинні похідні в замкненій області $\overline{D}$, коло є гладкою кривою, то формула Остроградського — Ґріна застосовна.

$$\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy \overset{[10.12.9]}{=} \left| \begin{matrix} Q'_x = 1 + y^2, \\ P'_y = 1 - x^2 \end{matrix} \right|$$

$$= \iint\limits_D (1 + y^2 - (1 - x^2))dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^3 d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2}R^4.$$

[*Обчислюємо криволінійний інтеграл безпосередньо.***]**

Параметризуємо рівняння кола: $L : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$

$$\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy \overset{[10.12.7]}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ((1-R^2\cos^2 t)R\sin t(-R\sin t) + R\cos t(1+R^2\sin^2 t)R\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos 2t + 2R^4\sin^2 t\cos^2 t dt) = \frac{\pi}{2}R^4.$$

13.2.2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L: x^2+y^2=R^2} \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ безпосередньо і за формулою Остроградського — Ґріна.

Розв'язання. [10.12.7, 10.12.9.]

[*Обчислюємо інтеграл безпосередньо, параметризуючи криву.***]**

$$L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$$

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \overset{[10.12.7]}{=} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = 2\pi.$$

[*Перевіряємо умови застосовності формули Остроградського — Ґріна.***]**

Функції $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ мають розрив в точці $O(0;0)$, яка лежить усередині круга $x^2+y^2 \le R^2$.

Формула Остроградського — Ґріна не застосовна. ①

Коментар. ① Ось чому, хоча і

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), (x;y) \in \overline{D} \setminus O,$$

криволінійний інтеграл може бути відмінним від нуля.

13.3. Перевірити чи є підінтегральний вираз повним диференціалом та обчислити $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x^2-y^2)dx - 2xydy.$

Розв'язання. [10.13.1.]

[*Перевіряємо умову того, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.***]**

$$P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = -2xy.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}: \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy).$$

Оскільки підінтегральний вираз є повним диференціалом, то інтеграл не залежить від того, якою лінією сполучено точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$.
Обчислюємо інтеграл вздовж прямої $y = x, x \in [0;1]$.

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int\limits_{\substack{y=x,\\ x\in[0;1]}} (x^2 - y^2)dx - 2xydy \overset{[10.12.8]}{=}$$

$$= \left| y' = 1 \right| = \int\limits_0^1 (0 - 2x^2 \cdot 1)dx = -2\int\limits_0^1 x^2dx = -\frac{2}{3}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

13.4. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L — дуга кривої $y = x^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(2;8)$;

2) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + dy$, де L — дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

3) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L — верхня половина еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ що обходиться проти руху годинникової стрілки;

4) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, де L — коло $x^2 + y^2 = a^2$;

5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, де L — відрізок AB від точки $A = (1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

6) $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, у напрямі збільшення параметра.

13.5. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L:

а) відрізок AB від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$;

б) дуга параболи $y = 2x^2$, від точки A до точки B;

в) ламана ACB, де $C(1;0)$;

2) $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, де L: а) відрізок прямої $y = x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$; б) дуга параболи $y = x^2$ від точки A до точки B.

13.6. Застосовуючи формулу Остроградського — Ґріна, обчисліть криволінійний інтеграл уздовж кривої L :

1) $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2dy$, де L — еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $\oint\limits_L (x + y)^2dx - (x^2 + y^2)dy$, де L — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

3) $\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L :

а) еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло $x^2 + y^2 = ax$.

13.7. Переконайтесь у тому, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$; 2) $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x + y)(dx + dy)$;

3) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;1)} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy$;

4) $\int\limits_{(\pi;1)}^{(\pi;2)} \left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\right)dy$.

Відповіді

13.4. 1) 8; 2) $\dfrac{3}{2}$; 3) $-\dfrac{4}{3}ab^2$; 4) -2π; 5) 13; 6) $-\pi a^2$.

13.5. 1) а) 0; б) $\dfrac{2}{3}$; в) 2; 2) а) 1; б) 1.

13.6. 1) πab; 2) -1; 3) $\dfrac{\pi R^4}{2}$; 4) а) 0; б) $-\dfrac{\pi a^3}{8}$.

13.7. 1) 8; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$; 4) $1+\pi$.

14. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду

Навчальні задачі

14.1. Знайти роботу сили $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$ під час переміщення вздовж верхньої половини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

Розв'язання. [10.12.10.]

Роботу силового поля $\overline{F}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$\mathrm{A}_L(\overline{F}) \overset{[10.12.10]}{=} \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L ydx - xdy$$

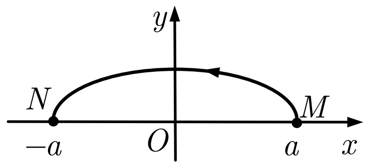


Рис. до зад. 14.1

Параметризуємо шлях переміщення:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

$$\mathrm{A} = \int\limits_L ydx - xdy \overset{[10.12.7]}{=} \int\limits_0^{\pi} (b\sin t \cdot (-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t)dt =$$

$$= -ab\int\limits_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\pi ab.$$

14.2. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ вздовж контуру $L : \{x^2 + y^2 = R^2, z = z_0\}$ (орієнтованого проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz).

Розв'язання. [10.12.11.]

Циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) \overset{[10.12.11]}{=} \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz.$$

Параметризуємо рівняння кола L.

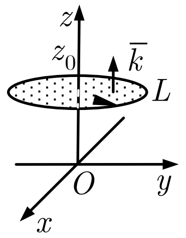


Рис. до зад. 14.2

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. ① \\ z = z_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + zdz \overset{[10.12.6]}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t \cdot R^3 \sin^3 t(-R\sin t) + R\cos t + 0)dt =$$

$$= R^6 \int_0^{2\pi} \sin^6 tdt - R^6 \int_0^{2\pi} \sin^4 tdt + R\sin t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4R^6 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^6 tdt - \int_0^{\pi/2} \sin^4 tdt \right) \overset{[2.3.8]}{=} 4R^6 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Коментар. ① Змінювання параметра t від 0 до 2π відповідає напряму обходу контуру, заданого в умові задачі.

14.3. Знайти площу фігури, обмежену астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

Розв'язання. [10.12.12.]

Площу фігури D, обмежену замкненим контуром L, обчислюють за формулою:

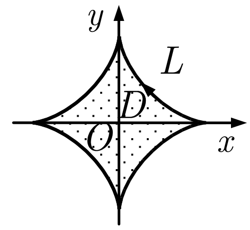


Рис. до зад. 14.3

$$S(D) \overset{[10.12.12]}{=} \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \begin{vmatrix} x' = -3a\cos^2 t\sin t, \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2 \sin^2 t\cos^4 t + 3a^2 \sin^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

14.4. Знайти функцію u за її повним диференціалом

$$du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$$

Розв'язання. [10.13.1, 10.13.3.]

[*Переконуємося в тому, що du є повним диференціалом 10.13.1.***]**:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2}+1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вираз du є повним диференціалом.

Функцію $u(x,y)$ відновлюють за формулою

$$u(x,y) \overset{[10.13.3]}{=} \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(0;0)$. ①

$$u(x,y) = \int_0^x 0dt + \int_0^y \left(\frac{e^t}{1+x^2}+1\right)dt + C =$$

$$= \left.\left(\frac{e^t}{1+x^2}+t\right)\right|_0^y + C = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + y + C.$$

Коментар. ① Точку $M_0(x_0;y_0)$ можна вибирати довільно, але так, щоб функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ були у ній неперервними.

Запис $P(t,y_0)$ означає, що у функцію $P(x,y)$ підставляють t замість x і y_0 замість y.

Запис $Q(x,t)$ означає, що у функцію $Q(x,y)$ підставляють t замість y, а змінну x залишають без змін і під час інтегрування вважають сталою.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

14.5. Знайдіть роботу поля $\overline{F}$ під час переміщення точки вздовж дуги кривої L від точки A до точки B, якщо:

1) $\overline{F} = 2xy\overline{i} - y\overline{j}, L: y = x^2 - 1, A(1;0), B(2;3);$

2) $\overline{F} = 3xy^2\overline{i} - (x+y)\overline{j}, L: y^2 = x + 1, A(0;1), B(3;2);$

3) $\overline{F} = x^2\overline{i} + xy^2\overline{j}, L = AB, A(0;1), B(1;2);$

4) $\overline{F} = x^2\overline{i} + \dfrac{1}{y^2}\overline{j}, L : xy = 1, A(1;1), B\left(4;\dfrac{1}{4}\right);$

5) $\overline{F} = y\overline{i} - 2x\overline{j}, L : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, A(1;0), B(-1;0);$

6) $\overline{F} = 2x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} A(a;0), B\left(-a;0\right);$

7) $\overline{F} = -y\overline{i} + x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} A(0;0), B(2\pi a;0);$

8) $\overline{F} = y\overline{i} + x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} A(a;0), B\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}};\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right);$

9) $\overline{F} = (y^2 + z^2)\overline{i} - yz\overline{j} + x\overline{k}, L : x = bt, y = a\cos t, z = a\sin t, A(0;a;0),$ $B\left(\dfrac{b\pi}{2};0;a\right);$

10) $\overline{F} = -\dfrac{yz}{x}\overline{i} + x\overline{j} + y\overline{k}, L : x = t, y = t\cos t, z = t\sin t, A(0;0;0),$ $B(2\pi;2\pi;0).$

14.6. 1. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = (4x - 5y)\overline{i} + (2x + y)\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $A(1;-9)$ до точки $B(3;-3)$, якщо:

а) L — ламана APB, де $P(1;-3)$; б) L — ламана AQB, де $Q(3;-9)$.

2. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$, якщо:

а) L — ламана OAB, де $A(1;0)$; б) L — ламана OCB, де $C(0;1)$.

14.7. Знайдіть модуль циркуляції векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, якщо:

1) $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L : \{x + y + z = 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\};$

2) $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j} + x\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\};$

3) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\};$

4) $\overline{a} = z\overline{i} - x\overline{j} + y\overline{k}, L : \{z = x^2 + y^2 - 10, z = -1\}.$

14.8. Обчисліть площу фігури, обмежену:

1) еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) кардіоїдою $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

14.9. Відновіть функцію u за її повним диференціалом:

1) $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy$;

2) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$;

3) $du = \dfrac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$;

4) $du = \left(12x^2y + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy$;

5) $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$;

6) $du = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz$.

Відповіді

14.5. 1) 0; 2) $\dfrac{113}{3}$; 3) $\dfrac{7}{4}$; 4) 18; 5) $-\dfrac{3\pi}{2}$; 6) πab; 7) $-6\pi a^2$; 8) $\dfrac{a^2}{8}$; 9) $\dfrac{\pi ab(a+1)}{2} + \dfrac{a^3}{3} - ab$; 10) π.

14.6. 1) а) 22; б) 106; 2) а) 1; б) 1. **14.7.** 1) 27; 2) $\dfrac{3}{4}\pi R^2$; 3) 4π; 4) 9π.

14.8. 1) πab; 2) $6\pi a^2$.

14.9. 1) $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; 2) $u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$; 3) $u = \dfrac{x - y}{(x+y)^2} + C$;

4) $u = 4x^3y + \dfrac{x}{y^2} + C$; 5) $u = \ln\left|x + y + z\right| + C$; 6) $u = \dfrac{x - 3y}{z} + \dfrac{z^2}{2} + C$.

15. Поверхневий інтеграл 1-го роду

Навчальні задачі

15.1. Обчислити $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + 3z^2)d\sigma$ за частиною поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, відтятою площиною $z = 1$.

Розв'язання. [10.14.4.]

Поверхня Ω проектується на площину Oxy у круг D, обмежений колом

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

[*Знаходимо диференціал поверхні.***]**

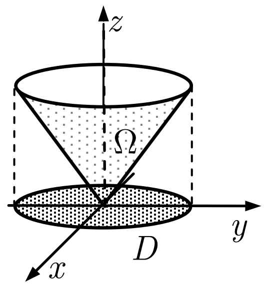


Рис. до зад. 15.1

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy.$$

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}dxdy.$$

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + 3z^2)d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2 + 3(x^2 + y^2))\sqrt{2}dxdy =$$

$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{\tilde{D}} \rho^3 d\varphi d\rho = 4\sqrt{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \rho^3 d\rho = 2\sqrt{2}\pi.$$

15.2. Знайти площу частини поверхні $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 3$, вирізаної поверхнею $\Sigma : 2z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. [10.14.5.]

Площу поверхні Ω знаходять за формулою

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma.$$

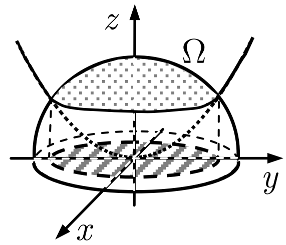


Рис. до зад. 15.2

Частина поверхні сфери, вирізаної параболоїдом, проектується на площину Oxy у круг, обмежений колом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

Верхню півсферу задає рівняння $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy.$$

$$z_x' = \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, z_y' = \frac{-y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{3 - x^2 - y^2}}dxdy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

$$S(\Omega)=\iint\limits_{\Omega}d\sigma\overset{[10.14.4]}{=}\iint\limits_{D_{Oxy}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}dxdy\overset{[10.7.5.2]}{=}\sqrt{3}\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}}\frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{3-\rho^2}}=$$
$$=\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{3-\rho^2}}=-\sqrt{3}\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{d(3-\rho^2)}{\sqrt{3-\rho^2}}=$$
$$=-2\sqrt{3}\pi\sqrt{3-\rho^2}\,\Big|_0^{\sqrt{2}}=(6-2\sqrt{3})\pi.$$

15.3.1. Знайти масу частини поверхні $\Omega: z^2=2px\ (p>0)$, відтятою площинами $y=\alpha z, y=\beta z, z=\alpha\ \ (\beta z<y<\alpha z, 0<z<\alpha, \alpha>\beta>0)$, з густиною $\mu=\mu_0$.

Розв'язання. [10.14.6.]

Масу поверхні Ω з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(\Omega)\overset{[10.14.6]}{=}\iint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{\Omega}\mu_0 d\sigma.$$

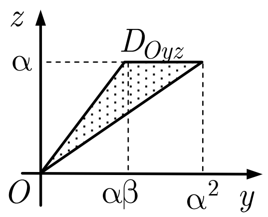


Рис. до зад. 15.3.1

Частина поверхні параболічного циліндра $\Omega: x=\dfrac{1}{2p}z^2$ однозначно проектується на площину Oyz в область D_{Oyz}.

$$d\sigma\overset{[10.14.4]}{=}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}dydz=\sqrt{1+\frac{z^2}{p^2}}dydz.$$

$$m(\Omega)=\iint\limits_{\Omega}\mu_0 d\sigma\overset{[10.14.4]}{=}\mu_0\iint\limits_{D_{Oyz}}\sqrt{1+\left(\frac{z}{p}\right)^2}dydz=$$
$$=\mu_0\int\limits_0^{\alpha}\sqrt{1+\frac{z^2}{p^2}}dz\int\limits_{\beta z}^{\alpha z}dy=\mu_0(\alpha-\beta)\int\limits_0^{\alpha}z\sqrt{1+\frac{z^2}{p^2}}dz=$$
$$=\frac{\mu_0}{3p}(\alpha-\beta)\left(\left(p^2+\alpha^2\right)^{3/2}-p^3\right).$$

15.3.2. Знайти масу частини поверхні $\Omega: 2az=x^2-y^2, a>0$, вирізаної поверхнею $\Sigma: x^2+y^2\le a^2$, з густиною $\mu=15\left|z\right|$.

Розв'язання. [10.14.6.]

Масу поверхні Ω з густиною μ знаходять за формулою

$$m(\Omega)\overset{[10.14.6]}{=}\iint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{\Omega}15\left|z\right|d\sigma.$$

Частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2a}$, вирізана коловим циліндром $x^2 + y^2 = a^2$ проектується на площину Oxy у круг $D : x^2 + y^2 \le a^2$.

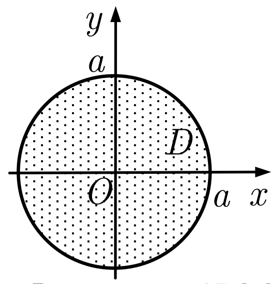


Рис. до зад. 15.3.2

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}dxdy = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}dxdy.$$

$$m = \iint\limits_{\sigma} \mu\left(x, y, z\right)d\sigma = \iint\limits_{D} 15\left|\frac{x^2 - y^2}{2a}\right|\frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= \frac{15}{2a^2}\iint\limits_{\tilde{D}}\left|\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right|\sqrt{a^2 + \rho^2}\cdot\rho d\rho =$$

$$= \frac{15}{2a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{a}\rho^2\left|\cos 2\varphi\right|\sqrt{a^2 + \rho^2}\cdot\rho d\rho \overset{①}{=}$$

$$= \frac{15}{2a^2}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi\int\limits_{0}^{a}\left(\sqrt{\left(a^2 + \rho^2\right)^3} - a^2\sqrt{a^2 + \rho^2}\right)d\left(a^2 + \rho^2\right) =$$

$$= \frac{15}{a^2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\left(\frac{2}{5}\left(a^2 + \rho^2\right)^{5/2} - \frac{2a^2}{3}\left(a^2 + \rho^2\right)^{3/2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 30a^3\left(\frac{\left(4\sqrt{2} - 1\right)}{5} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\right) = 4a^3\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Коментар. ① $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \underset{T = \frac{\pi}{2}}{\overset{[10.4.6]}{=}} 4\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \overset{[10.4.4]}{=} 8\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

15.4. Обчисліть поверхневий інтеграл:

1) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)d\sigma$, де Ω — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

2) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)d\sigma$, де Ω — півсфера $y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$;

3) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2}d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{b^2}$ $(0 \le z \le b)$;

4) $\iint\limits_{\Omega} (2z^2 - x^2 - y^2) d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 2x$;

5) $\iint\limits_{\Omega} (x + y + z) d\sigma$, де Ω — частина площини $x + 2y + 4z = 4$, $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$;

6) $\iint\limits_{\Omega} xyz d\sigma$, де Ω — частина поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$.

15.5. Обчисліть площу частини:

1) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 - ax = 0$;

2) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, що міститься всередині конуса $x^2 + y^2 = z^2$;

3) конуса $x^2 = y^2 + z^2$, розташованої в 1-му октанті й обмеженої площиною $y + z = a$;

4) конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;

5) параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$;

6) параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;

7) гіперболічного параболоїда $az = xy$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$;

8) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

15.6. Обчисліть масу, розподілену:

1) по сфері $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з густиною $\mu = \mu_0 \sqrt{x^2 + y^2}$;

2) по частині параболоїда $x^2 + y^2 = 2z,\ z \leq 1$, з густиною $\mu = \mu_0 z$.

15.7. Знайдіть координати центра мас однорідної поверхні:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq R;$

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq x.$

Відповіді

15.4. 1) $\frac{8}{3}\pi a^4$; 2) $2\pi R^4$; 3) $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{7\sqrt{21}}{3}$; 6) 0.

15.5. 1) $2a^2(\pi - 2)$; 2) $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$; 3) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$; 4) $\pi\sqrt{2}$; 5) $\frac{20 - 3\pi}{9}$; 6) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;

7) $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$; 8) $2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})a^2$.

15.6. 1) $\mu_0\pi^2 R^3$; 2) $\frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})\mu_0}{15}$.

15.7. 1) $\left(\frac{R}{2};\frac{R}{2};\frac{R}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}R\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2};0;\frac{16}{9\pi}\right)$.

16. Поверхневий інтеграл 2-го роду

Навчальні задачі

16.1.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} (2x - z)dydz + 3zdxdz + (x + 2z)dxdy$, де Ω — верхній бік трикутника $x + 4y + z = 4, x, y, z \geq 0.$

Розв'язання. [10.15.5.]

Поверхня $\Omega : z = 4 - x - 4y$ однозначно проектується на площину Oxy. Щоб обчислити поверхневий інтеграл, скористаємося формулою

$$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma \overset{[10.15.5]}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} \frac{(\overline{a}, \overline{n}_0)}{\left|\cos\gamma\right|}\Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

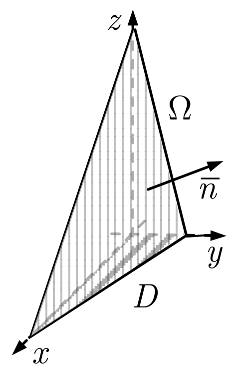


Рис. до зад. 16.1.1

Нормальний вектор до верхнього боку площини[1]

$$\overline{n} = \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}; \left|\overline{n}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18};$$

$$\overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{\left|\overline{n}\right|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\overline{j} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{k};\ \ \cos\gamma = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

$$\overline{a} = (2x - z)\overline{i} + 3z\overline{j} + (x + 2z)\overline{k}.$$

$$(\overline{a},\overline{n}^0)=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix}2z-z\\3z\\x+2z\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2x-z+12z+x+2z}{3\sqrt{2}}=\frac{3x+13z}{3\sqrt{2}}.$$

$$\left.\frac{(\overline{a},\overline{n}^0)}{\left|\cos\gamma\right|}\right|_{z=4-x-4y}=(3z+13z)\Big|_{z=4-x-4y}=52-10x-52y.$$

$$\iint\limits_{\Omega}(2x-z)dydz+3zdxdz+(x+2z)dxdy,$$

$$=\iint\limits_{D_{Oxy}}(52-10x-52y)dxdy\overset{[10.7.4]}{=}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{4-4y}(52-10x-52y)dx=\frac{128}{3}.$$

Коментар. ① У загальному рівнянні площини $Ax+By+Cz+D=0$ коефіцієнти A,B,C є відповідними координатами нормального вектора. Вектор $(1;4;1)^{\mathrm{T}}$ утворює гострий кут з віссю Oz і задає верхній бік поверхні (нижній бік поверхні задає вектор $\overline{n}=(-1;-4;-1)^{\mathrm{T}}$).

16.1.2. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy$, де Ω — зовнішній бік частини півсфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, вирізаної конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. [10.15.5.]

Поверхневий інтеграл обчислимо за формулою

$$\iint\limits_{\Omega}R(x,y,z)dxdy\overset{[10.15.5]}{=}\pm\iint\limits_{D_{Oxy}}R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

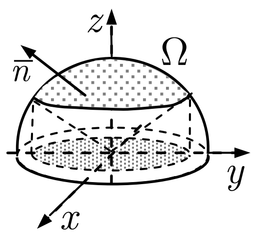


Рис. до зад. 16.1.2

На зовнішньому боці поверхні Ω нормаль утворює гострий кут із віссю Oz, отже перед інтегралом вибираємо знак «$+$».

Частина поверхні однозначно проектується в область D_{Oxy}, обмежену кривою

$$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\z=\sqrt{4-x^2-y^2}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=2.$$

$$\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy\overset{[10.15.5]}{=}+\iint\limits_{D_{Oxy}}(5x^2+5y^2+(4-x^2-y^2))dxdy=$$

$$=4\iint\limits_{D_{Oxy}}(1+x^2+y^2)dxdy\overset{[10.7.5.2]}{=}4\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}}(1+\rho^2)\rho d\varphi d\rho=$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\sqrt{2}} (1+\rho^2)\rho d\rho = 4\cdot 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 16\pi.$$

16.1.3. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy,$ де Ω — зовнішній бік півсфери $y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}.$

Розв'язання. [10.15.5.]

Оскільки поверхня Ω проектується на площину Oxy неоднозначно, то розіб'ємо поверхню Ω на частини Ω_1 та Ω_2, розташовані відповідно вище й нижче площини $z = 0$.

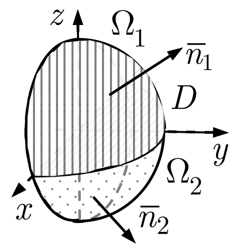


Рис. до зад. 16.1.3

$$\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy \overset{①}{=} \iint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} z^2 dxdy.$$

Поверхні Ω_1 та Ω_2 проектуються на площину Oxy в одну й ту саму область $D_{Oxy} : x^2 + y^2 \le R^2, y \ge 0$. Зовнішня нормаль до Ω_1 утворює з віссю Oz гострий кут, а до Ω_2 — тупий. Отже,

$$\iint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdy \overset{[10.15.5]}{=} + \iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2) dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega_2} z^2 dxdy \overset{[10.15.5]}{=} - \iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2) dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy = 0.$$

Коментар. ① Властивість адитивності поверхневого інтеграла.

16.2. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через зовнішній бік частини поверхні $\Omega : x^2 + y^2 = a^2 \quad (0 < z < a).$

Розв'язання. [10.16.9.]

Потік векторного поля знаходять за формулою

$$\Pi_{\Omega}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

Проектуємо поверхню Ω на площину Oxz. Оскільки вона проектується неоднозначно, то розіб'ємо її на частини $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ та $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

$$\Pi_{\Omega} = \Pi_{\Omega_1} + \Pi_{\Omega_2}.$$

$$\iint\limits_{\Omega_1} (\overline{a}, \overline{n}_1^0) d\sigma \overset{[10.15.6]}{=} \iint\limits_{D_{Oxz}} \left.\frac{(\overline{a}, \overline{n}_1^0)}{|\cos\beta|}\right|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

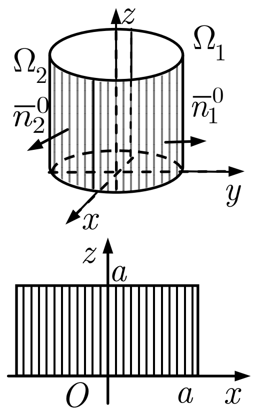


Рис. до зад. 16.2

На Ω_1 маємо:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

$$\overline{n}_1 = \pm \operatorname{grad} F = \pm(2x\overline{i} + 2y\overline{j}) \Rightarrow \overline{n}_1 = 2x\overline{i} + 2y\overline{j}.^{①}$$

$$|\overline{n}_1| = \sqrt{4x^2 + 4y^2}; \overline{n}_1^0 = \frac{x\overline{i} + y\overline{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$(\overline{a}, \overline{n}_1^0) = (x; y; z) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 0\right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\left.\frac{(\overline{a}, \overline{n}_1^0)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\sqrt{a^2 - x^2}} = \left.\frac{x^2 + y^2}{y}\right|_{y=\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\Pi_{\Omega_1}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega_1} (\overline{a}, \overline{n}_1^0) d\sigma = a^2 \iint\limits_{D_{Oxz}} \frac{a^2 dxdz}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int\limits_0^a dz \int\limits_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a^2 \cdot a \cdot \arcsin \left.\frac{x}{a}\right|_{-a}^{a} = \pi a^3.$$

Коментар. ① Для Ω_1 нормаль утворює гострий кут з віссю Oy.

② Потік для Ω_2 обчислюють так само, враховуючи, що $\overline{n}_2 = -(2x\overline{i} + 2y\overline{j})$, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

16.3. Обчисліть:

1) $\iint\limits_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де Ω — зовнішній бік поверхні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geq 0)$;

2) $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy,$ де Ω — внутрішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

3) $\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right) dxdy,$ де Ω — внутрішній бік параболоїда $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9},$ відтятої площиною $z = 0.$

4) $\iint\limits_{\Omega} ydxdz,$ де Ω — верхній бік частини площини $x + y + z = a,$ що лежить у 1-му октанті.

16.4. Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через орієнтовану поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a} = (x - 2z; x + 3y + z; 5x + y),$ Ω — протилежний початку координат бік трикутника з вершинами $(1;0;0),$ $(0;1;0), (0;0;1)$;

2) $\overline{a} = (y^2; x^2; z^2), \Omega$ — частина зовнішнього боку циліндра $x^2 + y^2 = a^2,$ розташованого в 1-му октанті між площинами $z = 0$ і $z = a, a > 0$;

3) $\overline{a} = (3x; -y; -z), \Omega$ — частина зовнішнього боку параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z,$ розташованої в 1-му октанті;

4) $\overline{a} = (x^2; y^2; z^2), \Omega$ — частина зовнішнього боку параболоїда $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H} z$ $(0 \le z < H)$;

5) $\overline{a} = (xy; yz; zx), \Omega$ — частина зовнішнього боку сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ розташовану в 1-му октанті;

6) $\overline{a} = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2 - 1}),$ Ω — частина зовнішнього боку поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1,$ що міститься між площинами $z = 0$ і $z = \sqrt{3}.$

Відповіді

16.3. 1) $\frac{\pi R^4}{2}$; 2) $-4\pi R^3$; 3) -96π; 4) $\frac{a^3}{6}$.

16.4. 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{2a^4}{3}$; 3) $\frac{81\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi R^2 H^2}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; 5) $2\sqrt{3}\pi$.

17. Теорія поля

Навчальні задачі

17.1. Обчислити $\operatorname{div}\overline{a}$, якщо $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$.

Розв'язання. [10.16.3.]

Дивергенцію знаходять за формулою

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$$P(x,y,z) = x^2, Q(x,y,z) = y^2, R(x,y,z) = z^2;$$

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z.$$

17.2. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$ через зовнішній бік замкненої поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le H)$.

Розв'язання. [10.16.9, 10.16.11.]

Потік знаходять за формулою

$$\Pi_{\Omega}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

Поверхня $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ замкнена, де Ω'' — поверхня конуса та Ω' — частина площини $z = H$, що вирізається конусом. Виконано умови теореми Остроградського — Ґауса [10.16.11].

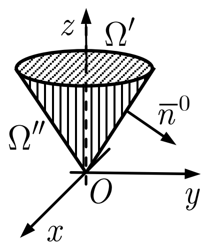


Рис. до зад. 17.2

$$\Pi_{\Omega}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma \overset{[10.16.11]}{=} \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\overline{a}\, dxdydz =$$

$$= \left| \operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}\big(2x\big) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 3 \right| = \iiint\limits_{V} 3dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_{V} dxdydz \overset{[10.9.3]}{=} 3V_{\text{кон.}} \overset{①}{=} 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi H^2 \cdot H = \pi H^3.$$

Коментар. ① Об'єм конуса обчислюють за формулою

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

17.3. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$ через внутрішній бік частини поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z < H)$.

Розв'язання. [10.16.9, 10.16.11.] ①

Потік знаходять за формулою

$$\Pi_{\Omega}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

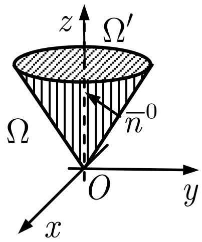


Рис. до зад. 17.3

Замкнімо поверхню Ω поверхнею $\Omega' : z = H$. Тоді

$$\Omega^* = \Omega \cup \Omega'; \ \Pi_{\Omega^*} = \Pi_{\Omega} + \Pi_{\Omega'}.$$

$$\Pi_{\Omega} = \Pi_{\Omega^*} - \Pi_{\Omega'}.$$

[*Деталі див. у зад. 17.2.***]**

$$\Pi_{\Omega^*}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma \underset{②}{\overset{[10.16.11]}{=}} -\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overline{a} dxdydz =$$

$$= \left| \operatorname{div} \overline{a} = 3 \right| = -3 \iiint\limits_{G} dxdydz = -\pi H^3.$$

$$\Pi_{\Omega'}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega'} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \begin{vmatrix} \overline{n} = -\overline{k}, \\ (\overline{a}, \overline{n}^0) = z \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Omega'} z d\sigma \overset{③}{=}$$

$$= H \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy = HS_{\text{кр.}} = \pi H^3.$$

$$\Pi_{\Omega} = -\pi H^3 - \pi H^3 = -2\pi H^3.$$

Коментар. ① Задача відрізняється від задачі 17.2 тим, що дана поверхня **незамкнена**, на що вказує слово «частина» та нестрога нерівність в умові задачі. Один із способів обчислення потоку в цьому разі, полягає в замиканні поверхні й обчисленні потоку через замкнену поверхню за допомогою формули Остроградського — Ґауса.

② Знак «$-$» у формулі Остроградського — Ґауса вказує на внутрішній бік замкненої поверхні.

③ Частина поверхні Ω' проектується у круг $D_{Oxy} : x^2 + y^2 \le H^2$.

17.4.1. Знайти ротор векторного поля $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Розв'язання. [10.16.6.]

Ротор знаходять за формулою

$$\operatorname{rot} \overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{①}{=}$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right) =$$
$$= \overline{i}(0-0) - \overline{j}(0-0) + \overline{k}(0-0) = \overline{0}.$$

Коментар. ① Визначник розкладають за 1-м рядком. Добуток оператора частинного диференціювання на функцію означає знаходження відповідної похідної.

17.4.2. Знайти ротор векторного поля $\overline{a} = xy\overline{i} + (2x+3y-z)\overline{j} + (z^2+x^2)\overline{k}$ і найбільшу густину циркуляції цього поля у точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. [10.16.6.]

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2x+3y-z & x^2+z^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \overline{i}(0+1) - \overline{j}(2x-0) + \overline{k}(2-x) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}.$$

Найбільша густина циркуляції — це довжина ротора.

$$\max j(M_0) = \left|\operatorname{rot}\overline{a}(M_0)\right|.$$
$$\operatorname{rot}\overline{a}(M_0) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}\Big|_{M_0(1;2;-1)} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k};$$
$$\max j(M) = \left|\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

17.5. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ вздовж контуру $L: \{x^2+y^2 = R^2, z = z_0\}$ (орієнтованого проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz) за Стоксовою теоремою.

Розв'язання. [10.16.10, 10.16.12.]

Циркуляцію векторного поля знаходять за формулою

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = \oint_L (\overline{a}, d\overline{r}).$$

Виконано всі умови теореми Стокса. За формулою Стокса

$$\oint_L (\overline{a}, d\overline{r}) \overset{[10.16.12]}{=} \iint_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma.$$

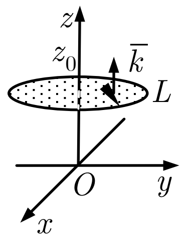


Рис. до зад. 17.5

За поверхню, напнуту на контур, вибираємо частину площини $z = z_0$, обмеженої контуром L. За одиничний вектор нормалі — вектор $\overline{n}^0 = \overline{k}$ (оскільки це забезпечує потрібний обхід контуру. Поверхня Ω проектується у круг $D_{Oxy} : x^2 + y^2 \le R^2$.

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot 0 - \overline{j} \cdot 0 + \overline{k} \cdot (-3x^2y^2) = -3x^2y^2\overline{k}.$$

$$(\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0) = (0;0;-3x^2y^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3x^2y^2.$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \begin{vmatrix} z = z_0, \\ z'_x = z'_y = 0 \end{vmatrix} = dxdy.$$

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = -3\iint\limits_{\Omega} x^2y^2 d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} -3\iint\limits_{D_{Oxy}} x^2y^2 dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= -3\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}} \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi d\rho =$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^5 d\rho = -\frac{R^6}{2}\left(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi - \int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi d\varphi\right) \overset{[10.4.7]}{=}$$

$$= -2R^6\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

17.6.1. Перевірити потенціальність поля

$$\overline{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\overline{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\overline{k}$$

і знайти його потенціал.

Розв'язання. [10.17.1, 10.17.2.]

[*Перевіряємо умову потенціальності поля* $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$.**]**

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \overline{j}\left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) + \overline{k}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \overline{0}.$$

Поле $\overline{a}$ потенціальне.

[*Записуємо формулу для потенціалу векторного поля* $\overline{a}$ *і знаходимо його.*]

$$U(x,y,z) \overset{[10.17.2]}{=} \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(1;1;1)$.

$$U(x,y,z) = \int\limits_{1}^{x}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int\limits_{1}^{y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int\limits_{1}^{z}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{t^2}\right)dt + C =$$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x + \left(\frac{t}{x} + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^y + \left(\frac{t}{y} + \frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^z + C =$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - 1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 + \frac{z}{y} - \frac{1}{y} + \frac{x}{z} - x + C =$$

$$= \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \tilde{C}.$$

За означенням $\overline{a} = \operatorname{grad} U$.

17.6.2. Чи є поле $\overline{a} = 2xy\overline{i} - y^2z\overline{j} + (z^2y - 2yz)\overline{k}$ соленоїдальним?

Розв'язання. [10.17.3.]

[*Перевіряємо умову соленоїдальності поля* $\operatorname{div}\overline{a} = 0$.]

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2y - 2yz) =$$

$$= 2y - 2yz + 2zy - 2y = 0.$$

Поле $\overline{a}$ — соленоїдальне.

17.6.3. Показати, що векторне поле $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ гармонічне.

Розв'язання. [10.17.4.]

[*Перевіряємо умову гармонічності векторного поля* $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}, \operatorname{div}\overline{a} = 0$.]

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\overline{i} - (1-1)\overline{j} + (1-1)\overline{k} = \overline{0}.$$

Векторне поле $\overline{a}$ гармонічне.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

17.7. Нехай $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, r = \left|\overline{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Знайдіть $\operatorname{grad} u$, якщо:

1) $u = r^2$; 2) $u = \dfrac{1}{r}$.

17.8. Знайдіть дивергенцію векторного поля:

1) $\overline{a} = xyz\overline{i} + (2x + 3y + z)\overline{j} + (x^2 + z^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (x + y + z)\overline{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\overline{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = \dfrac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \left|\overline{r}\right|\overline{r}$;

5) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$; 6) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3)$.

17.9. Знайдіть ротор векторного поля:

1) $\overline{a} = \dfrac{y}{z}\overline{i} + \dfrac{z}{x}\overline{j} + \dfrac{x}{y}\overline{k}$ в точці $M_0(1;2;-2)$;

2) $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j} + z^2\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}$;

4) $\dfrac{q}{\left|\overline{r}\right|^3}\overline{r}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

17.10. Перевірте потенціальність і знайдіть потенціал поля:

1) $\overline{a} = (y + z)\overline{i} + (z + x)\overline{j} + (x + y)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = \dfrac{yz\overline{i} + zx\overline{j} + xy\overline{k}}{1 + x^2y^2z^2}$;

3) $\overline{a} = y\overline{i} + x\overline{j} + e^z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{1}{x}\overline{i} + \dfrac{1}{y}\overline{j} + \dfrac{1}{z}\overline{k}$.

17.11. З'ясуйте, чи є поле $\overline{a}(M)$ соленоїдальним, якщо:

1) $\overline{a} = x(z^2 - y^2)\overline{i} + y(x^2 - z^2)\overline{j} + z(y^2 + x^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (1 + 2xy)\overline{i} - y^2 z\overline{j} + (z^2 y - 2yz + 1)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2 yz\overline{i} + xy^2 z\overline{j} - xyz^2\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{-y\overline{i} + x\overline{j}}{x^2 + y^2} + xy\overline{k}$;

5) $\overline{a} = \ln(x^2 + y^2)\overline{i} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\overline{j} + 3\overline{k}$.

17.12. З'ясуйте, чи є поле $\overline{a}(M)$ гармонічним, якщо:

1) $\overline{a} = 6x^2\overline{i} + 3\cos(3x + 2z)\overline{j} + \cos(3y + 2z)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (yz - 2x)\overline{i} + (xz + 2y)\overline{j} + xy\overline{k}$;

3) $\overline{a} = (3x^2 - 3y^2)\overline{i} + (2 - 6xy)\overline{j}$;

4) $\overline{a} = (2x\cos y - 2y)\overline{i} + (x^2 - 2\sin y)\overline{j}$.

17.13. Знайдіть потік поля $\overline{a}$ через поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a} = (x^2; y^2; z^2)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні піраміди, обмеженої площинами $x + y + z = 1, x = 0,\ y = 0, z = 0$;

2) $\overline{a} = y^2 z\overline{i} - yz^2\overline{j} + x(y^2 + z^2)\overline{k}$, де Ω — повна зовнішня поверхня циліндра $y^2 + z^2 \le a^2, 0 \le x \le a$;

3) $\overline{a} = (0; y^2; z)$, де Ω — обмежена частина внутрішнього боку параболоїда $z = x^2 + y^2$, відтятої площиною $z = 2$;

4) $\overline{a} = 2x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — частина внутрішнього боку параболоїда $y^2 + z^2 = Rx$, яку відтинає площина $x = R$;

5) $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — повна зовнішня поверхня конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le H$;

6) $\overline{a} = x^2 y\overline{i} + xy^2\overline{j} + xyz\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

7) $\overline{a} = \overline{r} = (x; y; z)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$;

8) $\overline{a} = (x - z^3 y; xz; z + xy)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6}$.

17.14. Обчисліть за Стоксовою теоремою циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, орієнтованого за годинниковою стрілкою, якщо дивитись із початку координат, якщо:

1) $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$;

2) $\overline{a} = (y + z)\overline{i} + (z + x)\overline{j} + (x + y)\overline{k}$,
$$L : \{4(x^2 + y^2) = z^2, x + y + z = 1\};$$

3) $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}, L : \{z = x^2 + y^2, z + y = 2\}$;

4) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \ge 0\}$;

5) $\overline{a} = z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L : \{y^2 + z^2 = 9, 3z + 4x = 5\}$;

6) $\overline{a} = zx\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}, L : \{y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

Відповіді

17.7. 1) $\mathrm{grad}\, r^2 = 2\overline{r}$; 2) $\mathrm{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\overline{r}}{r^3}$.

17.8. 1) $yz + 3 + 2z$; 2) $1 + 2y + 3z^2$; 3) $\dfrac{2}{|\overline{r}|}$; 4) $4|\overline{r}|$; 5) 6; 6) $6x + 6y + 6z$.

17.9. 1) $-\dfrac{5}{4}\overline{i} - \overline{j} + \dfrac{5}{2}\overline{k}$; 2) $-2(x + y)\overline{k}$; 3) $-y^2\overline{i} - z^2\overline{j} - x^2\overline{k}$; 4) $\overline{0}$.

17.10. 1) $xy + yz + zx + C$; 2) $\mathrm{arctg}(xyz) + C$; 3) $xy + e^z + C$; 4) $\ln(xyz) + C$.

17.11. 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так.

17.12. 1) ні; 2) так; 3) так; 4) ні.

17.13. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $-\dfrac{\pi a^5}{4}$; 3) -2π; 4) πR^3; 5) πH^3; 6) $\dfrac{R^5}{3}$; 7) 40; 8) $\dfrac{11}{3}$.

17.14. 1) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) 0; 3) 0; 4) -4π; 5) 0; 6) π.

Список літератури

1. *Диференціальне* та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Теорія поля. Диференціальні рівняння: Зб. завдань до типової розрахункової роботи для студ. I курсу техн. ф-тів / Уклад.: С. В. Горленко, Л. Б. Федорова, В. О. Гайдей. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2002. — 65 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. — 464 с.
3. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1967. — 608 с.
4. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
5. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 1983. — 128 с.
6. *Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Вища математика: У 2 ч. — К.: Техніка, 2000. — Ч. 1. — 591 с.; Ч. 2. — 791 с.
7. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 3 т. — М.: Наука, 1985.
8. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. — М.: Рольф, 2000. — Ч. 2. — 256 с.
9. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 350 с.
10. *Шипачев В. С.* Высшая математика. — М.: Высш. шк., 2001. — 479 с.
11. *Бутузов В. Ф., Крутицкая И. И.* Математический анализ в вопросах и задачах. Функции многих переменных. — М.: Высш. шк., 1988. — 288 с.
12. *Гусак А. А.* Ряды и кратные интегралы. — Минск: БГУ, 1970. — 384 с.
13. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. — М.: Высш. шк., 2001. — Ч. 2. — 410 с.
14. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: В 5 ч. — Минск.: Вышэйш. шк., 1984—1988. — Ч. 3. — 1985. — 208 с.; Ч. 4. — 1987. — 240 с.
15. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. — Харьков: ХГУ, 1973. — Ч. 2. — 367 с.; Ч. 3 — 374 с.; Ч. 4. — 436 с.
16. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
17. *Вища* математика: Зб. задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
18. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
19. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 3 ч. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др. — М.: Наука, 1986. — Ч. 2. — 368 с.
20. *Сборник* задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — СПб.: Наука, 1994. — 496 с.
21. *Сборник* задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Высш. шк., 1978. — 288 с.

Модуль 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

18. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінним

Навчальні задачі

18.1. Зінтегрувати диференціальне рівняння $xy' - y = y^3$.

Розв'язання. [11.2.2.]

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

[*Підставляємо в диференціальне рівняння* $y' = \dfrac{dy}{dx}$.**]**

$$x\frac{dy}{dx} = y^3 + y.$$

[*Відокремлюємо змінні, множачи обидві частини рівняння на* dx *і ділячи на* $x(y^3 + y)$.**]**

$$xdy = (y^3 + y)dx;\ \frac{dy}{y^3 + y} = \frac{dx}{x}, y \neq 0.$$

[*Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл ДР.***]**

$$\int \frac{dy}{y(y^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x};\ \int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{y^2 + 1} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln\left|y\right| - \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|\ (C \neq 0);$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} = Cx\ (C \neq 0).$$

Для $C = 0$ одержимо функцію $y = 0$, яка є розв'язком рівняння (його можна було б втратити під час відокремлення змінних).

Загальний інтеграл рівняння

$$\frac{y}{x\sqrt{y^2 + 1}} = C, C \in \mathbb{R}.$$

18.2. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{1 - y^2}dx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0, y(0) = 1$.

Розв'язання. [11.1.2, 11.2.2.]

Це задача Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $\sqrt{1 - y^2}dx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$ і початковою умовою $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1, y \neq \pm 1.$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$\arcsin y = C - \arcsin x;\ \arcsin x + \arcsin y = C.$$

Функції $x = \pm 1, y = \pm 1$ є розв'язками ДР, але ці розв'язки не можна отримати за жодного значення сталої C — це особливі розв'язки.
Частинний інтеграл знайдемо з початкової умови $y(0) = 1$:

$$\arcsin 0 + \arcsin 1 = C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язок задачі Коші задає співвідношення

$$\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2}; \arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \overset{①}{\Rightarrow} y = \sqrt{1-x^2}.$$

Коментар. ① $\arcsin y = \arccos x;\ y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$

18.3. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно під дією сили F, прямо пропорційної часу від початку руху і обернено пропорційної швидкості руху v. Встановити залежність між швидкістю і часом, якщо $v\,|_{t=0} = 0.$

Розв'язання. [11.1.2, 11.2.2.]
[*Скористаємось фізичним змістом задачі.***]**
Згідно із другим законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Для знаходження $v(t)$ маємо задачу Коші:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{kt}{v}; v(0) = 0.$$

[*Розв'яжімо її.***]**

$$vdv = \frac{k}{m}tdt; \int vdv = \frac{k}{m}\int tdt;$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C;$$
$$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Розв'язком задачі Коші є функція $v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}t.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

18.4. Зінтегрувати ДР:

1) $(x+1)dx+(y-1)dy=0$; 2) $4(x-1)dx+(y+1)dy=0$;

3) $(y-1)dx+(x+1)dy=0$; 4) $4(y+1)dx+(x-1)dy=0$;

5) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$; 6) $\operatorname{tg}x\sin^2 ydx+\cos^2 x\operatorname{ctg}ydy=0$;

7) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$; 8) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$;

9) $y'\operatorname{tg}x-y=a$; 10) $y'=10^{x+y}$;

11) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$; 12) $e^{-y}(1+y')=1$;

13) $y'=\sin(x-y)$; 14) $y'=(8x+2y+1)^2$.

18.5. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'=8\sqrt{y}, y(0)=4$;

2) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, y(1)=0$;

3) $y'\sin x=y\ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$; 4) $y'\sin x-y\cos x=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

18.6. 1) Знайдіть лінію, що проходить через точку $(2;3)$, кожен відрізок дотичної якої, що міститься між координатними осями, поділяється навпіл точкою дотику.

2) Знайдіть усі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис поділяється навпіл точкою перетину його з віссю ординат.

3) Знайдіть лінію, у якої довжина нормалі (відрізок її від точки лінії до осі абсцис) дорівнює $a=\mathrm{const}$.

4) Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, що прямо пропорційна часу від моменту $t=0$, й обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент $t=10$ с швидкість дорівнювала $0,5$ м/с, а сила — $4\cdot10^{-5}$ Н. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?

5) Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю $v=10$ км/год. На повному ходу його двигун вимкнули, і через $t=20$ с швидкість човна зменшилась до $v_1=6$ км/год. Враховуючи, що сила опору води руховi човна пропорційна його швидкості, знайдіть швидкість чов-

на через 2 хв після вимкнення двигуна; знайдіть також віддаль, яку пройшов човен протягом 1 хв після зупинки двигуна.

6) Згідно з Ньютоновим законом швидкість охолодження будь-якого тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла і температурою повітря T_0. Якщо температура повітря дорівнює $20°\mathrm{C}$ і тіло протягом 20 хв охолоджується із 100 до $60°$, то через скільки часу його температура знизиться до $30°$?

Відповіді

18.4. 1) $(x+1)^2+(y-1)^2=C$; 2) $4(x-1)^2+(y+1)^2=C$; 3) $y=\dfrac{C}{x+1}+1$;

4) $y=\dfrac{C}{(x-1)^4}-1$; 5) $\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=C$; 6) $\operatorname{ctg}^2 y-\operatorname{tg}^2 x=C$; 7) $\dfrac{e^y+1}{x^2+1}=C$;

8) $y=C\sqrt{e^{2x}+1}$; 9) $y=C\sin x-a$; 10) $10^x+10^{-y}=C$;

11) $\arcsin y-\ln(1+x^2)=C, y=\pm 1$; 12) $e^x=C(1-e^{-y})$;

13) $x+C=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 14) $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$.

18.5. 1) $y=(4x+2)^2$; 2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1, x=1\ \left|y\right|<1$; 3) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 4) $y=\sin x$.

18.6. 1) гіпербола, $xy=6$; 2) параболи $y^2=Cx$; 3) $(x-C)^2+y^2=a^2$; 4) $\approx 2{,}7$ м/с; 5) $\approx 0,467$ км/ч; $85,2$ м; 6) $\dfrac{dT}{dt}=k(T-T_0), T=20+80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/20}$, $t=60$ хв.

19. Однорідні диференціальні рівняння

Навчальні задачі

19.1. Розв’язати задачу Коші: $y'=-\dfrac{x+y}{x}, y(1)=\dfrac{1}{2}$.

Розв’язання. [11.1.2, 11.2.4.]

Це задача Коші для однорідного рівняння $y'=-1-\dfrac{y}{x}$, з початковою умовою $y(1)=\dfrac{1}{2}$. **[***Шукаємо розв’язок рівняння як* $y=u(x)x$.**]**

$$\boxed{y=u(x)x, y'=\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.}$$

Дістаємо ДР з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{du}{dx} + u = -1 - u;$$

$$\frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x}\ (2u+1 \neq 0);\ \int\frac{du}{1+2u} = -\int\frac{dx}{x}.$$

$$\ln\left|1+2u\right| = \ln\left|C\right| - 2\ln\left|x\right|\ (C \neq 0);$$

$$1 + 2u = \frac{C}{x^2} \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2x^2}.$$

[*Знаходимо загальний розв'язок рівняння.***]**

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}\ (C = 2C_1).$$

Функція $y = -\frac{x}{2}\left(u = -\frac{1}{2}\right)$ є розв'язком ДР, коли $C = 0.$ Урахуємо початкову умову:

$$\frac{1}{2} = y(1) = -\frac{1}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$

19.2. Зінтегрувати ДР $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}.$

Розв'язання. [11.2.5.]

Це рівняння, що зводиться до однорідного.

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то до ДР з відокремлюваними змінними задане рівняння зводить підстановка:

$$\boxed{z = x + y + 1,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1;}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{4-3z}{z}; \frac{dz}{dx} = \frac{4-2z}{z};$$

$$-\frac{2}{z-2}dz - dz = 2dx\,(z = x + y + 1 \neq 2);$$

$$-2\ln\left|z-2\right| - z + C = 2x;$$

$$3x + y + 2\ln\left|x+y-1\right| = C_1$$

$(x + y = 1$ теж є інтегралом рівняння, який одержимо із загального, коли $C_1 = -\infty).$

Загальний інтеграл ДР $3x + y + 2\ln\left|x + y - 1\right| = C.$

19.3. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1;1)$, якщо довжина відрізка осі Ox, відтятого довільною дотичною, дорівнює довжині цієї дотичної.

Розв'язання.

Нехай рівняння шуканої кривої $y = y(x)$, а $M_0(x_0;y_0)$ — точка дотику. Тоді рівняння дотичної до кривої має вигляд

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0), \ (y_0' = y'(x_0)).$$

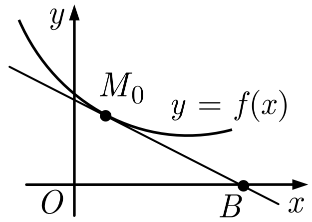


Рис. 1 до зад. 19.3

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox:

$$0 = y_0 + y_0'(x - x_0),$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y_0'}.$$

Оскільки $\left|OB\right|$ — довжина відрізка, відтятого дотичною від осі Ox, а $\left|M_0B\right|$ — довжина відрізка дотичної, то за умовою задачі $\left|OB\right| = \left|M_0B\right|$. Звідки

$$\left|x_0 - \frac{y_0}{y_0'}\right| = \sqrt{\left(\frac{y_0}{y_0'}\right)^2 + y_0^2}.$$

Оскільки одержана умова виконується для довільної точки $M(x,y)$ кривої, то:

$$\left|x - \frac{y}{y'}\right| = \sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2}; \quad x^2 - \frac{2xy}{y'} + \frac{y^2}{y'^2} = \frac{y^2}{y'^2} + y^2.$$

[*Розв'яжемо ДР, яке задає криву.*]

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}};$$

$$\boxed{y = u(x)x, y' = x\frac{du}{dx} + u.}$$

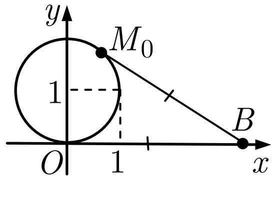
$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{1 - u^2}; \ \frac{(1 - u^2)du}{u(u^2 + 1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{(1 - u^2)du}{u(u^2 + 1)} = \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{u}{1 + u^2} = Cx; \ \frac{yx}{x^2 + y^2} = Cx; \ y = C(x^2 + y^2).$$

Оскільки крива проходить через точку $A(1;1)$, то

$$1 = C(1 + 1) \Rightarrow C = \frac{1}{2},$$



Шукана крива є колом:

$$2y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Рис. 2 до зад. 19.3

19.4. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x+y)dx + (x+2y)dy = 0.$$

Розв'язання. [11.2.9.]

Маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Справді:

$$P(x,y) = x + y, Q(x,y) = x + 2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

[*Знаходимо загальний інтеграл диференціального рівняння за формулою [11.2.9]*.**]**

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

$$\int_0^x tdt + \int_0^y (x+2t)dt = C;$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

19.5. Зінтегруйте рівняння:

1) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$;   2) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

3) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, x \geq 0$;   4) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

5) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$;

6) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx = (4y^2 + 3xy + x^2)dy$;

7) $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$;   8) $y' = \dfrac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}$;

9) $(x + y + 1)dx = (2x + 2y - 1)dy$;

10) $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.

19.6. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x, y(1) = 0;$

2) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1;$

3) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1;$

4) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, y(1) = 0.$

19.7. 1) Знайдіть лінію, у якої квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добуткові координат точок дотику.

2) Знайдіть лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі.

19.8. Зінтегруйте рівняння в повних диференціалах:

1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;$

2) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0;$

3) $\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx - \dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = 0;$ 4) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}.$

Відповіді

19.5. 1) $\ln|Cx| = -e^{-y/x}$; 2) $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 3) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, y = x$;

4) $y = xe^{1+Cx}$; 5) $(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$; 6) $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = C$;

7) $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$; 8) $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C$;

9) $x - 2y + \ln|x + y| = C$; 10) $x + 3y - \ln|x - 2y| = C$.

19.6. 1) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 2) $y^3 = y^2 - x^2$; 3) $\ln|y| + 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2$; 4) $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$.

19.7. 1) $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$; 2) $x = y\ln|Cy|$.

19.8. 1) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$; 2) $x^y = C$; 3) $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$; 4) $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$.

20. **Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі**

Навчальні задачі

20.1.1. Розв'язати задачу Коші $y' - \dfrac{y}{x} = x, y(1) = 0.$

Розв'язання. ***[11.2.7.]***

Маємо задачу Коші для лінійного ДР щодо $y(x)$.

[*1-й метод.* ***Метод Бернуллі.*****]**

[*Шукаємо розв'язок ДР $y(x)$ як добуток двох функцій $u(x)v(x)$, одну з яких можна вибрати довільно.***]**

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv';}$$

$$u'v + \underbrace{uv' - \frac{uv}{x}}_{\text{групуємо}} = x; \qquad \underbrace{u\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{\substack{\text{вибираємо функцію}\\ v(x) \text{ так, щоб в дужках}\\ \text{був нульовий вираз}}} + vu' = x;$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0,^{①} \\ vu' = x.^{②} \end{cases}$$

За $v(x)$ беремо частинний розв'язок рівняння $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{v}{x} = 0:$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x.$$

$$x\frac{du}{dx} = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow u(x) = x + C.$$

[*Записуємо загальний розв'язок ДР.***]**

$$y = x(x + C) = x^2 + Cx.$$

[*Визначаємо сталу з початкової умови.***]**

$$y(1) = 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

[*2-й метод.* ***Метод Лаґранжа (варіації довільної сталої).*****]**

[*Записуємо однорідне рівняння і розв'язуємо його як ДР з відокремлюваними змінними.*]

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \ \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|y\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|;$$

$$y = Cx.$$

Розв'язок задачі Коші $y = x^2 - x.$

[*Варіюємо сталу — шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді*]

$$\boxed{y = C(x)x, \quad y' = C'(x)x + C(x).}$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x;$$
$$C'(x)x = x;\ C'(x) = 1;\ C(x) = \int dx = x + A.$$

[*Підставляємо знайдену функцію* $C(x)$.]

$$y(x) = (x + A)x = x^2 + Ax.$$

[*Визначаємо сталу з початкової умови.*]

$$y(1) = 1 + A = 0 \Leftrightarrow A = -1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = x^2 - x$.

Коментар. ① Функцію $v(x)$ вибираємо з метою найбільшого спрощення диференціального рівняння. Вона є частинним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними $(C = 0)$.

② Функцію $u(x)$ знаходимо з умови, щоб функція $u(x)v(x)$ була розв'язком вихідного ДР. Функція $u(x)$ є загальним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними.

20.1.2. Розв'язати задачу Коші $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}, y(2) = 1.$

Розв'язання. [11.2.7.]

Це задача Коші для лінійного ДР щодо $x(y)$:

$$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1, x(1) = 2.$$

[*Розв'язуємо ДР методом Лаґранжа, користуючись формулою для розв'язку однорідного ДР.*]

$$p(y) = \frac{1}{y}; \quad u(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

$$\boxed{x(y) = \frac{v(y)}{y}, \quad x'(y) = \frac{v'}{y} - \frac{v}{y^2}.}$$

$$\frac{v'}{y} - \frac{v}{y^2} + \frac{v}{y^2} = 2\ln y + 1;$$

$$dv = (2\ln y + 1)ydy;\ v = y^2\ln y + C,$$

$$x(y) = y\ln y + \frac{C}{y}.$$

[*Справджуємо початкову умову.*]

$$2 = x(1) = C \Rightarrow 2 = C.$$

Розв'язок задачі Коші $x = y\ln y + \dfrac{2}{y}.$

20.2. Знайти силу струму в електричному колі з опором $R = \text{const}$, самоіндукцією $L = \text{const}$ і ЕРС $E = E_0 = \text{const}$, якщо $i(0) = I_0$. Сила струму $i(t)$ справджує рівняння $\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{R}{L} i(t) = \dfrac{E_0}{L}$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданого рівняння①

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}.$$

Використовуючи початкову умову, маємо:

$$C = I_0 - \frac{E_0}{R}.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші $i(t) = \dfrac{E_0}{R} + \left(I_0 - \dfrac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$. ①

Коментар. ① Це лінійне ДР щодо невідомої $i = i(t)$. Його можна розв'язати за методом Бернуллі або Лаґранжа.

② Бачимо, що із плином часу t $(t \to +\infty)$ сила струму $i(t)$ наближається до сталого значення $\dfrac{E_0}{R}$.

20.3. Зінтегрувати ДР $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Розв'язання. [11.2.8.]

Це рівняння Бернуллі, яке розв'язуємо методом Бернуллі:

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'.}$$

$$u(v' + 2vx) + vu' = 2x^3u^3v^3 \Rightarrow \begin{cases} v' + 2vx = 0, \\ vu' = 2x^3u^3v^3. \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0 \Rightarrow v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = 2x^3u^3e^{-2x^2}, \frac{du}{u^3} = 2x^3e^{-2x^2}dx;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\int x^2 de^{-2x^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + C,$$

$$\frac{1}{u^2} = x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C_1,$$

$$\frac{1}{y^2} = C_1e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Розв'язок $y = 0$ можна одержати, коли $C_1 = \infty$.

Загальний інтеграл ДР:

$$\left(Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}\right)y^2-1=0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

20.4. Зінтегруйте рівняння:

1) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;

2) $y'+2xy=e^{-x^2}x\sin x$;

3) $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$;

4)* $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{e^x(x-2)}{x}$;

5) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$;

6) $y'=\dfrac{1}{x\cos y+a\sin 2y}$;

7) $y'=\dfrac{1}{\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y}$;

8) $(e^{-y^2/2}-xy)dy-dx=0$.

20.5. Розв’яжіть задачу Коші:

1) $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}, y(0)=0$;

2) $y'+y\cos x=\cos x, y(0)=1$;

3) $t(1+t^2)dx=(x+xt^2-t^2)dt, x(1)=-\dfrac{\pi}{4}$;

4) $yx'+x=4y^3+3y^2, y(2)=1$.

20.6. 1) Знайдіть лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці менше за абсцису точки дотику.

2) Знайдіть силу струму $i(t)$ в електричному колі з опором R і самоіндукцією L, за умови, що $E(t)=E_0\sin 2\pi nt, i(0)=I_0$, де $I_0, E_0=\mathrm{const}$.

3) Знайдіть лінію, у якої будь-яка дотична перетинає вісь ординат у точці, однаково віддаленій від точки дотику і від початку координат.

4) Знайдіть лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

5) Знайдіть лінію, для якої площа фігури, обмеженої віссю абсцис, двома ординатами і дугою MM' цієї лінії, пропорційна дузі MM'.

6) Точка масою $m = 6$ г рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часові (коефіцієнт пропорційності $k_1 = 4$). Крім того, на точку діє опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності $k_2 = 2$). Знайдіть залежність швидкості від часу, вважаючи, що в початковий момент швидкість дорівнює нулеві.

20.7. Зінтегруйте рівняння:

1) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -y^2$; 2) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0$;

3) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 4) $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$;

5) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$; 6) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$.

20.8. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{2/3}, y(0) = 0$;

2) $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$.

Відповіді

20.4. 1) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$; 2) $y = (x + C)(1 + x^2)$; 3) $y = C(x^2 + 1) + x^3 + x$;
4) $y = Cx^2 + e^x$; 5) $x = Ce^{2y} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$; 6) $x = -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$;
7) $x = (C - \cos y)\sin y$; 8) $x = (C + y)e^{-y^2/2}$.

20.5. 1) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; 2) $y = 1$; 3) $x = -t\,\mathrm{arctg}\,t$; 4) $x = y^2 + y^3$.

20.6. 1) $y = Cx - x\ln|x| - 2$; 3) $x^2 + y^2 = Cx$; 4) $y = x + Cx^2$; 5) ланцюгова лінія;
6) $m\dfrac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v, v(0) = 0, v(t) = 2\left(t - 3 + 3e^{-t/3}\right)$.

20.7. 1) $\dfrac{1}{y} = (x + 1)(C + \ln(x + 1))$; 2) $\dfrac{1}{y} = (x + C)\cos x$; 3) $\sqrt{y} = \mathrm{tg}\,x + \dfrac{\ln|\cos x| + C}{x}$;
4) $2\sqrt{y} = x^2 \ln x + Cx^2$; 5) $x^3 e^{-y} = C + y$; 6) $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

20.8. 1) $y = \left(\dfrac{2}{9}e^{x^3} - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{9}\right)^3, y = 0$; 2) $y = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

21. Рівняння, що дозволяють пониження порядку

Навчальні задачі

21.1. Розв'язати задачу Коші $y''' = \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$

Розв'язання. [11.3.1.]

Маємо ДР вигляду $y''' = f(x)$.

[*Розв'яжемо ДР безпосереднім інтегруванням, поступово визначаючи значення сталих.***]**

$$y'' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$
$$y''(0) = 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$
$$y'' = \frac{1}{2}\sin 2x;\ y' = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2;$$
$$y'(0) = 0 = -\frac{1}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4}.$$
$$y' = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4};\ y = -\frac{1}{4}\int(\cos 2x - 1)dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C_3;$$
$$y(0) = 0 + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + 1.$

21.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' = \frac{y'}{x} + x.$

Розв'язання. [11.3.2.]

Це ДР, яке не містить невідомої функції в явному вигляді $F(x, y', y'') = 0.$

Позначаємо **[***запроваджуючи нову функцію***]**

$$\boxed{y' = p(x), y'' = p'(x).}$$
$$p' = \frac{p}{x} + x.$$

Одержали лінійне ДР 1-го порядку, яке розв'яжемо методом Бернуллі [3.2.8]:

$$\boxed{p = u(x)v(x), p' = u'v + uv';}$$
$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = x \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{x} = 0, \\ uv' = x. \end{cases}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}; \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}; u(x) = x.$$
$$xv' = x; v' = 1; v(x) = x + C_1;$$
$$y' = p(x) = x(C_1 + x) = C_1 x + x^2;$$

$$y = \int (C_1 x + x^2)dx = \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Загальний розв'язок рівняння $y = \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2$.

21.3. Розв'язати задачу Коші: $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Розв'язання. [11.3.3.]

Це задача Коші для ДР, яке не містить аргументу функції в явному вигляді $F(y, y', y'') = 0$. Позначаємо **[***запроваджуючи нову функцію***]**

$$\boxed{y' = p(y);\ y''_{xx} = p\frac{dp}{dy}.}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y;$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \frac{y \ln y}{p}.$$

Одержане рівняння Бернуллі розв'яжемо методом Бернуллі:

$$\boxed{p = uv, p' = u'v + uv'.}$$

$$v\left[u' - \frac{u}{y}\right] + uv' = \frac{y \ln y}{uv} \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{y} = 0, \\ uv' = \dfrac{y \ln y}{uv}. \end{cases}$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0; \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}; u = y.$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\ln y}{yv}; vdv = \frac{\ln y dy}{y}; \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 y + \frac{1}{2}C_1.$$

$$p(y) = \pm y\sqrt{\ln^2 y + C_1}.$$

Визначимо сталу C_1 з початкової умови: $p(y(0)) = 1 \Rightarrow p(1) = 1.$

$$p(1) = \pm\sqrt{C_1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = +y\sqrt{\ln^2 y + 1};\ \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 1}} = dx;$$

$$x = \int \frac{d \ln y}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \ln\left|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}\right| + C_2.$$

Визначимо сталу C_2 з умови $y(0) = 1.$

$$0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Розв'язок задачі Коші $x = \ln\left|\ln y + \sqrt{1 + \ln^2 y}\right|.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

21.4. Зінтегруйте рівняння:

1) $y'' = x + \sin x$;
2) $y'' = \operatorname{arctg} x$;
3) $y^{\mathrm{IV}} = x$;
4) $y''' = \cos 2x$;
5) $xy'' = y'$;
6) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$;
7) $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$;
8) $xy''' + y'' = 1 + x$;
9) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$;
10) $y'''^2 + y''^2 = 1$.

21.5. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' = xe^x, y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y''(x+2)^5 = 1, y(-1) = \dfrac{1}{12}, y'(-1) = -\dfrac{1}{4}$;

3) $y''(x^2+1) = 2xy',\ y(0) = 1, y'(0) = 3$;

4) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0, y'(2) = 4$;

5) $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$;

6) $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Відповіді

21.4. 1) $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2-1) - \dfrac{x}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2$;
3) $y = \dfrac{x^5}{120} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$; 4) $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;
5) $y = C_1x^2 + C_2$; 6) $y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$; 7) $y = -\dfrac{\sin^3 x}{3} + C_1\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$;
8) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2} + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$; 9) $y\cos^2(x + C_1) = C_2$;
10) $y = \sin(C_1 + x) + C_2x + C_3$.

21.5. 1) $y = (x-2)e^x + x + 2$; 2) $y = \dfrac{1}{12(x+2)^3}$; 3) $y = x^3 + 3x + 1$;
4) $y = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}$; 5) $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$; 6) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

22. Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Метод Ейлера

Навчальні задачі

22.1.1. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. [11.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[*Складаємо характеристичне рівняння.***]** ①

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

[*Розв'язуємо рівняння і виписуємо відповідні кореням характеристичного рівняння лінійно незалежні розв'язки ЛНДР.***]**

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow y_1 = e^x,$$
$$\lambda_2 = -2 \leftrightarrow y_2 = e^{-2x}.$$

ФСР диференціального рівняння [1.5.8]: $\{e^x, e^{-2x}\}$.

Загальний розв'язок ДР [11.5.9]: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Коментар. ① Замінюємо $y \leftrightarrow 1, y' \leftrightarrow \lambda, y'' \leftrightarrow \lambda^2$.

22.1.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' + 2y' + 26y = 0$.

Розв'язання. [11.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 5i \leftrightarrow y_{1,2} = e^{-x}\begin{Bmatrix}\cos 5x \\ \sin 5x\end{Bmatrix}.$$

ФСР рівняння [1.5.8]: $\{e^{-x}\cos 5x, e^{-x}\sin 5x\}$.

Загальний розв'язок [1.5.9]: $y = C_1e^{-x}\cos 5x + C_2e^{-x}\sin 5x$.

22.1.3. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. [3.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = 3 \leftrightarrow y_1 = e^{3x}, y_2 = xe^{3x}.$$

ФСР рівняння [1.5.8]: $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$.

Загальний розв'язок [1.5.9]: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

22.2. Розв'язати задачу Коші:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 4.$$

Розв'язання. [11.5.]

Маємо задачу Коші для ЛОДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow e^x;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow e^{3x}.$$

ФСР рівняння [11.5.8]: $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

Загальний розв'язок рівняння [11.5.9]:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

[*Враховуємо початкові умови.***]**

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x};$$

$$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}.$$

Використовуючи початкові умови, одержуємо систему щодо C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -4, \\ C_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші $y = 2e^x - 4e^{2x} + 2e^{3x}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

22.3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + y' - 2y = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$;
3) $y'' - 4y' = 0$;
4) $y'' + 9y' = 0$;
5) $y'' - 2y' + y = 0$;
6) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$;
7) $y'' + 4y = 0$;
8) $y'' + y = 0$;
9) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;
11) $y''' + 9y' = 0$;
12) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$;
13) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;
14) $y^{(4)} - 16y = 0$.

22.4. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$;

2) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 7, y'(0) = 8$;

3) $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$;

4) $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$;

5) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$;

6) $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15$.

22.5. Складіть ЛОДР, знаючи їхні характеристичні рівняння:

1) $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$; 2) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$;

3) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$; 4) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$;

5) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$.

22.6. Складіть ЛОДР, якщо відомі корені характеристичних рівнянь, і запишіть їхні загальні розв'язки:

1) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$;

3) $\lambda_1 = 3 - 2i, \lambda_2 = 3 + 2i$; 4) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

Відповіді

22.3. 1) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; 3) $y = C_1e^{4x} + C_2$; 4) $y = C_1e^{-9x} + C_2$; 5) $y = e^x(C_1 + C_2x)$; 6) $x = (C_1 + C_2t)e^{5t/2}$; 7) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; 8) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; 9) $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; 10) $y = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$; 11) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3$; 12) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$; 13) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$; 14) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

22.4. 1) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; 2) $y = 9 - 2e^{-4x}$; 3) $y = e^{-x/2}(2 + x)$; 4) $y = 2e^{3x}x$; 5) $y = \sin 2x$; 6) $y = 3e^{-2x}\sin 5x$.

22.5. 1) $9y'' - 6y' + y = 0$; 2) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 3) $2y'' - 3y' - 5y = 0$; 4) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$; 5) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

22.6. 1) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y = C_1e^x + C_2e^{2x}$;

2) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = (C_1x + C_2)e^x$;

3) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;

4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

23. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Навчальні задачі

23.1. Знайти загальний розв'язок ЛНДР $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Розв'язання. [11.6.1, 11.6.2.]

[*Оскільки права частина ЛНДР має загальний вигляд, то загальний розв'язок рівняння знайдемо методом Лаґранжа.***]**

[*Крок 1.* *Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння.***]**

$$y'' + y = 0;$$

$$\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i \leftrightarrow \left[\begin{aligned} y_1 &= \cos x, \\ y_2 &= \sin x. \end{aligned}\right.$$

[*Крок 2.* *Записуємо вигляд, у якому шукатимемо загальний розв'язок ЛНДР.***]**

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

[*Крок 3.* *Функції* $C_1(x), C_2(x)$ *знаходимо з алгебричної системи*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

*яку можна розв'язати за методом Крамера.***]**

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[*Крок 4.* *Знаходимо* $C_1(x), C_2(x)$.**]**

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x} + A_1;$$

$$C_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + A_2.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \left(A_1 - \frac{1}{2\cos^2 x} \right)\cos x + \left(\operatorname{tg} x + A_2 \right)\sin x.$$

23.2. Записати вигляд частинного розв'язку ДР $y''' - 5y'' = x^2 - 1$ (з невизначеними коефіцієнтами).

Розв'язання. [11.7.]

Маємо ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.

[*Розв'язуємо характеристичне рівняння для однорідного рівняння.* **]**

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 5.$$

[*Аналізуємо праву частину диференціального рівняння.***]**

Функція $f(x) = x^2 - 1$ є правою частиною спеціального вигляду — «многочлен 2-го порядку»; йому відповідає число $k = 0$ [11.7.1].

[*Перевіряємо чи відбувається збіг числа k з розв'язками характеристичного рівняння.***]**

Є «резонанс» 2-го порядку, оскільки $\lambda_1 = \lambda_2 = k$.

[*Записуємо шаблон для частинного розв'язку ЛНДР.***]**

$$y_{\text{част. неодн.}} = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

23.3.1. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[*Крок 1.* *Записуємо теорему про структуру розв'язку ЛНДР.***]**

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$

[*Крок 2.* *Знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР методом Ейлера).***]**

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0;$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow y_3 = e^{3x}.$$

ФСР рівняння: $\{1, e^{2x}, e^{3x}\}$.

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

[*Крок 3.* *Записують частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами.***]**

Оскільки права частина

$$f(x) = 6x^2 + 2x - 5$$

є многочленом 2-го степеня, а число $k = 0$ є коренем кратності $s = 1$ характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\boxed{y_* = x\left(Ax^2 + Bx + C \right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.}$$

[*Крок 4.* Визначаємо коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР.**]**

$$y_*' = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$y_*'' = 6Ax + 2B;$$

$$y_*''' = 6A.$$

$$6A - 5\left(6Ax + 2B\right) + 6\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 6x^2 + 2x - 5.$$

$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6A - 10B + 6C) \equiv 6x^2 + 2x - 5.$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях.*]**

$$\begin{cases} 18A = 6, \\ 12B - 30A = 2, \\ 6A - 10B + 6C = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = 1, \\ C = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{част. неодн.}} = y_* = x\left(\frac{x^2}{3} + x + \frac{1}{2}\right).$$

[*Крок 5.* *Записуємо загальний розв'язок ЛНДР.***]**

$$y_{\text{заг. неодн.}} = \underbrace{C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}}_{\text{заг. одн.}} + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}_{\text{част. неодн.}}.$$

23.3.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' + y'' - 6y' = (6x + 7)e^{-x}$.

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною.

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$

$$y''' + y'' - 6y' = 0;$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = -3 \leftrightarrow y_3 = e^{-3x}.$$

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}.$$

Оскільки права частина ДР має вигляд [11.7.2]:

$$f(x) = (6x + 7)e^{-x},$$

число $k = -1$ не є коренем характеристичного рівняння, а $f(x) = 6x + 7$ — многочлен 1-го степеня, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:

$$\boxed{y_* = (Ax + B)e^{-x}.}$$

$$y_*' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = e^{-x}(A - B - Ax);$$

$$y_*'' = -e^{-x}\Big(A - B - Ax\Big) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax + B - 2A);$$
$$y_*''' = -e^{-x}(Ax + B - 2A) + Ae^{-x} = e^{-x}\Big(3A - B - Ax\Big).$$

[*Підставимо ці вирази в рівняння та скоротимо на* e^{-x}.]

$$6Ax - 5A + 6B \equiv 6x + 7.$$
$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 5A = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 2. \end{cases}$$
$$y_{\text{част. неодн.}} = y_* = (2x + 4)e^{-x}.$$
$$y_{\text{заг. неодн.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x} + (x + 2)e^{-x}.$$

23.4. Розв'язати задачу Коші
$$y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо задачу Коші для ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.
$$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$$
$$y'' + 4y = 0;$$
$$\lambda^2 + 4 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \cos 2x, \\ y_2 = \sin 2x. \end{array}\right.$$
$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Оскільки права частина ДР має вигляд [11.7.5]
$$f(x) = \sin 2x = 0\cos 2x + 1\sin 2x,$$
числа $k = 2i$ є коренями кратності $s = 1$ характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:
$$\boxed{y_* = x\Big(A\cos 2x + B\sin 2x\Big).}$$

Звідси:
$$y_*' = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x);$$
$$y_*'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x).$$

Підставимо ці вирази в рівняння
$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) +$$
$$+4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv \sin 2x;$$
$$-4A = 1, 4B = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = 0.$$
$$y_{\text{чн. неодн.}} = y_* = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x.$$

[*Визначаємо значення довільних сталих, тобто частинний розв'язок ЛНДР, який справджує початкові умови.***]**

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1, \\ y'(0) = 2C_2 - \frac{1}{4} = -2 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -\frac{7}{8}. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші:

$$y = \cos 2x - \frac{7}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

23.5. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 12e^{-x}$; 2) $f(x) = 3e^{2x}$;

3) $f(x) = 2x + 1$; 4) $f(x) = 4x^2 - 2x - 1$;

5) $f(x) = -2xe^{x}$; 6) $f(x) = e^{3x}(2x + 1)$;

7) $f(x) = 10 \sin x$; 8) $f(x) = 20 \cos 2x - 40 \sin 2x$;

9) $f(x) = 4x - 12e^{-2x} + 4$; 10) $f(x) = 12 \operatorname{sh} x$.

23.6. Складіть загальний розв'язок рівняння $2y'' + 5y' = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 15x^2 + 2x + 1$; 2) $f(x) = 29 \cos x$;

3) $f(x) = 5e^{-2{,}5x} - 25 \sin \frac{5x}{2}$; 4) $f(x) = 50 \operatorname{ch} \frac{5x}{2}$.

23.7. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 4$; 2) $f(x) = 9e^{-x}$;

3) $f(x) = 6e^{2x}$; 4) $f(x) = 32 \operatorname{sh} 2x$.

23.8. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' + y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - x + 2$;
2) $f(x) = -8\cos 3x$;
3) $f(x) = \cos x$;
4) $f(x) = 2\sin x - 2e^{-x}$.

23.9. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2},\ y(0) = 3, y'(0) = -5,5$;
2) $y'' - y' = 2(1 - x),\ y(0) = 1, y'(0) = 1$;
3) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ y(0) = 2, y'(0) = 2$;
4) $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = y'(\pi) = 1$;
5) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x),\ y(0) = -4, y'(0) = 5$;
6) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x,\ y(\pi) = \pi e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}$;
7) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x},\ y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1$;
8) $y''' - y' = 3(2 - x^2),\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;
9) $y^{(4)} - y = 8e^x, y(0) = 0,\ y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6$.

23.10. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + 4y = -\operatorname{ctg}^2 2x$;
2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$;
3) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$;
4) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$;
5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$;
6) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4 - x^2}}$;
7) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$;
8) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.

Відповіді

23.5. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y_*$, 1) $y_* = 2e^{-x}$; 2) $y_* = 3xe^{2x}$; 3) $y_* = x + 2$; 4) $y_* = 2x^2 + 5x + 5$; 5) $y_* = e^x(x^2 + 2x)$; 6) $y_* = e^{3x}(x - 1)$; 7) $y_* = \sin x + 3\cos x$; 8) $y_* = -\sin 2x - 7\cos 2x$; 9) $y_* = 2x + 5 - e^{-2x}$; 10) $y_* = -e^{-x} - 6xe^x$.

23.6. $y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + y_*$, 1) $y_* = x^3 - x^2 + x$; 2) $y_* = 5\sin x - 2\cos x$;
3) $y_* = \cos\frac{5x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - xe^{-5x/2}$; 4) $y_* = e^{5x/2} - 5xe^{-5x/2}$.

23.7. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + y_*$, 1) $y_* = 1$; 2) $y_* = e^{-x}$; 3) $y_* = 3x^2 e^{2x}$; 4) $y_* = 8x^2 e^{2x} - e^{-2x}$.

23.8. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_*$, 1) $y_* = 2x^3 - 13x + 2$; 2) $y_* = \cos 3x$; 3) $y_* = \frac{x}{2}\sin x$;
4) $y_* = -x\cos x - e^{-x}$.

23.9. 1) $y = (1 + x)e^{-3x/2} + 2e^{-5x/2}$; 2) $y = e^x + x^2$; 3) $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$;
4) $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$; 5) $y = 2e^x + (\sin x - 2\cos x)e^{-x} - 4$;
6) $y = -[\pi\cos x + (\pi + 1 - 2x)\sin x]e^x$; 7) $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$; 8) $y = e^x + x^3$;
9) $y = 2xe^x$.

23.10. 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln\left|\operatorname{tg} x\right|$;
2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{4}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{ctg} x}$;
3) $y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + C_2$;
4) $y = \frac{1}{2}e^x\left(\arcsin e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\right) + \frac{1}{3}\sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$;
5) $y = e^x(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + x\operatorname{arctg} x)$;
6) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2}\right)$; 7) $y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$;
8) $y = (C_1 - x)e^{-x}\cos x + \left(C_2 + \ln\left|\sin x\right|\right)e^{-x}\sin x$.

24. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Навчальні задачі

24.1.1. Розв’язати систему ДР $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ методом виключення і матричним методом.

Розв’язання. [111.8.]

Це однорідна система ЛДР. ①

Метод виключення. [*Виражаємо з 2-го рівняння x і підставляємо його в 1-ше рівняння. Дістанемо ЛОДР 2-го порядку щодо функції $y(t)$.*]

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' - 3y}{3}, \\ x' = 5x + 8y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{y''}{3} - y', \\ \dfrac{y''}{3} - y' = 5\left(\dfrac{y' - 3y}{3}\right) + 8y. \end{cases}$$

$$y'' - 8y' - 9y = 0;$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9;$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}.$$

[*Знаходимо функцію* $x(t)$.**]**

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t};$$

$$x(t) = \frac{y' - 3y}{3} = \frac{-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 3C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{9t}}{3} =$$

$$= -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}.$$

Відповідь. $x = -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Матричний метод.

[*Крок 1.* *Записуємо систему в матричному вигляді.***]**

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$

[*Крок 2.* *Записуємо характеристичне рівняння.***]**

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

[*Крок 3.* *Розв'язуємо характеристичне рівняння.***]**

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 9. \end{aligned}\right.$$

[*Крок 4.* *Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то знаходимо власні вектори, які відповідають власним числам.***]**

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{4}{3} C_1 \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2C_1 \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*Крок 4.* *Записуємо загальний розв'язок системи.***]**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Коментар. ① У системі x та y є функціями змінної $t: x = x(t), y = y(t)$.
Із 1-го рівняння, яке містить x', можна виключити змінну y (або з 2-го рівняння, яке містить y', — змінну x).

24.1.2. Розв'язати систему ДР $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$

Розв'язання.
Це лінійна неоднорідна система ДР.
[*Розв'яжемо її методом виключення змінних. Виражаємо з 1-го рівняння функцію y.***]**

$$\begin{cases} y = x - x', \\ y' = x + y + e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = x' - x'', \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$$

$$x' - x'' = x + (x - x') + e^t;$$

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t.$$

[*Для функції $x(t)$ маємо ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.***]**

$$\boxed{x(t) = x_{\text{заг. одн.}}(t) + x_{\text{част. неодн.}}(t).}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0;\ \lambda_{1,2} = 1 \pm i;$$

$$x_{\text{заг. одн.}} = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t.$$

$$f(t) = e^t, k = 1 \neq \lambda_{1,2}.$$

$$\boxed{x_* = Ae^t.}$$

$$x_*' = Ae^t; x_*'' = Ae^t.$$

$$Ae^t - 2Ae^t + 2Ae^t = -e^t;$$

$$A = -1.$$

$$x_{\text{част. неод.}} = -e^t.$$

$$x = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t - e^t.$$

[*Знаходимо функцію $y(t)$.***]**

$$x' = C_1 e^t (\cos t - \sin t) + C_2 e^t (\sin t + \cos t) - e^t;$$

$$y = x(t) - x'(t) = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t.$$

Відповідь. $x = C_1 e^t \cos t + C_2 \sin t - e^t, y = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

24.2. Знайдіть загальний розв'язок системи:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 10e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

24.3. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 4;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 1.$

Відповіді

24.2. 1) $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = (2C_1t + 2C_2 + C_1)e^{-t}, \\ y = (C_1t + C_2)e^{-t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = \dfrac{1}{5}e^{-2t}((4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + 7e^t + 2e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + e^t + 3e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$

24.3. 1) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t}\cos t. \end{cases}$

Додаток

Д1. Тригонометричні формули

❶ ***Основні тригонометричні тотожності.*** ① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$ ② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$ ③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ ④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	❷ ***Формули додавання.*** ① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x;$ ② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$ ③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$ ④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$
❸ ***Формули кратних аргументів.*** ① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$ ② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$	❹ ***Формули зниження степеня.*** ① $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2};$ ② $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
❺ ***Формули половинного аргументу*** ① $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$	② $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$ ③ $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1 - t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$
❻ ***Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.*** ① $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y);$ ② $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y);$ ③ $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$	❼ ***Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.*** ① $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2};$ ② $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2};$ ③ $\cos x - \cos y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{y - x}{2}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0
ctg	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-$	0	$-$

Д2. Основні правила і формули диференціювання

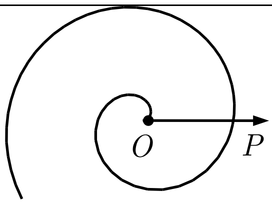
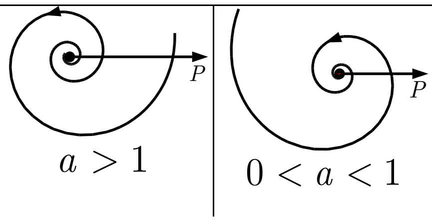
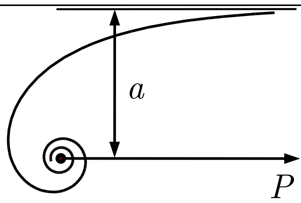
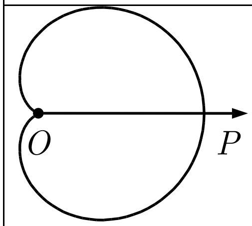
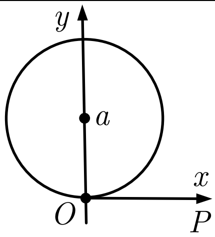
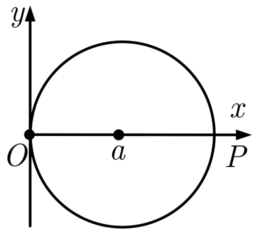
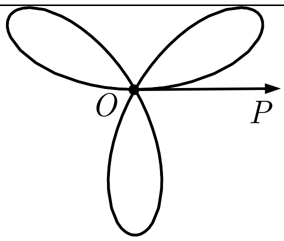
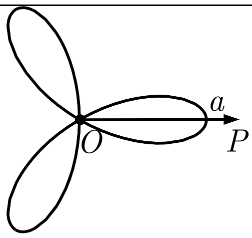
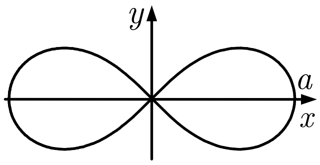
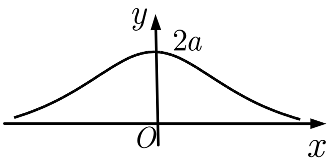
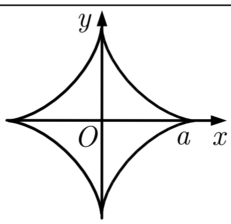
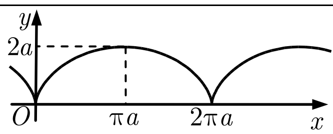
$(Cu)' = Cu', C = \mathrm{const}$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\big(f(u)\big)'_x = f'_u \cdot u'_x$	$y' = y(\ln y)'$

$(C)' = 0, C = \mathrm{const}$	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0$	$(e^u)' = e^u u'$
$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$	$(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$	$(\mathrm{cth}\, u)' = -\dfrac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}$

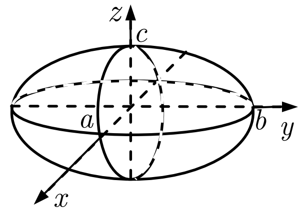
Д3. Основні формули інтегрування

$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $(\alpha \neq -1)$
$\int e^{u} du = e^{u} + C$	$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$
$\int \sin u du = C - \cos u$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = C - \operatorname{ctg} u$
$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$	$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = C - \operatorname{cth} u$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2+a}\right\rvert + C,$ $a \neq 0$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$
$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C,$ $a \neq 0$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \operatorname{tg} u du = C - \ln\lvert\cos u\rvert$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

Д4. Деякі визначні криві

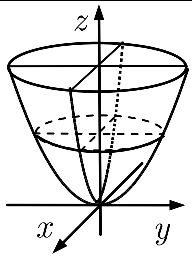
 ***Спіраль Архімеда*** $\rho = a\varphi$	 ***Логарифмічна спіраль*** $\rho = a^{\varphi}$	 ***Гіперболічна спіраль*** $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$
 ***Кардіоїда*** $\rho = 2a(\cos\varphi + 1)$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ay$, $\rho = 2a\sin\varphi, a > 0$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ax$, $\rho = 2a\cos\varphi, a > 0$
 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\sin 3\varphi$	 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\cos 3\varphi$	 ***Лемніската Бернуллі*** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$
 ***Кучер Аньєзі*** $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$	 ***Астроїда*** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$	 ***Циклоїд***а $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Д5. Визначні поверхні і просторові криві



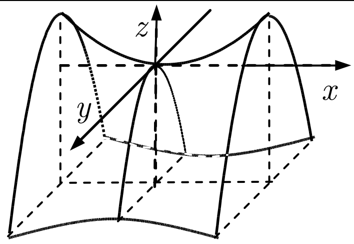
Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



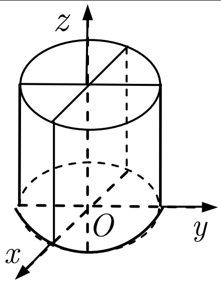
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



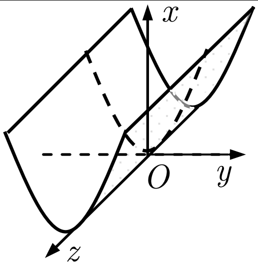
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



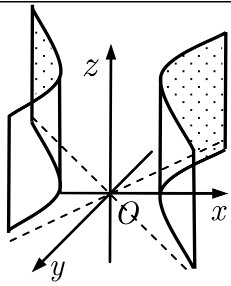
Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



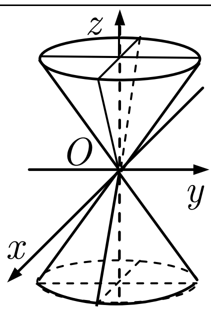
Параболічний циліндр

$$y^2=2px$$



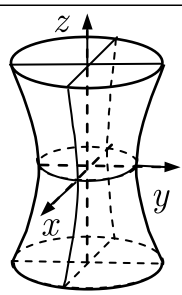
Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



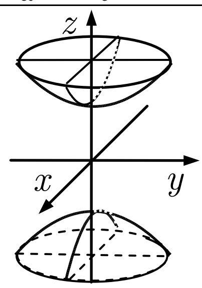
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



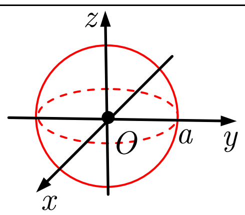
Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



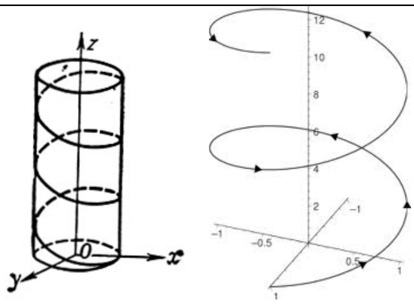
Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



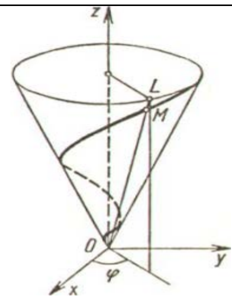
Сфера

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$



Циліндрична гвинтова лінія

$$\left\{x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{ht}{2\pi}\right.$$



Конічна гвинтова лінія

$$\begin{cases} x=at\cos t, y=at\sin t, \\ z=bt \end{cases}$$