НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)
« 7 » червня 2017р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»

на тему: «Дослідження параметрів якості систем масового обслуговування»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-51м
(шифр групи)

Матюшина Катерина Юріївна __________
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Пилипенко А.Ю. __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент старший науковий співробітник інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, доктор фізико-математичних наук
Арясова О.В. __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____________
(підпис)

Київ – 2017

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Інститут (факультет) Фізико-математичний факультет

(повна назва)

Кафедра Математичного аналізу та теорії ймовірностей

(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»

(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Клесов О.І.

(підпис) (ініціали, прізвище)

« 8 » лютого 2017р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Матюшиній Катерині Юріївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема «Дослідження параметрів якості систем масового обслуговування»,

науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор

Пилипенко А.Ю. ,

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від « 22 » березня 2017 р. № 1197-с

2. Термін подання студентом дисертації: 11.06.2017р.

3. Об'єкт дослідження: випадкове блукання з відбиттям.

4. Предмет дослідження: ймовірність досягнення одного екрану раніше ніж другого, середній час досягнення множини.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомитись із теорією випадкових блукань;

2) знайти рівняння для ймовірності досягнення множини, а також рівняння для середнього часу досягнення множини;

3)дослідити випадкові блукання з відбиваючими екранами зі стрибком, що не перевищує 2;

4) розв'язати задачі про асимптотичну поведінку характеристик систем масового обслуговування в залежності від ємності буферу.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 15 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій – 1

8. Дата видачі завдання: 08.02.2017р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Вивчення теорії випадкових блукань	09.02.2017-10.03.2017	виконала
2	Знаходження рівняння для ймовірності досягнення множини, а також рівняння для середнього часу досягнення множини	13.03.2017-24.03.2017	виконала
3	Дослідження випадкових блукань з відбиваючими екранами зі стрибком, що не перевищує 2. Розв'язування задач про асимптотичну поведінку характеристик систем масового обслуговування.	27.03.2017-09.04.2017	виконала
4	Підготовка до виступу на конференції	10.04.2017-20.04.2017	виконала
5	Підготовка магістерської дисертації	24.04.2017-09.06.2017	виконала

Студент ____________ Матюшина К.Ю.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ____________ Пилипенко А.Ю.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація: 42 сторінки, 16 посилань

В магістерській дисертації досліджується система масового обслуговування з груповим надходженням та груповою обробкою вимог. Припускатимемо, що ємність буферу скінченна та надлишкові вимоги відкидаються, коли система переповнена.

Мета роботи полягає в знаходженні асимптотичної поведінки ймовірності того, що буфер буде переповнено раніше, ніж черга звільниться від вимог, коли ємність буфера прямує до нескінченності. Також знаходиться асимптотична поведінка середнього часу до переповнення буферу у випадку, коли ємність прямує до нескінченності.

Ключові слова: ланцюг Маркова, ймовірність досягнення множини, рекурентне рівняння, середній час до досягнення множини.

Реферат

Магистерская диссертация: 42 страницы, 16 ссылок

В магистерской диссертации исследуется система массового обслуживания с групповым поступлением и групповой обработкой заявок. Предполагаем, что емкость буфера конечна и избыточные заявки отбрасываются, когда буфер переполнен.

Цель работы состоит в нахождении асимптотического поведения вероятности того, что буфер будет переполнен раньше, чем очередь освободится от заявок. Также найдено асимптотическое поведение среднего времени до переполнения буфера в случае, когда емкость буфера стремится к бесконечности.

Ключевые слова: цепь Маркова, вероятность достижения множества, рекуррентное уравнение, среднее время до достижения множества.

Abstract

Master’s thesis: 42 pages, 16 links

The queuing system with group arrivals and group processing claims is considered in the master’s thesis. It is assumed that the buffer size is fined and surplus claims are rejected if the system is overloaded.

The aim of the thesis is to find the asymptotic behavior of the probability that the buffer is overloaded before the moment when the system is free of claims as the buffer size tends to infinity. Also the asymptotic behavior of the mean time until the buffer is overload is studied.

Key words: Markov chain, the probability of hitting a set, the recurrent equation, the expectation of hitting time.

ЗМІСТ

Вступ

Теорія випадкових процесів виникла на початку минулого століття. Її пов'язують з іменами таких вчених як А.Н. Колмогоров, О.Я.Хинчин, Є.Є.Слуцький, Н.Вінер та А.А. Марков.

Випадковий процес визначається зазвичай як сукупність випадкових величин. На даний час у світі спостерігається величезна кількість випадкових величини. Вони залежать від одного або декількох параметрів, які змінюються неперервно. Основна задача даної теорії полягає у вивчені структури, а також закономірностей таких величин. Випадкові процеси знаходять своє застосування у таких галузях як хімія, фізика, теорія інформації, теорія обробки сигналів та багатьох інших. Одними з прикладів випадкових процесів є випадкові блукання та марковські процеси.

Випадкове блукання – це математична модель процесу випадкових змін, тобто кроків у дискретні моменти часу, причому, припускається, що зміни на кожному кроці, не залежать від попередніх та від часу. Найчастіше розглядаються випадкові блукання, які є ланцюгами Маркова.

Марковський процес – це процес, при якому «майбутнє» залежить тільки від «теперішнього», та не залежить від «минулого» стану. Властивість, яка описує марковський процес, називають властивістю Маркова. Вперше цю властивість сформулював відомий математик А.А. Марков. У 1907 році саме він поклав початок у вивченні послідовностей залежних випробувань.

Також випадкові процеси дуже широко використовуються в системах масового обслуговування. Перші задачі теорії масового обслуговування були розглянуті співробітником Копенгагенської телефонної компанії Агнером Ерлангом. Основним завданням було впорядкувати роботу телефонної станції та заздалегідь розрахувати якість обслуговування споживачів залежно від кількості пристроїв, які використовувалися.

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення та вивчення залежностей між характером потоку заявок, кількістю каналів обслуговування, продуктивністю окремого каналу, якісним та ефективним обслуговуванням, для того, щоб відшукати найкращі способи управління процесами обслуговування. Часто процес функціонування системи масового обслуговування є марковським випадковим процесом.

Отже, системи масового обслуговування – це системи, до яких у випадкові моменти часу надходять вимоги на обслуговування, при цьому вимоги, що надійшли, виконуються за допомогою наявних в розпорядженні системи каналів обслуговування. Основними задачами є знаходження стаціонарного розподілу, середнього часу обслуговування, довжини середньої черги, ймовірності втрати вимоги і таке інше.

Великий внесок у розробку теорії масового обслуговування зробили Гнеденко, Коваленко [8], Клімов [9], Ріордан [10], Кокс, Сміт [11], Сааті [12].

В магістерській дисертації розглядається система масового обслуговування з груповим надходженням та груповою обробкою даних. Припускається, що ємність системи дорівнює N та надлишкові вимоги відкидаються, коли система переповнена. В роботі знайдено асимптотичну поведінку ймовірності того, що буфер переповниться раніше, ніж система звільниться від вимог, а також асимптотичну поведінку середнього часу до переповнення буферу, в залежності від ємності буферу.

Також розглянуті приклади ланцюгів Маркова як в загальному випадку, так і для конкретних значень.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Перехідні ймовірності. Ланцюг Маркова. Марковська властивість

Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ – послідовність випадкових величин, які приймають значення в скінченій або зліченій множині E.

Випадковий механізм, який призводить до зміни стану, описується матрицею переходу P з елементами p_{ij}, $i, j \in E$. Елемент p_{ij} дорівнює ймовірності, з якою система перейде із стану i у стан j за одиницю часу.

Таким чином, p_{ij} – це умовна ймовірність того, що система буде знаходитися у стані j в наступний момент часу, при умові, що в даний момент часу, вона знаходиться у стані i. Іншими словами, p_{ij} – перехідна ймовірність [1].

Властивості перехідних ймовірностей [3]:

1. $\forall i, j \in E : 0 \leq p_{ij} \leq 1;$
2. $\forall i : \sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$

Означення 1. Послідовність випадкових величин $\{X_n\}$ називається ланцюгом Маркова з початковим розподілом λ та матрицею перехідний ймовірностей P, якщо $\forall i_0, ..., i_n \in E$ спільний розподіл $P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)$ задається формулою

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} ... p_{i_{n-1} i_n}.$$

В цьому випадку говорять, що $\{X_n\}$ – ланцюг Маркова з параметрами (λ, P).

Теорема 1. Якщо $\{X_n\}$ – ланцюг Маркова з параметрами (λ, P), то

а) Умовна ймовірність

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)$$

дорівнює умовній ймовірності $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ та співпадає з p_{ij}.

б) Ймовірність $P\left(X_n = i\right)$ того, що система знаходиться у стані i в момент n, рівна $\left(\lambda P^n\right)_i$.

в) Елемент $p_{ij}^{(n)}$ матриці P^n співпадає з умовною ймовірністю $P\left(X_{k+n} = j \middle| X_k = i\right)$, тобто задає ймовірність переходу із i в j за n кроків.

г) Ймовірність загального вигляду

$$P\left(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, ..., X_{k_n} = i_n\right)$$

задається наступною формулою

$$P\left(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, ..., X_{k_n} = i_n\right) = \left(\lambda P^{k_1}\right)_{i_1} \left(P^{k_2-k_1}\right)_{i_1 i_2} ... \left(P^{k_n-k_{n-1}}\right)_{i_{n-1} i_n} \text{ [1].}$$

Марковська властивість

Марковська властивість полягає в тому, що ланцюг Маркова стартує наново після будь-якого заданого моменту часу n.

Теорема 2. Нехай $\{X_n\}$ – ланцюг Маркова з параметрами (λ, P). Тоді, $\forall m \geq 1$ та $i \in E$ за умови, що $X_m = i$, процес $\left(X_{m+n}, n \geq 0\right)$ – ланцюг Маркова з параметрами $\left(\delta_i, P\right)$. Зокрема, при умові, що $X_m = i$, випадкові величини $X_{m+1}, X_{m+2}, ...$ не залежать від величин $X_0, ..., X_{m-1}$.

Тобто, іншими словами, минуле $\left(X_0, ..., X_{m-1}\right)$ та майбутнє $\left(X_{m+1}, X_{m+2}, ...\right)$ умовно незалежні при фіксованому теперішньому $\left(X_m = i\right)$ [3].

1.2. Ймовірність досягнення множини. Середній час досягнення множини

Будемо позначати через P_i розподіл ланцюга Маркова $\{X_n\}$, який виходить із стану $i \in E$. Нехай $X(0) = i$, тобто в початковий момент часу, ланцюг Маркова стартує з точки i, та $A \subset E$ – деяка підмножина множини станів.

Момент досягнення τ – це момент часу, коли ланцюг Маркова вперше потрапить в A, тобто

$$\tau = \inf\left\{n \geq 0 : X_n \in A\right\}.$$

Ймовірність досягнення x_i – це ймовірність того, що ланцюг, який стартує з точки i, коли-небудь потрапить в A, тобто

$$x_i = P_i\left(\tau < \infty\right).$$

Теорема 3. При заданій множині $A \subset E$ величини

$$x_i = P_i\left(X\, коли - небудь\, потрапить\, в\, A\right)$$

представляють собою мінімальні невід'ємні розв'язки наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_i = 1, & i \in A, \\ x_i = \sum\limits_{j \in E} p_{ij} x_j, & i \notin A. \end{cases}$$

Нехай $X\left(0\right) = i,\ A, B \subset E$, $A \cap B = \varnothing$. Тоді:

Теорема 4. При заданих множинах $A \subset E$ та $B \subset E$ величини

$$x_i = P_i\left(X\, коли - небудь\, потрапить\, в\, A, не\, відвідуючи\, B\right)$$

представляють собою мінімальні невід'ємні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_i = 1, & i \in A, \\ x_i = 0, & i \in B, \\ x_i = \sum\limits_{j \in E} p_{ij} x_j, & i \notin A,\ i \notin B. \end{cases}$$

Математичне сподівання величини τ позначимо через y_i:

$$y_i = E_i \tau = \sum_{0 < n < \infty} n P_i\left(\tau = n\right) + \infty \cdot P_i\left(\tau = \infty\right).$$

Очевидно, що якщо $P_i\left(\tau = \infty\right) > 0$, то $y_i = \infty$.

Для середнього часу досягнення y_i справедлива наступна теорема.

Теорема 5. При заданій множині $A \subset E$ величини y_i представляють собою мінімальні невід'ємні розв'язки наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y_i = 0, & i \in A, \\ y_i = 1 + \sum\limits_{j \in E} p_{ij} y_j, & i \notin A. \end{cases}$$

Теорема 6. Нехай E – скінченна та $A \subset E$. Припустимо, що $\forall i : i \to A$. Позначимо через $\tau_A = \inf\left\{n \geq 0 : X_n \in A\right\}$ – момент досягнення A.

Тоді

$$\forall i : E_i \tau_A < \infty \text{ [1].}$$

1.3. Стаціонарний розподіл

Нехай $\pi = \left\{\pi_i\right\}_{i \in E}$ – розподіл X_0, тобто $\pi_i = P\left(X_0 = i\right)$.

Означення 2. Розподіл π називається стаціонарним, якщо X_1 також має розподіл π, тобто

$$\forall i : P\left(X_1 = i\right) = P\left(X_0 = i\right) = \pi \text{ [2].}$$

Теорема 7. Нехай $P = \left\| p_{ij} \right\|$ – матриця перехідних ймовірностей ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів $X = \left\{1, 2, ..., N\right\}$. Тоді:

а) Якщо знайдеться n_0 таке, що

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0, \tag{1.1}$$

то існують числа $\pi_1, ..., \pi_N$ такі, що

$$\pi_j > 0, \quad \sum_j \pi_j = 1 \tag{1.2}$$

та для будь-якого $i \in X$

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j, \quad n \to \infty. \tag{1.3}$$

б) Навпаки, якщо існують числа $\pi_1, ..., \pi_N$, які задовольняють умовам (1.2) та (1.3), то знайдеться n_0 таке, що виконується умова (1.1).

в) Числа $\left(\pi_1, ..., \pi_N\right)$ задовольняють системі лінійних рівнянь:

$$\pi_j = \sum_\alpha \pi_\alpha p_{\alpha j}, \; j = 1, ..., N \text{ [3].}$$

1.4. Рекурентні рівняння

Означення 3. Нехай $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ – деяка послідовність цілих чисел та $k=1,2,3,\dots$.

Рівняння вигляду

$$a_{n+k} = x_{k-1}a_{n+k-1} + x_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + x_0 a_n$$

називається рекурентним рівнянням порядку $k \geq 1$, де $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ – невідомі.

Якщо рекурентне рівняння лінійне, тобто

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = 0,$$

де $p_1, p_2, \dots, p_k$ – деякі константи, причому $p_k \neq 0$, то послідовність $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ називається зворотною [5].

Означення 4. Многочлен вигляду

$$P(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \dots + p_k \qquad (1.4)$$

називається характеристичним многочленом для зворотної послідовності $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$.

Корені многочлена $P(x)$ називаються відповідно характеристичними.

Загальним розв’язком рекурентного рівняння є множина всіх послідовностей, що задовольняють дане рекурентне рівняння.

Теорема 8. Якщо:

1) λ – корінь характеристичного многочлена (1.4), то послідовність $\{c\lambda^n\}$, де c – довільна константа, задовольняє лінійне, однорідне рекурентне рівняння.
2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – прості, різні корені характеристичного многочлена (1.4), то загальний розв’язок рекурентного рівняння буде мати вигляд:

   $$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n,$$

   де $c_1, c_2, \dots, c_k$ – довільні константи.

3) λ_i – корінь кратності $\tau_i \left(i = 1, 2, ..., s\right)$ характеристичного многочлена $\left(1.4\right)$, то загальний розв'язок рекурентного рівняння матиме наступний вигляд:

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} \left(c_{i1} + c_{i2}n + ... + c_{i\tau_i} n^{\tau_i - 1}\right) \lambda_i^n ,$$

де c_{ij} – довільні константи [5].

Якщо розв'язок існує, то послідовність $\left\{a_n\right\}_{n=1,2,...}$ називають рекурентною послідовністю порядку k.

Прикладами рекурентних послідовностей є геометрична та арифметична прогресії, послідовність Фібоначчі. Також за допомогою рекурентних співвідношень обчислюють твірну функцію для членів певної послідовності.

Означення 5. Неоднорідним лінійним рекурентним рівняння називається рівняння вигляду

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + ... + p_k a_n = \varphi\left(n\right),\ n = 0,1,2,... , \qquad \left(1.5\right)$$

де $p_1, p_2, ..., p_k$ – задані постійні, причому $p_k \neq 0$ та $\varphi\left(n\right)$ – задана функція від n [4].

Розв'язок неоднорідного лінійного рівняння можна представити у вигляді суми частинного рішення неоднорідного рівняння та загального рішення відповідного лінійного однорідного рівняння.

Якщо $\varphi\left(n\right) = \beta^n$, де β^n – характеристичний корінь, то підставляючи $a_n = c\beta^n$ у рівняння $\left(1.5\right)$, отримаємо:

$$c\beta^n g\left(\beta\right) = \beta^n ,$$

де c – деяка стала, $g\left(\beta\right)$ – характеристичний многочлен.

Тобто маємо, що $cg\left(\beta\right) = 1$, тому $a_n = \frac{1}{g\left(\beta\right)}\beta^n$ – частинний розв'язок.

Якщо $\varphi(n)$ є многочленом від n степені k та 1 не є коренем характеристичного многочлена, то частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$a_n = \sum_{i=0}^{k} b_i n^i .$$

Якщо $\varphi(n) = \alpha^n$ та $\alpha \neq 0$ – корінь характеристичного многочлена (1.4) кратності l, то частинний розв'язок буде мати наступний вигляд:

$$a_n = cn^{(l)}\alpha^n,$$

де $n^{(l)}$ – мультиплікативна функція [4].

Розділ 2. Дослідження системи масового обслуговування

2.1. Постановка задачі

Розглядається система масового обслуговування з груповим надходженням та груповою обробкою даних. Припускатимемо, що ємність системи дорівнює N та надлишкові вимоги відкидаються, коли система переповнена.

Позначимо через $X_n \in E = \{0, 1, ..., N\}$ кількість вимог в системі в момент $n \geq 0$. Припустимо, що $\{X_n\}$ є ланцюгом Маркова зі стрибком, що не перевищує $m \leq N$.

Нехай величина стрибка в множині $\{m, ..., N-m\}$ має розподіл ξ, тобто

$$p_{i,i+j} = P(\xi = j),\ \ m \leq i \leq N-m,\ \sum_{j=-m}^{m} p_j = 1.$$

Можемо інтерпретувати ξ таким чином:
якщо $\xi \geq 0$, то прилад працює на прийом вимог, якщо $\xi < 0$ – на обробку вимог. В цьому випадку, ξ – кількість вимог, що надійшли або обробилися відповідно.

Якщо $i \in \{N-m+1, ..., N\}$ та надходить велика кількість вимог, так, що сукупна кількість вимог в системі перевищує N, то надлишкові вимоги відкидаються. З математичної точки зору, будемо припускати, що

$$p_{i,i+j} = P(\xi = j),\ -m \leq j \leq N-i-1,\ p_{i,N} = P(\xi \geq N-i) = \sum_{j=N-i}^{m} p_j\ .$$

Якщо ж $i \in \{0, ..., m-1\}$ та прилад готовий працювати на обробку, але вимог немає, то вважатимемо, що прилад простоює, тобто

$$p_{i,i+j} = P(\xi = j),\ -i+1 \leq j \leq m,\ p_{i,0} = P(\xi \leq -i) = \sum_{j=-i}^{m} p_j\ .$$

Основним питанням розділу є знаходження ймовірності досягнення блуканням стану N раніше 0 за умови, що воно стартує з точки k, тобто ймовірності того, що буфер переповниться раніше, ніж система звільниться від вимог.

Позначимо через x_k ймовірність досягнення N раніше 0, при старті з k.

Тоді очевидно, що

$$x_0 = 0, \quad x_N = 1 \tag{2.1}$$

Для x_k, $k \in \{m,...,N-m\}$ отримаємо систему рекурентних рівнянь

$$x_k = p_{-m}x_{k-m} + p_{-m+1}x_{k-m+1} + ... + p_0 x_k + p_1 x_{k+1} + ... p_m x_{k+m} \tag{2.2}$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} x_{N-1} = p_{-m}x_{N-m-1} + p_{-m+1}x_{N-m} + ... + p_0 x_{N-1} + (p_1 + ... + p_m)x_N \\ x_{N-2} = p_{-m}x_{N-m-2} + p_{-m+1}x_{N-m-1} + ... + p_0 x_{N-2} + p_1 x_{N-1} + (p_2 + ... + p_m)x_N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ x_{N-m} = p_{-m}x_{N-2m} + p_{-m+1}x_{N-2m+1} + ... + p_0 x_{N-m} + p_1 x_{N-m+1} + ... + p_m x_N \\ x_1 = p_0 x_1 + p_1 x_2 + p_2 x_3 + ... + p_m x_{m+1} \\ x_2 = p_{-1}x_1 + p_0 x_2 + p_1 x_3 + ... + p_m x_{m+2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ x_{m-1} = p_{-m+2}x_1 + p_{-m+3}x_2 + ... + p_0 x_{m-1} + p_1 x_m + ... + p_m x_{2m-1} \end{cases} \tag{2.3}$$

Для рівняння (2) запишемо відповідне характеристичне рівняння :

$$1 = p_{-m}\lambda^{-m} + p_{-m+1}\lambda^{-m+1} + ... + p_0\lambda^0 + p_1\lambda + ... + p_m\lambda^m \tag{2.4}$$

Домноживши обидві частини рівняння (2.4) на λ^m, отримаємо:

$$\lambda^m = p_{-m} + p_{-m+1}\lambda + p_{-m+2}\lambda^2 + ... + p_0\lambda^m + p_1\lambda^{m+1} + ... + p_m\lambda^{2m}.$$

Перенісши λ^m вправо та звівши подібні доданки, отримаємо остаточне характеристичне рівняння наступного вигляду:

$$p_m\lambda^{2m} + p_{m-1}\lambda^{2m-1} + ... + p_1\lambda^{m+1} + (p_0 - 1)\lambda^m + p_{-1}\lambda^{m-1} + ... + p_{-m} = 0,$$

де $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_m| < |\lambda_{m+1}| \le ... \le |\lambda_{2m}|$ – корені даного характеристичного рівняння.

Припустимо, що $E\xi \ne 0$ та всі корені різні. Можна перевірити, що λ_m або λ_{m+1} дорівнює 1, якщо $E\xi < 0$ або $E\xi > 0$, відповідно.

Загальний розв'язок (2.2) буде мати наступний вигляд:

$$x_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + ... + c_{2m}\lambda_{2m}^k \qquad (2.5)$$

Підставляючи (4) у (1), (2.1) отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + ... + c_{2m} = 0, \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + ... + \alpha_{2,2m}c_{2m} = 0, \\ ... \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + ... + \alpha_{m,2m}c_{2m} = 0, \\ \lambda_1^N c_1 + \lambda_2^N c_2 + ... + \lambda_{2m}^N c_{2m} = 1, \\ ... \\ \lambda_1^N \alpha_{2m-1,1}c_1 + \lambda_2^N \alpha_{2m-1,2}c_2 + ... + \lambda_{2m}^N \alpha_{2m-1,2m}c_{2m} = -p_{m-2} - p_{m-1} - p_m, \\ \lambda_1^N \alpha_{2m,1}c_1 + \lambda_2^N \alpha_{2m,2}c_2 + ... + \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m}c_{2m} = -p_{m-1} - p_m. \end{cases} \qquad (2.6)$$

де $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, ..., \alpha_{2m}$ – певні константи.

Знайдемо асимптотичну поведінку $x_k = x_k^{(N)}$ при $N \to \infty$, якщо $E\xi < 0$.

Розв'яжемо систему (2.6) методом Крамера, попередньо записавши її у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2,2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{m,2m} \\ \lambda_1^N & \lambda_2^N & & \lambda_{2m}^N \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^N \alpha_{2m-1,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m-1,2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m-1,2m} \\ \lambda_1^N \alpha_{2m,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m,2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \\ c_{m+1} \\ ... \\ c_{2m-1} \\ c_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ -p_{m-2} - p_{m-1} - p_m \\ -p_{m-1} - p_m \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що $c_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, де Δ – визначник системи (2.6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{m,2m} \\ \lambda_1^N & \lambda_2^N & \dots & \lambda_{2m}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^N \alpha_{2m-1,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m-1,2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m-1,2m} \\ \lambda_1^N \alpha_{2m,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m,2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix},$$

Δ_k – визначник матриці, яка формується з матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{m,2m} \\ \lambda_1^N & \lambda_2^N & & \lambda_{2m}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^N \alpha_{2m-1,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m-1,2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m-1,2m} \\ \lambda_1^N \alpha_{2m,1} & \lambda_2^N \alpha_{2m,2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix},$$

замінною k-го стовпчика на вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ -p_{m-2} - p_{m-1} - p_m \\ -p_{m-1} - p_m \end{pmatrix}$.

Використовуючи умову, що $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_m| = 1 < |\lambda_{m+1}| \le ... \le |\lambda_{2m}|$, можна зробити висновок, що даний визначник еквівалентний наступному:

$$\Delta \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{m+1}^N & \lambda_{m+2}^N & ... & \lambda_{2m}^N \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{m+2,m+1} & \lambda_{m+2}^N \alpha_{m+2,m+2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{2m,m+1} & \lambda_{m+2}^N \alpha_{2m,m+2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| \cdot |B| \cdot \lambda_{m+1}^N \cdot ... \cdot \lambda_{2m}^N, \ N \to \infty,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{m+2,m+1} & \alpha_{m+2,m+2} & ... & \alpha_{m+2,2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{2m,m+1} & \alpha_{2m,m+2} & ... & \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Помітимо, що

$$\Delta_1 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2,m+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & ... & \alpha_{m,m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{m+2}^N & ... & \lambda_{2m}^N \\ -p_0 - p_1 - ... - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{m+2,m+2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ -p_{m-1} - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{2m,m+2} & ... & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_1| \cdot |B_1| \cdot \lambda_{m+2}^N \cdot ... \cdot \lambda_{2m}^N, \ N \to \infty,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{m,m+1} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \alpha_{m+2,m+2} & \dots & \alpha_{m+2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{m-1} - p_m & \alpha_{2m,m+2} & \dots & \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix}.$$

Також,

$$\Delta_2 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{m,m+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{m+2}^N & \dots & \lambda_{2m}^N \\ -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{m+2,m+2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{m-1} - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{2m,m+2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_2| \cdot |B_2| \cdot \lambda_{m+2}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N, \; N \to \infty,$$

де

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{m,m+2} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \alpha_{m+2,m+2} & \dots & \alpha_{m+2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{m-1} - p_m & \alpha_{2m,m+2} & \dots & \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix}.$$

Помічаємо, що

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_m = B_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -p_0 - p_1 - \ldots - p_m & \alpha_{m+2,m+2} & \ldots & \alpha_{m+2,2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{m-1} - p_m & \alpha_{2m,m+2} & \ldots & \alpha_{2m,2m} \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Отже, для $1 \le k \le m$ маємо:

$$\Delta_k \sim \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2,k-1} & \alpha_{2,k+1} & \ldots & \alpha_{2,m+1} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{m,k-1} & \alpha_{m,k+1} & \ldots & \alpha_{m,m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{m+2}^N & \ldots & \lambda_{2m}^N \\ -p_0 - p_1 - \ldots - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{m+2,m+2} & \ldots & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{m-1} - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{2m,m+2} & \ldots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_k| \cdot |B_k| \cdot \lambda_{m+2}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N,$$

де матриця A_k одержується з матриці A заміною k-го стовпчика на вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ -p_{m-2} - p_{m-1} - p_m \\ -p_{m-1} - p_m \end{pmatrix}$ з матриці C.

Матриця C має наступний вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_{2,m} & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2,2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_{2m} \end{pmatrix}.$$

Тоді можна побачити, що

$$c_k^{(N)} = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{|A_k| \cdot |B_k|}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{\lambda_{m+1}^N}, \; N \to \infty, \; k = \overline{1,m} \qquad (2.10)$$

Далі знайдемо наступні визначники:

$$\Delta_{m+1} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{m+2}^N & \dots & \lambda_{2m}^N \\ -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{m+2,m+2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{m-1} - p_m & \lambda_{m+2}^N \alpha_{2m,m+2} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| \cdot |B_{m+1}| \cdot \lambda_{m+2}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N,\ N \to \infty.$$

$$\Delta_{m+2} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{m+1}^N & 1 & \dots & \lambda_{2m}^N \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{m+2,m+1} & -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{2m,m+1} & -p_{m-1} - p_m & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| \cdot |B_{m+2}| \cdot \lambda_{m+2}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N,\ N \to \infty.$$

Помітимо, що перший множник $|A|$ не залежить від k.

Аналогічно запишемо для Δ_k:

$$\Delta_k \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \lambda_{m+1}^N & \dots & \lambda_{k-1}^N & 1 & \lambda_{k+1}^N & \dots & \lambda_{2m}^N \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{m+1,m+1} & \dots & \lambda_{k-1}^N \alpha_{m+1,k-1} & -p_0 - p_1 - \dots - p_m & \lambda_{k+1}^N \alpha_{m+1,k+1} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{m+1,2m} \\ \vdots & & & \dots & & & \\ \lambda_{m+1}^N \alpha_{2m,m+1} & \dots & \alpha_{m,k-1} & -p_{m-1} - p_m & \lambda_{k+1}^N \alpha_{2m,k+1} & \dots & \lambda_{2m}^N \alpha_{2m,2m} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| \cdot |B_k| \cdot \lambda_{m+1}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}^N \cdot \lambda_{k+1}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N,\ N \to \infty,$$

де матриця B_k одержується з матриці B заміною k-го стовпчика на вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ -p_{m-2} - p_{m-1} - p_m \\ -p_{m-1} - p_m \end{pmatrix}.$$

Тоді для $c_k^{(N)}$ отримаємо вираз:

$$c_k^{(N)} = \frac{\Delta_k}{\Delta} \sim \frac{|A| \cdot |B_k| \cdot \lambda_{m+1}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}^N \cdot \lambda_{k+1}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N}{|A| \cdot |B| \cdot \lambda_{m+1}^N \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m}^N} = \frac{|B_k|}{|B| \cdot \lambda_k^N},\ N \to \infty,\ \ k = \overline{m+1, 2m} \qquad (2.11)$$

Таким чином, з формул (2.5), (2.10) і (2.11) випливає, що, якщо $E\xi < 0$, то ймовірності $x_j^{(N)}$ мають таку асимптотичну поведінку при $N \to \infty$:

$$x_j^{(N)} = \sum_{k=1}^{2m} c_k \left(\lambda_k\right)^j = \sum_{k=1}^{m} \frac{|A_k| \cdot |B_k|}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{\lambda_{m+1}^N} \cdot \lambda_k^j \left(1 + o(1)\right) + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{|B_k|}{|B|} \cdot \frac{1}{\lambda_k^N} \cdot \lambda_k^j \left(1 + o(1)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \lambda_k^j}{\lambda_{m+1}^N} \left(1 + o(1)\right) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{2m} a_k \frac{\lambda_k^j}{\lambda_k^N} \left(1 + o(1)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} a_k \cdot \lambda_k^j}{\lambda_{m+1}^N} \left(1 + o(1)\right),\ N \to \infty,$$

де $a_k = \dfrac{|A_k| \cdot |B_{m+1}|}{|A| \cdot |B|}$, матриці $A,\ B$ задані формулами (2.7), (2.8) та матриця B_{m+1} – формулою (2.9).

Сформулюємо одержаний результат як теорему:

Теорема. *Якщо* $E\xi < 0$*, то ймовірність того, що буфер буде переповнено раніше, ніж система звільниться від вимог, має таку асимптотику:*

$$x_j^{(N)} = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} a_k \cdot \lambda_k^j}{\lambda_{m+1}^N} \left(1 + o(1)\right),\ N \to \infty,$$

де

$$a_k = \frac{|A_k| \cdot |B_{m+1}|}{|A| \cdot |B|}.$$

2.2. Приклади

Розглянемо приклади:

Приклад 1.

Візьмемо $m=1$. Припускатимемо, що $E\xi<0$.

Для x_i запишемо рекурентне рівняння

$$x_i = p_{-1}x_{i-1} + p_0 x_i + p_1 x_{i+1}$$

з граничними умовами

$$x_0 = 0,\ x_N = 1.$$

Запишемо характеристичний многочлен для x_i:

$$p_1\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + p_{-1}.$$

Знайдемо корені даного многочлена, розв’язавши квадратне рівняння

$$p_1\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + p_{-1} = 0 \qquad (2.12)$$

Знайдемо дискримінант рівняння (2.12)

$$D = (p_0 - 1)^2 - 4p_1p_{-1} = (p_0 - p_{-1} - p_0 - p_1)^2 - 4p_1p_{-1} = (p_{-1} - p_1)^2,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{(p_{-1} - p_1)^2} = |p_{-1} - p_1|.$$

Оскільки $E\xi = p_1 - p_{-1} < 0$, то

$$\sqrt{D} = p_{-1} - p_1.$$

Тому

$$\lambda_1 = \frac{1 - p_0 - p_{-1} + p_1}{2p_1} = 1,$$
$$\lambda_2 = \frac{1 - p_0 + p_{-1} - p_1}{2p_1} = \frac{p_{-1}}{p_1}.$$

Загальний розв’язок для x_i буде мати вигляд:

$$x_i = c_1 + c_2\left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^i. \qquad (2.13)$$

Знайдемо коефіцієнти c_1 та c_2, підставивши граничні умови у рівність (2.13):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 \left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N = 1. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Розв'яжемо систему (2.14) методом підстановки, тобто:

$$\begin{cases} c_1 = -c_2; \\ -c_2 + c_2 \left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2; \\ c_2 \left(\left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N - 1 \right) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2; \\ c_2 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N - 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N}; \\ c_2 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N - 1}. \end{cases}$$

Отже,

$$x_i = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N} + \frac{1}{\left(\dfrac{p_{-1}}{p_1} \right)^N - 1} \cdot \left(\frac{p_{-1}}{p_1} \right)^i, \ N \to \infty .$$

Приклад 2.

Візьмемо $m = 2$. Нехай $p_{-2} = 0.3,\ p_{-1} = 0.3,\ p_0 = 0.1,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.1$ – перехідні ймовірності.

Тоді

$$E\xi - 0.6 - 0.3 + 0.2 + 0.2 = -0.5 < 0 .$$

Для x_i запишемо рекурентне рівняння

$$x_i = p_{-2} x_{i-2} + p_{-1} x_{i-1} + p_0 x_i + p_1 x_{i+1} + p_2 x_{i+2}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} & x_0 = 0,\ x_N = 1, \\ & x_1 = 0.1 \cdot x_3 + 0.2 \cdot x_2 - 0.9 \cdot x_1, \\ & x_{N-1} = 0.3 \cdot x_{N-3} + 0.3 \cdot x_{N-2} - 0.9 \cdot x_{N-1} + 0.2 + 0.1. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Запишемо характеристичний многочлен

$$p_2 x_{i+2} + p_1 x_{i+1} + (p_0 - 1) x_i + p_{-1} x_{i-1} + p_{-2} x_{i-2} = 0 .$$

Розв'язавши рівняння

$$p_2\lambda^4 + p_1\lambda^3 + \left(p_0 - 1\right)\lambda^2 + p_{-1}\lambda + p_{-2} = 0$$

отримаємо, що

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.4, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 1.7. \\ \lambda_4 &= -4.2 \end{aligned}$$

Загальний розв'язок для x_i буде мати вигляд:

$$x_i = c_1\left(-0.4\right)^i + c_2 + c_3\left(1.7\right)^i + c_4\left(-4.2\right)^i \qquad (2.16)$$

Підставляючи (2.16) у (2.15), отримаємо наступну систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.7856 & 1.6 & 2.1607 & -4.0992 \\ \left(-0.4\right)^N & 1 & \left(1.7\right)^N & \left(-4.2\right)^N \\ -1.9375\cdot\left(-0.4\right)^N & 1.3 & 0.9572\cdot\left(1.7\right)^N & -0.6292\cdot\left(-4.2\right)^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначники:

$$\Delta \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -0.7856 & 1.6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \left(1.7\right)^N & \left(-4.2\right)^N \\ 0.9572\cdot\left(1.7\right)^N & -0.6292\cdot\left(-4.2\right)^N \end{vmatrix} \approx -3.78\cdot\left(1.7\right)^N\cdot\left(-4.2\right)^N,$$

$$\Delta_1 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1.6 & 2.1607 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \left(-4.2\right)^N \\ 0.3 & -0.6292\cdot\left(-4.2\right)^N \end{vmatrix} \approx -0.521\cdot\left(-4.2\right)^N,$$

$$\Delta_2 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -0.78562. & 2.1607 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \left(-4.2\right)^N \\ 0.3 & -0.6292\cdot\left(-4.2\right)^N \end{vmatrix} \approx -2.738\cdot\left(-4.2\right)^N,$$

$$\Delta_3 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -0.7856 & 1.6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \left(-4.2\right)^N \\ 0.3 & -0.6292\cdot\left(-4.2\right)^N \end{vmatrix} \approx -2.217\cdot\left(-4.2\right)^N,$$

$$\Delta_4 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -0.7856 & 1.6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \left(1.7\right)^N & 1 \\ 0.9572\cdot\left(1.7\right)^N & 0.3 \end{vmatrix} \approx -1.568\cdot\left(1.7\right)^N.$$

Отже,

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \approx \frac{-0.521 \cdot (-4.2)^N}{-3.78 \cdot (1.7)^N \cdot (-4.2)^N} = \frac{0.138}{(1.7)^N},$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \approx \frac{-2.738 \cdot (-4.2)^N}{-3.78 \cdot (1.7)^N \cdot (-4.2)^N} = \frac{0.724}{(1.7)^N},$$

$$c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \approx \frac{-2.217 \cdot (-4.2)^N}{-3.78 \cdot (1.7)^N \cdot (-4.2)^N} = \frac{0.587}{(1.7)^N},$$

$$c_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} \approx \frac{-1.568 \cdot (1.7)^N}{-3.78 \cdot (1.7)^N \cdot (-4.2)^N} = \frac{0.415}{(-4.2)^N}.$$

Тому,

$$x_i^{(N)} \sim \frac{1}{(1.7)^N} \cdot \left(0.138 \cdot (-0.4)^i + 0.724 + 0.587 \cdot (1.7)^i\right),\ N \to \infty.$$

2.3. Асимптотика середнього часу до переповнення, в залежності від розміру буфера

Нехай $X_0 = i$, ємність буферу дорівнює N.

Знайдемо асимптотичну поведінку середнього часу до переповнення буферу при $N \to \infty$.

Момент переповнення – це момент, коли вихідний ланцюг Маркова досягає точки N. Позначимо середній час до переповнення буферу через $y_i = y_i^{(N)}$.

Тоді y_i можна знайти із системи рекурентних лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y_N = 0 , \\ y_i = 1 + \sum_j p_{ij} y_j . \end{cases} \tag{2.17}$$

Якщо $m \le i \le N - m$, то

$$y_i = 1 + \sum_{j=-m}^{m} p_j y_{i+j} \tag{2.18}$$

Система (17) – система рекурентних рівнянь.

Якщо $i < m$, то

$$y_i = 1 + \sum_{j=-i+1}^{m} p_j y_{i+j} + \left(\sum_{j=-m}^{-i} p_j \right) y_0 \tag{2.19}$$

Якщо $i > N - m$, то

$$y_i = 1 + \sum_{j=-m}^{N-i-1} p_j y_{i+j} \tag{2.20}$$

Системи (2.19), (2.20) можна розглядати як граничні умови для системи (2.18).

Розв'язок лінійної неоднорідної системи можна знайти як суму:

$$y_i = y_i^{ч.н.} + y_i^{з.о.},$$

де $y_i^{ч.н.}$ – частинний розв'язок даного рівняння, $y_i^{з.о.}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння.

Будемо шукати частинний розв'язок неоднорідної системи $y_i^{ч.н.}$ у вигляді:

$$y_i^{ч.н.} = A \cdot i .$$

Підставляючи $y_i^{ч.н.}$ у друге рівняння системи (2.17), отримаємо:

$$y_i = A \cdot i = 1 + \sum_{k=-m}^{m} p_k A(i+k) = 1 + A \cdot i \cdot \sum_{k=-m}^{m} p_k + A \cdot \sum_{k=-m}^{m} kp_k = 1 + A \cdot i + A \cdot \sum_{k=-m}^{m} kp_k .$$

Зробивши елементарні перетворення, отримаємо:

$$A = -\frac{1}{\sum\limits_{k=-m}^{m} kp_k} = -\frac{1}{E\xi},$$

де ξ – стрибок.

Отже, ми визначили, що

$$y_i^{ч.н.} = -\frac{i}{E\xi} .$$

Нагадаємо, що загальний однорідний розв'язок має наступний вигляд:

$$y_i^{з.о.} = \sum_{k=1}^{2m} c_k \left(\lambda_k\right)^i ,$$

де c_k – невизначені коефіцієнти.

Отже, загальний розв'язок для y_i буде мати вигляд:

$$y_i = -\frac{i}{E\xi} + \sum_{k=1}^{2m} c_k \left(\lambda_k\right)^i ,$$

де c_k знаходяться із систем (2.19)–(2.20).

Розглянемо лише приклади знаходження розв'язку задачі про асимптотику середнього часу у випадку, коли $m=1$ або $m=2$.

Приклад 3.

Візьмемо $m=1$. Тоді:

$$\begin{cases} y_N = 0, \\ y_i = 1 + c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i. \end{cases}$$

Розв'язок y_i знаходиться як сума:

$$y_i = y_i^{ч.н.} + y_i^{з.о.},$$

де

$$y_i^{ч.н.} = -\frac{i}{E\xi},\ y_i^{з.о.} = c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i.$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$E\xi = -1\cdot p_{-1} + 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 = p_1 - p_{-1},$$

де p_{-1}, p_0, p_1 – перехідні ймовірності.

З прикладу 1 , ми знаємо, що $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \dfrac{p_{-1}}{p_1}$.

Підставляючи граничні умови у y_i, отримаємо:

$$y_0 = 1 + p_1 y_1 + \left(p_0 + p_{-1}\right) y_0,$$

$$-\frac{0}{E\xi} + c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 = 1 + p_1\left(-\frac{1}{E\xi} + c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1\right) + \left(p_0 + p_{-1}\right)\left(-\frac{0}{E\xi} + c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0\right),$$

$$c_1 + c_2 = 1 + p_1\left(-\frac{1}{E\xi} + c_1 + c_2\left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)\right) + \left(p_0 + p_{-1}\right)\left(c_1 + c_2\right).$$

Перенісши доданок $\left(p_0 + p_{-1}\right)\left(c_1 + c_2\right)$ з правої частини рівності до лівої та зробивши певні перетворення, будемо мати:

$$p_1\left(c_1 + c_2\right) = 1 + p_1\left(-\frac{1}{E\xi} + c_1 + c_2\left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)\right).$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$p_1c_1 + p_1c_2 = 1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi} + p_1 \cdot c_1 + p_{-1} \cdot c_2,$$

$$p_1c_2 - p_{-1} \cdot c_2 = 1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi},$$

$$c_2\left(p_1 - p_{-1}\right) = 1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}.$$

Помічаємо, що $p_1 - p_{-1} = E\xi$, тому

$$c_2 \cdot E\xi = 1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi} \Rightarrow c_2 = \left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \frac{1}{E\xi}.$$

Знайдемо тепер y_N :

$$y_N = -\frac{N}{E\xi} + c_1\lambda_1^N + c_2\lambda_2^N.$$

Підставимо $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{p_{-1}}{p_1}$:

$$y_N = -\frac{N}{E\xi} + c_1 + c_2\left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^N$$

Оскільки $y_N = 0$, будемо мати:

$$-\frac{N}{E\xi} + c_1 + c_2\left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^N = 0 \qquad (2.21)$$

Підставляючи отримане значення c_2 у рівність (2.21), отримаємо:

$$c_1 = \frac{N}{E\xi} - \left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^N \cdot \frac{1}{E\xi}.$$

Отже,

$$y_i = -\frac{i}{E\xi} + \frac{N}{E\xi} - \left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^N \cdot \frac{1}{E\xi} + \left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \frac{1}{E\xi} \cdot \left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^i.$$

Якщо i – фіксоване, то

$$y_i = y_i^{(N)} \sim -\left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \left(\frac{p_{-1}}{p_1}\right)^N \cdot \frac{1}{E\xi} = c \cdot \lambda_2^N,\ N \to \infty,$$

де $c = -\left(1 - p_1 \cdot \frac{1}{E\xi}\right) \cdot \frac{1}{E\xi}$, $\lambda_2 = \frac{p_{-1}}{p_1}$.

Нагадаємо, що $E\xi = p_1 - p_{-1}$, тому $c = \frac{p_{-1}}{\left(p_1 - p_{-1}\right)^2}$.

З одержаних результатів, можна сформулювати наступну теорему:

Теорема. *Нехай $m = 1$, $E\xi < 0$. Середній час до переповнення буферу у випадку, коли ємність буферу дорівнює N, має наступну асимптотику:*

$$y_i^{(N)} \sim c \cdot \lambda_2^N,\ N \to \infty,$$

де

$$c = \frac{p_{-1}}{\left(p_1 - p_{-1}\right)^2}, \lambda_2 = \frac{p_{-1}}{p_1}.$$

Приклад 4.

Нехай $m = 2$ та $E\xi < 0$.

Припустимо, що $p_{-2} = 0,\ p_{-1} > 0,\ p_2 > 0,\ p_1 > 0,\ p_{-1} + p_0 + p_1 + p_2 = 1.$

Тоді:

$$\begin{cases} y_N = 0, \\ y_i = 1 + c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i + c_3\lambda_3^i. \end{cases}$$

Запишемо характеристичний многочлен для y_i:

$$p_2\lambda^3 + p_1\lambda^2 + \left(p_0 - 1\right)\lambda + p_{-1} \tag{2.22}$$

Легко побачити, що $\lambda_1 = 1$ – корінь даного многочлена.

Знайдемо інші корені, поділивши (2.22) на $\lambda - 1$. Отримаємо многочлен наступного вигляду:

$$p_2\lambda^2 + \left(p_1 + p_2\right)\lambda - p_{-1}. \tag{2.23}$$

Знайдемо корені многочлена (2.23), розв'язавши квадратне рівняння

$$p_2\lambda^2+(p_1+p_2)\lambda-p_{-1}=0 \qquad (2.24)$$

Знайдемо дискримінант рівняння (2.24):

$$D=(p_1+p_2)^2-4\cdot p_2\cdot(-p_{-1})=(p_1+p_2)^2+4\cdot p_2\cdot p_{-1}.$$

Оскільки $p_{-1}>0, p_2>0, p_1>0$, то очевидно, що $D>0$.

Знайдемо λ_2 та λ_3:

$$\lambda_2=\frac{-(p_1+p_2)+\sqrt{D}}{2p_2},\quad \lambda_3=\frac{-(p_1+p_2)-\sqrt{D}}{2p_2}$$

де

$$D=(p_1+p_2)^2+4\cdot p_2\cdot p_{-1}.$$

Перевіримо, що $|\lambda_3|>|\lambda_2|>1$. Перша нерівність очевидна. Для доведення того, що $|\lambda_2|>1$ досить перевірити, що

$$\sqrt{D}-(p_1+p_2)>2p_2.$$

Виконаємо певні елементарні перетворення:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{D}>3p_2+p_1,\\
&D>(3p_2+p_1)^2,\\
&(p_1+p_2)^2+4\cdot p_2\cdot p_{-1}>(3p_2+p_1)^2,\\
&p_1^2+2p_1p_2+p_2^2+4p_2p_{-1}>9p_2^2+6p_1p_2+p_1^2,\\
&4p_2p_{-1}>4p_1p_2+8p_2^2.
\end{aligned}$$

Скоротивши останній вираз на множник $4p_2$, отримаємо:

$$p_{-1}>p_1+2p_2 \qquad (2.25)$$

Твердження (24) є істинним, оскільки $E\xi=-p_{-1}+p_1+2p_2<0$.

Тому, дійсно,

$$|\lambda_3|>|\lambda_2|>1.$$

Оскільки $\lambda_1 = 1$, тоді

$$\begin{cases} y_N = 0, \\ y_i = 1 + c_1 + c_2\lambda_2^i + c_3\lambda_3^i. \end{cases}$$

Аналогічно попередньому прикладу

$$y_i = y_i^{ч.н.} + y_i^{з.о.},$$

де

$$y_i^{ч.н.} = -\frac{i}{E\xi},\ y_i^{з.о.} = c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i + c_3\lambda_3^i.$$

Підставимо граничні умови у y_i та отримаємо наступне:

$$y_0 = 1 + p_1 y_1 + p_2 y_2 + (p_0 + p_{-1}) y_0,$$

$$-\frac{0}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^0 + c_3\lambda_3^0 = 1 + p_1\left(-\frac{1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^1 + c_3\lambda_3^1\right) + p_2\left(-\frac{2}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^2 + c_3\lambda_3^2\right) +$$

$$+(p_0 + p_{-1})\left(-\frac{0}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^0 + c_3\lambda_3^0\right),$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 + p_1\left(-\frac{1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^1 + c_3\lambda_3^1\right) + p_2\left(-\frac{2}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^2 + c_3\lambda_3^2\right) + (p_0 + p_{-1})(c_1 + c_2 + c_3).$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні доданки, ми отримаємо:

$$c_2 \cdot \left(p_1 + p_2 - p_2\lambda_2^2\right) + c_3 \cdot \left(p_2 - p_2\lambda_3^2\right) = 1 - \frac{p_1}{E\xi} - \frac{2p_2}{E\xi}.$$

Знайдемо y_{N-1} та y_N:

$$y_{N-1} = -\frac{N-1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^{N-1} + c_3\lambda_3^{N-1},$$

$$1 + p_{-1}y_{N-2} + p_0 y_{N-1} = -\frac{N-1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^{N-1} + c_3\lambda_3^{N-1},$$

$$1 + p_{-1} \cdot \left(-\frac{N-2}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^{N-2} + c_3\lambda_3^{N-2}\right) + p_0 \cdot \left(-\frac{N-1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^{N-1} + c_3\lambda_3^{N-1}\right) =$$

$$= -\frac{N-1}{E\xi} + c_1 + c_2\lambda_2^{N-1} + c_3\lambda_3^{N-1}.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, отримаємо:

$$c_1\left(1-p_{-1}-p_0\right)+c_2\lambda_2^N\left(\lambda_2^{-1}-p_{-1}\lambda_2^{-2}-p_0\lambda_2^{-1}\right)+c_3\lambda_3^N\left(\lambda_3^{-1}-p_{-1}\lambda_3^{-2}-p_0\lambda_3^{-1}\right)=$$
$$=1-p_{-1}\cdot\frac{N-2}{E\xi}+\frac{N-1}{E\xi}\cdot\left(1-p_0\right),$$

$$y_N=-\frac{N}{E\xi}+c_1+c_2\lambda_2^N+c_3\lambda_3^N.$$

Оскільки $y_N=0$, то

$$c_1+c_2\lambda_2^N+c_3\lambda_3^N=\frac{N}{E\xi}.$$

Отже, для $m=2$, ми отримали наступний розв'язок у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 1 & \lambda_2^N & \lambda_3^N\\ c & d\lambda_2^N & e\lambda_3^N\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ BN\left(1+o(1)\right)\\ CN\left(1+o(1)\right)\end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}
&a=p_1+p_2-p_2\lambda_2^2, && A=1-\left(p_1+2p_2\right)\cdot\frac{1}{E\xi},\\
&b=p_2-p_2\lambda_3^2, && \\
&c=1-p_{-1}-p_0, && B=\frac{N}{E\xi},\\
&d=\lambda_2^{-1}-p_{-1}\lambda_2^{-2}-p_0\lambda_2^{-1}, && \\
&e=\lambda_3^{-1}-p_{-1}\lambda_3^{-2}-p_0\lambda_3^{-1}, && C=1+\frac{N}{E\xi}\cdot\left(1-p_0-p_{-1}\right)+\frac{1}{E\xi}\cdot\left(2p_{-1}-1+p_0\right).
\end{aligned}\qquad(2.26)$$

Знайдемо коефіцієнти c_1, c_2, c_3, застосувавши метод Крамера та використовуючи умову, що $1=\left|\lambda_1\right|<\left|\lambda_2\right|<\left|\lambda_3\right|$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 1 & \lambda_2^N & \lambda_3^N\\ c & d\lambda_2^N & e\lambda_3^N\end{vmatrix}=a\left(c-e\right)\lambda_3^N$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}A & a & b\\ B & \lambda_2^N & \lambda_3^N\\ C & d\lambda_2^N & e\lambda_3^N\end{vmatrix}=A\left(e-d\right)\left(\lambda_2\lambda_3\right)^N\quad,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}0 & A & b\\ 1 & B & \lambda_3^N\\ c & C & e\lambda_3^N\end{vmatrix}=A\left(c-e\right)\lambda_3^N,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & A \\ 1 & \lambda_2^N & B \\ c & d\lambda_2^N & C \end{vmatrix} = A(d-c)\lambda_2^N .$$

Отже,

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{A(e-d)(\lambda_2\lambda_3)^N}{a(c-e)\lambda_3^N} = f_1 \cdot \lambda_2^N$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{A(c-e)\lambda_3^N}{a(c-e)\lambda_3^N} = f_2$$

$$c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{A(d-c)\lambda_2^N}{a(c-e)\lambda_3^N} = f_3 \cdot \frac{\lambda_2^N}{\lambda_3^N}$$

де

$$f_1 = \frac{A(e-d)}{a(c-e)} \, , \, f_2 = \frac{A}{a}, \, f_3 = \frac{A(d-c)}{a(c-e)}.$$

Тому,

$$y_i^{(N)} = -\frac{i}{E\xi} + f_1 \cdot \lambda_2^N \left(1+o(1)\right) + f_2 \cdot \lambda_2^i + f_3 \cdot \frac{\lambda_2^N}{\lambda_3^N}\left(1+o(1)\right) \cdot \lambda_3^i = f_1 \cdot \lambda_2^N \left(1+o(1)\right).$$

З одержаних результатів маємо наступну теорему:

Теорема. *Середній час до переповнення буферу у випадку, коли ємність буферу дорівнює* N*, має наступну асимптотику:*

$$y_i^{(N)} \sim f_1 \cdot \lambda_2^N \left(1+o(1)\right), \; N \to \infty ,$$

де

$$f_1 = \frac{A(e-d)}{a(c-e)},$$

коефіцієнти A, a, c, e, d *знаходяться з* (2.26)*,*

$$\lambda_2 = \frac{-(p_1+p_2) + \sqrt{(p_1+p_2)^2 + 4 \cdot p_2 \cdot p_{-1}}}{2p_2}.$$

2.4. Чисельний приклад

Розглянемо чисельний приклад для $m=2$.

Візьмемо, наприклад,

$$p_{-1}=0.8,\ p_0=0,\ p_1=0.1,\ p_2=0.1.$$

Тоді

$$E\xi=-1\cdot 0.8+1\cdot 0.1+2\cdot 0.1=-0.5<0.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння наступного вигляду:

$$0.1\lambda^3+0.1\lambda^2-\lambda+0.8=0 \tag{2.27}$$

Очевидно, що $\lambda_1=1$– корінь даного рівняння, тому поділивши (2.27) на вираз $(\lambda-1)$, отримаємо квадратне рівняння такого вигляду:

$$0.1\lambda^2+0.2\lambda-0.8=0 \tag{2.28}$$

Розв'яжемо рівняння (2.28):

$$D=0.04+0.32=0.36,$$
$$\sqrt{D}=0.6.$$

Тоді

$$\lambda_2=2,$$
$$\lambda_3=-4.$$

Розв'язок для y_i будемо шукати у вигляді суми:

$$y_i=y_i^{ч.н.}+y_i^{з.о.},$$

де

$$y_i^{ч.н.}=-\frac{i}{E\xi}=-\frac{i}{(-0.5)}=2i,\ y_i^{з.о.}=c_1\lambda_1^i+c_2\lambda_2^i+c_3\lambda_3^i.$$

Підставивши всі граничні умови у y_i, як це було зроблено у прикладі 4, ми отримаємо розв'язок у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2^N & (-4)^N \\ c & d\cdot 2^N & e\cdot(-4)^N \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ BN(1+o(1)) \\ CN(1+o(1)) \end{pmatrix},$$

де

$$a = 0.1 + 0.1 - 0.1 \cdot 4 = -0.2,$$
$$b = 0.1 - 0.1 \cdot 16 = -1.5,$$
$$c = 1 - 0.8 = 0.2,$$
$$d = 0.5 - 0.8 \cdot 0.25 = 0.3,$$
$$e = -0.25 - 0.8 \cdot 0.0625 = -0.3,$$

$$A = 1 - (0.1 + 0.2) \cdot \frac{1}{(-0.5)} = 1.6,$$
$$B = -2N,$$
$$C = -0.2 - 0.4N.$$

Отже,

$$c_1 = \frac{1.6 \cdot (-0.3 - 0.3)\left(2 \cdot (-4)\right)^N}{(-0.2) \cdot (0.2 + 0.3)(-4)^N} = 9.6 \cdot 2^N,$$

$$c_2 = \frac{1.6 \cdot (0.2 + 0.3)(-4)^N}{(-0.2) \cdot (0.2 + 0.3)(-4)^N} = -8,$$

$$c_3 = \frac{1.6 \cdot (0.3 - 0.2) \cdot 2^N}{(-0.2)(0.2 + 0.3)(-4)^N} = -1.6 \cdot \frac{2^N}{(-4)^N}.$$

Тому,

$$y_i^{(N)} = 9.6 \cdot 2^N \left(1 + o(1)\right),\ N \to \infty.$$

ВИСНОВКИ

В магістерській дисертації розглядалося випадкове блукання $\{X_n\}$ на множині $E=\{0,1,...,N\}$, зі стрибком, що не перевищує $m \le N$. Було встановлено асимптотичну поведінку ймовірності досягнення блуканням стану N раніше 0 за умови, що вона стартує з фіксованої точки k.

Доведено, що якщо $E\xi < 0$, де ξ – стрибок блукання в $\{m, m+1, ..., N-m\}$, то відповідна ймовірність має таку асимптотику:

$$x_k \sim \frac{\alpha_k}{\lambda_{m+1}^N} \text{ при } N \to \infty,$$

де k – точка старту, λ_{m+1} є $(m+1)$-шим за абсолютною величиною коренем характеристичного рівняння, що відповідає блуканню, α_k – певна константа.

Для середнього часу до досягання N, асимптотикою є

$$y_i \sim \beta_k \cdot \lambda_{m+1}^N \text{ при } N \to \infty.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. М.МЦНМО, 2009. – 588с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Москва: Мир, 1967. – 498 с.
3. Ширяев А. Н. Вероятность. – Москва: МГУ, 1957. – 581 с.
4. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. – Москва: Радио и связь, 1984. – 240 с.
5. Вишенський В.А., Перестюк М.О. Комбінаторика: перші кроки. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2010. – 324 с.
6. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – Москва: Наука, 1975. – 208 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — Москва: Физматгиз, 1961.
8. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – Москва: Наука, 1966. – 429 с.
9. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. – Москва: Наука, 1966. – 242 с.
10. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. – Москва: Связь, 1966. – 175 с.
11. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. – Москва: Мир, 1966. – 213 с.
12. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – Москва: Советское радио, 1965. – 500 с.
13. Матюшина К.Ю. Дослідження параметрів якості систем масового обслуговування, Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 21–22 квітня 2017р., Матеріали конф. С. 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь, Київ, Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2017, 26 с.