НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»

УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

(підпис) (ініціали, прізвище)

«__»_____ 2017р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101«Математика»

на тему: «Узагальнення задачі випадкового паркування Реньї»

Виконав: студент VI курсу, групи ОМ-51м

(шифр групи)

Шафоростов Дмитро Олександрович _____

(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ільєнко А.Б. _____

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук

Калюжний О. О. _____

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

(підпис)

Київ – 2017

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Інститут (факультет) Фізико-математичний факультет

(повна назва)

Кафедра Математичного аналізу та теорії ймовірностей

(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101«Математика»

(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

(підпис) (ініціали, прізвище)

«__»_____2017р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Шафоростову Дмитру Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема «Узагальнення задачі випадкового паркування Реньї»,

науковий керівник дисертації кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ільєнко А.Б.,

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від « 22» березня 2017 р. № 1197-с

2. Термін подання студентом дисертації: _____ р.

3. Об'єкт дослідження: узагальнення задачі А. Реньї про випадкове паркування автомобілів на одновимірному (лінійному) паркінгу.

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка математичного сподівання кількості припаркованих автомобілів при необмеженому зростанні довжини паркінгу.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомитись із задачею сформульованою А. Реньї;

2) дослідити узагальнені моделі задачі Реньї;

3) дослідити асимптотичну поведінку перетворення Лапласа середньої кількості автомобілів;

4) розробити імітаційне моделювання процесу паркування.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 30 слайдів

7. Дата видачі завдання: _____ р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення із задачею сформульованою А. Реньї	10.02.2017-26.02.2017	виконав
2	Дослідження узагальнені моделі задачі Реньї.	26.02.2017-04.03.2017	виконав
3	Дослідження асимптотичної поведінки перетворення Лапласа від середньої кількості автомобілів	04.03.2017-09.04.2017	виконав
4	Розробка імітаційного моделювання процесу паркування	09.04.2017-28.04.2017	виконав
5	Підготовка магістерської дисертації	28.04.2017-09.06.2017	виконав

Студент _____ Шафоростов Д. О.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації _____ Ільєнко А.Б.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація: 40сторінки, 6 посилань

В магістерській дисертації досліджується задача випадкового паркування, та її узагальнення.

Мета роботи полягає у вивченні асимптотичних властивостей середньої кількості припаркованих автомобілів у двох узагальненнях моделі Реньї. Також, приводиться імітаційне моделювання задачі паркування.

Ключові слова: константа Реньї, задача випадкового паркування, одновимірне випадкове пакування.

Реферат

Магистерская диссертация: 40 страницы, 6 ссылок

В магистерской диссертации исследуется задача случайной парковки и её обобщения.

Цель работы состоит в изучении асимптотических свойств среднего количества припаркованных автомобилей для двух обобщений задачи Реньи. Так же приводиться имитационное моделирование задачи парковки.

Ключевые слова: константа Реньи, задача случайной парковки, одномерное случайное упаковывание.

Abstract

Master’sthesis: 40pages, 6 links

The thesis considers Renyi’s one dimentional random packing problem and it’s generalizations.

The aim of the thesis is to study asymptotic behavior of mean of number of parked cars for two generalizations of Renyi’s model. Also, thesis contains imitative modeling of the problem.

Key words: Rényi's Parking Constants, random parking problem, one dimensional random packing problem.

Зміст

1. Вступ **7**

2. Елементарні моделі паркування **8**

2.1. Початкові позначення 8

2.2. Дослідження елементарних моделе1й паркування 8

3. Дослідження моделі з випадковим паркуванням за рівномірним розподілом **10**

3.1. Виведення інтегрального рівняння 10

3.2. Перехід до зображення Лапласа 11

3.3. Визначення константи у розв'язку 13

4. Дослідження моделі з випадковим паркуванням за сумішшю розподілів **15**

4.1. Виведення інтегрального рівняння 15

4.2. Перехід до зображення Лапласа 15

4.3. Визначення константи у розв'язку 18

5. Дослідження асимптотичної поведінки зображення Лапласа математичного сподівання для другої моделі **20**

5.1. Дослідження першого множника 20

5.2. Дослідження другого множника 21

5.3. Дослідження третього множника 22

5.4. Асимптотика 23

6. Дослідження другої моделі з випадковим паркування за сумішшю розподілів **25**

6.1. Перехід до зображення Лапласа 25

6.2. Визначення константи у розв'язку 27

7. Моделювання **29**

7.1. Алгоритм моделювання 29

8. Висновки **39**

9. Список літератури **40**

1. Вступ

Задача випадкового паркування, або задача випадковго пакування, якщо розглядається багатовимірний простір, уперше була розглянута А. Реньї у 1958 році в роботі "Про проблему одновимірного випадкового заповнення простору"("On a One Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling"). У моделі Реньї автомобілі (фіксованої одиничної довжини) випадково обирають для паркування будь-який вільний проміжок (довжиною не менше одиниці) між припаркованими раніше об'єктами і розташовуються на ньому випадковим чином згідно з рівномірним розподілом. В роботі досліджено узагальнення моделі в одновимірному випадку, та асимптотична поведінка математичного сподівання кількості обїектів що зможуть заповнити паркінг. Для оригінальної модель Реньї, було показано що вона апроксимується лінійною функцією, а відношення середньої кількості автомобілей на довжину паркінга має границю, яка була названа константою Реньї.

2. Елементарні моделі паркування

2.1. Початкові позначення

Нехай ми маемо відрізок $[0, X]$, будемо називати його одновимірною парковкою довжини X, на якій розташовуються автомобілі, кожен одиничної довжини. Будемо вважати, що автомобілі прибувають на парковку по черзі, і, якщо є вільне місце, паркуються там, тобто займають частину парковки.

Вважатимемо, що процес закінчився тоді, коли не залишиться вільного відрізку довжини не менше за 1. Через $N(X)$ позначимо величину, яка дорівнює кількості автомобілей на парковці. Якщо $N(X)$ – випадкова величина, то через $m(X)$ будемо позначати $\mathbb{E}N(X)$.

2.2. Дослідження елементарних моделе1й паркування

Розглянемо 3 моделі поведінки автомобілів при паркуванні для того, щоб отримати певні оцінки для значень $N(X)$.

Перша модель формулює, що автомобілі паркуються максимально щільно та займають місце з лівого краю вільної частини парковки. Така модель дозволить припаркувати рівно стільки автомобілей, скільки взагалі може вміститися на парковці.

Друга модель формулює, що автомобілі, навпаки, намагаються зайняти якомога більше місця. Тому автомобіль паркуються якомога далі від попереднього, але так, щоб між ним і попереднім автомобілем, або початком парковки, не можливо будо запаркуватися іншому. Таким чином автомобілі паркуються на відстані $1 - \epsilon$, де ϵ деяке дуже мале число більше нуля.

Третя модель формулює, автомобілі паркуються посередині вільного проміжку. Ця модель не є крайовим випадком, але яскравим прикладом детермінованої реалізації процесу паркування.

Визначимо кількість автомобілей що можуть запаркуватися відповідно для кожної з описанних моделей.

Перша модель має досить очевидну відповідь:

$$F(X) = [X] \tag{1}$$

Друга модель задає, що у перших $[\frac{X}{2}]$ автомобілей зліва буде відповідний проміжок розміром $1 - \epsilon$. Якщо виконується нерівність $X - 2 * [\frac{X}{2}] \geq 1$, то ще один автомобіль може бути запаркований. Остання нерівність виконується тільки якщо $[X]$ – непарне число. Але тоді $[\frac{X+1}{2}] = 2 * [\frac{X}{2}] + 1$. А якщо $[X]$ – парне, то $[\frac{X}{2}] = [\frac{X+1}{2}]$.

Таким чином для другої моделі:

$$F(X) = [\frac{X+1}{2}] \tag{2}$$

Третя модель дещо складніша. Зробимо такі спостереження:

$$X < 1 \Rightarrow F(X) = 0; 1 \leq X < 3 \Rightarrow F(X) = 1. \tag{3}$$

$$F(X) = 2F(\frac{X-1}{2}) + 1, X \geq 1. \tag{4}$$

Твердження 3 очевидне, а друге 4 випливає з того, що автомобіль, що паркується посередині вільного проміжку довжини X, ми отримуємо два нових вільних проміжка довжини $\frac{X-1}{2}$.

Таким чином сформулюємо таке тведження:

$$F(X) = 2^k - 1, X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{5}$$

Доведемо його. Використаємо метод математичної індукції. Формула 3 доводить що база індукції має місце. Нехай твердження дійсне для k, доведемо його для $k + 1$.

$$X \in [2^{k+1} - 1, 2^{k+2} - 1) \Rightarrow \frac{X-1}{2} \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1) \tag{6}$$

Таким чином, на підставі 4 і того, що за припущенням для k виконується 7, маємо:

$$F(X) = 2F(\frac{X-1}{2}) + 1 = 2 * (2^k - 1) + 1) = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \tag{7}$$

Таким чином твердження доведене.

3. Дослідження моделі з випадковим паркуванням за рівномірним розподілом

3.1. Виведення інтегрального рівняння

Оскільки порядок вибору вільних проміжків не впливає на результат, для детермінованості будемо вважати що проміжок обирається випадковим чином згідно з дискретним рівномірним розподілом.

Визначимо $m(X) = \mathbb{E}N(X)$. Нехай $\xi \sim U(0, X-1)$ випадкова величина, що задає лівий край першого автомобіля на парковці. Тоді маємо:

$$m(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(\xi) + N(X - \xi - 1) + 1|\xi]] = \int_0^{X-1} m(t)\frac{1}{X-1}\,dt + \int_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}\,dt + 1 \tag{8}$$

Зробивши заміну змінних в другому інтегралі формули 8, отримаємо перший інтеграл, а саме

$$\int_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}\,dt = -\int_{X-1}^{0} m(u)\,du = \int_0^{X-1} m(t)\,dt \tag{9}$$

Таким чином маємо інтегральне рівняння

$$m(X) = 1 + \frac{2}{X-1}\int_0^{X-1} m(t)\,dt \tag{10}$$

Або

$$m(X+1) = 1 + \frac{2}{X}\int_0^{X} m(t)\,dt \tag{11}$$

Також, відомо що

$$m(X) \equiv 0, X \in [0, 1) \tag{12}$$

Та, з 1 і 2 випливає, що

Також, відомо що

$$[\frac{X+1}{2}] \leq m(X) \leq [X] \tag{13}$$

3.2. Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати 11 за допомогою перетворення Лапласа

На підставі умови 13 зображення Лапласа існує, та за властивістю перетворення Лапласа маємо:

$$\mathcal{L}\{m(X+1)\} = \mathcal{L}\{m(X+1)\eta(X+1)\} = e^p M(p). \tag{14}$$

Оскільки $m(X) \leq X$, то $\int\limits_0^X m(t)\,dt < X^2$, тобто для інтегралу від $m(X)$ зображення також існує, за властивістю перетворення Лапласса:

$$\mathcal{L}\{\int\limits_0^X m(t)\,dt\} = \frac{M(p)}{p}. \tag{15}$$

Аналогічно доводиться, що $\frac{1}{X}\int\limits_0^X m(t)\,dt < X$ при $m(X) > 0$, а тому зображення Лапласа для цього виразу також існує. Тоді за властивістю перетворення Лапласса:

$$\mathcal{L}\{\frac{2}{X}\int\limits_0^X m(t)\,dt\} = 2\int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s}\,ds \tag{16}$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = 2\int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s}\,ds + \frac{1}{p} \tag{17}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = -2\frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{18}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p)\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2} \tag{19}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_h(p) = -M_h(p)\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) \\
&\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} = -\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) \\
&\int\limits_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)}\,ds = -\int\limits_0^p \left(1 + \frac{2e^{-s}}{s}\right) ds \\
&\ln M_h(s)\Big|_1^p = -(p-1) - 2\int\limits_0^p \frac{2e^{-s}}{s}\,ds
\end{aligned} \tag{20}$$

Позначимо

$$Q(p) = \int\limits_0^p \frac{e^{-s}}{s}\,ds \tag{21}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
&\ln M_h(p) = \ln M_h(1) - (p-1) - 2Q(p) \\
&M_h(p) = Ce^{-(p-1)-2Q(p)}
\end{aligned} \tag{22}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих

$$\begin{aligned}
&M(p) = C(p)e^{-(p-1)-2Q(p)} \\
&\dot{M}(p) = \dot{C}(p)e^{-(p-1)-2Q(p)} - C(p)e^{-(p-1)-2Q(p)}(1 + 2\dot{Q}(p))
\end{aligned} \tag{23}$$

з іншої сторони, з 19 маємо

$$\dot{M}(p) = C(p)e^{-(p-1)-2Q(p)}\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2} \tag{24}$$

тому

$$\begin{aligned} \dot{C}(p) &= -\frac{e^{-p}}{p^2}e^{p-1+2Q(p)} = \\ &= -e^{-1}e^{2Q(p)}\frac{1}{p^2} \end{aligned} \tag{25}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -e^{-1}\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds + const \tag{26}$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= -\left(e^{-1}\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds + const\right)e^{-(p-1)-2Q(p)} = \\ &= -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)e^{-p-2Q(p)}, C_m \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{27}$$

3.3. Визначення константи у розв'язку

Було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X+1)$.

Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\{m(X+1)\} = \widetilde{M}(p) = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)e^{-p-2Q(p)} \tag{28}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\widetilde{M}(p) \to 0, p \to +\infty$.

Розглянемо $Q(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$Q(p) = \int\limits_1^p \frac{e^{-s}}{s}\,ds < \int\limits_0^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds < \\ < \int\limits_0^p e^{-s}\,ds = e^{-1} \tag{29}$$

Тобто $Q(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$0 = \widetilde{M}(\infty) = \lim_{p\to\infty} \widetilde{M}(p) = -\left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds + C_m \right) \lim_{p\to\infty} e^{-p-2Q(p)} \tag{30}$$

Оскільки $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-p-2Q(p)} = const > 0$, маємо, що

$$C_m = \int\limits_0^\infty \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds \tag{31}$$

Таким чином:

$$M(p) = e^{-1} \int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q(p)}}{s^2}\,ds e^{-(p-1)-2Q(p)} \tag{32}$$

4. Дослідження моделі з випадковим паркуванням за сумішшю розподілів

4.1. Виведення інтегрального рівняння

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись наступним правилом - з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного проміжку, - з ймовірністю $\beta = 1 - \alpha$ водій вибирає місце керуючись рівномірним розподілом, аналогічно тому, як це робилося у попередній моделі

В узагальненій моделі порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права. Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}N(X)$. Нехай $\xi \sim U(0, X-1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді маємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} m(X) &= \alpha(1 + m(X-1)) + \beta(1 + \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(\xi) + N(X - \xi - 1) + 1|\xi]]) = \\ &= 1 + \alpha m(X-1)\beta \int_0^{X-1} m(t)\frac{1}{X-1}\,dt + \beta \int_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}\,dt + 1 \end{aligned} \tag{33}$$

$$m(x) = 1 + \alpha m(x-1) + \frac{2\beta}{x-1}\int_0^{x-1} m(t)\,dt \tag{34}$$

4.2. Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати 34 за допомогою перетворення Лапласа.

На підставі умови 13 зображення Лапласа існує. До того ж, аналогічно до виведення для попередньоъ моделі, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння 34.

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta \int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s}\, ds + \frac{1}{p} \tag{35}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha \dot{M}(p) - 2\beta \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{36}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p)\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \tag{37}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_h(p) = -M_h(p)\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) \\
&\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} = -\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) \\
&\int\limits_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)}\, ds = -\int\limits_0^p \left(\frac{e^s}{e^s - \alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s - \alpha)}\right) ds \\
&\ln M_h(s)\Big|_1^p = -\int\limits_0^p \frac{e^s}{e^s - \alpha}\, ds - 2\int\limits_0^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)}\, ds
\end{aligned} \tag{38}$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)}\, ds \tag{39}$$

Оскільки, якщо ввести заміну

$$\begin{aligned}
&u = e^s - \alpha \\
&du = e^s ds \\
&du = (u + \alpha) ds
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\int_1^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}\,ds = \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u+\alpha}{u}(u+\alpha)\,ds = \\ = \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{1}{u}\,ds = \ln(e^p-\alpha) - \ln(e-\alpha) = \ln\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha} \tag{41}$$

Таким чином

$$\ln M_h(p) = \ln M_h(1) - \ln\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha} - 2Q_\alpha(p) \\ M_h(p) = C\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}, \forall C \in \mathbb{R} \tag{42}$$

Застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p)\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{43}$$

Продиференціюємо за p:

$$\dot{M}(p) = \dot{C}(p)\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} - C(p)\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) \tag{44}$$

З іншої сторони, з 37 маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p)\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p-\alpha)} \tag{45}$$

Таким чином:

$$\dot{C}(p) = -((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)})\frac{1}{p^2(e^p-\alpha)} = \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2} \tag{46}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds - const \tag{47}$$

$$M(p) = -\left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{48}$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми отримаємо попередню модель, і формула 48 співпадає з 27.

4.3. Визначення константи у розв'язку

Було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X+1)$.

Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\{m(X+1)\} = \widetilde{M}(p) = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)\frac{e^p}{E^p - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{49}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\widetilde{M}(p) \to 0, p \to +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}\,ds < \int\limits_0^\infty \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}\,ds < \\ < \int\limits_0^p \frac{1-\alpha}{e^s-\alpha}\,ds < \int\limits_0^p \frac{1}{e^s}\,ds = e^{-1} \end{aligned} \tag{50}$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$0 = \widetilde{M}(\infty) = \lim_{p\to\infty}\widetilde{M}(p) = -\left(\int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds + C_m\right)\lim_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{51}$$

Оскільки $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-2Q(p)} = const > 0$, маємо, що

$$C_m = \int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds \tag{52}$$

Таким чином:

$$M(p) = \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\, ds \tag{53}$$

5. Дослідження асимптотичної поведінки зображення Лапласа математичного сподівання для другої моделі

Розглянемо асимптотично поведінку множників рівняння

$$M(p) = \frac{1}{e^p - \alpha} \cdot \int_p^\infty \frac{e^{2\beta Q(s)}}{s}\, ds \cdot e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{54}$$

при $p \to 0$. Де

$$Q_\alpha(p) = \int_1^p \frac{1}{s(e^s - \alpha)}\, ds \tag{55}$$

5.1. Дослідження першого множника

$$\frac{1}{e^p - \alpha} \to \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{\beta}, p \to 0 \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^p - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha} = \\
&= \frac{1 - e^p}{(e^p - \alpha)(1 - \alpha)} = \\
&= \frac{(1 - e^p)p}{(e^p - \alpha)(1 - \alpha)p} = \\
&= \frac{p}{(e^p - \alpha)(1 - \alpha)}(-1 + o(1)) = \\
&= \frac{p}{(1 - \alpha)} \frac{-1 + o(1)}{(1 - \alpha) + o(1)} = \\
&= \frac{p}{(1 - \alpha)} \frac{(-1)}{(1 - \alpha)} + o(1) = \\
&= \frac{p}{(1 - \alpha)^2} + o(p)
\end{aligned} \tag{57}$$

З 57 та 56 маємо:

$$\frac{1}{e^p-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{p}{(1-\alpha)^2}+o(p), \quad \text{коли } p\to 0 \tag{58}$$

5.2. Дослідження другого множника

Покажемо, що

$$e^{2\beta Q_\alpha(p)}\sim C_+p^2, p\to 0 \tag{59}$$

Знайдемо вигляд C_+

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{2\beta Q_\alpha(p)}}{p^2}=\frac{e^{2\beta\int\limits_1^p\frac{1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}}{e^{2\ln p}}= \\
&=e^{2\beta\int\limits_1^p\frac{1}{s(e^s-\alpha)}\,ds-2\beta\int\limits_1^p\frac{1}{s(1-\alpha)}\,ds}= \\
&=e^{2\beta\int\limits_1^p[\frac{1}{s(e^s-\alpha)}-\frac{1}{s(1-\alpha)}]\,ds}= \\
&=e^{2\beta\int\limits_1^p[\frac{1-\alpha}{e^s-\alpha}-\frac{e^s-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{s}]\,ds}= \\
&=e^{2\beta\int\limits_1^p\frac{1-e^s}{\beta(e^s-\alpha)}\frac{1}{s}\,ds}= \\
&=e^{2\int\limits_1^p\frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds}
\end{aligned} \tag{60}$$

Тобто, при $p\to 0$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
&p\to+0:\int\limits_1^p\frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds\to\int\limits_1^0\frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds= \\
&=\int\limits_0^1\frac{-1+e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds
\end{aligned} \tag{61}$$

Таким чином

$$e^{2\beta Q_\alpha(p)}\sim p^2e^{2\int\limits_0^1\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}=p^2C_+, p\to 0 \tag{62}$$

Розглянемо такий вираз:

$$\frac{1}{p}\Big[\int\limits_p^\infty \frac{e^{2\beta Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds - \int\limits_0^\infty \frac{e^{2\beta Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds\Big] =$$
$$= \frac{1}{p}\int\limits_0^p \frac{e^{2\beta Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds \to_{p\to+0} - \lim_{p\to+0}\frac{\frac{e^{2\beta Q_\alpha(p)}}{p^2}}{1} = \tag{63}$$
$$= -e^{2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}$$

З 63 маємо:

$$\int\limits_p^\infty \frac{e^{2\beta Q(s)}}{s}\,ds = \int\limits_0^\infty \frac{e^{2\beta Q(s)}}{s}\,ds - pe^{2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} + o(p), p\to+0 \tag{64}$$

5.3. Дослідження третього множника

Аналогічно покажемо що:

$$e^{-2\beta Q_\alpha(p)} \sim C_- p^{-2}, p\to 0 \tag{65}$$

$$\frac{e^{-2\beta Q_\alpha(p)}}{p^{-2}} = \frac{e^{-2\beta\int\limits_1^p \frac{1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}}{e^{-2\ln p}} =$$
$$= e^{-2\beta\int\limits_1^p \frac{1}{s(e^s-\alpha)}\,ds - 2\beta\int\limits_1^p \frac{1}{s(1-\alpha)}\,ds} =$$
$$= e^{-2\beta\int\limits_1^p [\frac{1}{s(e^s-\alpha)} - \frac{1}{s(1-\alpha)}]\,ds} = \tag{66}$$
$$= e^{-2\beta\int\limits_1^p [\frac{1-\alpha}{e^s-\alpha} - \frac{e^s-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{s}]\,ds} =$$
$$= e^{-2\beta\int\limits_1^p \frac{1-e^s}{\beta(e^s-\alpha)}\frac{1}{s}\,ds} =$$
$$= e^{-2\int\limits_1^p \frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds}$$

$$e^{-2\beta Q_\alpha(p)} \sim p^2 e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} = p^{-2}C_-, p\to 0 \tag{67}$$

Позначимо як $R(p)$ таку різницю:

$$R(p) = e^{-2\beta Q_\alpha(p)} p^2 - e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} \tag{68}$$

Тоді, за 66

$$\begin{aligned} &R(p) = e^{-2\int\limits_1^p \frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds} - e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} = \\ &= e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}\left[e^{-2\int\limits_0^p \frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds} - 1\right] \sim_{p\to+0} e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} 2\int\limits_0^p \frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds \end{aligned} \tag{69}$$

При чому, маємо:

$$\lim_{p\to+0} \frac{1}{p}\int\limits_0^p \frac{1-e^s}{s(e^s-\alpha)}\,ds = \frac{1}{\beta} \tag{70}$$

Таким чином

$$R(p) \sim \frac{2p}{\beta} e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds}, p \to +0 \tag{71}$$

5.4. Асимптотика

Отже, ми можемо записати $M(p)$ коли $p \to +0$ так:

$$\begin{aligned} &M(p) = \left[\frac{1}{\beta} - \frac{p}{\beta^2} + o(p)\right]\left[\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\beta Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds - pe^{2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} + o(p)\right] \\ &\left[e^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} + \frac{2}{\beta}pe^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} + o(p)\right]p^{-2} \end{aligned} \tag{72}$$

Позначимо за c добуток перших доданків кожного множника 72:

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\beta Q_\alpha(s)}}{s^2}\,dse^{-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}\,ds} \tag{73}$$

Таким, чином:

$$\mathcal{L}\{m(X) - \lambda_\alpha\} = -\frac{1}{\beta p} + \frac{\lambda_\alpha}{\beta p} + o(p^{-1}), p \to +0 \tag{74}$$

Позначимо за $f(t)$ наступне:

$$f(t) = m(t) - \lambda_\alpha t - \frac{v-1}{\beta} \tag{75}$$

І матимемо:

$$p\hat{f}(p) \to 0, p \to 0 \tag{76}$$

Що, за теоремою про значеннння на нескінченності означає:

$$\lim_{x\to\infty}(m(x) - \lambda_\alpha x - \frac{\lambda_\alpha - 1}{\beta}) = 0 \tag{77}$$

Введемо $g(x) = f(x)e^{cx}$. Тоді:

$$\hat{g}(p) = \hat{f}(p - c) \tag{78}$$

Таким чином отримуємо, що

$$\lim_{x\to\infty}[e^{cx}(m(x) - \lambda_\alpha x - \frac{\lambda_\alpha - 1}{\beta})] = 0 \tag{79}$$

6. Дослідження другої моделі з випадковим паркування за сумішшю розподілів

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись насту- пним правилом - з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного про- міжку, - з ймовірністю $\beta = 1-\alpha$ водій вибирає місце керуючись розподілом з лінійною щільністю.

$$f(t) = c(b-1-t)1_{[a,b-1]}(t) \tag{80}$$

Складемо інтегральне рівняння середнї кількості автомобілей відносно довжини пирковки для цієї моделі:

$$m(x) = 1 + \alpha m(x-1) + \frac{2\beta}{x-1}\int\limits_0^{x-1} m(t)\,dt \tag{81}$$

6.1. Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати 81 за допомогою перетворення Лапласа.

На підставі умови 13 зображення Лапласа існує. До того ж, аналогічно до виведення для попередньоъ моделі, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння 81.

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta\int\limits_p^{\infty}\frac{M(s)}{s}\,ds + \frac{1}{p} \tag{82}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha\dot{M}(p) - 2\beta\frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{83}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p)\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p-\alpha)} \tag{84}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_h(p) = -M_h(p)\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)\\
&\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} = -\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)\\
&\int\limits_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)}\,ds = -\int\limits_0^p \left(\frac{e^s}{e^s-\alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s-\alpha)}\right)ds\\
&\ln M_h(s)\Big|_1^p = -\int\limits_0^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}\,ds - 2\int\limits_0^p \frac{\beta}{s(e^s-\alpha)}\,ds
\end{aligned} \tag{85}$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}\,ds \tag{86}$$

Оскільки, якщо ввести заміну

$$\begin{aligned}
u &= e^s - \alpha\\
du &= e^s ds\\
du &= (u+\alpha)ds
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_1^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}\,ds = \int\limits_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u+\alpha}{u}(u+\alpha)\,ds =\\
&= \int\limits_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{1}{u}\,ds = \ln(e^p-\alpha) - \ln(e-\alpha) = \ln\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}
\end{aligned} \tag{88}$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
&\ln M_h(p) = \ln M_h(1) - \ln\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha} - 2Q_\alpha(p)\\
&M_h(p) = C\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}, \forall C \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{89}$$

Застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p)\frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{90}$$

Продиференціюємо за p:

$$\dot{M}(p) = \dot{C}(p)\frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} - C(p)\frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) \tag{91}$$

З іншої сторони, з 84 маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p)\frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \tag{92}$$

Таким чином:

$$\dot{C}(p) = -((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})\frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} = \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2} \tag{93}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds - const \tag{94}$$

$$M(p) = -\left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)\frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{95}$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми отримаємо попередню модель, і формула 95 співпадає з 27.

6.2. Визначення константи у розв'язку

Було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X + 1)$.

Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\{m(X+1)\} = \widetilde{M}(p) = -\left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds + C_m\right)\frac{e^p}{E^p - \alpha}e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{96}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\widetilde{M}(p) \to 0, p \to +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}\,ds < \int\limits_0^\infty \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}\,ds < \\ < \int\limits_0^p \frac{1-\alpha}{e^s-\alpha}\,ds < \int\limits_0^p \frac{1}{e^s}\,ds = e^{-1} \end{aligned} \tag{97}$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$0 = \widetilde{M}(\infty) = \lim_{p\to\infty} \widetilde{M}(p) = -\left(\int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds + C_m \right) \lim_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{98}$$

Оскільки $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-2Q(p)} = const > 0$, маємо, що

$$C_m = \int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}\,ds \tag{99}$$

Таким чином:

$$M(p) = \frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{s^2}\,ds \tag{100}$$

7. Моделювання

Було проведенне імітаційнемоделювання представленних моделей. Для моделювання було розроблено скрипт на мові JavaScript. Для виконання обчислень використовувався додаток Node.js.

7.1. Алгоритм моделювання

Починаючи с заданого значеннння X (довижини парковки) проводилися імітаційне моделювання випадків заповнення парковки з такою дожиною. Моделювання здійснювалося за допомогою вбудованого генератора псевдовипадкових чисел.

Процес моделювання розбивається на задачі з моделювання парковки одного автомобіля на деякий проміжок парковки. Якщо проміжок має довжину менше ніж одиниця, він пропускається. В іншому випадку генератор псевдовипадкових чисел генерує число в межах $[0, 1)$, якщо сгенероване число менше заданого параметра α, то автомобіль вважається припаркованним в крайньому лівому кінці проміжка, тобто займає місце $[0, 1)$. В іншому випадку, генерується ще одно псевдовипадковечисло в межах $[0, 1)$, що, помножене на довжину відрізка, вважається координатою крайньої лівої точки автомобіля. Лічільних автомобілей збільшуеться на один. На основі місця автомобіля, программа додае у стек проміжки що залишилися після паркування.

```
let b_alpha = alpha => X => X >= 1
  ? (Math.random() > alpha ? Math.random() * (X - 1) : 0)
  : false;
```

Функція, що повертає $false$ у випадку якщо проміжок менше одиниці, і позицію автомобіля на проміжку від 0 до X, якщо він більше одиниці.

Процес моделювання починається з додавання у стек, першого проміжка, $[0, x)$, що позначає всю парковку. Наступним кроком, скрипт забирає зі стека останній проміжок, тобто, на першому кроці єдиний проміжок що позначає

всю парковку. Для цього проміжка моделюється парковка одного автомобіля. Після цього, якщо у стеку ще є проміжки, процес повторюється для останнього. Моделювання закінчується коли у стеку не залишається проміжків.

```
function createStack(X, resolve, locateOnX) {
  let stack = [X];
  let result = 0;
  while (stack.length) {
    let v = stack.pop();
    let position = locateOnX(v);
    if (position !== false) {
      stack.push(v - 1 - position);
      stack.push(position);
      result++;
    }
  }

  if (resolve) {
    resolve(result);
  } else {
    console.log('result', result);
  }
}



module.exports.default = function (
  X = 10000001,
  repeat = 100,
  locateOnX = X => X >= 1 ? Math.random() * (X - 1) : false
) {
  let store = {
    r: 0,
```

```
    rawResult: [],
    X,
    repeat,
  };
  const resolve = (result) => {
      store.r = store.r + result / repeat;
      store.rawResult.push(result)
  };

  for (var i = 0; i < repeat; i++) {
    createStack(X, resolve, locateOnX)
  }
  console.log('constant:', store.r / X);

  return store
}
```

Модуль, що утворює і керує стеком.

Для кожного X проводилося по 1500 запусків моделі, а потім рахувалося середньє арифметичне, тобто вибіркове середнє для цьої довжини проміжка.

```
for (var i = 0; i < 20; i++) {
  X += 100 * Math.random() * (i > 40 ? 10 : 1);
  for (var j = 0; j < 1; j++) {
    let result = runStack(X, n, b_alpha(.5));

    const mean = result.rawResult.reduce((s, item) => s + item , 0) / n;
    const sqMean = mean * mean;
    let data = {
      constant: result.r / X,
      X,
```

```
      mean,
      var: result.rawResult.reduce((s, item) => s + ((item * item) - sqMean
      zRawResult: result.rawResult,
    }
    console.log(`#${i}.${j}, var/mean:${data.var/mean}`);
    saveInFile('b_alpha_50_T', X, data);
  }
}
```

Частина программи, що запускає моделювання та обирає X

Довжини проміжка обиралися за допомогою додавання до попердньої довжини числа отриманого за допомогою генератора випадкових чисел.

```
const testFolder = './data/';
const fs = require('fs');

let k = [];
let r = [];
fs.readdir(testFolder, (err, files) => {
  files.forEach(file => {
    const fileObj = file.split('-');
    let i = k.indexOf(fileObj[0]);
    if (i == -1) i = k.push(fileObj[0]) - 1;
    if(!r[i]) r[i] = [];
    r[i].push({ name: fileObj[0], Xs: fileObj[1], file });
    console.log(fileObj);
  });
  for (var i = 0; i < k.length; i++) {
    let arr = [];
    for (var j = 0; j < r[i].length; j++) {
      let contents = fs.readFileSync(testFolder + r[i][j].file, 'utf8');
      let json = JSON.parse(contents)
```

```
      Object.assign(r[i][j], {
        X: json.X,
        c: json.constant,
        m: json.mean,
        var: json.var
       })
      arr.push({
        x: json.X,
        s: `${r[i][j].X},${r[i][j].m},${r[i][j].var},${r[i][j].c}\n`,
      });
    }
    let sort = arr.sort((a, b) => +a.x - +b.x);
    let csv = sort.reduce((s, i) => s+i.s, '');
    fs.writeFileSync(`${k[i]}aT.csv`, csv);
  }
  console.log(r);
})
```

Модуль, відповідальний за консолідацію результатів

1

2

3

4

5

8. Висновки

В дипломній роботі було розглянуто задачу випадкового заповнення, або паркування одномірного відрізка, або паркінгу. Були роглянуті узагальнення класичної моделі Реньї.

Були більш точні асимптотики середньї кількості автомобілей на парковці, ніж були отримані раніше. Було проведено імітаційне моделювання паркування.

9. Список літератури

1. Feller, William. An Introduction To Probability Theory and Its Applications William Feller — 2 edition. — John Wiley & Sons, 1971. — Vol. 2. — P. 704.
2. Rényi, A. "On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling."Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 3, 109-127, 1958.
3. Dvoretzky, A. and Robbins, H. "On the Parking Problem."Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 9, 209-224, 1964.
4. Palasti, I. "On Some Random Space Filling Problems."Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5, 353-359, 1960.
5. Ney P. E., A random interval filling problem, Ann. Math. Statist. 33 (1962)
6. Baryshnikov, Yu., Gnedin, A. Counting intervals in the packing process. Ann. Appl. Probab. 11 (2001), no. 3, 863–877.
7. Gargano, M. L.; Weisenseel, A.; Malerba, J.; Lewinter, M. Discrete Renyi parking constants, Congr. Numerantium 176, 43–48 (2005).
8. В. Фатенко, дипломна робота на здобуття ступеня бакалавра (НТУУ "КПІ ІПСА, 2016 р.)