НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_____ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)
“___”_____2017 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

на тему: «Спосіб генерування стаціонарних випадкових процесів з обмеженим спектром»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-51м
(шифр групи)

Острійчук Катерина Ростиславівна _____
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, доктор фіз.-мат. наук, професор, Клесов О. І _____
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант _____ _____ _____
(назва розділу) (науковий ступінь, вчене звання, , прізвище, ініціали) (підпис)

Рецензент доктор фіз.-мат. наук, професор, Козаченко Ю. В. _____
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____
(підпис)

Київ – 2017 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут (факультет) фізико-математичний
(повна назва)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_____ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)
«___»_____2017 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Острійчук Катерині Ростиславівній
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації «Спосіб генерування стаціонарних випадкових процесів з обмеженим спектром»,
науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «___»_____ 20__ р. №_____

2. Термін подання студентом дисертації _____

3. Об'єкт дослідження стаціонарні випадкові процеси з обмеженим спектром

4. Предмет дослідження спосіб генерування стаціонарних процесів з обмеженим спектром

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1. Проаналізувати джерела та визначити напрямки для можливого подальшого дослідження даної теми.

2. Дослідити теорему Котельникова-Шеннона.

3. Знайти оцінку наближення скінченного ряду для відновлення процесу з будь якою наперед заданою точністю.

4. Розробити програмне забезпечення, що дозволяє проілюструвати отримані результати.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу приклади роботи комп'ютерної програми, що генерує стаціонарний випадковий процес з обмеженим спектром.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1. Острійчук К. Р. Спосіб генерування стаціонарних випадкових полів з обмеженим спектром: шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017р., Київ: Матеріали конф. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2017. – с. 28.
2. Патент u 2017 01679 Україна,

3. *Прохоренко Н. В., Острійчук К. Р*. Зв'язок між ймовірністю перетину вінерівським процесом певного рівня і ймовірністю перетину полем Ченцова з лінійним зсувом нульового рівня: Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ «КПІ», 2016. – с. 132.
4. *Prokhorenko N. V., Ostriychuk K. R,* On the connection between the probability that Wiener process crossing a curve and the probability that Chentsov random field with a linear drift crossing zero level: п'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні роблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25-26 квітня 2016р., Київ: Тези доповідей. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2016. – с. 19.

8. Консультанти розділів дисертації*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

9. Дата видачі завдання 08.02.2017.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	08.02.2017 – 06.03.2017	виконано
2.	Ознайомлення та дослідження стаціонарних процесів з обмеженим спектром	06.03.2017 – 20.03.2017	виконано

* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

3.	Знайти оцінку наближення скінченного ряду	20.03.2017 – 24.04.2017	виконано
4.	Дослідження збіжності процесу, що генерується	24.04.2017 – 08.05.2017	виконано
5.	Моделювання отриманих результатів	08.05.2017 – 29.05.2017	виконано
6.	Оформлення магістерської дисертації	29.05.2017 – 06.06.2017	виконано

Студент _____ К. Р. Острійчук
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації _____ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація виконана на 64 сторінках, містить 5 рисунків, 1 додаток.

Дисертацію присвячено актуальній темі – дослідженню способів генерування стаціонарних випадкових процесів з обмеженим спектром.

Мета дослідження – знаходження способів генерування стаціонарних процесів з обмеженим спектром.

Об’єкт дослідження – стаціонарні випадкові процеси з обмеженим спектром.

Предмет дослідження – спосіб генерування стаціонарних процесів з обмеженим спектром.

Методи дослідження – теорема Котельникова-Шеннона, наближення скінченного ряду для відновлення процесу з будь якою наперед заданою точністю.

Наукова новизна – було знайдено спосіб генерування та оцінки стаціонарного процесу з обмеженим спектром.

Практичне значення роботи полягає у можливості відновлення будь-якого аналогового сигналу без втрати якості за його дискретними значеннями.

Ключові слова: стаціонарний процес з обмеженим спектром, стохастична спектральна міра, збіжність майже напевно, теорема Котельникова-Шеннона.

Реферат

Магистерская диссертация выполнена на 64 страницах, содержит 5 рисунков, 1 приложение.

Диссертация посвящена актуальной теме - исследованию способов генерирования стационарных случайных процессов с ограниченным спектром.

Цель исследования - нахождение способов генерирования стационарных процессов с ограниченным спектром.

Объект исследования - стационарные случайные процессы с ограниченным спектром.

Предмет исследования - способ генерирования стационарных процессов с ограниченным спектром.

Методы исследования - теорема Котельникова-Шеннона, приближение конечного ряда для возобновления процесса с любой наперед заданной точностью.

Научная новизна - был найден способ генерирования и оценки стационарного процесса с ограниченным спектром.

Практическое значение работы состоит в возможности восстановления любого аналогового сигнала без потери качества по его дискретным значениям.

Ключевые слова: стационарный процесс с ограниченным спектром, стохастическая спектральная мера, сходимость почти наверное, теорема Котельникова-Шеннона.

Abstract

Master's thesis performed at 64 pages, contains 5 illustrations, 1 supplement.

The thesis is devoted to the actual topic - research ways of generating stationary random processes with a limited range.

The aim - to find ways to generate stationary processes with a limited range.

The object of study - stationary random processes with a limited range.

Purpose of the study - a way to generate stationary processes with a limited range.

Methods - Nyquist-Shannon theorem, finite series approximation to restore process with any predetermined precision.

Scientific novelty - found a way to generate steady and evaluation process with a limited range.

The practical significance of the work lies in the possibility of recovering any analog signal without any loss of quality for its discrete values.

Keywords: stationary process with a limited range, stochastic spectral measure convergence almost certainly Nyquist-Shannon theorem.

Зміст

Вступ……9

Розділ 1. Теоретичні відомості……...11

1.1. Означення стаціонарного процесу……..……...11

1.2. Означення спектральної міри……....12

1.3. Мультиплікативний генератор випадкових чисел……..14

1.4. Перетворення Бокса-Мюллера……..18

1.5. Теорема Котельникова для вибіркових траєкторій стаціонарного процесу……...20

Розділ 2. Про збіжність майже напевно кратних рядів Котельникова-Шеннона……29

2.1. Означення. Формулювання результатів……...29

2.2. Доведення теореми……32

Розділ 3. Власні результати……...48

Висновки……...60

Список використаної літератури……61

Додаток. Текст програми……..63

ВСТУП

Метод генерування стаціонарних випадкових полів з обмеженим спектром використовуються при передачі цифрових сигналів засобами зв'язку. Швидкий розвиток в сфері ІТ дозволяє моделювати процесу або поля на комп'ютері та відновлення його із наперед заданою точністю.

Теоретичною базою магістерської роботи є результат [1], згідно з яким будь-яке стаціонарне випадковий процес з обмеженим спектром можна розкласти у ряд за допомогою трансляцій функції $\frac{\sin(x)}{x}$. У свою чергу, результат [1] спирається на теорему Котельникова-Шеннона стосовно можливості відновлення функції за її дискретними відліками. Основним висновком [1] є теоретична можливість відновити будь-який аналоговий сигнал без втрати якості за його дискретними значеннями, якщо частота відліків є достатньо високою. Прикладами сигналів, які відповідають випадковим процесам, є цифрові записи розмов телефоном, музикальних творів тощо. Прикладом сигналів, які відповідають випадковим полям, є передача двовимірних зображень каналами зв'язку, у тому числі й телевізійними [2].

Запропонований метод використовує розклад процесу у кратний ряд Котельникова-Шеннона за трансляціями функції $\frac{\sin(x)}{x}$. Для практичного застосування використовується тільки скінчена частина цього ряду, що дозволяє моделювати процес на комп'ютері [3].

В магістерській роботі розв'язується теоретична задача передачі зображень сучасними каналами зв'язку. У порівнянні з прототипом (розклад Котельникова-Шеннона для випадкових процесів) її основною перевагою є те, що вона дозволяє відновлювати за дискретними відліками не тільки процеси, але й поля довільної розмірності. Відновлення випадкового поля є абсолютно безпомилковим при використанні нескінченого ряду. Для практичних застосувань пропонується модель скінченого ряду Котельникова-Шеннона, який дозволяє відновлювати процес з будь-якою наперед заданою точністю.

Наведені в даній роботі розклади Котельникова-Шеннона однорідних по часові ізотропних випадкових полів можна використати для статистичного моделювання таких випадкових полів із заданими характеристиками [Вижва З.О., 2011]. Зауважимо, що алгоритм моделювання гауссівського ізотропного випадкового поля на одиничній сфері в тривимірному просторі побудовано в роботі [Грих З.А., 1987] .

В першому розділі проведено огляд стаціонарних процесів і спектральних мір, розглянуті мультиплікативний генератор випадкових чисел та перетворення Бокса-Мюллера. Наведено доведення теореми Котельникова для вибіркових траєкторій стаціонарного процесу.

У другому розділі проведено дослідження збіжності майже напевно кратних рядів Котельникова-Шеннона. Даний розділ написаний на основі [1].

У третьому розділі знайдено точні оцінки та проведено дослідження збіжності майже напевно процесу, який моделюється.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Означення стаціонарного процесу

Важливий клас випадкових процесів складають стаціонарні процеси. Так називають процеси, теоретично-ймовірнісні характеристики яких не змінюються з часом. Можна ще сказати, що стаціонарні процеси – це процеси, які проходять в не змінних в часі умовах. Більш точно це означає наступне. Нехай T – скінченний або нескінченний відрізок часу [6].

Означення. *Випадковий процес (в широкому сенсі)* $\xi(t)$, $t \in T$, *зі знченнями в* R^d *називають стаціонарним, якщо для будь якого* n *і будь яких* $t_1, \dots, t_n$ *таких, що* $t + t_k \in T$ $(k = 1, \dots, n)$, *спільний розподіл випадкових векторів*

$$\xi(t_1 + t), \dots, \xi(t_n + t) \tag{1.1.1}$$

не залежить від t.

Умова незалежності розподілу послідовності (1.1.1) від t еквівалентна вимозі, щоб для будь якої обмеженої неперервної функції $f(x_1, \dots, x_n), x_k \in R^d$, величина

$$Mf\big(\xi(t_1 + t), \dots, \xi(t_n + t)\big)$$

не залежала від t. Зокрема, якщо компоненти $\xi^j(t), j = 1, \dots, k$, вектору $\xi(t)$ мають скінченні моменти другого порядку, то величини

$$m^j(t) = M\xi^j(t), \qquad j = 1, \dots, d,$$

не залежать від t, $m^j(t) = m^j$, а величини

$$b^{jk}(t, s) = M\xi^j(t)\xi^k(s), \quad j = 1, \dots, d,$$

$t \geq s$, залежать лише від різниці $t - s$, $b^{jk}(t, s) = b^{jk}(t - s)$.

Означення. *Випадковий процес* $\xi(t) = \big(\xi^1(t), \dots, \xi^d(t)\big), t \geq 0,$ *зі значеннями в* R^d *називають процесом, стаціонарним в широкому сенсі, якщо* $M|\xi(t)|^2 < \infty$ *і*

$$M\xi(t) = m = const, M[\xi(t) - m][\xi(s) - m]^* = R(t - s) \qquad (t > s),$$

де $R(t)$ *– неперервна кореляційна (матрична) функція.*

1.2. Означення спектральної міри

Теорема 1. *Нехай* α_{nk}, β_{nk} $(k = 1, \dots, n; n = 1,2, \dots)$ *– дві послідовності серій взаємно незалежних (в кожній серії) випадкових величин,*

$$M\alpha_{nk} = M\beta_{nk} = 0, \qquad D\alpha_{nk} = D\beta_{nk} = \frac{b_{nk}^2}{2} < \infty$$

і

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk}\, e^{iu_{nk}t} = \xi_n(t) + i\eta_n(t), \;\; \gamma_{nk} = \alpha_{nk} + i\beta_{nk}.$$

Припустимо, що при $n \to \infty$ *виконуються наступні умови:*

а) спектральні функції $F_n(u)$ *процесів* $\zeta_n(t)$ *при* $n \to \infty$ *збігаються на деякій всюди щільній множині значень на прямій* $(-\infty, \infty)$ *до функції* $F(u)$ *причому*

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = \sigma^2 = \lim \sum_{k=1}^{n} b_{nk}^2 < \infty;$$

б) випадкові величини $\{\alpha_{nk}, \beta_{nk}\}$ *задовольняють умову Ліндеберга.*

Тоді при $n \to \infty$ *випадковий процес* $\zeta_n(t)$ *слабко збігається до стаціонарного процесу* $\zeta(t), \zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$. *Характеристична функція сумісного розподілу величин*

$$\xi(t_1), \dots, \xi(t_s), \qquad \eta(t_1), \dots, \eta(t_s)$$

задається виразом

$$\varphi(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) = \exp\left\{-\frac{1}{2}B^2\right\},$$

де

$$B^2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} R(t_j - t_k) z_j \overline{z_k}, \qquad z_j = u_j - iv_j, \qquad j = 1, \dots, s,$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dF(u). \tag{1.2.1}$$

Теорема 2. (**теорема Хінчина**). *Для того, щоб неперервна функція* $R(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ *була кореляційною функцією стаціонарного в широкому сенсі процесу, необхідно і достатньо, щоб вона допускала представлення (1.2.1).*

Означення. *Функцію* $F(u)$*, яка фігурує в представленні (1.2.1) кореляційної функції стаціонарного (в широкому сенсі) процесу, називають спектральною функцією (мірою). Якщо* $F(u)$ *абсолютно неперервна,*

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)du,$$

то $f(u)$ *називають спектральною щільністю процесу*.

1.3. Мультиплікативний генератор випадкових чисел

Однією з основних задач, яка виникає при обчисленнях, пов’язаних із теорією ймовірності, є задача генерування випадкових величин. Взагалі кажучи, першим генератором випадкових чисел є табличний генератор. Він собою представляв таблицю випадкових значень із певним законом розподілу. Вибір значень відбувався навмання самим користувачем цієї таблиці.

На сьогоднішній день існують два основні типи генераторів випадкових величин: фізичний датчик випадкових чисел та генератор псевдовипадкових чисел. Нижче ми розглянемо обидва види генераторів.

Введемо таку випадкову величину $\alpha \in (0,1)$ для якої справедливо наступне двійкове представлення.

$$\alpha = 0, \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k)} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} \, 2^{-k}. \qquad (1.3.1)$$

Твердження 1. Для того, щоб випадкова величина α була рівномірно розподілена в інтервалі $(0,1)$ необхідно і достатньо, щоб двійкові цифри $\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k)}$ із відношення (1.3.1) представляли собою послідовність незалежних бернулівських випадкових величини з ймовірністю успіху $\frac{1}{2}$, тобто

$$P\left(\alpha^{(k)} = 1\right) = P\left(\alpha^{(k)} = 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Це твердження означає, що ми не можемо згенерувати справжнє випадкове значення, оскільки мантиса згенерованого числа в будь-якому випадку є обмеженою. Але, з огляду на практичне застосування, у обчислювальній математиці помилками, що пов’язані із скінченністю мантиси, зазвичай нехтують [7].

Твердження 1 описує математичною мовою принцип роботи фізичного датчика випадкових чисел. Найпростіших прикладом «шумлячі» радіопристрої, сигнал з яких певним чином оброблюється і генерується випадкова послідовність чисел.

Окремо відмітимо пристрій, розроблений Клесовим О. І., Ізюмцевим Л. Л. та Ізюмцевою О. К. [8]. Розглянемо детальніше принцип його роботи. Їх спосіб полягає в тому, що спочатку від первинного джерела ентропії отримують послідовність двійкових випадкових чисел, потім розбивають її на блоки, після чого перетворюють їх і в результаті отримують вихідну послідовність випадкових чисел, причому як первинне джерело ентропії використовують потік шуму на вході пристрою безпровідного зв'язку, зокрема, періоди інтервалів часу між його змінами, а процес перетворення отриманих випадкових даних полягає

в переведенні їх у форму, відмінну від двійкової, шляхом побітного компонування в залежності від необхідної розрядності кінцевої послідовності випадкових чисел [8].

До переваг використання фізичного датчику випадкових величини відноситься швидкість реалізації та необмежений запас випадкових величин. Недоліками цього методу є періодична необхідність виконувати статистичну перевірку згенерованих чисел, оскільки фізичний пристрій може давати збій, та неможливість повторного проведення розрахунків.

Найбільшу популярність серед користувачів мають генератори псевдовипадкових чисел. Більшість відомих алгоритмів генерування таких чисел мають вигляд [7]

$$\alpha_n = \psi(\alpha_{n-1}), \qquad (1.3.2)$$

де число α_0 задано. Областю значень функції ψ має бути інтервал $(0,1)$.

Наведемо один із алгоритмів вибору такої функції. Нехай ми маємо пари точок, які задовольняють такі співвідношення

$$(\alpha_1, \alpha_2 = \psi(\alpha_1)), (\alpha_3, \alpha_4 = \psi(\alpha_3)), \dots \qquad (1.3.3)$$

До пар точок ставляться такі вимоги:

1) Знаходяться на одній кривій $y = \psi(x)$;

2) Пари точок мають бути рівномірно розподілені в квадраті

$Q = \{\{x, y\}, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, як і справжні стандартні випадкові величини.

Прикладом функції, що задовольняє вище зазначені умови є

$$\psi(x) = \{Mx\}. \qquad (1.3.4)$$

де M – великий множник, а $\{A\}$ – означає дробову частину числа A.

Алгоритм (1.3.2) із функцією (1.3.4) називається мультиплікативним методом лишків [7] і він є одним із найбільш популярних методів моделювання псевдовипадкових чисел [9].

Наведемо основні властивості перетворення (1.3.4).

Властивість 1. Випадкова величина $\beta = \{Mx\}$ рівномірно розподілена в інтервалі $(0,1)$ для будь-якого цілого додатнього числа M [5].

Властивість 2. Коефіцієнт кореляції

$$r(\alpha,\beta^{(s)}) = \boldsymbol{E}\left(\left(\frac{\alpha-\boldsymbol{E}\alpha}{\sqrt{\mathrm{var}\alpha}}\right)\left(\frac{\beta^{(s)}-\boldsymbol{E}\beta^{(s)}}{\sqrt{\mathrm{var}\beta^{(s)}}}\right)\right).$$

Випадкових величин α та $\beta^{(s)}$

$$\beta^{(s)} = \{M\beta^{(s-1)}\}, \beta^{(0)} = \alpha, s = 1,2,\dots$$

Дорівнює $1/M^s$ для будь-якого цілого додатнього М.

Припустимо, що початковий елемент послідовності

$$\alpha_{n+1} = \psi(\alpha_n), \tag{1.3.5}$$

$$\psi(x) = \{Mx\}, \tag{1.3.6}$$

дорівнює $\alpha_0 = 2^{-m}$, а множник має вигляд $M = 5^{2p+1}$, де p – ціле додатне число. Справедливе представлення

$$\alpha_n = k_n 2^{-m};\ k_0, k_n \equiv k_{n-1}5^{2p+1}(\mathrm{mod}\ 2^m). \tag{1.3.7}$$

Істотний недолік мультиплікативного методу лишків (1.3.7) пов'язаний з тим, що кількість чисел, які мають мантису довжиною m і належать інтервалу $(0,1)$, є кінцевим, і тому послідовність (1.3.7) є періодичною [9], тобто рано чи пізно якесь значення α_L співпадає з значенням α_0, і тоді на підставі (1.3.5), отримаємо

$$\alpha_{L+i} = \alpha_i \text{ при } i = 1,2,\dots\ . \tag{1.3.8}$$

Найменше число L, яке задовольняє (1.3.8), називається довжиною довжиною періоду. Зазвичай для обчислення не рекомендують використовувати більше ніж $\frac{L}{2}$ чисел послідовності (1.3.5), (1.3.6) [9].

Стандартними методами теорії чисел можна довести, що для мультиплікативного методу лишків (1.3.7) період дорівнює $L = 2^{m-2}$. Величина $M = 5^{2p+1}$ в двійковому представленні закінчується на «01», тому всі α_n є m-розрядними двійковими дробами, останні два розряди яких рівні «01». Внаслідок рівності $L = 2^{m-2}$ решта $m-2$ розряди «пробігають» всі можливі комбінації. Тому в якості α_0 можна вибрати будь який m-розрядний двійковий дрів вказаного типу.

Питання про придатність псевдовипадкових чисел (1.3.7) досліджується за допомогою спеціальних статистичних тестів і рішення достатньо складних тестових задач. Для одних параметрів (m,p) отримують задовільні послідовності, для інших – погані. Останнім часом у зв'язку з ростом потужностей сучасних обчислювальних систем виникла потреба в генераторах з збільшеним періодом. Труднощі конкретної реалізації формул (1.3.7) на

комп’ютері пов’язані з тим, що потрібно робити дії з числами, які мають мантису довжиною m, перевищуючої стандартний формат ЕОМ.

1.4. Перетворення Бокса-Мюллера

Перетворення Бокса-Мюллера - це метод генерації стандартних нормально розподілених незалежних випадкових величин, розроблений Джорджем Боксом та Мервіном Мюллером у 1958 році [10]. Ми розглянемо два основних вида даного перетворення.

Класична форма перетворення Бокса-Мюллера [10]. Нехай r та φ – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на інтервалі $(0,1]$. Обчислимо Z_0та Z_1 за такими формулами

$$Z_0 = \cos(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r}, \tag{1.4.1}$$

$$Z_1 = \sin(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r}. \tag{1.4.2}$$

Обчислені таким чином Z_0та Z_1 будуть незалежними і розподілені нормально з математичним сподівання 0 і дисперсією 1.

Полярна форма перетворення Бокса-Мюллера. Ця форма була запропонована Джеймсом Белом [11] та удосконалена Робертом Кнопом [12]. Нехай u та v – незалежні та нормально розподілені випадкові величини на проміжку $[-1,1]$. Обчислимо $s = x^2 + y^2$. У разі виконання такої умови $0 < s \leq 1$ переходимо до наступного кроку, якщо ні – заново генеруємо нову пару u та v.

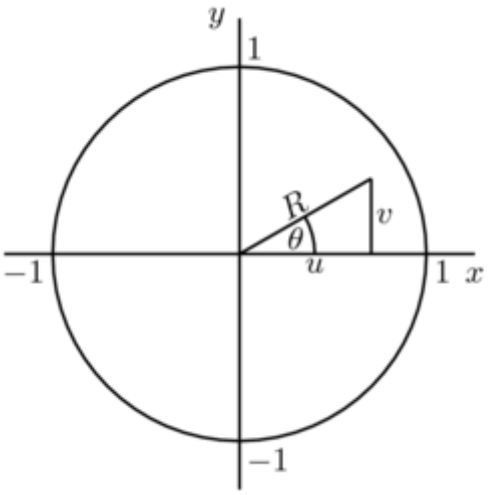
Наступний кроком є обчислення Z_0та Z_1 за такими формулами

$$Z_0 = u\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}, \tag{1.4.3}$$

$$Z_1 = \mathrm{v}\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}. \tag{1.4.4}$$

Отримані величини Z_0та Z_1 будуть незалежними стандартно розподіленими випадковими величинами.

Пояснимо взаємозв’язок між класичною та полярною формами.



$$R^2 = u^2 + v^2$$
$$\cos\theta = \frac{u}{R}$$
$$\sin\theta = \frac{v}{R}$$

Виходячи із графіка наведеного вище ми можемо та підставивши замість тригонометричних функцій відповідні співвідношення отримуємо такі перетворення [11]

$$Z_0 = \cos(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r} = \sqrt{-2\ln r}\left(\frac{u}{\sqrt{s}}\right) = u\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}},$$

$$Z_1 = \sin(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r} = \sqrt{-2\ln r}\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right) = v\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}.$$

Для того, щоб змоделювати гаусівську випадкову величину ξ із розподілом $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ можна скористуватися таким перетворенням

$$\xi = \mu + \sigma z, \tag{1.4.5}$$

де z – стандартна нормальна випадкова величина.

1.5. Теорема Котельникова для вибіркових траєкторій стаціонарного процесу

Нехай стаціонарний процес має обмежений спектр

$$\xi(t) = \int_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} e^{it\lambda}\, Z(d\lambda). \qquad (1.5.1)$$

Відома теорема Котельникова - Шеннона про представлення сигналів з обмеженим спектром за допомогою їх дискретних відліків має аналог для процесів $\xi(t)$: якщо виконується (1.5.1), то при $-\infty < t < \infty$

$$\xi(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) \frac{\sin(\Lambda_0 t - k\pi)}{\Lambda_0 t - k\pi}. \qquad (1.5.2)$$

Неважко перевірити, що для збіжності ряду (1.5.2) в середньо квадратичному необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$Z(\{-\Lambda_0\}) = Z(\{+\Lambda_0\}) = 0 \text{ майже напевно.} \qquad (1.5.3)$$

Більш складна задача про збіжність ряду (1.5.2) для майже всіх вибіркових траєкторій процесу розглядалися в роботі Ю. К. Бєляєва [13], де отримано наступний результат: якщо в розкладі (1.5.2) замість Λ_0 взяти будь яке $\Lambda_1 > \Lambda_0$, то цей розклад буде справедливим для майже всіх вибіркових траєкторій процесу (1.5.1) (причому ряд збігається рівномірно на $\mathrm{T}_1 \le t \le \mathrm{T}_2$ $(\forall\, T_1 < T_2)$) [14].

Цей результат є частковим випадком наступної теореми.

Теорема 1. *Для того щоб розклад (2) був справедливим при деякому* $t \neq \frac{r\pi}{\Lambda_0}$ *для майже всіх вибіркових траєкторій стаціонарного процесу (2), необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\lim_{m\to\infty} \left[\int_{|\lambda+\Lambda_0|\le 2^{-m}} Z(d\lambda) - \int_{|\lambda-\Lambda_0|\le 2^{-m}} Z(d\lambda) \right] = 0 \text{ майже напевно.} \quad (1.5.4)$$

Крім того, якщо умова (1.5.4) виконується, то

(*) розклад (1.5.2) збігається рівномірно при $\mathrm{T}_1 \le t \le \mathrm{T}_2$ $(\forall\, T_1 < T_2)$ *для майже всіх вибіркових траєкторій процесу (1.5.1).*

Лема 1. *Умова (1.5.3) необхідна і достатня для того, щоб в будь якій точці* $t \neq \frac{r\pi}{\Lambda_0}$ *рівність (1.5.2) виконувалася в середньо квадратичному.*

Достатність умови (1.5.3) відзначається в [15], с. 191. Наведемо повне доведення. Нехай $Z_- = Z(\{-\Lambda_0\})$, $Z_+ = Z(\{+\Lambda_0\})$. З спектрального представлення (1.5.1) випливає, що

$$\xi(t) = \int\limits_{|\lambda|<\Lambda_0} e^{i\lambda t}\, Z(d\lambda) + Z_+ e^{i\Lambda_0 t} + Z_- e^{-i\Lambda_0 t}, \qquad (1.5.5)$$

зокрема,

$$\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) = \int\limits_{|\lambda|<\Lambda_0} e^{i\lambda\frac{k\pi}{\Lambda_0}}\, Z(d\lambda) + Z_+ e^{ik\pi} + Z_- e^{-ik\pi}. \qquad (1.5.6)$$

Використаємо рівність

$$e^{i\lambda t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} e^{i\frac{k\pi}{\Lambda_0}\lambda} \frac{\sin(\Lambda_0 t - k\pi)}{\Lambda_0 t - k\pi}, \qquad (1.5.7)$$

де ряд збігається рівномірно при $-\Lambda_0 + \varepsilon < \lambda < \Lambda_0 - \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$.

Тому

$$\int\limits_{|\lambda|<\Lambda_0} e^{i\lambda t}\, Z(d\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} \int\limits_{|\lambda|<\Lambda_0} e^{i\frac{k\pi}{\Lambda_0}\lambda}\, Z(d\lambda) \frac{\sin(\Lambda_0 t - k\pi)}{\Lambda_0 t - k\pi}. \qquad (1.5.8)$$

Зауважимо, що при $\lambda = \pm\Lambda_0$ ряд (1.5.7) також збігається, але не до $e^{\pm i\Lambda_0 t}$, а до $\frac{1}{2}\left(e^{i\Lambda_0 t} + e^{-i\Lambda_0 t}\right) = \cos\Lambda_0 t$, тобто

$$\cos\Lambda_0 t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ik\pi} \frac{\sin(\Lambda_0 t - k\pi)}{\Lambda_0 t - k\pi}. \qquad (1.5.9)$$

Порівнюючи (1.5.5) з (1.5.8), (1.5.9), отримаємо, що шукана рівність (1.5.2) виконується в середньо квадратичному тоді і тільки тоді, коли майже напевно

$$e^{i\Lambda_0 t} Z_+ + e^{-i\Lambda_0 t} Z_- = (Z_+ + Z_-)\cos\Lambda_0 t,$$

Тобто коли $i(Z_+ + Z_-)\sin\Lambda_0 t = 0$ майже напевно.

Оскільки Z_+ ортогональне Z_- і $\sin\Lambda_0 t \neq 0$, остання умова означає, що $Z_+ = Z_- = 0$ майже напевно.

Доведення теореми 1. Нехай $t \neq \frac{r\pi}{\Lambda_0}$. При доведенні леми 1 було показано, що ряд (1.5.2) завжди збігається в середньо квадратичному (але його сума не співпадає з $\xi(t)$, якщо порушена умова (1.5.3)). Отже, якщо ряд (1.5.2) збігається майже напевно до $\xi(t)$, то (1.5.3) виконується. З іншої сторони, з умови (1.5.4) очевидно випливає (1.5.3). Тому надалі будемо вважати, що (1.5.3) виконується, і у всіх оцінках інтеграли по області $|\lambda| \leq \Lambda_0$ дорівнюють інтегралам по області $|\lambda| < \Lambda_0$. Оцінимо залишок ряду (1.5.2):

$$\rho_n(t) = \xi(t) - \sum_{|k|\le n} (-1)^k \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) \frac{\sin \Lambda_0 t}{\Lambda_0 t - k\pi} =$$

$$= -\frac{\sin \Lambda_0 t}{\pi} \sum_{|k|>n} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) \frac{(-1)^k}{k} + r_n^{(1)}(t). \qquad (1.5.10)$$

Тут

$$r_n^{(1)}(t) = \sin \Lambda_0 t \sum_{|k|>n} (-1)^k \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) \left[\frac{1}{\Lambda_0 t - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right].$$

Якщо T_1, T_2 фіксовані, то при $n > (|T_1| + |T_2|)\Lambda_0$

$$r_n = \max_{T_1 \le t \le T_2} \left|r_n^{(1)}(t)\right| \le C \sum_{|k|>n} \left|\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right)\right| k^{-2}. \qquad (1.5.11)$$

На підставі збіжності ряду $\sum M \left|\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right)\right| k^{-2}$ отримаємо, що $r_n \to 0$ майже напевно, і для оцінки $\rho_n(t)$ залишається оцінити вираз

$$\rho_n^* = \sum_{|k|>n} \frac{(-1)^k}{k} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) = 2i \int_{|\lambda|<\Lambda_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\Lambda_0}(\lambda + \Lambda_0)}{k} z(d\lambda). \qquad (1.5.12)$$

Нехай

$$S_n(\mu) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin k\mu}{k}. \qquad (1.5.13)$$

Оцінимо похибку в очевидному співвідношенні $S_n(\mu) \cong \int_{n\mu}^{\infty} \frac{\sin u du}{u}$.
Відомо, що

$$S_n(\mu) = \frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{2} - K_n(\mu), K_n(\mu) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\mu}{k} \text{ при } 0 < \mu \le 2\pi. \qquad (1.5.14)$$

Оцінка $K_n(\mu)$ при $0 \le \mu \le \pi$ проводиться відомим шляхом. Маємо:

$$K_n(\mu) = \int_0^{\mu} \sum_{k=1}^{n} \cos kx dx = \int_0^{M} \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^{n\mu} \frac{\sin u du}{u} - \frac{\mu}{2} + t_n(\mu),$$

$$t_n(\mu) = \frac{\sin n\mu}{2n} + \int_0^{\mu} f(x) \sin nx dx, f(x) = \frac{1}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}.$$

Оскільки $f(x)$ і $f'(x)$ обмежені при $0 \le x \le \pi$, то

$$|t_n(\mu)| \le \frac{C}{n} \quad \text{при } 0 \le \mu \le \pi. \tag{1.5.15}$$

Отже, при $0 < \mu \le \pi$ можна використовувати будь яке представлення

$$S_n(\mu) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{n\mu} \frac{\sin u du}{u} - t_n(\mu) = \int_{n\mu}^{\infty} \frac{\sin u du}{u} - t_n(\mu),$$

а при $\pi \le \mu < 2\pi$ – представленням $S_n(\mu) = -S_n(2\pi - \mu)$.

Підставляючи в (1.5.12) (роль μ тут виконує $\frac{\pi(\lambda+\Lambda_0)}{\Lambda_0}, -\Lambda_0 < \lambda < \Lambda_0$), отримаємо для ρ_n^* представлення

$$\rho_n^* = 2i\left[\frac{\pi}{2}\int_{-\Lambda_0 \le \lambda \le -\Lambda_0 + 2^{-m}} Z(d\lambda) - \frac{\pi}{2}\int_{\Lambda_0 - 2^{-m} \le \lambda \le \Lambda_0} Z(d\lambda)\right] +$$

$$+2i\left[\int_{-\Lambda_0 < \lambda \le 0} Q_n^{(1)}(\lambda) Z(d\lambda) + \int_{0 < \lambda \le \Lambda_0} Q_n^{(2)}(\lambda) Z(d\lambda)\right] + r_n^*, \tag{1.5.16}$$

де ядра $Q_n^{(1)}(\lambda), Q_n^{(2)}(\lambda)$ мають вигляд ($m = [\lg_2 n]$):

$$Q_n^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} -\int_0^{n\frac{\pi}{\Lambda_0}(\lambda+\Lambda_0)} \frac{\sin u du}{u} & \text{при } -\Lambda_0 < \lambda \le -\Lambda_0 + 2^{-m}, \\ \int_{n\frac{\pi}{\Lambda_0}(\lambda+\Lambda_0)}^{\infty} \frac{\sin u du}{u} & \text{при } -\Lambda_0 + 2^{-m} < \lambda \le 0, \end{cases}$$

$$Q_n^{(2)}(\lambda) = \begin{cases} \int_0^{n\frac{\pi}{\Lambda_0}(\Lambda_0-\lambda)} \frac{\sin u du}{u} & \text{при } \Lambda_0 - 2^{-m} \le \lambda < \Lambda_0, \\ -\int_{n\frac{\pi}{\Lambda_0}(\Lambda_0-\lambda)}^{\infty} \frac{\sin u du}{u} & \text{при } 0 \le \lambda \le \Lambda_0 - 2^{-m}. \end{cases}$$

Крім того, на підставі (1.5.15) $M|r_n^*|^2 \le \frac{C}{n^2}$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^* = 0$ майже напевно.

Теорема 2. *Нехай $Z(d\lambda)$ – стохастична міра з ортогональними приростами, задана на $[-A, A]$ і яка задовольняє*

$$M|Z(d\lambda)|^2 = F(d\lambda); \quad \int\limits_{|\lambda|\le A} F(d\lambda) < \infty,$$

$$M\left[\int f(\lambda)Z(d\lambda)\cdot\overline{\int g(\lambda)Z(d\lambda)}\right] = \int f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,F(d\lambda),$$

$$M\left|\int f(\lambda)Z(d\lambda)\right|^2 = \int |f(\lambda)|^2\,F(d\lambda),$$

для будь яких $f, g \in L_F^2$.

Нехай функції $Q_n(\lambda), n = 1,2, \ldots$, *задовольняють при деякому* $\lambda_0, -\infty < \lambda_0 < \infty$, *умови:*

A) $|Q_n(\lambda)| \le C\min\left[(n|\lambda-\lambda_0|)^{\beta}, (n|\lambda-\lambda_0|)^{-\beta}\right]$,

де $\beta > 0;\ n = 1,2, \ldots;$

B) якщо $2^m \le k < n < 2^{m+1}, m = 0,1, \ldots$, *то*

$$|Q_n(\lambda) - Q_k(\lambda)| \le C \min_{i=1,2}\left[(n-k)^{\alpha_i}|\lambda-\lambda_0|^{\beta_i}n^{-\gamma_i}; (n|\lambda-\lambda_0|)^{-\alpha}\right];$$

C) числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *задовольняють умови:*

$$\alpha_1 > \frac{1}{2}, \alpha_2 > \frac{1}{2}, \gamma_2 > \frac{1}{2}, \alpha > \frac{1}{2};\ \gamma_1 + \beta_1 \ge \alpha_1 > \gamma_1, \gamma_2 + \beta_2 \ge \alpha_2.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|\lambda|\le A} Q_n(\lambda)Z(d\lambda) = 0 \text{ майже напевно.}$$

Залишилося перевірити, що ядра $Q_n^{(1)}(\lambda), Q_n^{(2)}(\lambda)$ задовольняють умови теореми 2. Наприклад, для $Q_n^{(1)}(\lambda)$ маємо:

$$\left|Q_n^{(1)}(\lambda)\right| \le \frac{\pi}{\Lambda_0} n|\Lambda_0 + \lambda| \text{ при } |\Lambda_0 + \lambda| \le 2^{-m},$$

$$\left|Q_n^{(1)}(\lambda)\right| \le \frac{2\Lambda_0}{n\pi|\Lambda_0 + \lambda|} \text{ при } |\Lambda_0 + \lambda| > 2^{-m}.$$

Звідси випливає умова А) теореми 2 з $\beta = 1$.

Далі, якщо $2^m \le k < n < 2^{m+1}$, то

$$\left|Q_k^{(1)}(\lambda) - Q_n^{(1)}(\lambda)\right| = \left| \int\limits_{k\frac{\pi}{\Lambda_0}(\lambda+\Lambda_0)}^{k\frac{\pi}{\Lambda_0}(\lambda+\Lambda_0)} \frac{\sin u du}{u} \right| \leq$$

$$\leq C\min\left\{|n-k||\lambda+\Lambda_0|, \frac{n-k}{n}, (n|\lambda+\Lambda_0|)^{-1}\right\}.$$

Отже, виконується і умова В) теореми 2 з $\beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, \alpha = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 1$. Аналогічно перевіряються умови А), В) для $Q_n(\lambda)$ [14].

Застосовуючи теорему 2 і рівності (1.5.10), (1.5.12), (1.5.16), маємо, що залишок ряду (1.5.2) збігається майже напевно до нуля тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення (1.5.4). Теорема доведена.

Зауваження. Умова (1.5.4), взагалі кажучи, не еквівалентна парі умов

$$\int\limits_{|\Lambda_0+\lambda|\leq 2^{-m}} Z(d\lambda) \to 0, \qquad \int\limits_{|\lambda-\Lambda_0|\leq 2^{-m}} Z(d\lambda) \to 0 \text{ майже напевно} \quad (1.5.17)$$

Наприклад, можна взяти дискретну спектральну міру, яка має вигляд ($\Lambda_0 \geq 1$):

$$Z(-\Lambda_0 + 2^{-m}) = a_m(\Phi_m + \Psi_m), Z(\Lambda_0 - 2^{-m}) = a_m(\Phi_m - \Psi_m),$$

для $\sum a_m^2 < \infty$, $\{\Phi_m\}$ і $\{\Psi_m\}$ ортонормовані і ортогональні один з одним, причому $\{\Psi_m\}$ – система збіжності, а $\{\Phi_m\}$ – система розбіжності, і $\{a_m\}$ вибрані так, щоб ряд $\sum_1^\infty a_m\Phi_m$ розбігався майже напевно. Тоді умова (1.5.4) виконується, а умова (1.5.17) – ні.

Зручно мати достатні умови для теореми Котельникова, виражені через більш прості властивості спектральної міри або кореляційної функції процесу. Такі умови легко отримуються з теореми.

Наслідок 1. *Якщо спектр процесу зосереджений на відрізку* $[-\Lambda_1, \Lambda_1], \Lambda_1 < \Lambda_0$, *то справедливе твердження (*) теореми.*

Це переформулювання цитованого вище результату Ю. К. Беляєва миттєво випливає з умови (1.5.4).

Позначимо: $\Delta_k' = \{\lambda: 2^{-k-1} < \lambda + \Lambda_0 \leq 2^{-k}\}, \Delta_k'' = \{\lambda: 2^{-k-1} < \Lambda_0 - \lambda \leq 2^{-k}\}, Z_{-k} = \int_{\Delta_k'} Z(d\lambda), Z_k = -\int_{\Delta_k''} Z(d\lambda), \Phi_k = Z_k + Z_{-k}, Z_0 = \Phi_0 = 0$. Система $\{\Phi_k\}_0^\infty$ ортогональна, і умова (1.5.4) теореми еквівалентна збіжності майже напевно часткових сум $S_n = \sum_1^n \Phi_k$ ортогонального ряду, у якого $\sum_1^\infty \|\Phi_m\|^2 < \infty$, і умові (1.5.3).

Наслідок 2. *а) Якщо виконується умова*

$$F(\{\Lambda_0\}) = F(\{-\Lambda_0\}) = 0, \int\limits_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} \left(\lg\lg\left(2 + \frac{1}{\Lambda_0^2 - \lambda^2}\right)\right)^2 F(d\lambda) < \infty, \qquad (1.5.18)$$

то справедливе твердження (∗) теореми.

б) Якщо $\omega(u) = \upsilon((\lg\lg u)^2), \omega(u) \uparrow \infty$ при $u \to \infty$, *то знайдеться стаціонарний випадковий процес* $\xi(t)$ *зі спектром в* $(-\Lambda_0, \Lambda_0)$, *для якого при будь якому* $t \neq \frac{r\pi}{\Lambda_0}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=-n}^{n} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda_0}\right) \frac{\sin(\Lambda_0 t - k\pi)}{\Lambda_0 t - k\pi} \right| = \infty \text{ майже напевно}, \qquad (1.5.19)$$

хоча

$$F(\{\Lambda_0\}) = F(\{-\Lambda_0\}) = 0, \int\limits_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} \omega\left(\frac{1}{\Lambda_0^2 - \lambda^2}\right) F(d\lambda) < \infty. \qquad (1.5.20)$$

Доведення. Оскільки

$$\|\Phi_k\|^2 = \|\mathrm{Z}_k\|^2 + \|\mathrm{Z}_{-k}\|^2 = \int\limits_{\Delta_k' \cup \Delta_k''} F(d\lambda),$$

умова (1.5.18) переписується у вигляді $\sum_1^\infty \|\Phi_k\|^2 \lg^2(k+2) < \infty$, і перше твердження випливає з теореми Меньшова-Радемахера. Для доведення пункту б) використаємо відомий контрприклад Д. Є. Меньшова – по функції $\omega(u)$ побудуємо ортогональний ряд $\sum_1^\infty \Phi_k$, який має властивості:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_1^n \Phi_k \right| = \infty \text{ майже напевно}, \sum_1^\infty \|\Phi_k\|^2 \, \omega(k) < \infty,$$

і визначимо стохастичну міру $Z(d\lambda)$ рівностями

$$Z\{\Lambda_0 - 2^{-k+1}\} = \Phi_k \quad \left(k > \min\left\{1, \lg_2 \frac{1}{\Lambda_0}\right\}\right).$$

З оцінок, наведених при доведенні теореми, випливає, що для процесу

$$\xi(t) = \int\limits_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} e^{i\lambda t} Z(d\lambda) \quad (-\infty < t < \infty)$$

виконуються умови (1.5.19), (1.5.20).

Наслідок 3. *Для будь яких гаусівських стаціонарних процесів справедливе твердження (∗) (якщо виконується умова (1.5.3)).*

Ряд $\sum_1^\infty \Phi_k$ в цьому випадку складається з гаусівських ортогональних (а отже, незалежних) величин і згідно з теоремою Колмогорова збігається майже напевно (на підставі умови $\sum \|\Phi_k\|^2 < \infty$) [14].

Наслідок 4. *Якщо процес $\xi(t)$ має неперервну (або обмежену) спектральну щільність $f(\lambda)$, то справедливе твердження (∗).*

Це простий частковий випадок наслідку 2а.

Більш загальне твердження:

у*мови*

$$f(\lambda) = 0\ ((|\lambda^2 - \Lambda_0^2|\lg^2|\lambda^2 - \Lambda_0^2|\lg^{3+\varepsilon}\lg|\lambda^2 - \Lambda_0^2|)^{-1})\ \text{ при } \lambda \to \pm\Lambda_0, \varepsilon > 0,$$

достатньо для твердження (∗).

Зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ це твердження втрачає силу. Наслідок 3 і 4 узагальнюють зауваження (наведене в [13] без доведення) про те, що теорема Котельникова справедлива для гаусівських процесів з неперервною спектральною щільністю.

Нехай тепер $R(\tau)$ – кореляційна функція процесу $\xi(t)$;

$$K_1(n) = (-1)^n R\left(\frac{n\pi}{\Lambda_0}\right);\ K_2(n) = \frac{1}{n}\sum_{\upsilon=0}^{n-1} K_1(\upsilon);\ K_3(n) = \frac{1}{n}\sum_{\upsilon=0}^{n-1} K_2(\upsilon).$$

Очевидно, що $K_1(n)$ – кореляційна функція стандартної послідовності $\eta_n = (-1)^n \xi\left(\frac{n\pi}{\Lambda_0}\right), n = 1,2, ...,$ і неважко перевірити, що

$$K_3(n) = \left\| \frac{1}{n}\sum_{\upsilon=0}^{n-1} \eta_\upsilon \right\|^2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n\mu}{2}\right)}{n^2\sin^2\left(\frac{\mu}{2}\right)} dF_1(d\mu),$$

де $F_1(d\mu)$ отримується з спектральної міри процесу $F(d\lambda)$ перетворенням

$\mu = \frac{\lambda\pi}{\Delta_0} + \pi, -\Lambda_0 < \lambda < \Lambda_0.$

Умова (1.5.18) для $F(d\lambda)$ еквівалентна умові

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{K_3(n)}{n\lg n}\lg\lg n < \infty \qquad (1.5.21)$$

в свою чергу, з збіжності будь якого з рядів

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{K_i(n)}{n \lg n} \lg \lg n \quad (i = 1,2) \tag{1.5.22}$$

випливає збіжність ряду (1.5.21). З цих зауважень випливають такі пропозиції.

Наслідок 5. *Збіжність будь якого з рядів (1.5.22)* $(i = 1,2,3)$ *достатня для того, щоб виконувалася теорема Котельникова (в формі* $(*)$ *теореми).*

Наслідок 6. *Якщо* $R(\tau)$ *– кореляційна функція процесу* $\xi(t)$ *і* $R\left(\frac{n\pi}{\Lambda_0}\right)$ *монотонно спадає, то справедливе твердження* $(*)$.

Наслідок 7. *Якщо при* $i = 1,2$ *або 3* $K_i(n) = O((\lg \lg n)^{-2-\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$, *то справедливе твердження* $(*)$ *для процесу* $\xi(t)$.

Відзначимо, що при $\varepsilon = 0$ наслідок 7 втрачає силу (для $i = 1,2,3$ існують відповідні контрприклади).

Розділ 2. Про збіжність майже напевно кратних рядів Котельникова-Шеннона

2.1. Означення. Формулювання результатів

При обробці і передачі сигналів, які є однорідними випадковими полями на R^d $(d \geq 1)$, використовується представлення їхніми значеннями в вузлах деякої дискретної решітки. Можливість подібного представлення забезпечує теорема Котельникова-Шеннона [6]. Зазвичай збіжність таких представлень розуміється як збіжність в середньому квадратичному, проте зацікавленість викликає і збіжність майже напевно. Зауважимо, що навіть збіжність в середньо квадратичному рядів Котельникова-Шеннона має місце не завжди. Збіжність ж майже напевно потребує ще більших обмежень. Знаходженню умов збіжності в $L_2(\Omega)$ майже напевно подібних рядів при $d = 1$ присвячена частина роботи В. Ф. Гапошкіна [14]. В даній статті ми досліджуємо випадок $d > 1$.

Нехай $\{\xi(x), x \in R^d\}$ неперервне в середньо квадратичному, однорідне в широкому сенсі випадкове поле

$$M\xi(x) = 0, \qquad M\xi^2(x) < \infty, \quad B(x-y) = M\xi(x)\xi(y)$$

з обмеженим на деякому паралелепіпеді $\mathcal{P} = [-\Lambda_1, \Lambda_1] \times \ldots \times [-\Lambda_d, \Lambda_d]$ спектром

$$B(x) = \int_{\mathcal{P}} exp\{i(\lambda, x)\}F(d\lambda),$$

де $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в R^d, F – спектральна міра, яка відповідає полю ξ. Як відомо [6], в цьому випадку справедливе зображення

$$\xi(x) = \int_{\mathcal{P}} exp\{i(\lambda, x)\}Z(d\lambda), \tag{2.1.1}$$

де Z – спектральна міра з випадковими ортогональними значеннями, підпорядкована спектральній мірі F.

Решітку, складену з вузлів $n = (n_1, \ldots, n_d)$ $(n_1, \ldots, n_d = 0; \pm 1, \ldots)$, позначимо через N^d, а решітку $g(n) = \left(\frac{n_1\pi}{\Lambda_1}, \ldots, \frac{n_d\pi}{\Lambda_d}\right)$, $n \in N^d$, - через G^d. Покладемо $|n| = n_1 .. n_d$, $N_0^d = \{n \in N^d : |n| = 0\}$, $N_*^d = N^d \backslash N_0^d, N_+^d = \{n \in N^d : n_1 > 0, \ldots, n_d > 0\}$. В R^d введемо покоординатну часткову підпорядкованість $\leq$. Будемо записувати $m \neq n$ $(m \not\leq n)$ у тому випадку, якщо знайдеться $1 \leq j \leq d : m_j \neq n_j \left(m_j > n_j\right)$. Покладемо $0 = (0, \ldots, 0), 1 = (1, \ldots, 1), 2^n = (2^{n_1}, \ldots, 2^{n_d})$ і для довільних $0 \leq a < b \leq d$ нехай $n_a^b =$

$(n_{a+1}, \dots, n_b) \in N^{b-a}$. Вважатимемо, що $n = (n_0^c, n_c^d)$ для всіх $0 \le c < d$. Надалі $[x]$ означає цілу частину $x > 0$, а $\log x$ – логарифм з основою 2.

Послідовність $\{\xi(n,x);\ n \in N^d, x \notin G^d\}$ називається рядом Котельникова-Шеннона, якщо

$$\xi(n,x) = \prod_{-n \le k \le n} \xi\big(g(k)\big) S(k,x),$$

$$S(k,x) = \prod_{1 \le j \le d} \frac{\sin\big(x_j \Lambda_j - k_j \pi\big)}{\big(x_j \Lambda_j - k_j \pi\big)}.$$

Будемо говорити, що ряд Котельникова-Шеннона в точці $x \notin G^d$ збігається майже напевно до $\xi(x)$, якщо $\xi(n,x) \to \xi(x)$ майже напевно при $n_1, \dots, n_d \to \infty$. Для кожного $W \subset R^d$ нехай ∂W означає границю W.

Теорема. *Для того щоб ряд Котельникова-Шеннона в точці* $x\colon\ x_j \ne \frac{k_j \pi}{\Lambda_j}$ $(1 \le j \le d)$ *збігався майже напевно до* $\xi(x)$*, достатньо, щоб*

$$\int_{\mathcal{P}} \prod_{1 \le j \le d} \left(log\ log \left(2 + \frac{1}{\Lambda_j^2 - \lambda_j^2} \right) \right)^2 F(d\lambda) < \infty. \qquad (2.1.2)$$

Крім того, якщо умова (2.1.2) виконується, то справедливе наступне

Твердження (а): для будь якого обмеженого $X \subset R^d \backslash G^d$ *збіжність ряду Котельникова-Шеннона до* $\xi(x)$ *майже напевно рівномірна по* $x \in X$.

Зробимо необхідні зауваження:

1) Якщо поле ξ гаусівське, то твердження теореми будуть справедливі у випадку

$$F(\{\partial \mathcal{P}\}) = 0 \qquad (2.1.3)$$

(див. [14]), що, звісно, менш обмежене, ніж (2.1.2). Умова (2.1.3), крім цього, еквівалентна збіжності в середньо квадратичному рядів Котельникова-Шеннона до значень поля незалежності від його розподілу;

2)можна навести приклад (для $d = 1$ див. [14]), в якому умова (2.1.2) не виконана і збіжність майже напевно ряду Котельникова-Шеннона відсутня.

Наслідок 1. *Якщо спектр поля зосереджений на деякому паралелепіпеді* $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}\colon \mathcal{P}' \cap \partial \mathcal{P} = \emptyset$*, то ряд Котельникова-Шеннона в кожній точці* $x \notin G^d$ *збігається майже напевно до* $\xi(x)$ *і, крім цього, виконується твердження (а).*

У випадку $d = 1$ наслідок 1 доведений Ю. К. Беляєвим [13].

Наведемо також умову збіжності майже напевно в природніх для однорідних випадкових полів термінах кореляційної функції B.

Наслідок 2. *Нехай* $b(n) = 4(|n| + 1)$ $(n \in N^1)$. *Якщо*

$$\sum_{n \in N^d} |B(g(n))| \prod_{1 \le j \le d} \frac{\log\log b(n_j)}{b(n_j)\log b(n_j)} < \infty, \tag{2.1.4}$$

то виконується твердження (а).

Умова (2.1.4) виконується, зокрема, якщо

$$|B(g(n))| = O\left(\prod_{1 \le j \le d} \left(\log\log|n_j|\right)^{-2-\varepsilon_j}\right) \text{ при } n_1, \dots, n_d \to \infty \ (\varepsilon_j > 0).$$

Доведення того, що наслідок 2 випливає з теореми, проводиться так само, як і у випадку $d = 1$ [14].

2.2. Доведення теореми

З умови (2.1.2) випливає умова (2.1.3). Тому надалі будемо вважати, що інтеграли і оцінки по області $\mathcal{P}\backslash\partial\mathcal{P}$ співпадають з оцінками по області $\mathcal{P}$. Для кожної області $D \subset N^d$ припустимо

$$\rho(D,x) = \sum_{k\in D} (-1)^{k_1+\cdots+k_d}\, \xi\big(g(k)\big) S_1(k,x)\,,$$

де $S_1(k,x) = \prod_{1\le j\le d} \frac{\sin \Lambda_j x_j}{(x_j\Lambda_j - k_j\pi)}$.

Якщо $n \in N^d, I \subseteq \{1,\dots d\}$ і $D \equiv D(n,I) = \big\{k \in N^d\colon |k_j| > n_j$ при $j \in I$ і $|k_j| \le n_j$ при $j \notin I\big\}$, то нехай $\rho(n,x) \equiv \rho(D(n,I),x)$. Насамперед покажемо, що ряд Котельникова-Шеннона збігається майже напевно (не обов'язково до значень поля). Для цього достатньо показати, що для $I \ne \emptyset$ виконується співвідношення $\rho(n,x) \to 0$ майже напевно $(n_1,\dots,n_d \to \infty)$. Припустимо, що воно виконується для всіх розмірностей індексу n, менших, ніж d, тобто $\mathrm{card}(n) < d$. Доведемо його і при $\mathrm{card}(n) = d$. Зауважимо, що при $\mathrm{card}(n) = 1$ це співвідношення співпадає з твердженням наслідку 2 з [12]. З припущення індукції випливає $\rho(D_0(n,I),x) \to 0$ майже напевно $(n_1,\dots,n_d \to \infty)$, де $D_0(n,I) = \big\{k \in D(n,I)\colon\ k \ne 0$ і $\exists\ 1 \le j \le d\colon k_j = 0\big\}$. Покладемо $D_*(n,I) = D(n,I)\backslash D_0(n,I)\backslash 0$.

Лема 1. *Нехай* $\{a(n), n \in N^d\}$ *– дійсні числа,* $I \ne \emptyset$ *і* $\sum_{k\in D_*(n,I)} (-1)^{k_1+\cdots+k_d}\, a(k)|k|^{-1} \to 0\ \ (n_1,\dots,n_d \to \infty)$. *Тоді для всіх* $x \notin G^d$

$$\sum_{k\in D_*(n,I)} (-1)^{k_1+\cdots+k_d}\, a(k) S_1(k,x) \to 0\ \ (n_1,\dots,n_d \to \infty).$$

Лема 1 при $d = 1$ є частинним випадком ознаки Абеля збіжності рядів. При $d > 1$ доведення леми 1 не відрізняється від випадку $d = 1$, якщо замість нерівності Абеля використати твердження леми 1 [17], що є аналогом нерівності Абеля для $d > 1$.

Внаслідок леми 1 і припущення індукції доведення збіжності майже напевно рядів Котельникова-Шеннона в точці зводиться до доведення співвідношення

$$\rho_1(n) = \sum_{k\in D_*(n,I)} (-1)^{k_1+\cdots+k_d}\, \xi\big(g(k)\big)|k|^{-1} \to 0 \text{ м. н. } (n_1,\dots,n_d \to \infty). \qquad (2.2.1)$$

Покажемо, що умова (2.2.1) достатня також для рівномірної збіжності майже напевно, тобто для виконання умови (a). Для кожного $j \notin I$ виберемо номер l_j такий, щоб $|x_j\Lambda_j - k_j\pi| > 1$ для всіх $x \in X$ і всіх $|k_j| > l_j$. Представимо тепер $\rho(n,x)$ алгебраїчною сумою (сумою по всіх підмножинах $I' \subseteq \{1,\dots d\}\backslash I$)

доданків вигляду $\rho\big(D(n;I,I')\big)$, де $D(n;I,I')=\big\{k\in D(n,I)\colon |k_j|>n_j$ при $j\in I$, $0\le|k_j|\le l_j$ при $j\in I'$ і $n_j\ge k_j>l_j$ при $j\notin I\cup I'\big\}$. З припущення індукції випливає $\sup\limits_{x\in X}\big|\rho\big(D_0(n;I,I')\big)\big|\to 0$ майже напевно $(n_1,\dots,n_d\to\infty)$, де $D_0(n;I,I')=\big\{k\in D(n;I,I')\colon k\ne 0,\exists\ 1\le j\le d\colon k_j=0\big\}$.

Лема 2. *Припустимо, що виконуються умови леми 1, $I\ne\emptyset$, $I'\subseteq\{1,\dots d\}\backslash I$, числа l_j $(j\notin I)$ вибрані такими, щоб $|x_j\Lambda_j-k_j\pi|>1$ для всіх x з обмеженої множини X і $|k_j|>l_j$. Тоді*

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{n\in D_*(n;I,I')}(-1)^{k_1+\dots+k_d}\,a(k)S_1(k,x)\right|\to 0 \text{ майже напевно } (n_1,\dots,n_d\to\infty),$$

де $D_*(n;I,I')=D(n;I,I')\backslash D_0(n;I,I')\cup 0$.

Лема доводиться так само, як і лема 1 (потрібно лише врахувати, що $\sup\limits_{x>0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$).

Внаслідок леми 2 і припущення індукції умова (a) випливає з співвідношення (2.2.1). Доведемо це співвідношення. Визначимо $D^+\equiv D^+(n,I)=\{k\in D(n,I)\colon k_1>0,\dots,k_d>0\}$. Відповідно до рівності (2.1.1) отримаємо представлення

$$\rho_1(n)=(2i)^d\int\limits_{\mathcal{P}}\sum_{D^+}|k|^{-1}\,S_2\left(\frac{\pi k_1(\lambda_1+\Lambda_1)}{\Lambda_1},\dots,\frac{\pi k_d(\lambda_d+\Lambda_d)}{\Lambda_d}\right)Z(d\lambda),\qquad(2.2.2)$$

де $S_2(y)=\prod_{1\le j\le d}\sin y_j$. Покладемо $T_m(\lambda)=\sum_{>m}\frac{\sin k\lambda}{k}$. Для $0<\lambda\le\pi$ відомі рівності (див. [14, с.11])

$$T_m(\lambda)=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{m\lambda}\frac{\sin u}{u}\,du-t_m(\lambda),\qquad(2.2.3)$$

$$T_m(\lambda)=\int\limits_{m\lambda}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-t_m(\lambda),\qquad(2.2.4)$$

причому

$$|t_m(\lambda)|\le\frac{C}{m}\ \ (0<\lambda\le\pi).\qquad(2.2.5)$$

Відзначимо також тотожність

$$T_m(\lambda)=T_m(2\pi-\lambda)\ \ (\pi<\lambda\le 2\pi).\qquad(2.2.6)$$

Для кожних $\Lambda > 0, m \geq 1$ розіб'ємо відрізок $(-\Lambda, \Lambda)$ на чотири частини:

$$A_m^1(\Lambda) = \left(-\Lambda, -\Lambda + 2^{-[\log m]}\right],$$

$$A_m^2(\Lambda) = \left(-\Lambda + 2^{-[\log m]}, 0\right],$$

$$A_m^3(\Lambda) = \left(0, \Lambda - 2^{-[\log m]}\right],$$

$$A_m^4(\Lambda) = \left(\Lambda - 2^{-[\log m]}, \Lambda\right].$$

При достатньо великих m всі чотири множини будуть непорожніми. На множині $A_m^k(\Lambda)$ $(1 \leq k \leq 4)$ визначимо функції $Q_m^{kl}(\lambda)$ наступним чином:

$$Q_m^{11}(\lambda) = \frac{\pi}{2},$$

$$Q_m^{12}(\lambda) = -\int_0^{m\pi\left(\frac{\lambda+\Lambda}{\Lambda}\right)} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

$$Q_m^{13}(\lambda) = -t_m \frac{\pi(\lambda + \Lambda)}{\Lambda},$$

$$Q_m^{21}(\lambda) = -\int_{m\pi\left(\frac{\lambda+\Lambda}{\Lambda}\right)}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

$$Q_m^{22}(\lambda) = -t_m(\pi(\lambda + \Lambda)\Lambda),$$

$$Q_m^{23}(\lambda) = 0,$$

$$Q_m^{31}(\lambda) = -\int_{m\pi\left(\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda}\right)}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

$$Q_m^{32}(\lambda) = t_m \frac{\pi(\Lambda - \lambda)}{\Lambda},$$

$$Q_m^{33}(\lambda) = 0,$$

$$Q_m^{41}(\lambda) = -\frac{\pi}{2},$$

$$Q_m^{42}(\lambda) = \int_0^{m\pi\left(\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda}\right)} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

$$Q_m^{42}(\lambda) = t_m \frac{\pi(\Lambda - \lambda)}{\Lambda}.$$

Зупинимося тепер на випадку $I = \{1, \dots, d\}$. В даних позначеннях відповідно до (2.2.2) – (2.2.4) і (2.2.6)

$$\rho_1(n) = \sum_{k_1=1}^{4} \dots \sum_{k_d=1}^{4} \sum_{l_1=1}^{3} \dots \sum_{l_d=1}^{3} \varsigma(n,k,l), \tag{2.2.7}$$

де

$$\varsigma(n,k,l) = \int\limits_{A_{n_1}^{k_1}(\Lambda_1)} \dots \int\limits_{A_{n_d}^{k_d}(\Lambda_d)} \prod_{1 \le j \le d} Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j)\, Z(d\lambda). \tag{2.2.8}$$

Доведемо, що для кожного доданку $\varsigma(n,k,l)$ з (2.2.7) виконується співвідношення

$$\varsigma(n) \to 0 \text{ майже напевно } (n_1, \dots, n_d \to \infty) \tag{2.2.9}$$

(індекси k і l упустимо). Віднесемо функції Q_m^{11}, Q_m^{41} до першого типу, $Q_m^{12}, Q_m^{21}, Q_m^{31}, Q_m^{42}$ – до другого і $Q_m^{13}, Q_m^{22}, Q_m^{32}, Q_m^{43}$ – до третього. Надалі для нас суттєвим буде не конкретний вид функцій Q_m^{kl}, а лише той факт, що функції другого типу на відповідних множинах A_n^k задовольняють умови (П.1) – (П.2) з $\lambda_{0k} = \Lambda_k$ (див. [14, с.11-12]), а функції третього типу – умові (2.2.5). Тому одним і тим же символом R_n^2 (R_n^3) будемо позначати всі функції другого (третього) типу. Розглянемо тепер довільне $\varsigma(n)$ з правої частини (2.2.7). Нехай в розклад (2.2.8) входить α функцій першого типу, β – другого і $\gamma (= d - \alpha - \beta)$ – третього. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в цьому розкладі перші α функцій належать першому типу, наступні β – другому і останні γ – третьому. Для фіксованих $n_{\alpha+1}, \dots, n_d$ представимо $\varsigma(n)$ у вигляді

$$\varsigma(n) = C \sum_{u_1 \ge [\log n_1]} \dots \sum_{u_\alpha \ge [\log n_\alpha]} Y(u_0^\alpha)\,, \tag{2.2.10}$$

$$Y(u_0^\alpha) = \int\limits_{E(u_0^\alpha)} \int\limits_{G(n_\alpha^\beta)} \int\limits_{H(n_\beta^d)} \prod_{\alpha < j \le \beta} R_{n_j}^2(\lambda_j) \prod_{\beta < j \le d} R_{n_j}(\lambda_j) Z(d\lambda), \tag{2.2.11}$$

де $E(u_0^\alpha) = e_{u_1}(\Lambda_1) \times \dots \times e_{u_\alpha}(\Lambda_\alpha)$, причому кожна множина $e_{u_k}(\Lambda_k)$ $(1 \le k \le \alpha)$ дорівнює або $(-\Lambda_k + 2^{-(u_k+1)}, -\Lambda_k + 2^{-u_k}]$, або $[\Lambda_k - 2^{-(u_k+1)}, \Lambda_k - 2^{-u_k}]$ в залежності від $k = 1$ або $k = 4$; $H(n_\beta^d) = A_{n_{\beta+1}}^{k_{\beta+1}}(\Lambda_{\beta+1}) \times \dots \times A_{n_d}^{k_d}(\Lambda_d)$; $G(n_\alpha^\beta) = A_{n_{\alpha+1}}^{k_{\alpha+1}}(\Lambda_{\alpha+1}) \times \dots \times A_{n_\beta}^{k_\beta}(\Lambda_\beta)$. Зроблені позначення справедливі лише для тих

α, β, γ, які не дорівнюють ні 0, ні d. Проте якщо в подібних випадках ігнорувати всі відповідні знаки $\sum$, $\prod$ і всі відповідні судження упускати, то позначення і судження будуть справедливі для всіх $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le d$. Співвідношення (2.2.9), таким чином, випливає: з леми П.6 у випадку $\alpha > 0$; з леми П.4 у випадку $\alpha = 0, \beta = 0$; з леми П.3 у випадку $\alpha = 0, \gamma = 0$; з леми П.5 у випадку $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

Отже, $\rho_1(n)$, визначене рівністю (2.2.1), прямує до 0 майже напевно при $n_1, \dots, n_d \to \infty$ у випадку $I = \{1, \dots, d\}$. Доведемо цей результат і для довільної множини $\emptyset \ne I \subset \{1, \dots, d\}$. На підставі симетрії, не обмежуючи загальності, достатньо розглянути випадок $I = \{1, \dots, c\}$ $(1 \le c < d)$. Позначимо

$\tau_m(\lambda) = \sum_{1 \le k \le m} \frac{\sin k\lambda}{k}$. Відомо, що

$$T_m(\lambda) + \tau_m(\lambda) = \frac{\pi - \lambda}{2} \ (0 < \lambda < 2\pi). \tag{2.2.12}$$

Використовуючи співвідношення (2.2.2) і введенні вище означення множин $A_m^k(\Lambda)$ і функцій $Q_n^{kl}(\lambda)$, доводимо, що в даному випадку

$$\rho_1(n) = \sum_{k_1=1}^{4} \dots \sum_{k_c=1}^{4} \sum_{l_1=1}^{3} \dots \sum_{l_c=1}^{3} \chi(n, k, l), \tag{2.2.13}$$

де

$$\chi(n, k, l) = \int\limits_{A_{n_1}^{k_1}(\Lambda_1)} \dots \int\limits_{A_{n_c}^{k_c}(\Lambda_c)} \int\limits_{\mathcal{P}_c} \prod_{1 \le j \le c} Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j) \prod_{c < j \le d} \tau_{n_j}(\lambda_j)\, Z(d\lambda), \tag{2.2.14}$$

$$\mathcal{P}_a^b = [-\Lambda_{a+1}, \Lambda_{a+1}] \times \dots \times [\Lambda_b, \Lambda_b] \ (0 \le a < b \le d).$$

З нерівності (2.2.12) легко побачити, що $\prod_{c<j\le d} \tau_{n_j}(\lambda_j)$ можна представити у вигляді алгебраїчної суми 2^{d-c} доданків, кожен з яких дорівнює добутку декількох, скажемо, b $(0 \le b \le d - c)$ множників виду $T_{n_j}(\lambda_j)$ і декількох $(= d - c - b)$ множників виду $\frac{\pi - \lambda_j}{2}$. Якщо підставити дану суму в (2.2.14) замість $\prod_{c<j\le d} \tau_{n_j}(\lambda_j)$, то кожне $\chi(n, k, l)$ буде рівним алгебраїчній сумі 2^{d-c} доданків. Доведемо, що кожен з них прямує майже напевно до 0. Знову на підставі симетрії можна обмежитися випадком тих доданків, які мають вигляд

$$\int\limits_{A_{n_1}^{k_1}(\Lambda_1)} \dots \int\limits_{A_{n_c}^{k_c}(\Lambda_c)} \int\limits_{\mathcal{P}_c} \prod_{1 \le j \le c} Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j) \prod_{c < j \le a} T_{n_j}(\lambda_j) \prod_{a < j \le d} (\pi - \lambda_j)\, Z(d\lambda) \ (c \le a \le d). \tag{2.2.15}$$

Означення (2.2.15) є коректним у випадку $a = c$ $(a = d)$, якщо знак $\prod_{c<j\le a}$ $\left(\prod_{a<j\le d}\right)$ ігнорувати. В даних випадках всі відповідні міркування, які наведені нижче, необхідно упускати. Розіб'ємо тепер відрізки $(-\Lambda_j, \Lambda_j)$, $c < j \le a$, на частини A_n^k $(1 \le k \le 4)$ і представимо $T_{n_j}(\lambda_j)$ сумою по $1 \le k_j \le 4$ і $1 \le l_j \le 3$ $(c < j \le a)$ функцій $Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j)$. Відповідно з цим кожна величина (2.2.19) буде рівна сумі скінченної кількості доданків вигляду

$$\int\limits_{A_{n_1}^{k_1}(\Lambda_1)} \dots \int\limits_{A_{n_d}^{k_d}(\Lambda_d)} \int\limits_{\mathcal{P}_a} \prod_{1\le j\le a} Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j) \prod_{a<j\le d} (\pi - \lambda_j)\, Z(d\lambda). \qquad (2.2.16)$$

Відповідно, доведення співвідношення (2.2.9) зводиться до доведення того, що до 0 прямує майже напевно величина, визначена рівністю (2.2.16).

Останнє твердження можна довести наступним чином. Покладемо

$$Z_1(W) = \int\limits_W \int\limits_{\mathcal{P}_a^d} (\pi - \lambda_j) Z(d\lambda) \quad (W \subseteq R^a),$$

$$F_1(W) = \int\limits_W \int\limits_{\mathcal{P}_a^d} |\pi - \lambda_j|^2 F(d\lambda) \quad (W \subseteq R^a).$$

Зрозуміло, що Z_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, обмежена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_0^a$ і підлегла спектральній мірі F_1, причому випадкова величина (2.2.16) має вигляд

$$\int\limits_{A_{n_1}^{k_1}(\Lambda_1)} \dots \int\limits_{A_{n_a}^{k_a}(\Lambda_a)} \prod_{1\le j\le a} Q_{n_j}^{k_j l_j}(\lambda_j)\, Z_1(d\lambda_1, \dots, d\lambda_a), \qquad (2.2.17)$$

який при $a = d$ повністю співпадає з (12). Тому з вже доведеної частини теореми випливає, що випадкова величина (21) прямує майже напевно до 0, якщо

$$\int\limits_{\mathcal{P}_0^a} \prod_{1\le j\le a} \left(\log\log\left(2 + \frac{1}{\Lambda_j^2 - \lambda_j^2}\right)\right)^2 F_1(d\lambda_1, \dots, d\lambda_a) < \infty. \qquad (2.2.18)$$

Але умова (2.2.18) є наслідком умови (2.1.2).

Отже, повністю доведено, що для всіх непорожніх $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ виконується співвідношення (2.2.9). Це, як було показано вище, еквівалентно збіжності майже напевно ряду Котельникова-Шеннона. Залишилося показати, що збіжність має місце саме до значень поля ξ. Ще раз застосуємо індукцію. Для $d = 1$ збіжність ряду Котельникова-Шеннона до значень поля має місце на

підставі наслідку 2 [14]. Припустимо, що цей факт має місце для всіх card $(n) < d$. Доведемо це і для card $(n) = d$. На підставі припущення індукції для всіх $n_d \geq 0$

$$\lim_{\substack{n_1\to\infty \\ \dots \\ n_{d-1}\to\infty}} \xi(n,x) = \sum_{-n_d\leq k_d\leq n_d} \xi\left(x_1,\dots,x_{d-1},\frac{k_d\pi}{\Lambda_d}\right)\frac{\sin\left(x_j\Lambda_j - k_j\pi\right)}{x_j\Lambda_j - k_j\pi}. \qquad (2.2.19)$$

Перехід до границі в (2.2.19) при $n_d \to \infty$ і теорема про збіг повторних і подвійних границь завершує доведення теореми.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана ортогональна стохастична спектральна міра $Z(D), D \subset R^d$ $(d \geq 1)$ і F – відповідна їй спектральна міра. Нехай, далі, функції $\left\{Q_n^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, n \geq 1\right\}$ при будь якому $1 \leq j \leq d$ і при деяких $\lambda_{01},\dots,\lambda_{0d}$ задовольняють хоча б одну з умов

$$\left|Q_{2n}^{(j)}(\lambda)\right| \leq C_{\min}\left\{2^n\left|\lambda+\lambda_{0j}\right|, \left(2^n\left|\lambda+\lambda_{0j}\right|\right)^{-1}\right\} \quad (n \geq 1), \qquad (\text{П. } 1)$$

$$\left|Q_{n_1}^{(j)}(\lambda) - Q_{n_2}^{(j)}(\lambda)\right| \leq C\min\left\{(n_1-n_2)\left|\lambda+\lambda_{0j}\right|, \frac{n_1-n_2}{n_2}, \left(n_2\left|\lambda+\lambda_{0j}\right|\right)^{-1}\right\}, (\text{П. } 2)$$

$2^n \leq n_2 < n_1 < 2^{n+1},\ n \geq 1$. Для $\mathcal{P} = [-\Lambda_1,\Lambda_1] \times \dots \times [-\Lambda_d,\Lambda_d]$ *покладемо*

$$\eta(n) = \int_{\mathcal{P}} \prod_{1\leq j\leq d} Q_{n_j}^{(j)}(\lambda_j)\, Z(d\lambda),$$

$$\eta^*(n) = \int_{\mathcal{P}} \max_{2^n\leq k\leq 2^{n+1}-1} \prod_{1\leq j\leq d} \left|Q_{k_j}(\lambda_j) - Q_{2^n j}(\lambda_j)\right| Z(d\lambda).$$

Лема П.1. *Якщо при всіх* $1 \leq j \leq d$ *і деяких* $\lambda_{01},\dots,\lambda_{0d}$ *функції* $\left\{Q_n^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, n \geq 1\right\}$ *задовольняють умову (П.1), то*

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{M}\,|\eta(2^n)|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П. } 3)$$

Доведення леми П.1. Співвідношення (П.3) при $d = 1$ доведено В. Ф. Гапошкіним [14]. Щоб переконатися в цьому, покладемо $\upsilon = F, b = 2, X = \Omega, f_n(x) = \eta(n,\omega),\ r = 2,\ \mu = P, Y = [-\Lambda_1,\Lambda_1],\ \varphi(y) = |\lambda - \lambda_{01}|$ і визначимо функціонал $g_n(y)$: $[-\Lambda_1,\Lambda_1] \to R^1$ правою частиною (П.1). Тоді з нерівності (7) в [14] і її доведення випливає, що

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{M}\,|\eta(2^n)|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda).$$

Припустимо по індукції, що (П.3) вже доведено для всіх $\mathrm{card}\,(n) < d$. Доведемо це співвідношення і для $\mathrm{card}\,(n) = d \geq 2$. Для цього покладемо при фіксованому $n_d \geq 1$

$$S_1(W) = \int\limits_W \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} Q_{n_d}^{(d)}(\lambda_d) Z(d\lambda)\,, \qquad W \subseteq \mathcal{P}_{d-1} = [-\Lambda_1, \Lambda_1] \times \ldots \times [-\Lambda_{d-1}, \Lambda_{d-1}];$$

$$F_1(W) = \int\limits_W \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} \left| Q_{n_d}^{(d)}(\lambda_d) \right|^2 F(d\lambda)\,, \qquad W \subseteq \mathcal{P}_{d-1},$$

$$\eta_1(n_1, \ldots, n_{d-1}) = \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} \prod_{1 \leq j < d} Q_{n_j}^{(j)}(\lambda_j)\, S_1(d\lambda_1, \ldots, d\lambda_{d-1}).$$

Зрозуміло, що S_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, зосереджена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_{d-1}$, яка відповідає спектральній мірі F. На підставі припущень індукції маємо

$$\sum_{n_1 \geq 0} \ldots \sum_{n_{d-1} \geq 0} \mathrm{M}\,|\eta_1(2^{n_1}, \ldots, 2^{n_{d-1}})|^2 \leq C \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} F_1(d\lambda_1, \ldots, d\lambda_{d-1}). \qquad (\text{П.}4)$$

Якщо покласти

$$S_2(W) = \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} \int\limits_W Z(d\lambda)\,, W \subseteq [-Y_d, Y_d],$$

$$F_2(W) = \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} \int\limits_W F(d\lambda) \quad (W \subseteq [-Y_d, Y_d]),$$

$$\eta_2(n) = \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} Q_n^{(d)}(\lambda) S_2(d\lambda),$$

то S_2 буде ортогональною стохастичною спектральною мірою, зосередженою на $[-Y_d, Y_d]$, яка буде відповідати спектральній мірі F_2. Знову на підставі припущення індукції

$$\sum_{n \geq 0} \mathrm{M}\,|\eta_2(2^n)|^2 \leq C \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} F_2(d\lambda). \qquad (\text{П.}5)$$

З нерівностей (П.4), (П.5) випливає (П.3).

Лема П.2. *Якщо при всіх* $1 \le j \le d$ *і деяких* $\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0d}$ *функції* $\left\{Q_n^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, n \ge 1\right\}$ *задовольняють умову (П.2), то*

$$\sum_{n\ge 0} \mathrm{M}\,|\eta^*(n)|^2 \le C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П.}6)$$

Доведення леми П.2. Співвідношення (П.6) при $d = 1$ доведене в статті [14]. Щоб переконатися в цьому, покладемо

$X = \Omega, f_n(x) = \eta(n,\omega),\ r = 2,\ \mu = P, Y = [-\Lambda_1, \Lambda_1],\ \upsilon = F, \varphi(y) = |\lambda + \lambda_{01}|, a_1 = b_1 = 2, c_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0, c_2 = 2, a = 2$

і визначимо функціонал $g_{n_1,n_2}(y)$ правою частиною нерівності (П.2). Тоді з збіжності ряду (8) [14] і доведення його збіжності випливає, що

$$\sum_{n\ge 0} \mathrm{M}\,|\eta^*(n)|^2 \le C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda).$$

Припустимо по індукції, що (П.6) уже доведено для всіх $\mathrm{card}\,(n) < d$. Доведемо це співвідношення і для $\mathrm{card}\,(n) = d \ge 2$. Для цього покладемо при фіксованому $n_d \ge 1$

$$S_1(W) = \int_W \int_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} \max_{2^{n_d} < k_d < 2^{n_d+1}} \left|Q_{k_d}^{(d)}(\lambda_d) - Q_{2^{n_d}}^{(d)}(\lambda_d)\right| Z(d\lambda),$$

$$F_1(W) = \int_W \int_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} \max_{2^{n_d} < k_d < 2^{n_d+1}} \left|Q_{k_d}^{(d)}(\lambda_d) - Q_{2^{n_d}}^{(d)}(\lambda_d)\right|^2 F(d\lambda), \qquad W \subseteq \mathcal{P}_{d-1},$$

$$\eta_1(n_1, \dots, n_{d-1}) = \int_{\mathcal{P}_{d-1}} \prod_{1\le j<d} \max \prod_{j=1}^{d-1} \left|Q_{k_j}^{(j)}(\lambda_j) - Q_{2^{n_j}}^{(j)}(\lambda_j)\right| S_1\left(d\lambda_0^{d-1}\right),$$

де останній максимум береться по $2^{n_1} < k_1 < 2^{n_1+1}, \dots, 2^{n_{d-1}} < k_{d-1} < 2^{n_{d-1}+1}$. Зрозуміло, що S_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, зосереджена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_{d-1}$, яка відповідає спектральній мірі F_1. На підставі припущень індукції маємо

$$\sum_{n_1\ge 0} \dots \sum_{n_{d-1}\ge 0} \mathrm{M}\left|\eta^*\left(n_0^{d-1}\right)\right|^2 \le C \int_{\mathcal{P}_{d-1}} F_1\left(d\lambda_0^{d-1}\right). \qquad (\text{П.}7)$$

Якщо покласти

$$S_2(W) = \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} \int\limits_{W} Z(d\lambda),$$

$$F_2(W) = \int\limits_{\mathcal{P}_{d-1}} \int\limits_{W} F(d\lambda) \quad (W \subseteq [-\Lambda_d, \Lambda_d]),$$

$$\eta_2^*(n) = \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} \max_{2^n<k<2^{n+1}} \left| Q_k^{(d)}(\lambda) - Q_{2^n}^{(d)}(\lambda) \right| S_2(d\lambda).$$

Зрозуміло, що S_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, зосереджена на відрізку $[-\Lambda_d, \Lambda_d]$, яка відповідає спектральній мірі F_2. Знову на підставі припущень індукції маємо

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{M}\,|\eta_2^*(n)|^2 \leq C \int\limits_{-\Lambda_d}^{\Lambda_d} F_2(d\lambda). \qquad (\text{П.}8)$$

З нерівностей (П.7), (П.8) випливає лема П.2.

Лема П.3. *Якщо при всіх* $1 \leq j \leq d$ *і деяких* $\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0d}$ *функції* $\left\{ Q_n^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, n \geq 1 \right\}$ *задовольняють умови (П.1), (П.2), то(П.9)*

$$\eta(n) \to 0 \text{ майже напевно } (n_1, \dots, n_d \to \infty), \qquad (\text{П.}9)$$

$$M\left(\sup_{n \in N_+^d} |\eta(n)| \right)^2 \leq C \int\limits_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П.}10)$$

Доведення леми 3. Для справедливості леми П.3 достатньо, щоб виконувалося (П.3) і

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{M} \max_{2^n<k<2^{n+1}-1} |\eta(k) - \eta(2^n)|^2 \leq C \int\limits_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П.}11)$$

Нерівність (П.3) виконується на підставі леми П.1, тому зупинимося на доведенні (П.11). Легко бачити, що $\eta(k) - \eta(2^n)$ представляється у вигляді алгебраїчної суми $2^d - 1$ доданків вигляду

$$\eta(k; 2^n; j_1, \dots, j_c) = \int\limits_{\mathcal{P}} \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_c\}} \left(Q_{k_j}^{(j)}(\lambda_j) - Q_{2^{n_j}}^{(j)}(\lambda_j) \right) \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_c\}} Q_{2^{n_j}}^{(j)}(\lambda_j)\, Z(d\lambda)$$

(суми по всіх, крім порожньої, підмножинах $\{j_1, \dots, j_c\}$ множини $\{1, \dots, d\}$). Отже, для доведення (П.11) достатньо показати, що для всіх $\{j_1, \dots, j_c\} \subseteq \{1, \dots, d\}$

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{M}\left(\max_{2^n<k<2^{n+1}-1} |\eta(k;2^n;j_1,\dots,j_c)|\right)^2 C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П.}12)$$

При доведенні даного співвідношення на підставі симетрії можна обмежитися випадком $j_1 = 1,\dots,j_c = c$. Якщо $c = d$, то нерівність (П.12) випливає з (П.6). Нехай $1 \leq c < d$. Покладемо

$$S_1(W) = \int_W \int_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\leq d} Q_{2^{n_J}}^{(j)}(\lambda_j)\, Z(d\lambda) \qquad (W \subseteq \mathcal{P}_0^c),$$

$$F_1(W) = \int_W \int_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\leq d} \left|Q_{2^{n_J}}^{(j)}\right|^2 F(d\lambda) \qquad (W \subseteq \mathcal{P}_0^c),$$

$$\eta_1^*(n_0^c) = \int_{\mathcal{P}_0^c} \max_{\substack{2^{n_1}<k_1<2^{n_1+1} \\ \dots \\ 2^{n_c}<k_c<2^{n_c+1}}} \prod_{1\leq j\leq c} \left(Q_{k_j}^{(j)}(\lambda_j) - Q_{2^{n_j}}^{(j)}(\lambda_j)\right) S_1(d\lambda_0^c).$$

Зрозуміло, що S_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, зосереджена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_0^c$, яка відповідає спектральній мірі F_1. Тому з леми П.2 виводимо

$$\sum_{n_1\geq 0} \dots \sum_{n_c\geq 0} M|\eta_1^*(n_0^c)|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}_0^c} F_1(d\lambda_0^c). \qquad (\text{П.}13)$$

Якщо тепер покласти

$$S_2(W) = \int_{\mathcal{P}_0^c} \int_W Z(d\lambda) \quad (W \subseteq \mathcal{P}_c^d),$$

$$F_2(W) = \int_{\mathcal{P}_0^c} \int_W F(d\lambda),$$

$$\eta_2(n_c^d) = \int_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\leq d} Q_{n_j}^{(j)}(\lambda_j)\, S_2(d\lambda_c^d),$$

то виявиться, що S_2 – ортогональна стохастична спектральна міра, обмежена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_c^d$, яка відповідає спектральній мірі F_2. Таким чином, з леми П.1 отримаємо

$$\sum_{n_{c+1}\geq 0} \dots \sum_{n_d\geq 0} M|\eta_2(2^{n_{c+1}},\dots,2^{n_d})|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}_c^d} F_2(d\lambda_c^d). \qquad (\text{П.}14)$$

Нерівності (П.13), (П.14) доводять (П.11), а отже, і лему П.3.

Лема П.4. *Нехай функції* $\left\{Q_m^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, m \geq 1\right\}$ *при* $1 \leq j \leq d$ *задовольняють нерівність (9), в якій* t_m *замінено на* $Q_m^{(j)}$. *Тоді*

а) $\eta(n) \to 0$ майже напевно $(n_1, \dots, n_d \to \infty)$;

б) $M\left(\sup_{n \in N_+^d} |\eta(n)|\right)^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda)$.

Доведення леми П.4. Так як

$$\sum_{n \in N_+^d} M\,|\eta(n)|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda),$$

то лема П.4 випливає з леми П.9.

Лема П.5. *Нехай* $1 \leq c < d$ *і функції* $\left\{Q_m^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, m \geq 1\right\}$ *при* $1 \leq j \leq c$ *задовольняють умовам (П.1), (П.2), а при* $c < j \leq d$ *– умову (9), в якій* t_m *замінено на* $Q_m^{(j)}$. *Тоді*

а) $\lim\limits_{\substack{n_1 \to \infty \\ \dots \\ n_c \to \infty}} \sup\limits_{\substack{n_{c+1} \geq 1 \\ \dots \\ n_d \geq 1}} |\eta(n)| = 0$ майже напевно;

б) $M\left(\sup_{n \in N_+^d} |\eta(n)|\right)^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda)$.

Доведення леми П.5. Зрозуміло, що для доведення леми П.5 достатньо показати, що

$$\sum_{n_0^c \geq 0_0^c} \sum_{n_c^d \geq 1_c^d} M\left|\eta\left(2^{n_0^c}, n_c^d\right)\right|^2 \leq C \int_{\mathcal{P}} F(d\lambda), \qquad (\text{П.}15)$$

$$\sum_{n_0^c \geq 0_0^c} \sum_{n_c^d \geq 1_c^d} M\left(\max_{\substack{2^{n_1} < k_1 < 2^{n_1+1} \\ \dots \\ 2^{n_c} < k_c < 2^{n_c+1}}} \left|\eta(k_0^c, n_c^d) - \eta\left(2^{n_0^c}, n_c^d\right)\right|\right)^2 < \infty. \qquad (\text{П.}16)$$

При фіксованих $n_{c+1}, \dots, n_d$ введемо позначення:

$$Z_1(W) = \int_W \int_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\leq d} Q_{n_J}^{(j)}(\lambda_j)\, Z(d\lambda) \qquad (W \subseteq \mathcal{P}_0^c),$$

$$F_1(W) = \int\limits_W \int\limits_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\le d} \left|Q_{n_J}^{(j)}(\lambda_j)\right|^2 F(d\lambda) \qquad (W \subseteq \mathcal{P}_0^c),$$

$$\eta_1(n_0^c) = \int\limits_{\mathcal{P}_0^c} \prod_{1\le j\le c} Q_{n_J}^{(j)}(\lambda_j)\, Z_1(d\lambda_0^c).$$

Зрозуміло, що Z_1 – ортогональна стохастична спектральна міра, зосереджена на паралелепіпеді $\mathcal{P}_0^c$, яка відповідає спектральній мірі F_1. На підставі леми П.1 отримаємо

$$\sum_{n_1\ge 0} \dots \sum_{n_c\ge 0} M|\eta_1(2^{n_1},\dots,2^{n_c})|^2 \le C \int\limits_{\mathcal{P}_0^c} F_1(d\lambda_0^c). \qquad (\text{П.}17)$$

З іншого боку, з нерівності (9) випливає

$$\sum_{n_{c+1}\ge M} \dots \sum_{n_d\ge 0} \int\limits_{\mathcal{P}_0^c} \int\limits_{\mathcal{P}_c^d} \prod_{c<j\le d} \left|Q_{n_J}^{(j)}(\lambda_j)\right|^2 F(d\lambda) \le C \int\limits_{\mathcal{P}} F(d\lambda). \qquad (\text{П.}18)$$

З (П.17), (П.18) випливає (П.14).

З (П.11) випливає

$$\sum_{n_1\ge 0} \dots \sum_{n_c\ge 0} M\left(\max_{\substack{2^{n_1}\le k_1<2^{n_1+1}\\ \dots \\ 2^{n_c}<k_c<2^{n_c+1}}} \left|\eta_1(k_0^c) - \eta_1\left(2^{n_0^c}\right)\right|\right)^2 \le C \int\limits_{\mathcal{P}_0^c} F_1(d\lambda_1,\dots,d\lambda_c). \quad (\text{П.}19)$$

З (П.18), (П.19) випливає (П.16). Лему доведено.

Лема П.6. *Припустимо, що* $0 < a < d, b \ge 0, c \ge 0, a+b+c = d$ *і при* $a < j \le a+b$ *(якщо* $b \ne 0$*) функції* $\left\{Q_m^{(j)}(\lambda);\ \lambda \in R^1, m \ge 1\right\}$ *задовольняють умови (П.1), (П.2), а при* $a+b < j \le d$ *(якщо* $c \ne 0$*) – умові (9), в якій* t_m *замінено на* $Q_m^{(j)}$*. Тоді, у випадку*

$$\sum_{n_0^a\ge 1_0^a} \prod_{1\le j\le a} \left(\log\left(2n_j\right)\right)^2 \int\limits_{E\left(n_0^a\right)} \int\limits_{\mathcal{P}_0^d} F(d\lambda) < \infty$$

виконується співвідношення

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ \dots \\ m_a\to\infty}} \sup_{\substack{n_{a+1}\ge 1\\ \dots \\ n_d\ge 1}} \left|\sum_{n_1\ge m_1} \dots \sum_{n_a\ge m_a} \chi(n)\right| = 0 \text{ майже напевно,}$$

де

$$\chi(n) = \int\limits_{E\left(n_0^a\right)} \int\limits_{\mathcal{P}_a^d} \prod_{a<j\le d} Q_{n_j}^{(j)}\left(\lambda_j\right) Z(d\lambda),$$

причому $E(n_0^a) \subseteq \mathcal{P}_0^a$: $E(n_0^a) \cap E(m_0^a) = \emptyset$ $(n_0^a \neq m_0^a)$ *і* Z *– ортогональна стохастична спектральна міра.*

Доведення леми П.6. Всі наступні міркування ми наводимо для загального випадку $b \ge 0, c \ge 0$. Якщо $b = 0$ або $c = 0$, то відповідні міркування потрібно упустити і відповідні математичні символи ігнорувати. Визначимо нескінченновимірний вектор $X(n_0^a) = (\chi(n);\ n_{a+1} \ge 1, \dots, n_d \ge 1)$, який приймає значення в лінійному нормованому просторі з нормою $\sup\limits_{n_{a+1}\ge 1} \dots \sup\limits_{n_d \ge 1} |\cdot|$. На підставі (П.10) і тверджень б) лем П.4 і П.5 для всіх $m_0^a \ge 0, n_0^a \ge 1_0^a$ має місце нерівність

$$M\left\| \sum_{m_0^a + 1_0^a \le I_0^a \le m_0^a + n_0^a} X(I_0^a) \right\|^2 \le C \sum_{m_0^a + 1_0^a \le I_0^a \le m_0^a + n_0^a} \int\limits_{E\left(I_0^a\right)} \int\limits_{\mathcal{P}_a^d} F(d\lambda).$$

З цієї нерівності і леми П.8 і випливає лема П.6.

Лема П.7. *Припустимо, що* $\{X(n), n \in N_+^d\}$ *послідовність випадкових елементів, які приймають значення в лінійному нормованому просторі* L *(з нормою* $\|\cdot\|$*), причому для деякої послідовності дійсних чисел* $\{\sigma^2(I), I \in N_+^d\}$ *і всіх* $a \ge 0, m \ge 1$

$$M\|S(a,m)\|^2 \le \sum_{a+1\le I\le a+m} \sigma^2(I) \equiv g(a,m), \qquad (\text{П.}20)$$

де $S(a,m) = \sum_{a+1\le I\le a+m} X(I)$. *Тоді для всіх* $n \ge 1$

$$M(T(a,n))^2 \le g(a,n) \prod_{1\le j\le d} \left(\log\left(2n_j\right)\right)^2, \qquad (\text{П.}21)$$

де $T(a,n) = \max\limits_{m\le n} \|S(a,m)\|$.

Доведення леми П.7. Нехай спочатку $d = 1$. При доведенні (П.21) використаємо метод Серфлінга [8], який вивчив випадок $L = R^1$. Покладемо $m = \left[\frac{N+1}{2}\right]$ для $N > 1$. Для $m < n \le N$ маємо

$$\|S(a,n)\|^2 \le T^2(a,m) + T^2(a+m, n-m) + 2\|S(a,m)\|T(a+m, n-m). \qquad (\text{П.}22)$$

Зрозуміло, що (П.22) виконується і для $n \le m$. Отже,

$$T^2(a,N) \le T^2(a,m) + T^2(a+m,N-m) + 2\|S(a,m)\|T(a+m,N-m). \qquad (\text{П.}23)$$

Припустимо згідно індукції, що (П.21) правильно для $n < N$. Визначимо $f(k) = (\log 2k)^2$ $(k \ge 1)$, з (П.21) і (П.23) отримаємо $MT^2(a,N) \le g(a,m)f(m) + g(a+m,N-m)f(N-m) + \sqrt{f(N-m)}\big(g(a,m) + g(a+m,N-m)\big)$. Звідси, враховуючи, що $f(N-m) \le f(m)$ і $f(m) + \sqrt{f(m)} \le f(N)$ [16], отримуємо (П.21).

Якщо тепер $d > 1$, то для $n \in N_+^d$ визначимо $Y\big(k_0^{d-1}\big) = \big(\sum_{a_d < k_d \le a_d + m_d} X(k);\ 1 \le m_d \le n_d\big) \in L \times R^{n_d}$. В лінійному просторі $L \times R^{n_d}$ введемо норму $\|x\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n_d} \|x_j\|$ $\big(x = (x_1, \dots, x_d),\ x_j \in L, 1 \le j \le n_d\big)$. Припустимо, що лема справедлива при $\text{card}\,(n) < d$. Доведемо її при $\text{card}\,(n) = d$. Для всіх a_0^{d-1}, m_0^{d-1} маємо

$$M\left\| \sum_{a_0^{d-1}+1_0^{d-1} \le I_0^{d-1} \le a_0^{d-1}+m_0^{d-1}} Y\big(I_0^{d-1}\big) \right\|_1^2 = M\left(\max_{1 \le m_d \le n_d} \|S(a,m)\| \right)^2. \qquad (\text{П.}24)$$

На підставі доведеної для $d = 1$ частини теореми

$$M\left(\max_{1 \le m_d \le n_d} \|S(a,m)\| \right)^2 \le (\log 2n_d)^2 g\left(a; \big(m_0^{d-1}, n_d\big)\right) \equiv h\big(a_0^{d-1}, m_0^{d-1}\big). \qquad (\text{П.}25)$$

З (П.24), (П.25) зрозуміло, що для $Y\big(n_0^{d-1}\big)$ виконується умова леми, причому $\text{card}\,\big(n_0^{d-1}\big) < d$. Припущення індукції завершує доведення.

Лема П.8. *Припустимо, що* $\{X(n), n \in N_+^d\}$ $(d \ge 1)$ *такі ж, як і в лемі П.7. Якщо* $\sum_{n \in N_+^d} \sigma^2(n) \prod_{1 \le j \le d} \big(\log 2n_j\big)^2 < \infty$, *то*

$$\left\| \sum_{l_1 \ge m_1} \dots \sum_{l_d \ge m_d} X(l) \right\| \to 0 \text{ майже напевно } (m_1, \dots, m_d \to \infty). \qquad (\text{П.}26)$$

Доведення леми П.8. Насамперед в доведенні потребує збіжність майже напевно ряду $\sum X(n)$. Цей факт при $L = R^1$ випливає з теореми 1 [19]. Легко бачити, що доведення цієї теореми дослівно повторюється і для випадку довільного L (доведення спирається лише на нерівність (П.20), але не на конкретний вигляд області значень функцій X). Тому ми не будемо наводити доведення збіжності майже напевно ряду $\sum X(n)$. Зауважимо, що при $d = 1$ збіжності цього ряду уже достатньо для (П.26), але при $d > 1$ потрібні ще додаткові міркування. Нехай $2^n + 1 \le m \le 2^n + I$ $(n \ge 0, m \ge 2)$ і оператор $G(m,I)$ $(I \subseteq \{1, \dots, d\})$ діє на довільну послідовність $\{a(I),\ I \in N_+^d\}$ наступним чином:

$$G(m,I)\{a(I)\} = \sum_{l \in D(m,I)} a(I)\,,$$

де $D(m,I) = \{I\colon I_j \geq 2^{n_j}, \text{якщо } j \in I \text{ і } 2^{n_j} < l_j \leq m_j, \text{ якщо } j \notin I\}$.

Покажемо, що для всіх I

$$\|G(m,I)\{X(I)\}\| \to 0 \text{ майже напевно } (m_1, \dots, m_d \to \infty). \qquad (\text{П.}27)$$

Зрозуміло, що з співвідношення (П.27) випливає (П.26), оскільки ліва частина (П.26) не перевищує суму 2^d доданків $\|G(m,I)\{X(I)\}\|$ (суми по всіх можливих I). На підставі леми П.7 для фіксованих $m_1, \dots, m_c$ маємо

$$M \max_{2^{n_J} < m_j \leq 2^{n_j+1}\ (j \notin I)} \|G(m,I)\{X(I)\}\|^2 \leq \left(\prod_{j \notin I} m_j^2\right) H(m)\{\sigma^2(I)\}, \qquad (\text{П.}28)$$

де $H(m)\{\sigma^2(I)\} = \sum_{I \in E(m)} \sigma^2(I)$, $E(m) = \{l_j \geq 2^{m_j} \text{ для } j \in I \text{ і } 2^{m_j} < l_j \leq 2^{m_j+1} \text{ для } j \notin I\}$. Оскільки

$$\sum_{m \in N_+^d} (H(m)\{\sigma^2(I)\}) \prod_{j \notin I} m_j^2 \leq \sum_{n \in N_+^d} \left(\prod_{j \in I} \log(2n_j)\right)\left(\prod_{j \notin I} (\log(2n_j))^2\right)\sigma^2(n) < \infty,$$

то з (П.28) і леми П.9 випливає (П.27).

Лема П.9. *Якщо* $\{\xi(n), n \in N_+^d\}$ *– послідовність невід'ємних випадкових величин, для якої* $\sum_{n \in N_+^d} M\xi(n) < \infty$, *то* $\xi(n) \to 0$ *майже напевно* $(n_1 \to \infty, \dots, n_d \to \infty)$.

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}$$

$$\xi_n(t) = \sum_{-n\le k\le n} \xi(g_k)S(k,t),$$

де $g_k = \frac{k\pi}{\Lambda}, \quad S(k,t) = \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}$.

$$\xi(t) - \xi_n(t) = \sum_{|k|>n} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} + \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}$$

Теорема. *Припустимо, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\right| < \infty\,,$$

тоді

$$\boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{\xi(t) - \xi_n(t)}\right)^2\right] \le \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{\pi^2}\left(B(0)\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n+j} - \frac{3}{j-n-1}\right) + \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Доведення.

$$\boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{\xi(t) - \xi_n(t)}\right)^2\right] = \boldsymbol{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} + \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2\right] =$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 + \boldsymbol{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2\right] = \boldsymbol{E}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 +$$

$$+\boldsymbol{2E}\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} + E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 \qquad (3.1)$$

1. Знайдемо $\boldsymbol{E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\right)^2}$

$$E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\right)^2 = E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi(g_k)S(k,t)\right)^2 =$$

$$= E\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}\xi(g_k)\xi(g_l)S(k,t)S(l,t) = E\sum_{k,l=n+1}^{\infty}\xi(g_k)\xi(g_l)S(k,t)S(l,t), \qquad (3.2)$$

де $g_k - g_l = \frac{\pi}{\Lambda}(k-l)$.

Таким чином, $E\xi(g_k)\xi(g_l) = B(g_k - g_l)$, тому що $E\xi(u)\xi(v) = B(u-v)$.

$$E\sum_{k,l=n+1}^{\infty}\xi(g_k)\xi(g_l)S(k,t)S(l,t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}B(0)S^2(k,t) +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t)$$

1.1. Розглянемо випадок при $k=l$: $\sum_{k=n+1}^{\infty}B(0)S^2(k,t)$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}B(0)S^2(k,t) = B(0)\sum_{k=n+1}^{\infty}S^2(k,t) = B(0)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{B(0)}{\pi^2}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1}\right)^2. \qquad (3.3)$$

Оцінимо $\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1}\right|$

Позначимо для простоти обрахунків $\frac{t\Lambda}{\pi} = c$ і оцінимо $|\sin(t\Lambda - k\pi)| = 1$.

Отже, знайдемо $\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1}\right| = \left|\frac{1}{\frac{c}{k}-1}\right| = \left|\frac{k}{c-k}\right|$.

$$\sup_{k>d}\frac{k}{k-c} = 1 + \frac{c}{k-c} = 1 + \frac{c}{[c]+1-c},$$

$$\sup_{k<d}\frac{k}{c-k} = -1 + \frac{c}{c-k} = -1 + \frac{c}{[c]},$$

де $d < c$.

Отже,

$$\left|\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1}\right| \le \frac{[c]+1}{[c]+1-c} \qquad (3.4)$$

Підставивши (3.4) в (3.3) отримаємо:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} B(0)S^2(k,t) = \frac{B(0)}{\pi^2}\sum_{k\ge n+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1}\right)^2 \le \frac{B(0)}{\pi^2}\sum_{k\ge n+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{B(0)}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \sum_{k\ge n+1}\frac{1}{k} * \frac{1}{k-1} = \frac{B(0)}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \sum_{k\ge n+1}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{B(0)}{\pi^2 n}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \qquad (3.5)$$

1.2. Розглянемо випадок при *k>l* : $\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t)$.

Позначимо $k - l = j$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\ge n+j+1} S(k,t)S(k-j,t) = \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\ge m+1} S(k,t)S(k-j,t)\,, (6)$$

де m=n+j.

$$\sum_{k\ge m+1} S(k,t)S(k-j,t) = \sum_{k\ge m+1}\left|\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{t\Lambda - (k-j)\pi}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\ge m+1}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - \frac{k-j}{k}}\right|. \qquad (3.7)$$

Потрібно оцінити $\left|\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - \frac{k-j}{k}}\right|$, тобто знайти *C:*

$$\left|\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - \frac{k-j}{k}}\right| \le \mathrm{C}\,.$$

Оцінимо $\left|\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|$.

Як і в п. 1.1 позначимо для простоти обрахунків $\frac{t\Lambda}{\pi}=c$ і оцінимо $|\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)|=1$.

Отже, знайдемо $\left|\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|=\left|\frac{1}{\frac{c}{k}-\frac{k-j}{k}}\right|=\left|\frac{k}{c-k+j}\right|$.

$$\sup_{k>d}\frac{k}{k-c-j}=1+\frac{c+j}{k-c-j},$$

$$\sup_{k<d}\frac{k}{c-k+j}=-1+\frac{c+j}{c-k+j},$$

де $d<c$.

Покладемо $c_1=c+j$, тоді

$$\sup_{k>d}\frac{k}{k-c-j}=\sup_{k>d}\left(1+\frac{c+j}{k-c-j}\right)=\sup_{k>d}\left(1+\frac{c_1}{k-c_1}\right)=1+\frac{c_1}{[c_1]+1-c_1}=$$

$$=1+\frac{c+j}{[c]+j+1-c-j}=1+\frac{c+j}{[c]+1-c}$$

$$\sup_{k<d}\frac{k}{c-k+j}=\sup_{k>d}\left(-1+\frac{c+j}{c-k+j}\right)=\sup_{k>d}\left(-1+\frac{c_1}{c_1-k}\right)=-1+\frac{c_1}{[c_1]}=$$

$$=-1+\frac{c+j}{[c]+j}.$$

Отже,

$$\left|\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|\le\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}. \qquad (3.8)$$

Підставивши (3.4), (3.8) в (3.7) отримаємо

$$\sum_{k\ge m+1}S(k,t)S(k-j,t)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\ge m+1}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1}*\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\ge m+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right). \qquad (3.9)$$

За допомогою (3.9) запишемо (3.6) в наступному вигляді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\geq m+1} S(k,t)S(k-j,t) \leq \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\geq m+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\geq m+1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1} =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\geq m+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{m} =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+j}. \qquad (3.10)$$

1.3. Розглянемо випадок при $k< l$: $\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t)$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t) = \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\geq n+1} S(k,t)S(k-j,t). \quad (11)$$

Використовуючи аналогічні міркування як в п. 1.2. отримаємо

$$\sum_{k\geq n+1} S(k,t)S(k-j,t) = \sum_{k\geq n+1}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi} * \frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{t\Lambda-(k-j)\pi}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1} * \frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right). \qquad (3.12)$$

Підставивши (3.12) в (3.11) отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t) = \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\geq n+1} S(k,t)S(k-j,t) \leq$$

$$\leq \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2}\leq$$

$$\leq \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}=$$

$$= \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$= \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n}. \qquad (3.13)$$

Таким чином,

$$\boldsymbol{E}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\right)^{\mathbf{2}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} B(0)S^2(k,t) +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t) \qquad (3.14)$$

Використаємо знайдені формули (3.5), (3.10), (3.13) в (3.14)

$$\boldsymbol{E}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{B(0)}{\pi^2 n}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 +$$

$$+\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+j}+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n}=$$

$$=\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{B(0)}{n}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)+\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+j}+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n}\right). \qquad (3.15)$$

2. Знайдемо $\boldsymbol{E}\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}$

$$\boldsymbol{E}\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)}\xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right)\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}=$$

$$= E\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)}\xi(g_k)\xi(g_l)S(k,t)S(l,t)=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t), \qquad (3.16)$$

де $g_k - g_l = \frac{\pi}{\Lambda}(k-l)$.

Таким чином, $E\xi(g_k)\xi(g_l) = B(g_k - g_l)$, тому що $E\xi(u)\xi(v) = B(u-v)$.

Позначимо $k - l = j$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right) S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \sum_{k \le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t). \qquad (3.17)$$

$$\sum_{k \le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) = \sum_{k \le j-n-1} \left| \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{t\Lambda - (k-j)\pi} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \le j-n-1} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - \frac{k-j}{k}} \right|. \qquad (3.18)$$

Підставивши (3.4), (3.8) в (3.18) отримаємо

$$\sum_{k \le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \le j-n-1} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1} * \frac{\sin(t\Lambda - (k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - \frac{k-j}{k}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \le j-n-1} \frac{1}{k^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c} \right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c} \right). \qquad (3.19)$$

За допомогою (3.19) запишемо (3.17) в наступному вигляді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right) S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \sum_{k \le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) \le$$

$$\le \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \le j-n-1} \frac{1}{k^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c} \right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c} \right) \le$$

$$\le \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c} \right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c} \right) \sum_{k \le j-n-1} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \sum_{k \le j-n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= -\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{j-n-1}. \qquad (3.20)$$

3. Знайдемо $E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2$

$$\boldsymbol{E}\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^{\mathbf{2}} = E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi(g_k) S(k,t)\right)^2 =$$

$$= E \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} \xi(g_k)\xi(g_l) S(k,t) S(l,t) = E \sum_{k,l=-\infty}^{-(n+1)} \xi(g_k)\xi(g_l) S(k,t) S(l,t)\ , \qquad (3.21)$$

де $g_k - g_l = \frac{\pi}{\Lambda}(k-l)$.

Таким чином, $E\xi(g_k)\xi(g_l) = B(g_k - g_l)$, тому що $E\xi(u)\xi(v) = B(u-v)$.

$$E \sum_{k,l=-\infty}^{-(n+1)} \xi(g_k)\xi(g_l) S(k,t) S(l,t) = \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} B(0) S^2(k,t) +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right) S(k,t) S(l,t) + \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right) S(k,t) S(l,t)$$

3.1. Розглянемо випадок при k=l : $\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} B(0) S^2(k,t)$.

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} B(0) S^2(k,t) = B(0) \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} S^2(k,t) = B(0) \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \left(\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{B(0)}{\pi^2} \sum_{k \le -(n+1)} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1}\right)^2. \qquad (3.22)$$

Підставивши (3.4) в (3.22) отримаємо:

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} B(0) S^2(k,t) = \frac{B(0)}{\pi^2} \sum_{k \le -(n+1)} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi} - 1}\right)^2 \le \frac{B(0)}{\pi^2} \sum_{k \le -(n+1)} \frac{1}{k^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{B(0)}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \sum_{k \le -(n+1)} \frac{1}{k} * \frac{1}{k-1} = \frac{B(0)}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \sum_{k \le -(n+1)} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{B(0)}{\pi^2(n+1)}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 \tag{3.23}$$

3.2. Розглянемо випадок при $k>l$: $\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t)$.

Позначимо $k-l=j$

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t). \tag{3.24}$$

$$\sum_{k\le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) = \sum_{k\le j-n-1}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi} * \frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{t\Lambda-(k-j)\pi}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\le j-n-1}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1} * \frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|. \tag{3.25}$$

Підставивши (3.4) і (3.8) в (3.25) отримаємо

$$\sum_{k\le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\le j-n-1}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1} * \frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\le j-n-1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right). \tag{3.26}$$

За допомогою (3.26) запишемо (3.24) в наступному вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right)S(k,t)S(l,t) =$$

$$= \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\le j-n-1} S(k,t)S(k-j,t) \le$$

$$\le \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\le j-n-1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)$$

$$\leq \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\leq j-n-1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}=$$

$$=\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\leq j-n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$=-\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{j-n-1}. \qquad (3.27)$$

3.3. Розглянемо випадок при $k<l$: $\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t)$.

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t)=\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\leq-(n+1)} S(k,t)S(k-j,t). \quad (28)$$

Використовуючи аналогічні міркування як в п. 3.2. отримаємо

$$\sum_{k\leq-(n+1)} S(k,t)S(k-j,t)=\sum_{k\leq-(n+1)}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{t\Lambda-k\pi}*\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{t\Lambda-(k-j)\pi}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\leq-(n+1)}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\sin(t\Lambda-k\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-1}*\frac{\sin(t\Lambda-(k-j)\pi)}{\frac{t\Lambda}{k\pi}-\frac{k-j}{k}}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\leq-(n+1)}\frac{1}{k^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right). \qquad (3.29)$$

Підставивши (3.29) в (3.28) отримаємо

$$\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)}\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right)S(k,t)S(l,t)=\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\sum_{k\leq-(n+1)} S(k,t)S(k-j,t)\leq$$

$$\leq\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\leq-(n+1)}\frac{1}{k^2}\leq$$

$$\leq\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\leq-(n+1)}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}=$$

$$=\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\sum_{k\leq-(n+1)}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$= \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{n+1}. \qquad (3.30)$$

Таким чином,

$$E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} B(0) S^2(k,t) +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(k-l)\right) S(k,t) S(l,t) + \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \sum_{l=-\infty}^{-(n+1)} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}(l-k)\right) S(k,t) S(l,t) \qquad (3.31)$$

Використовуючи знайдені формули (3.23), (3.27), (3.30) запишемо (3.31) у вигляді

$$E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 = \frac{B(0)}{\pi^2 (n+1)} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)^2 +$$

$$- \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{j-n-1} +$$

$$+ \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{B(0)}{n+1} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) - \sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{j-n-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda} j\right) \left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{n+1} \right). \qquad (3.32)$$

Підставивши (3.15), (3.20), (3.32) в (3.1) отримаємо

$$\boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\xi_n}(\boldsymbol{t})\right)^2\right] = \boldsymbol{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} + \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2\right] =$$

$$= \boldsymbol{E}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 + \boldsymbol{2E} \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi} +$$

$$+ E\left(\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} \xi\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\right) \frac{\sin(t\Lambda - k\pi)}{t\Lambda - k\pi}\right)^2 = \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{B(0)}{n} \left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right) + \right.$$

$$+\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+j}+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n}\Bigg)-$$

$$-2\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{j-n-1}+$$

$$+\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{\pi^2}\Bigg(\frac{B(0)}{n+1}\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)-\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{j-n-1}+$$

$$+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+1}\Bigg)=\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{\pi^2}\Bigg(B(0)\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+j}-3\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{j-n-1}+$$

$$+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n}+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{n+1}\Bigg)=$$

$$=\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\frac{1}{\pi^2}\Bigg(B(0)\left(\frac{[c]+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{j>0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n+j}-\frac{3}{j-n-1}\right)+$$

$$+\sum_{j<0} B\left(\frac{\pi}{\Lambda}j\right)\left(\frac{[c]+j+1}{[c]+1-c}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\Bigg). \qquad (3.33)$$

Висновок

Вивчення стаціонарних випадкових процесів з обмеженим спектром є динамічно розвиваючим сегментом теорії ймовірнсотей. Це обумовлено широким застосуванням цих процесів у радіофізиці, відновленні інформації та інших пов’язаних галузях науки.

Під час проведення досліджень в рамках магістерської дисертації було також проаналізовано джерела та визначено напрямки для можливого подальшого дослідження даної теми.

В магістерській роботі розглядається спосіб генерації стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром за допомогою теореми Котельникова-Шеннона. Знайдено точні оцінки процесу, який моделюється. В роботі також було досліджено збіжність майже напевно згенерованого процесу.

Наведені вище результати було сформульовано у вигляді відповідних теорем. Розроблено алгоритм генерування стаціонарних випадкових процесів з обмеженим спектром.

Список використаної літератури

1. *О. И. Клесов (1984)*, О сходимости почти наверное кратных рядов Котельникова—Шеннона, Проблемы передачи информации, XX, N 3, 79—93.

2. *Острійчук К. Р.* Спосіб генерування стаціонарних випадкових полів з обмеженим спектром: шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017р., Київ: Матеріали конф. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2017. – с. 28.

3. Патент

4. *Прохоренко Н. В., Острійчук К. Р*. Зв'язок між ймовірністю перетину вінерівським процесом певного рівня і ймовірністю перетину полем Ченцова з лінійним зсувом нульового рівня: Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ «КПІ», 2016. – с. 132.

5. Prokhorenko N. V., Ostriychuk K. R, On the connection between the probability that Wiener process crossing a curve and the probability that Chentsov random field with a linear drift crossing zero level: п'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні роблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25-26 квітня 2016р., Київ: Тези доповідей. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2016. – с. 19.

6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. – 570 с.

7. *Михайлов Г. А.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло : учебное пособие для вузов / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. - М.: Академия, 2006.

8. С. М. Пригарин, Г. А. Михайлов, Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние . – Новосибирск : Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005 . – 259 с.

9. *Клесов О. І., Ізюмцев Л. Л., Запайщикова О. К.* .Тези доповідей другої міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих науковців// Дослідження випадкових чисел отриманих на вході приймача Wi-Fi, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, 28-29 квітня 2011 р. - 218 с. - С. 29-30.

10. *G. E. P. Box and Mervin E. Muller*, A Note on the Generation of Random Normal Deviates, The Annals of Mathematical Statistics (1958), Vol. 29, No. 2 pp. 610–611.

11. *J. Bell*: 'Algorithm 334: Normal random deviates', Communications of the ACM, vol. 11, No. 7. 1968.

12. *R. Knopp*: 'Remark on algorithm 334 [G5]: normal random deviates', Communications of the ACM, vol. 12, No. 5. 1969.

13. *Ю. К. Беляев*, "Аналитические случайные процессы", Теория вероятн. и ее примен., 4:4 (1959), 437–444.

14. *В. Ф. Гапошкин*, "Одна теорема о сходимости почти всюду последовательности измеримых функций и ее применения к последовательностям стохастических интегралов", Матем. сб., 1977, том 104(146), номер 1(9), 3–21.

15. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники, т.1, Москва, «Сов. Радио», 1974.

16. *Клесов О. И.* Об условиях восстанавливаемости сигналов по дискретным отсчетам.- Докл. АН УССР, 1983, сер. А, № И, с. 15-17.

17. *Shorack G., Smythe R. T.* Inequalities for the maxSk/frk with k7Vr.-Proc. Amer. Math. Soc, 1976, v. 54, p. 331-336.

18. *Serfling R. J.* Moment Inequalities for the Maximum Cumulative Sum.— Ann. Math. Statistics, 1970, v. 41, № 4, p. 1227—1234.

19. *Moricz F.* Multiparameter Strong Laws of Large Numbers. I. (Second Order Moment Restrictions).- Acta.Sci. Math., 1978, v. 40, № 1-2, p. 143-156.

Додаток. Текст програми

```
datchik1<-function()
{
 a1<-round(runif(1,3,100) %/% 2,0)
 a2<-round(runif(1,0,100),0)
 a3<-round(runif(1,0,100),0)
 b1<-11973
 b2<-2800
 b3<-2842
 x1<-1/4096
 x2<-x1/16384
 x3<-x2/16384
 c11<-b1*a1
 c12<-b1*a2
 c13<-b1*a3
 c21<-b2*a1
 c22<-b2*a2
 c31<-b3*a1
 d1<-c11
 d2<-c21*c12 + (d1 %/% 16384)
 d3<-c31 + c22 + c13 + (d2 %/% 16384)
 a1<-d1 %% 16384
 a2<-d2%%16383
 a3<-d3%%4095
 rnd<-a3*x1 + a2*x2 + a1*x3
 return(rnd)
}
rndDatchik<-function(nt)
{
 vect<-c(1:nt)
 i<-1
 while(i<nt+1)
 {
  vect[i]<-datchik1()
  i<-i+1
 }
 return(vect)
}
BoxMuller<-function(nt)
{
 res<-c(1:nt)
```

```
 i<-1
 while(i<nt+1)
{
   xt<-rndDatchik(2)
   xt[1]<-2*xt[1]-1
   xt[2]<-xt[2]-1
   st<-(xt[1]^2+xt[2]^2)
   if(st>0)
   {
    if(st<=1)
    {
      tt<--2*log(st)/st
      res[i]=xt[1]*sqrt(tt)
      res[i+1] = xt[2]*sqrt(tt)
      i<-i+2
    }
   }
 }
 return(res)
}
```