ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ СИМВОЛЬНОЇ АЛГЕБРІ MAPLE ДЛЯ СТВОРЕННЯ ДЕМОНСТРАЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС ЛЕКЦІЙ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

А. В. Волков

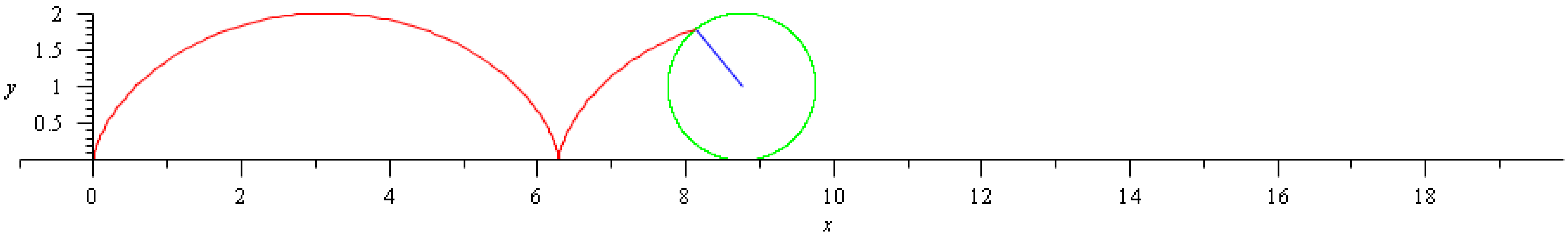
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Пакет символьної алгебри MAPLE — це потужний засіб аналітичного інтегрування, диференціювання та інших математичних операцій. Також він містить широкі можливості для побудови різних геометричних об’єктів. Під час лекцій з аналітичної геометрії, наприклад, корисно демонструвати студентам принципи побудови різних кривих та поверхонь.

Побудова циклоїди оформлюється у вигляді процедури-функції, яка потім використовується у операторі анімації:

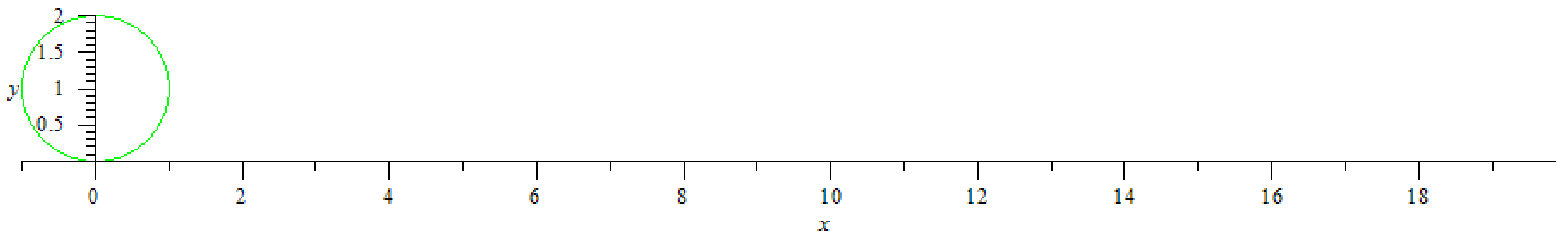
```
> with(plots) :
> F := proc(t)
        plots[display](
  plottools[line]([t,1], [t-sin(t), 1-cos(t)], color=blue),
  implicitplot((x-t)^2+(y-1)^2 = 1, x = -1 .. 20, y = -1 .. 3,
  gridrefine = 5,color=green),
  plot([w-sin(w), 1-cos(w), w = 0 .. t])
  );
  end proc:
> animate(F, [θ], θ = 0 ..6 π, scaling = constrained, frames = 100)
```

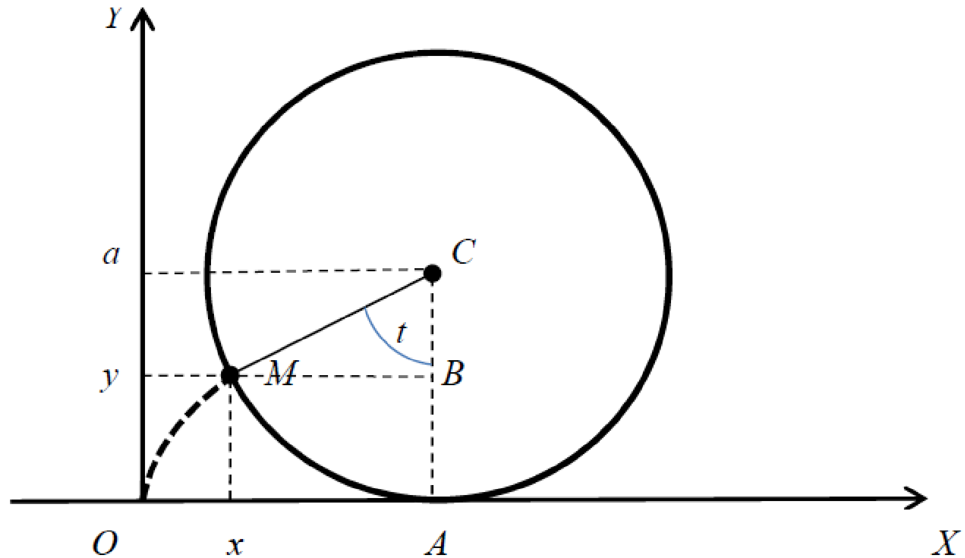
Результатом роботи програми буде анімована ілюстрація принципу побудови циклоїди, яку можна використовувати під час лекції на відповідну тему. Приклад наведено далі:



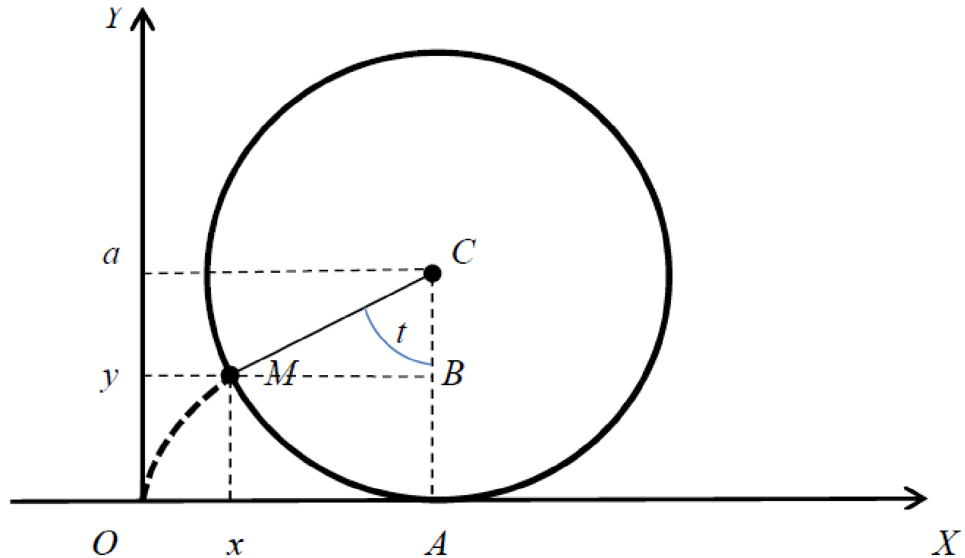
Циклоїда

Циклоїда – це крива, яка утворюється точкою кола, що котиться без ковзання вздовж певної вісі θ = 0.





Нехай у початковий момент часу коло радіусу a дотикалося до вісі OX у початку координат, причому точка дотику співпадала з точкою M на колі, яка утворює циклоїду. Припустимо, що коло котиться вздовж OX у додатному напряму і в певний момент часу радіус CM повернувся на кут t радіан. Знайдемо координати точки M, яка утворює циклоїду. Відрізок OA вісі OX співпадає за довжиною з дугою AM, що відповідає центральному куту t: $AM = at$.



Координата $x = OA - MB = AM - CM \sin t$.

Тому: $x = at - a\sin t = a(t - \sin t)$.

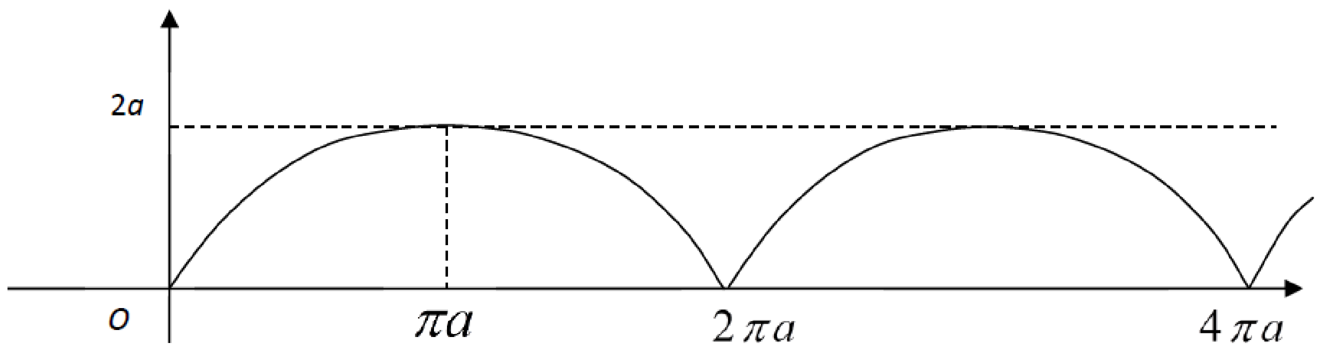
Координата $y = CA - CB = CA - CM \cos t$.

Тому $y = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$.

Остаточно, оскільки M - довільна точка циклоіди, то параметричні рівняння циклоіди мають вигляд:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

За перший оберт кола утворюється так звана **перша арка циклоїди**, яка відповідає зміні параметру $t \in [0, 2\pi]$. При цьому точка M знов повертається до вісі OX, потім процес повторюється (за періодичністю синуса та косинуса). Остаточно маємо криву вигляду:



У складі MAPLE є засоби розкладання функцій у степеневі ряди, однак відсутня можливість розкладання у тригонометричні ряди. З метою порівняння характеру наближення функцій алгебраїчними та тригонометричним поліномами було створено процедуру-функцію, яка будує частинну суму ряду Фур’є наперед заданого порядку n для функції F на проміжку $[a;b]$

$> FourierSeries := \mathbf{proc}(F, n, a, b)$

$\mathbf{local}\ L, ao, SFur, i, ai, bi :$

$$L := \frac{b-a}{2} :$$

$$ao := simplify\left(\frac{1}{L}\int_{a}^{b} F\, dx\right) :$$

$$SFur := \frac{ao}{2} :$$

for i **to** n **do**

$$ai := \frac{1}{L}\cdot\int_{a}^{b}\left(F\cdot \cos\left(\frac{\pi\cdot i\cdot x}{L}\right)\right) dx :$$

$$bi := simplify\left(\frac{1}{L}\cdot\int_{a}^{b}\left(F\cdot \sin\left(\frac{\pi\cdot i\cdot x}{L}\right)\right) dx\right) :$$

$$SFur := SFur + ai\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot i\cdot x}{L}\right) + bi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot i\cdot x}{L}\right) :$$

end do:

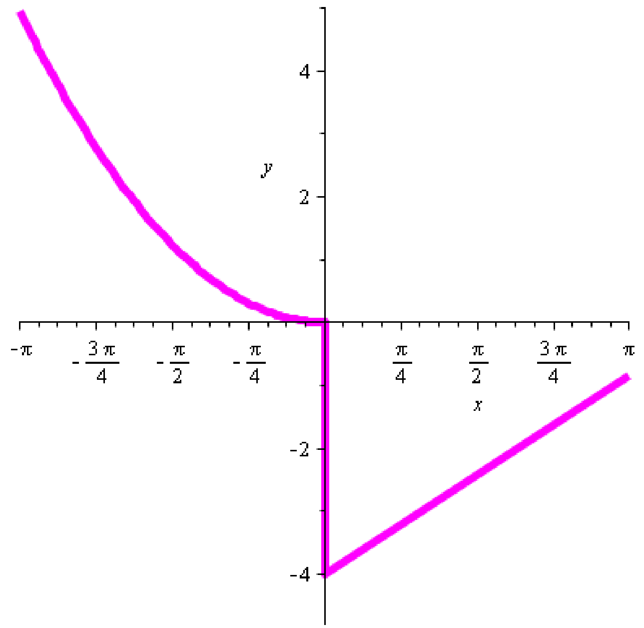
end proc:

Розглядається ступінчаста функція:

$$> f := x \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x < 0 \\ x - 4 & x \geq 0 \end{cases} :$$

$$l := -\pi : r := \pi : lo := -5 : up := 5 :$$

$$plot(f(x),\ x = l..r,\ y = lo..up,\ thickness = 5,\ color = magenta);$$



Процедура будує частинну суму ряду Фур'є 5 порядку для функції, що розглядається.

> FS := *FourierSeries*(f(x), 5, l, r)

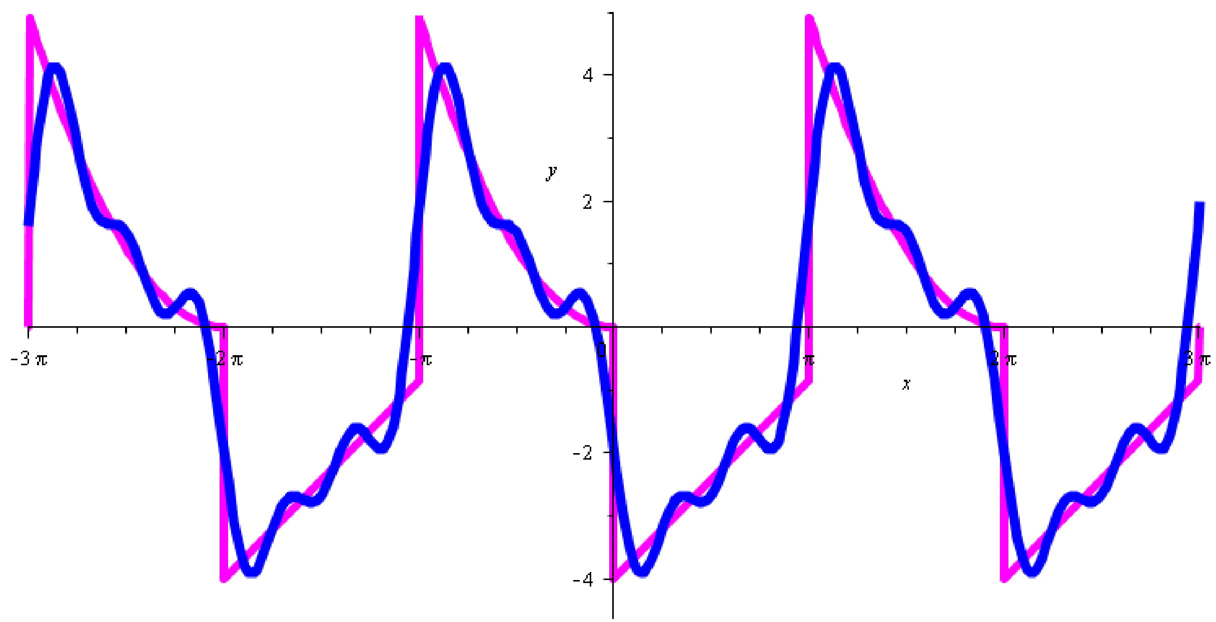
$$FS := \frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi - 2 + \frac{(-2-\pi)\cos(x)}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{(12+\pi^2-2\pi)\sin(x)}{\pi} + \frac{1}{4}\cos(2x) + \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)\sin(2x) + \frac{\left(-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\pi\right)\cos(3x)}{\pi} - \frac{1}{54}\frac{(140+9\pi^2-18\pi)\sin(3x)}{\pi} + \frac{1}{16}\cos(4x) + \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\right)\sin(4x) + \frac{\left(-\frac{2}{25}-\frac{1}{25}\pi\right)\cos(5x)}{\pi} - \frac{1}{250}\frac{(396+25\pi^2-50\pi)\sin(5x)}{\pi}$$

Будується графік періодичного продолження функції та частинної суми

$$> L := \frac{r-l}{2} :$$

$$with(inttrans) : F1 := f(x)\cdot(\mathrm{Heaviside}(x-l) - \mathrm{Heaviside}(x-r)) + (f(x-r-L))\cdot(\mathrm{Heaviside}(x-r) - \mathrm{Heaviside}(x-r-2L)) + (f(x-l+L))\cdot(\mathrm{Heaviside}(x-l+2L) - \mathrm{Heaviside}(x-l)) :$$

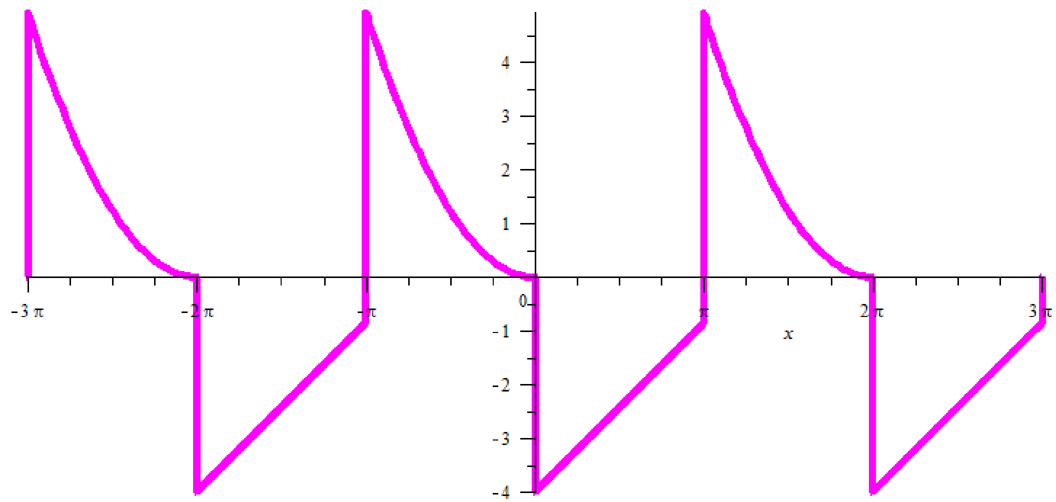
$$> plot([F1, FS], x = l - 2L - 0.02 .. r + 2L + 0.02, y = lo .. up, thickness = [5, 6], color = [magenta, blue])$$



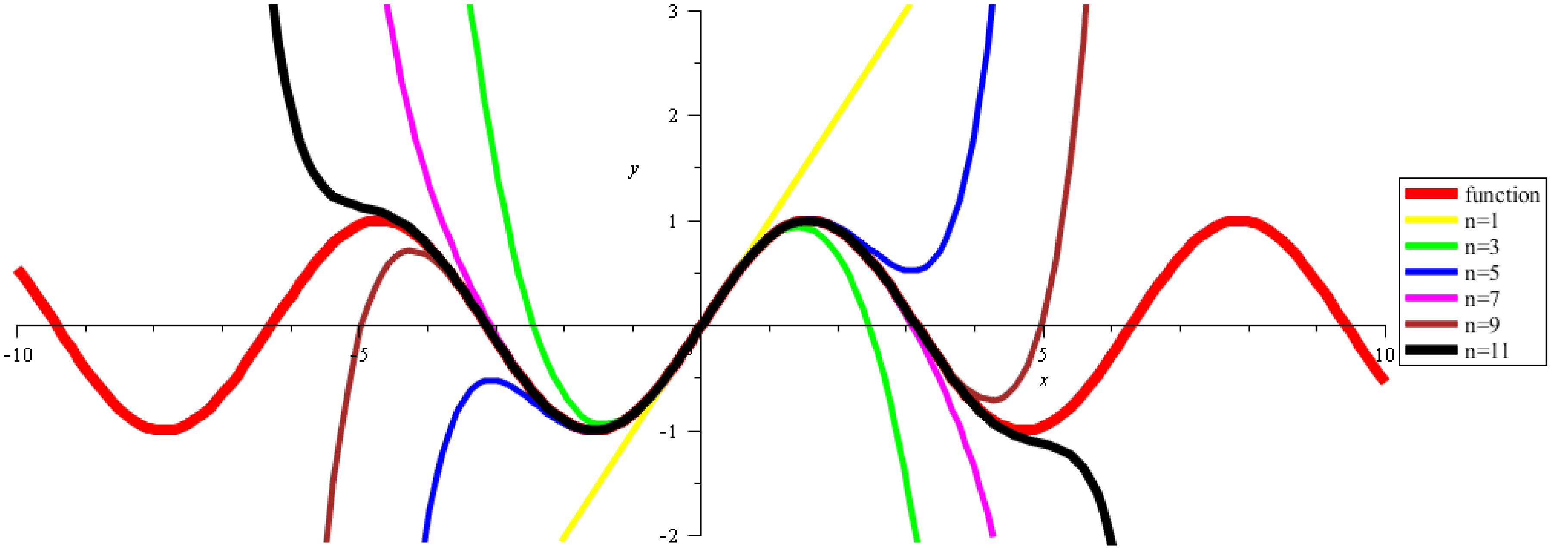
За допомогою оператора анімації процес можна спостерігати у часі.

$$> \ animate\left(plot, \left[\mathrm{FS}, \mathrm{x} = 1 - 2\ \mathrm{L}\ ..\mathrm{t}, \mathrm{color} = \mathrm{blue}, \mathrm{thickness} = 6\right], \mathrm{t} = 1 - 2\ \mathrm{L}\ ..\mathrm{r} + 2\ \mathrm{L}, background = plot\left(\left[\mathrm{x}, \mathrm{F1}, \mathrm{x} = 1 - 2\ \mathrm{L} - 0.02\ ..\mathrm{r} + 2\ \mathrm{L} + 0.02\right], \mathrm{thickness} = 5, \mathrm{color} = magenta\right), scaling = constrained, frames = 150\right)$$

$t = -9.424777962$



Для порівняння будуються кілька частинних сум ряду Тейлора періодичної функції $y = \sin x$



Графіки наочно демонструють різницю у характері наближення функцій алгебраїчними та тригонометричним поліномами. Якщо тригонометричні поліноми мало відхиляються від функції на всій прямій, то алгебраїчні поліноми фактично співпадають з функцією на певному проміжку, що збільшується зі збільшенням степені поліному, але відхилення дуже швидко зростає за межами цього проміжку. Це слід пам’ятати під час застосування відповідних наближених методів.

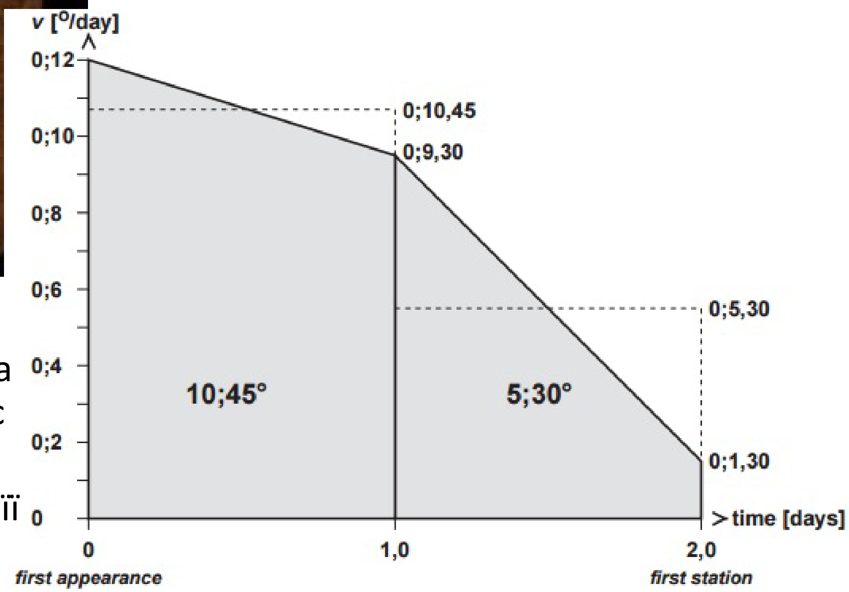
З ІСТОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

А. В. Волков

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

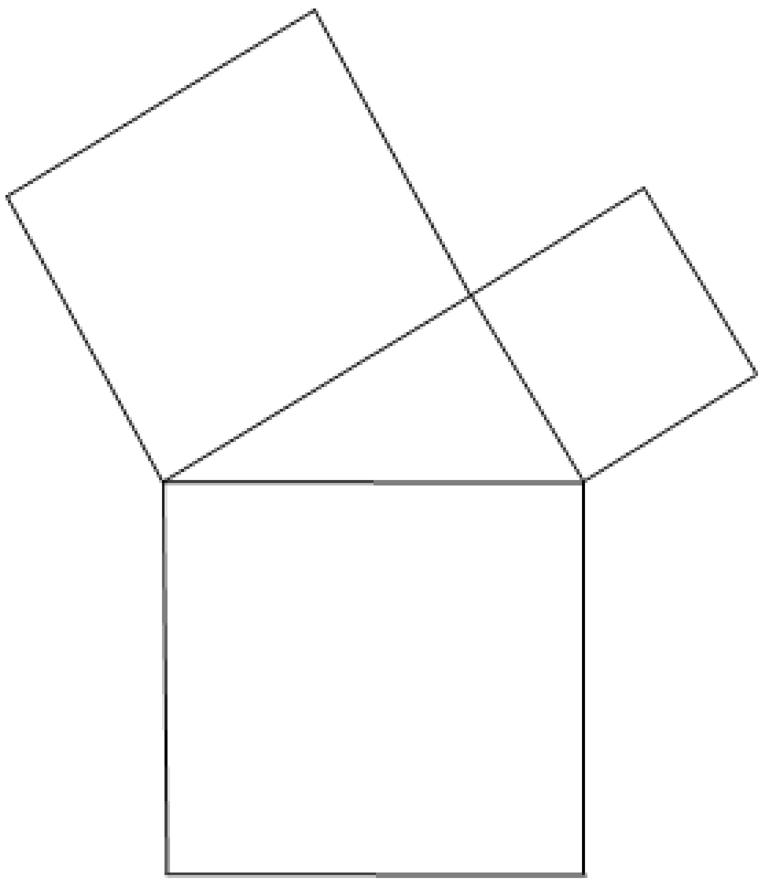
- У давній Греції історію диференціального та інтегрального числення треба починати з Демокрита (V ст. до РХ) з його ідеєю «геометричних атомів» — нескінченно малих величин.
- У давньому Вавилоні (IV ст. до РХ) під час астрономічних обчислень фактично використовувався зв’язок між графіком та підграфіком, як між функцією та її інтегралом.

Клинописна вавилонська табличка (350-50 рр. до РХ) з описом математичного методу обчислення положення Юпітера (Мардука).



- Фактично будується лінійна апроксимація графіку кутової швидкості Юпітера за 120 діб. Потім обчислюється площа трапецій (підграфіку) , яка дорівнює шляху Юпітера за час спостережень. Виміри дано у вавилонських дробах.
- Зв’язок між графіком та підграфіком, як між функцією та її інтегралом.

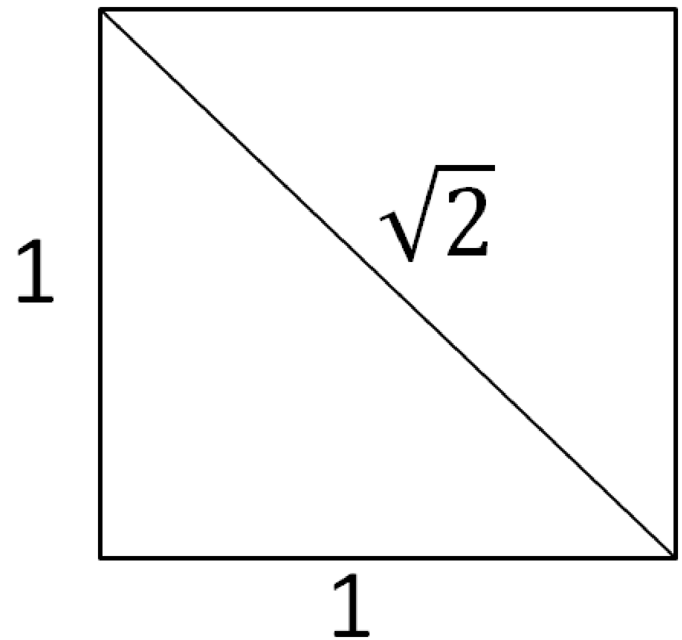
Піфагор Самосський (580-500 рр. до РХ)
Теорема Піфагора



Все є число!

Число складається з одиниць.

Криза:



Діагональ квадрата несумірна з його стороною (тобто не число!)

Вихід:

1) Демокрит – геометричні атоми – поділ на нескінченну кількість нескінченно малих частин.

Зенон Елейський (біля 450 р. до Р.Х.) – Апорії:

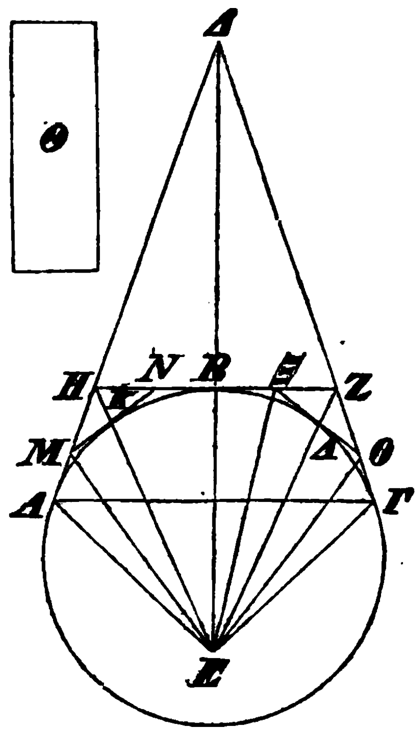
а) Ахіллес, б) Стріла, в) Дихотомія, г) Стадіон

(парадокси нескінченності – поняття нескінченності суперечливе, тому не існує).

2) Розглядати величини, а не числа – відрізки, прямокутники, куби, тощо.

Архімед Ἀρχιμήδης (287— 212 до Р. Х., Сіракузи)

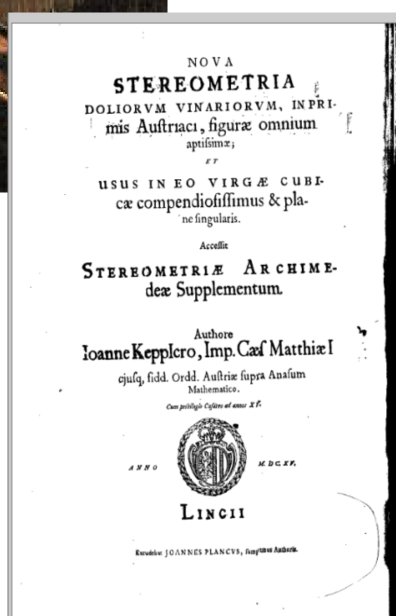
ΑΕΓ τριγώνου, δῆλον, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου μείζων ἐστὶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ Θ χωρίον. πολλῷ ἄρα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. ἀλλὰ τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΓΕΖ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα. τὰ ἄρα ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.



- У Західній Європі у XVII сторіччі ідея «геометричних атомів» — так званих «неподільних» — продовжила свій розвиток.

Йога́ннес Ке́плер (Johannes Kepler; 27 грудня 1571 — 15 листопада 1630)

- «Нова стереометрія винних бочок», 1615 - спосіб визначення об'ємів тіл обертання, використовуючи елементи інтегрального числення: площа, як «сума радіус-векторів»

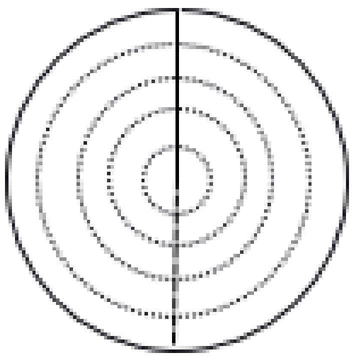


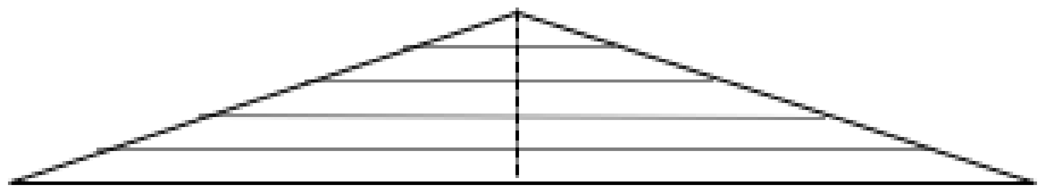
NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRImis Austriaci, figuræ omnium
aptissimæ;
ET
USUS IN EO VIRGÆ CUBICÆ compendiosissimus & plane singularis.
Accessit
STEREOMETRIÆ ARCHIMEDEÆ Supplementum.
Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæs. Matthiæ I
ejusq, fidd. Ordd. Austriæ supra Anasum
Mathematico.
ANNO M.DC.XV.
LINCII
Excudebat JOANNES PLANCVS, sumptibus Authoris.

Бонавентура Кавальєрі (Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 - 30 листопада 1647)

- Метод неподільних (геометричних атомів)
- «Геометрія, розвинена новим способом за допомогою неподільних неперервного» (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota) (1635)
- Продовження: «Шість геометричних етюдів» (1647)

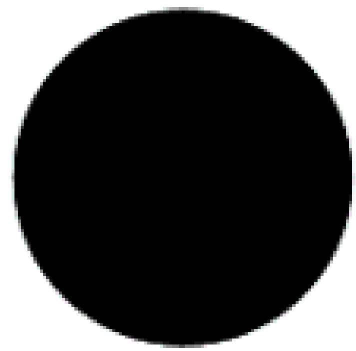
- Фігури відносяться одна до одної, як всі їх лінії, що беруться по будь-якій регулі, а тіла - як всі їх площини, що беруться по будь-якій регулі



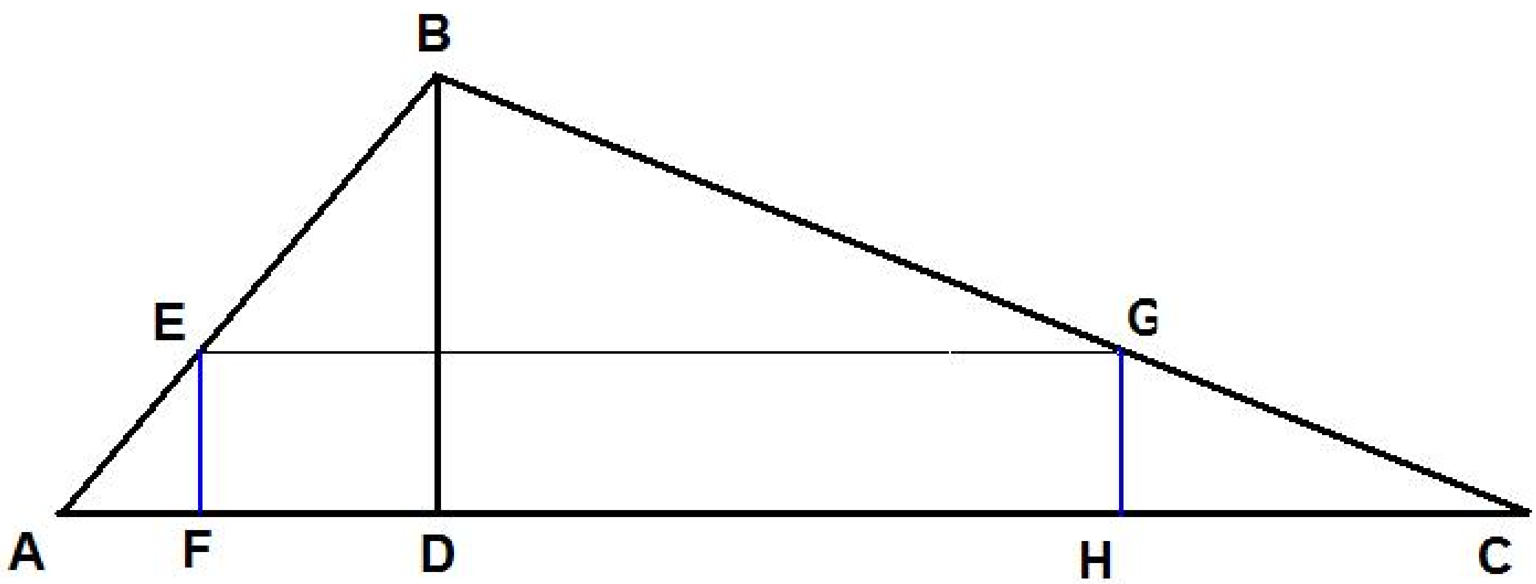


- «Всі квадрати паралелограма відносяться до всіх квадратів трикутника, як 3 до 1»

$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$$



Парадокс Торрічеллі (Evangelista Torricelli, 1608–1647)



- Широко застосував метод неподільних при розв'язуванні задач на дотичні.
- Узагальнив правило квадратури параболи на випадок довільного раціонального показника.
- Самостійно, хоч і пізніше від

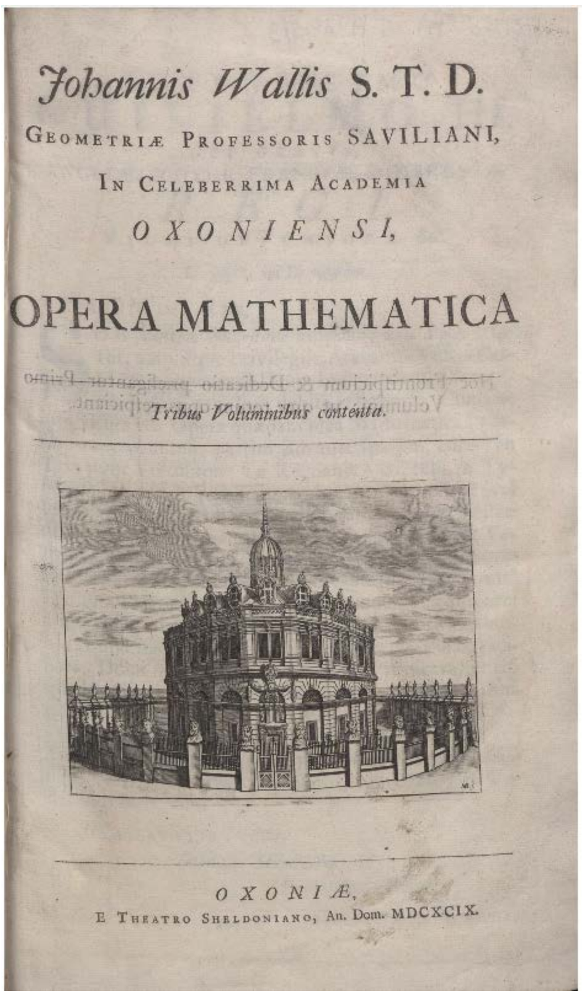
  Ж. Роберваля, визначив

  квадратуру циклоїди.
- Услід за Рене Декартом

  знайшов довжину дуги

  логарифмічної спіралі.

Джон Валліс (John Wallis; 23 листопада (3 грудня) 1616 — 28 жовтня (8 листопада) 1703)

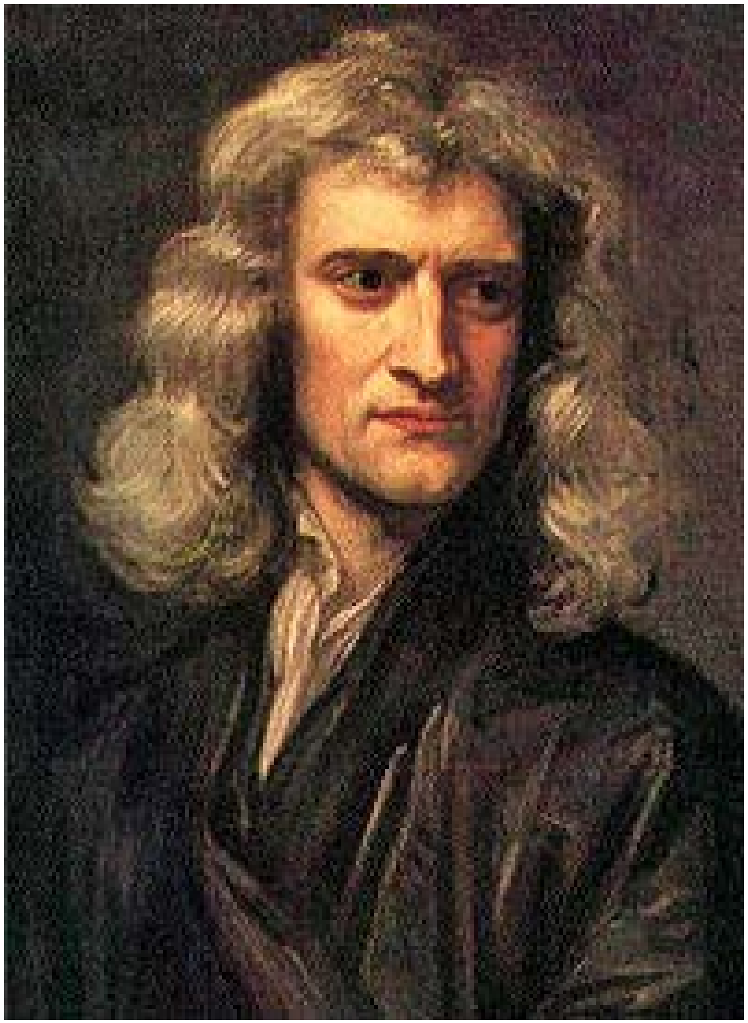

Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Professoris SAVILIANI,
In Celeberrima Academia
OXONIENSI,
OPERA MATHEMATICA
Tribus Voluminibus contenta.
OXONIÆ,
E Theatro Sheldoniano, An. Dom. MDCXCIX.

- «Арифметика нескінченного» (Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque Difficiliora Matheseos Problemata) (1655)
- Символ нескінченності ∞, 1 / ∞ для нескінченно малої величини.
- Визначення границі числової послідовності
- Від'ємні координати
- Розвинув «метод неподільних Кавальєрі», перенісши його з геометричної основи на алгебраїчну за допомогою поняття нескінченно малої
- Підсумовування нескінчених рядів – інтегральні суми. Інтегрування – підсумовування нескінченно малих (*Omn* ℓ– сума нескінченно малих ℓ)

- Праці Валліса справили велике враження на молодого Ньютона. Саме в листах до Валліса Ньютон вперше сформулював принципи диференціального числення (1692), з дозволу автора Валліс опублікував ці листи у перевиданні свого «Трактату з алгебри» (1693)

Ісаак Барроу (Isaac Barrow; жовтень 1630 — 4 травня 1677), вчитель Ньютона, розробив спосіб знаходження дотичних, більш загальний, ніж метод Ферма та близький до сучасного, він перший усвідомив, що задача про дотичні обернена по відношенню до задачі про квадратури. Ньютон ніколи не оскаржував пріоритет Барроу у відкритті формули Ньютона-Лейбніца і методу розв'язування диференціальних рівнянь відокремленням змінних. Лейбніц мав книгу Барроу.

Ісаа́к Нью́тон (Sir Isaac Newton (4 січня 1643 — 31 березня 1727)



- Англійський вчений, один із засновників числення нескінченно малих
- 1704 рік - «Оптика», додаток «Про квадратуру кривих» — перший повний виклад ньютонівської версії математичного аналізу

- 1707 рік - збірка математичних робіт Ньютона «Універсальна арифметика», методи обчислень.
- Узагальнення біному на випадок раціональних показників, що привело Ньютона до числових рядів
- Використання похідних для знаходження кореня нелінійного рівняння
- Один з початківців числення нескінченно малих, в останні роки життя мав суперечку з Лейбніцем за пріоритет у цій області.

- Змінна величина – «флюента» x – «та, що тече»
- Швидкість флюенти – «флюксія» $\dot{x}$
- Нескінченно мала – «момент флюксії» $\dot{x}0$
- Нехай флюента $y = x^n$. Надамо приросту

$$(x + (\dot{x}0))^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\dot{x}0 +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\dot{x}0)^2 + \cdots - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\dot{x}0 + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\dot{x}0)^2 + \cdots =$$

$$= \left(nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\dot{x})^2 0 + \cdots \right) 0 =$$

$= (nx^{n-1}\dot{x})0$, оскільки всі члени у дужках, що містять 0, можна вважати за ніщо. Таким чином, флюксія $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$

- «Перше та останнє відношення» – спроба сформулювати поняття границі: відношення величин у момент, коли вони з'являються або зникають; не тоді, коли вони вже з'явилися чи зникли, а в той самий момент, коли з'являються або зникають. Мета - позбутися застосування величин, які одночасно і дорівнюють і не дорівнюють нулю.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (Gottfried Wilhelm Leibniz; 1 липня 1646 — 14 листопада 1716)

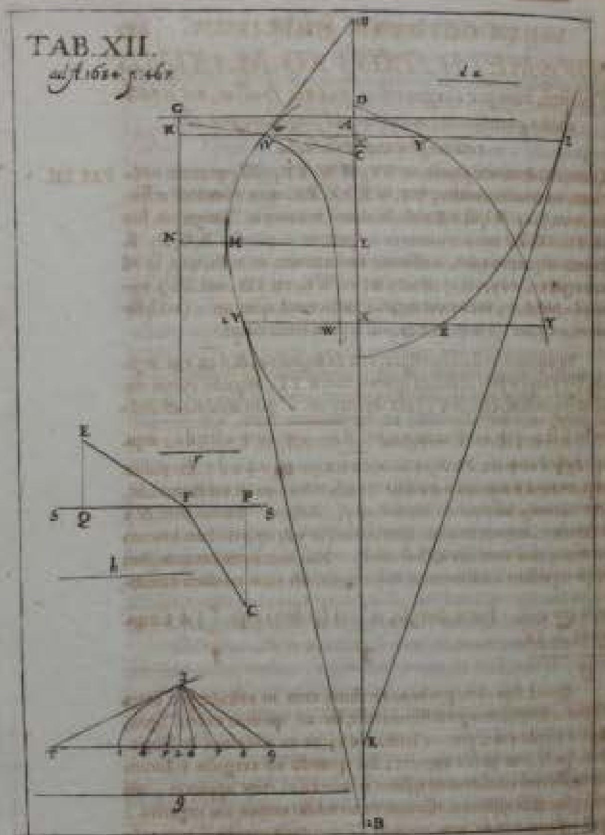
- Провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат.
- Незалежно від Ньютона створив диференціальне й інтегральне числення

- 1673 року, після знайомства з Християном Гюйгенсом, Лейбніц створив механічний калькулятор (арифмометр).

- 11 листопада 1675 р. він уперше використав запис dx для диференціалу та $\int y dy$ для інтегралу функції (операція, обернена до диференціювання).
- В 1676 році Лейбніц в листах викладає основи математичного аналізу.
- Переписка Лейбніца досягала приблизно 15 000 листів.
- Ідеї Лейбніца та його нотація мали набагато більший вплив на розвиток математичного аналізу протягом наступного століття, ніж ідеї та нотація Ньютона.

- Лейбніцу належать терміни: диференціал, диференціальне числення, функція, змінна, стала, координати, абсциса, алгоритм (у сучасному сенсі), алгебраїчні та трансцендентні числа та криві.
- Інтеграл він називав сумою, термін «інтеграл» належить Якобу Бернуллі (1690)
- Диференціал – нескінченно мала різниця двох нескінченно близьких значень змінної величини
- Інтеграл – сума нескінченного числа диференціалів

- У 1682 році Лейбніц заснував науковий журнал «Acta Eruditorum», в якому у 1684 році друкує перший твір з диференціального числення «Nova Methodus pro Maximis et Minimis, Itemque Tangentibus, qua nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur, et Singulare pro illi Calculi Genus» («Новий метод для максимумів і мінімумів, а також дотичних, якому не заважають ані дробові, ані ірраціональні кількості, і дивовижний вид числення для цього») – основні властивості диференціалів та їх застосування



NOVA METHODUS PRO MAXIMIS & minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

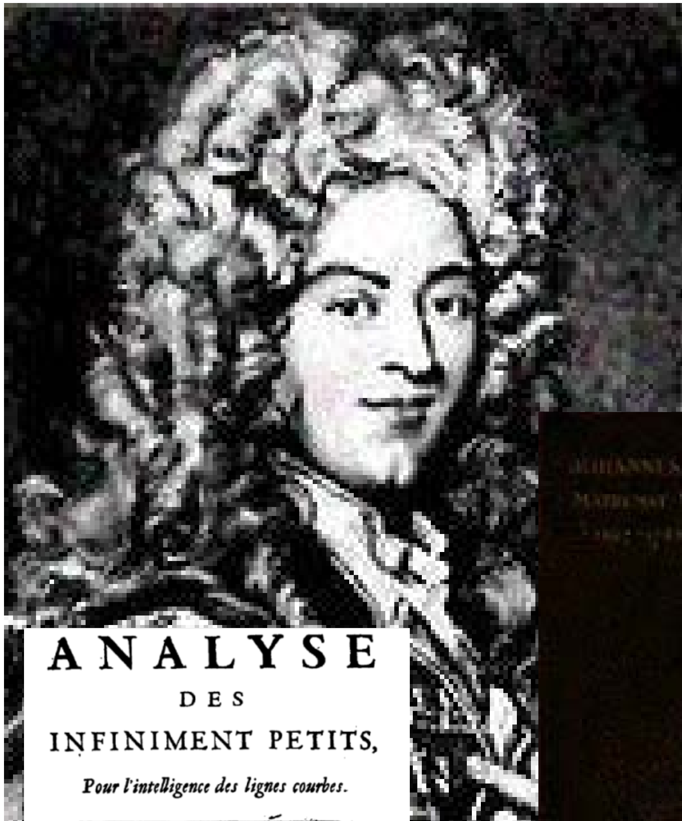
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z). His positis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

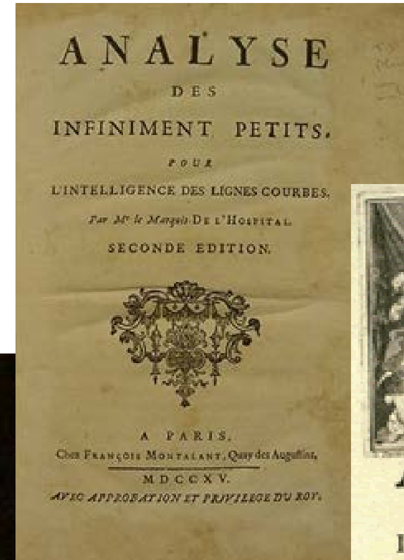
Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & $d\,\overline{ax}$ erit æqu. $a\,dx$: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit $z - y + w + x$ æqu. v, erit $d\,\overline{z - y + w + x}$ seu dv, æqu. $dz - dy + dw + dx$. *Multiplicatio*, $d\,\overline{xv}$ æqu. $x\,dv + v\,dx$, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. $x\,dv + v\,dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, $d\,\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$.

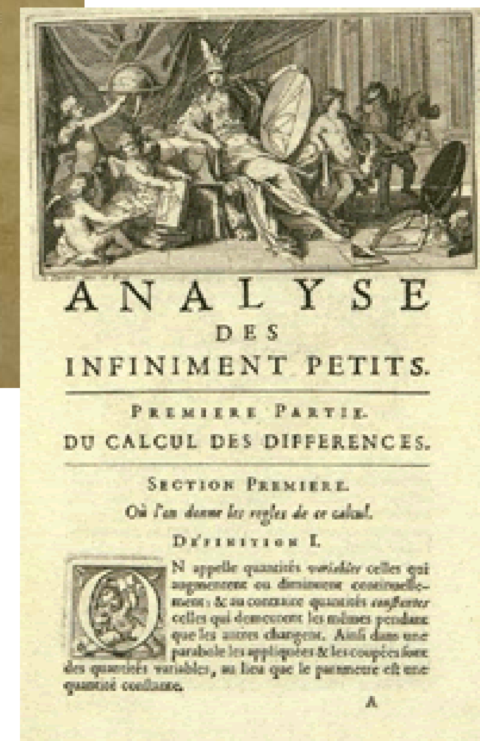
Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro $+z$ scribi $+dz$, pro $-z$ scribi $-dz$, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

- У 1687 році Якоб Бернуллі (1654-1705) прочитав цю статтю Лейбніца та написав йому листа.
- У 1690 році, після повернення з Парижу, Лейбніц відповів Бернуллі. Між ними почалося жваве листування, до якого підключився (у 1693 році) молодший брат Йоганн (1667—1748). В результаті вони втрьох до кінця сторіччя створили майже все, що зараз називається диференціальним та інтегральним численням функцій однієї змінної.
- У 1696 році маркіз де Лопіталь на основі конспектів лекцій Й.Бернуллі видав перший підручник з нового числення, в якому вперше нова дисципліна була названа «аналізом» : «Аналіз нескінченно малих»

Гійом Франсуа Антуан де Лопіталь (Guillaume François Antoine de L'Hôpital; 1661 — 2 лютого 1704)







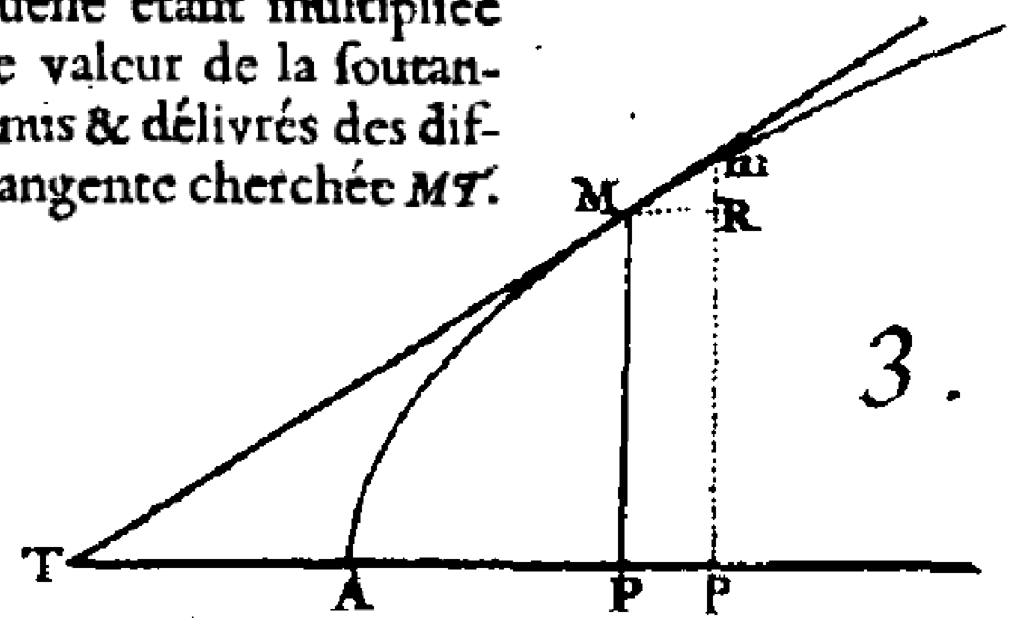
Йоганн Бернуллі

Три постулати Й.Бернуллі:

- Величина, що зменшується або збільшується на нескінченно малу величину, не зменшується та не збільшується
- Будь-яка крива лінія складається з нескінченно великої кількості нескінченно малих прямих (відрізків)
- Фігура, що лежить між двома ординатами, різницею абсцис та нескінченно малою частиною будь-якої кривої, розглядається, як паралелограм.

- Побудова дотичної (Лопіталь):

Ayant mené l'appliquée *MP*, & supposé que la droite *MT* qui rencontre le diametre au point *T*, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite *MR* parallele à *AP*. Et en nommant les données *AP*, x; *PM*, y; (donc *Pp* ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables *mRM* & *MPT* donneront $mR\ (dy).\ RM\ (dx :: MP\ (y).\ PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la difference de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente *PT* en termes entiérement connus & délivrés des differences, laquelle servira à mener la tangente cherchée *MT*.



3.

Jakob Bernoulli. Tractatus de Seriebus Infinitis

Coroll. 1. Identitas hujus seriei cum illa, quam supra Prop. XLII. pro spatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perspicuumque facit, quod sumtis in utraque Fig. 1. & 6. ipsis BI (Bε) æqualibus spatium hyperbolicum CBIO (CBεο) æquetur ▭lo sub unitate AB & Logarithmo AR (Aρ). Unde porrò infertur, quòd sumtis utrobique AB, Aε, AD, hoc est, AB, ξε, εκ continuè proportionalibus, quo casu ex natura Logarithmicæ Aκ dupla fiet ipsius Aρ, spatium hyperbolicum CBDQ duplum quoque sit ipsius CBεο, indeque CBεο, εκ DQ spatia futura sint æqualia.

Coroll. 2. Quoniam evidens est, existente BI ∞ AB, h. e. evanescente AI seu RE, Logarithmum AR reddi infinitum, sequitur & seriem harmonicam Logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5}$ &c. talem esse; unde denuò veritas Prop. XVI. constat.

Coroll. 3. Dato quovis Logarithmo putà binarii, determinari potest ex illo curvæ subtangens b; cum enim posita BD ∞ 1 ∞ AB, adeoque AD ∞ εκ ∞ 2, ostensum sit Aρ Log-um binarii esse ∞ $b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4}$ &c. ∞ b in $\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$ &c. erit vicissim b ∞ $\dfrac{\text{Log. } 2.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ \&c.}}$

XLVIII. *Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per seriem.* Fig. 6.

In eadem fig. centro A per B descriptus esto circuli quadrans BHσ, quem producta EI secet in H, erit AI seu RE sinus arcus Hσ, & AR ejus Logarithmus, existente vid. radii AB ceu unitatis Logarithmo 0. Ponatur sinus complementi IH ∞ x, ut fiat sinus rectus AI seu RE ∞ $\sqrt{1-xx}$, ejusque elementum EF ∞ $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit ex nat. gen. curv. EF $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ ad FG, elementum Log-i AR; ut RE, $\sqrt{1-xx}$ ad subtangentem Logarithmicæ RN quæ sit 1; adeoque FG ∞ $\frac{-x\,dx}{1-xx}$ ∞ (per XXXVI) $-x\,dx$ $-x^3$

$-x^3\,dx - x^5\,dx - x^7\,dx$ &c. Quare summando fient omnia FG, seu Log-us AR ∞ $-\frac{xx}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10}$ &c. negativus scil. quia numerus ejus RE minor est unitate AB; at si fiat positivus $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$ &c. hoc est, si AR transferatur ex altera parte in Aρ, erit is propriè Logarithmus rectæ ξε, id est (ex natura Log-orum) tertiæ proportionalis ad ipsum sinum RE & radium AB; qui tamen Log-us immediatè quoque reperiri potuisset ex valore numeri sui ξε ∞ $\frac{1}{\sqrt{1-xx}}$.

Idem etiam D. Leibnitius Act. Lips. 1691. p. 180. eleganter hoc modo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log. }\overline{1-x} \infty -y \infty -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \text{ \&c.} \\ \text{Log. }\overline{1+x} \infty +y \infty +x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \text{ \&c.}\end{array}\right\} \text{per praec.}$$

$$\text{Log. }\overline{1-xx} \infty \text{ (ex nat. log.)}$$

$$\text{Log. }\overline{1-x} + \text{log. }\overline{1+x} \infty -xx \quad -\frac{x^4}{2} \quad -\frac{x^6}{3} \text{ \&c.}$$

$$\text{Log. }\sqrt{1-xx} \infty \tfrac{1}{2}\text{log. }\overline{1-xx} \infty -\frac{xx}{2} \quad -\frac{x^4}{4} \quad -\frac{x^6}{6} \text{ \&c.}$$

Coroll. Posito sinu complementi HI hujus fig. ∞ BI vel Bε fig. 1. æquabitur ▭lum sub Logarithmo sinus recti AR & radio AB dimidio excessui, quo spatium hyperbolicum CBIO superat alterum CBεο. Patet ex Cor. 1. XLII, ubi CBIO − CBεο serie præsentis dupla expressum legitur. Cæterùm moneri potuisset ibi, quod sumta z tertia proportionali ad 1 & x, seu posita z ∞ xx, series illa convertatur in aliam $z + \frac{zz}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ &c. qua quoque spatium hyperbolicum, putà CBGM, existente BG ∞ z vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quòd CBIO − CBεο ∞ CBGM; & CBIO − CBGM seu MGIO ∞ CBεο; adeoque (cum his positis AI, $1-x$ sit ad AG, $1-xx$, sicut AB, 1 ad Aε, $1+x$) quòd sumtis AI, AG, AB, Aε utcunque proportionalibus spatia segmentis IG, Bε insistentia semper futura sunt æqualia.

 XLIX.

dratum : Quare nobis confugiendum eſt vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto :

1. *Mod.* Interpretemur x^4 tam per l, quàm per n, & a^4 per m; erit $\frac{x^4}{a^4-x^4}$ ꝏ $\frac{l}{m-n}$; unde per LIII habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id eſt, $\sqrt{\frac{x^4}{a^4-x^4}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $\frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}}$ + &c. & (facta multiplicatione per dx) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ſeu dy ꝏ $\frac{xxdx}{aa} + \frac{1x^6dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}dx}{2.4.6a^{14}}$ &c. & denique ſummando, AP ſeu y ꝏ $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}}$ + &c.

2. *Mod.* Explicemus nunc a per 1, & $-x^4$ per n; erit a^4-x^4 ꝏ $1+n$, & $\frac{1}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$: unde per LIV. fit $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12}$ + &c. & (multiplicand. per $xxdx$) $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $xxdx + \frac{1}{2}x^6dx + \frac{1.3}{2.4}x^{10}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14}dx$ + &c. & integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.7}x^7 + \frac{1.3}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15}$ + &c. ſeu denique ſupplendo unitatem, $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}}$ + &c. ut anteà.

Coroll. Sumta x ꝏ a ꝏ 1, fit tota AZ ꝏ $\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}$ + &c. Conf. Act. Lipſ. 1694. p. 274. & 369.

LVII. *Rectificare eandem Curvam ſeriem.* Fig. 7.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, eſt dy ꝏ $\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, fiet quadrando dy^2 ꝏ $\frac{x^4dx^2}{a^4-x^4}$ & dz^2 ꝏ $dy^2 + dx^2$ ꝏ $\frac{x^4dx^2}{a^4-x^4} + dx^2$ ꝏ $\frac{a^4dx^2}{a^4-x^4}$, adeoque dz ꝏ $\frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Exponamus a^4 nunc per l, nunc per m, & x^4 per n, erit $\frac{aa}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ſeu $\sqrt{\frac{a^4}{a^4-x^4}}$ ꝏ $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$; unde per

ſignificabitque $1+\frac{d}{i}$ ſeu applicata EK ſortem dicta parte proportionali uſuræ auctam : unde ſors aucta EK ſecundo momento pariet FL, & hæc pariter tertio momento pariet GM, & ſic porrò, propter BC, EK, FL, GM, &c. ∺. Quare poſtrema applicata IO, quam ſeries inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapſo toto anno debetur. Conf. Act. Lipſ. 1690. p. 222.

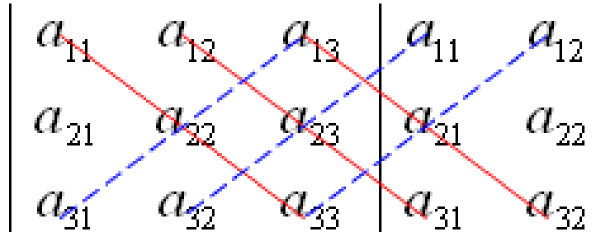
LX. *Invenire aream ſpatii comprehenſi à Curva genitrice Elaſticæ, ſeu qua evolutione ſui Elaſticam deſcribit.* Fig. 7.

Deſcribatur Elaſtica AQR ex evolutione Curvæ MNT, & ſit filum evolvens QN (DG), quod productum ſecet axem in V; ponaturque, ut ſupra, RZ ꝏ a, PQ ꝏ x, AP ꝏ y. Quoniam ex Act. Lipſ. 1694. p. 273. manifeſtum eſt, quòd QN ꝏ $\frac{1}{2}QV$, erit & NH ꝏ $\frac{1}{2}PQ$ ꝏ $\frac{1}{2}x$, & NS ꝏ $\frac{1}{2}FQ$ ꝏ $\frac{1}{2}dx$; ac proinde ob ang. rect. DQN, DF. FQ (:: dy. dx :: [ex natura Elaſticæ] xx. $\sqrt{a^4-x^4}$) :: $\frac{1}{2}dx$ (NS). $\frac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{2xx}$ ꝏ SG vel HI. Quare HI in NH ſeu ▭ NI ꝏ $\frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{4xx}$ ꝏ $\frac{a^4x-x^5 . dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ Elemento ſpatii $MNHZ$, de cujus ſummatione jam agitur. Poſterioris membri $\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$ integrale pertinens ad partem curvæ RQ vel MN eſt $\frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$. Prius autem $\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ cum abſolutè ſummari nequeat, ſublata irrationalitate in ſeriem convertetur, ut ſequitur.

Ponatur $\sqrt{a^4-x^4}$ ꝏ $\frac{txx}{a} - aa$, fiet xx ꝏ $\frac{2a^3t}{aa+tt}$, & differentiando $-xdx$ ꝏ $\frac{a^3tt-a^5 . dt}{Q:aa+tt}$; nec non $\frac{txx}{a} - aa$ $(\sqrt{a^4-x^4})$ ꝏ $\frac{aatt-a^4}{aa+tt}$, & denique $\frac{-a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ ꝏ $\frac{aadt}{8t}$. Jam quia exiſtente maxima x ꝏ a, ipſa quoque t ꝏ a, & illa decreſcente creſcit hæc, ſtatuatur

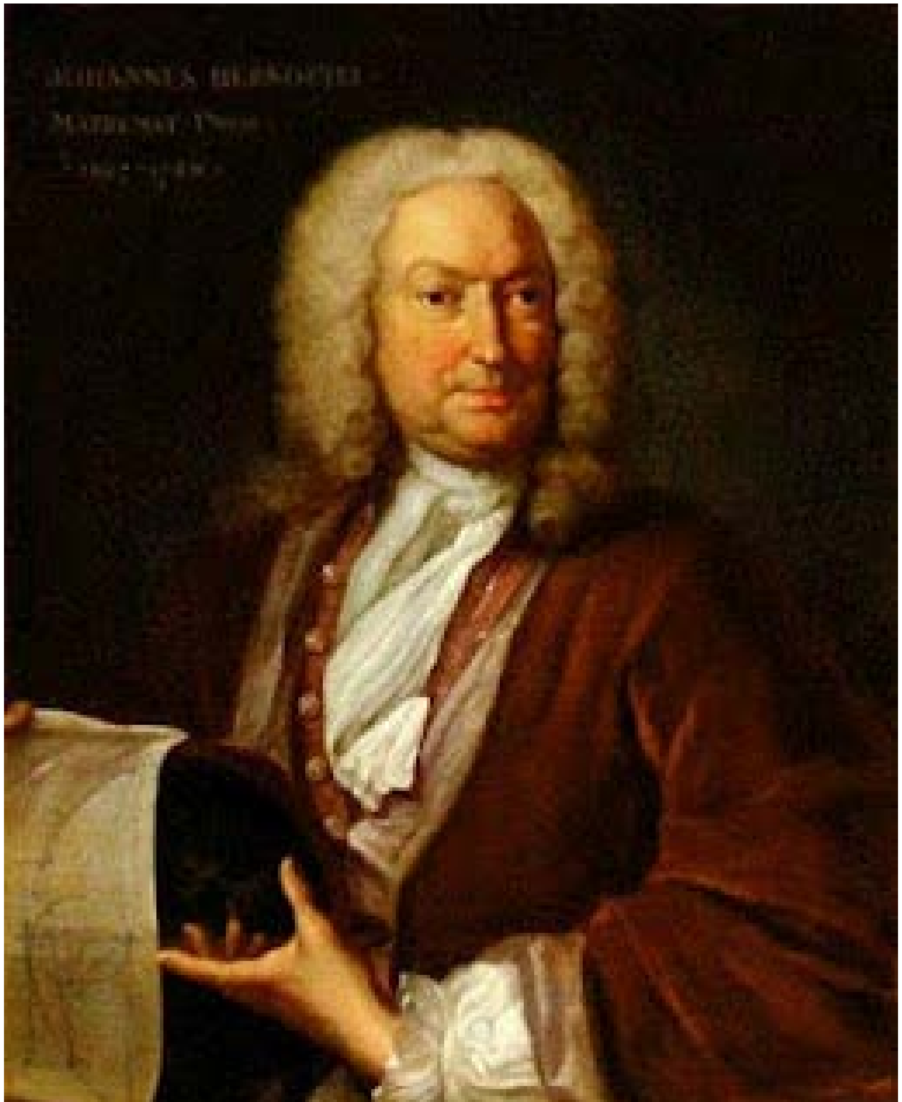
- 18 ст. – сторіччя аналізу
- Головна наука – механіка (Ньютон), інші взаємодії – наслідки механічних процесів
- Ейлер відокремив аналіз від геометрії та механіки, зробив її прикладним розділом аналізу (1736)
- «Аналітична механіка» Лагранжа (1788) демонстративно не містила жодного креслення
- Головний метод пізнання – диференціальні рівняння

- Аналіз поширюється на комплексну область
- Поява кратних та поверхневих інтегралів
- Рівняння математичної фізики
- Варіаційне числення
- Лінійна алгебра
- Диференціальна, нарисна та і геометрії
- Теорія ймовірностей та математична статистика
- Теорія чисел



- Професійні вчені
- Академії наук (державні). Головна - Паризька академія наук
- Перший математик першої половині століття – Йоганн Бернуллі, другої половини століття – його учень Леонард Ейлер
- Лейбніц (1646-1716), Якоб Бернуллі (1654-1705), Жозеф Луї Лагранж (1736-1813), П’єр Симон Лаплас (1749-1827)
- Лежандр, Даламбер, Клеро, Мопертюї, Монж, Карно, Ламберт, Даніїл Бернуллі, Крамер, Вандермонд, де Муавр, Тейлор, Маклорен, Стірлінг

Йоганн Бернуллі (27 липня 1667 — 1 січня 1748, Базель, Швейцарія)

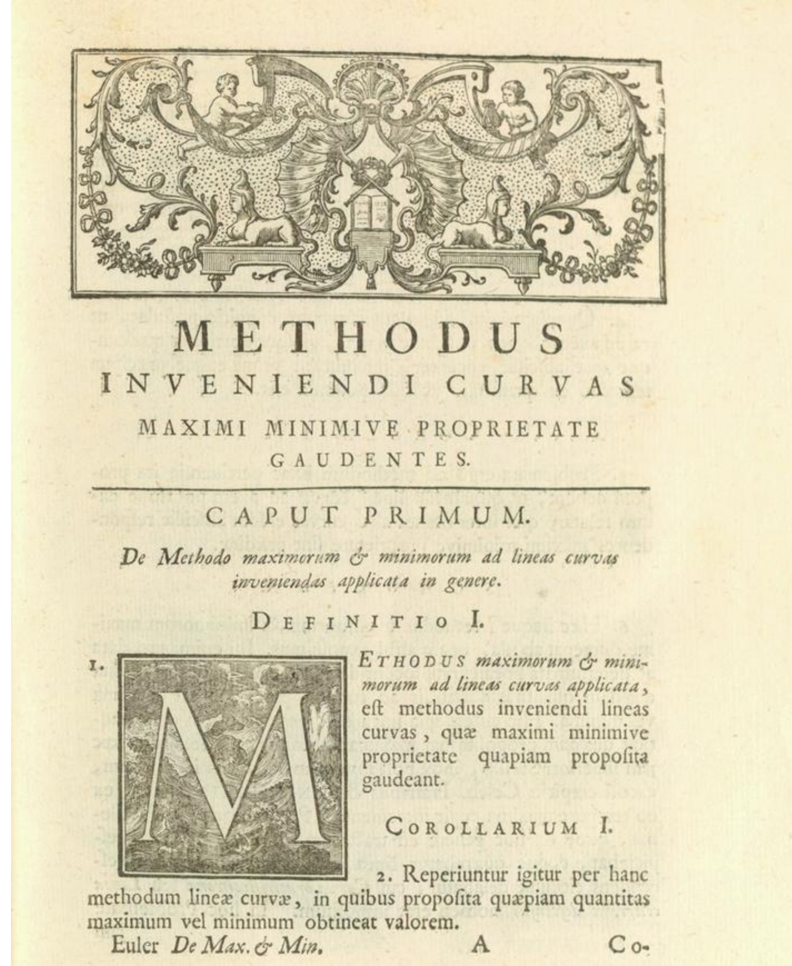


- Ланцюгова лінія (1691)
- Радіус кривини (1692)
- Звичайні диф. рівняння (+ Якоб Бернуллі) – метод відокремлення змінних та метод ізоклін (1694)
- Перша задача варіаційного числення – задача про брахістохрону (криву найшвидшого спуску) (1696) – циклоїда (Гюйгенс – таутохрона – досягає нижньої точки за однаковий проміжок часу для будь-якої початкової точки) Розв’язана також Якобом Бернуллі, Лопіталем та Ньютоном (анонімно) (конкурс *Acta Erud*.)
- Геодезичні лінії (+ Якоб Бернуллі та Лейбніц). Диф. рівняння ліній.
- 1702: методи інтегрування раціональних дробів (розклад на простіші) (+ Лейбніц).
- Першій підручник з диф. числення (Лопіталь 1696) - 4 видання (до 1781) Видана в Англії (1730) із заміною диференціалів на флюксії

Леона́рд Е́йлер (Leonhard Euler
15 квітня 1707 — 7 (18) вересня 1783)

Автор 886 наукових публікацій у галузях математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, теорії графів, наближених обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудування, теорії музики, що мали значний вплив на розвиток науки.

У власних підручниках Ейлер використовував концепцію функції (Лейбніц 1673: «відрізок, довжина якого змінюється за певним законом» - x^1, x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$, Й. Бернуллі, 1718: «функцією змінної величини називають кількість, яку утворено в будь-який спосіб з цієї змінної величини та сталих” – j(x), e(x)) (1748: “функцією змінної кількості є аналітичний вираз, який побудовано яким-небудь способом з цієї кількості та чисел або сталих кількостей”, 1755: «якщо деякі кількості залежать одна від одної в такий спосіб, що під час зміни останніх і самі змінюються, то перші називають функцією других”, писав *f : y, f: (x + y)* , замість сучасних *f(y), f(x+y)*), позначення тригонометричних функцій sin, cos, tg, ctg (Йоганн Бернуллі, 1739), грецьку літеру *Σ* як знак суми (1755), букву ***i*** для позначення уявної одиниці (1777), букву ***e*** як основу натурального логарифму (1728), поняття показникової функції, подвійного інтегралу. Використання грецької літери *π* як позначення відношення довжини кола до його діаметру стало загальновідомим з праць Ейлера, хоча було запропоновано Вільямом Джонсом у 1706 році.



METHODUS
INVENIENDI CURVAS
MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE
GAUDENTES.

CAPUT PRIMUM.

De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

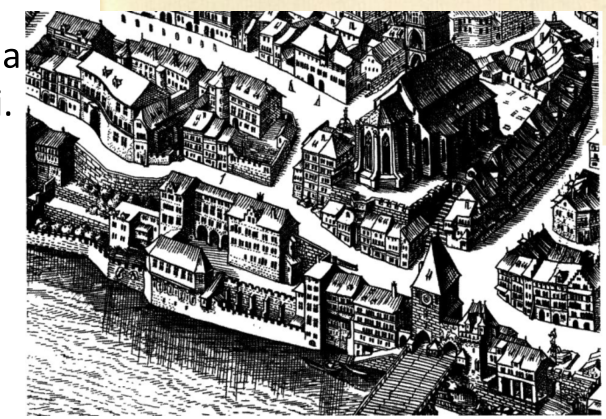
DEFINITIO I.

1. METHODUS *maximorum & minimorum ad lineas curvas applicata*, est methodus inveniendi lineas curvas, quæ maximi minimive proprietate quapiam proposita gaudeant.

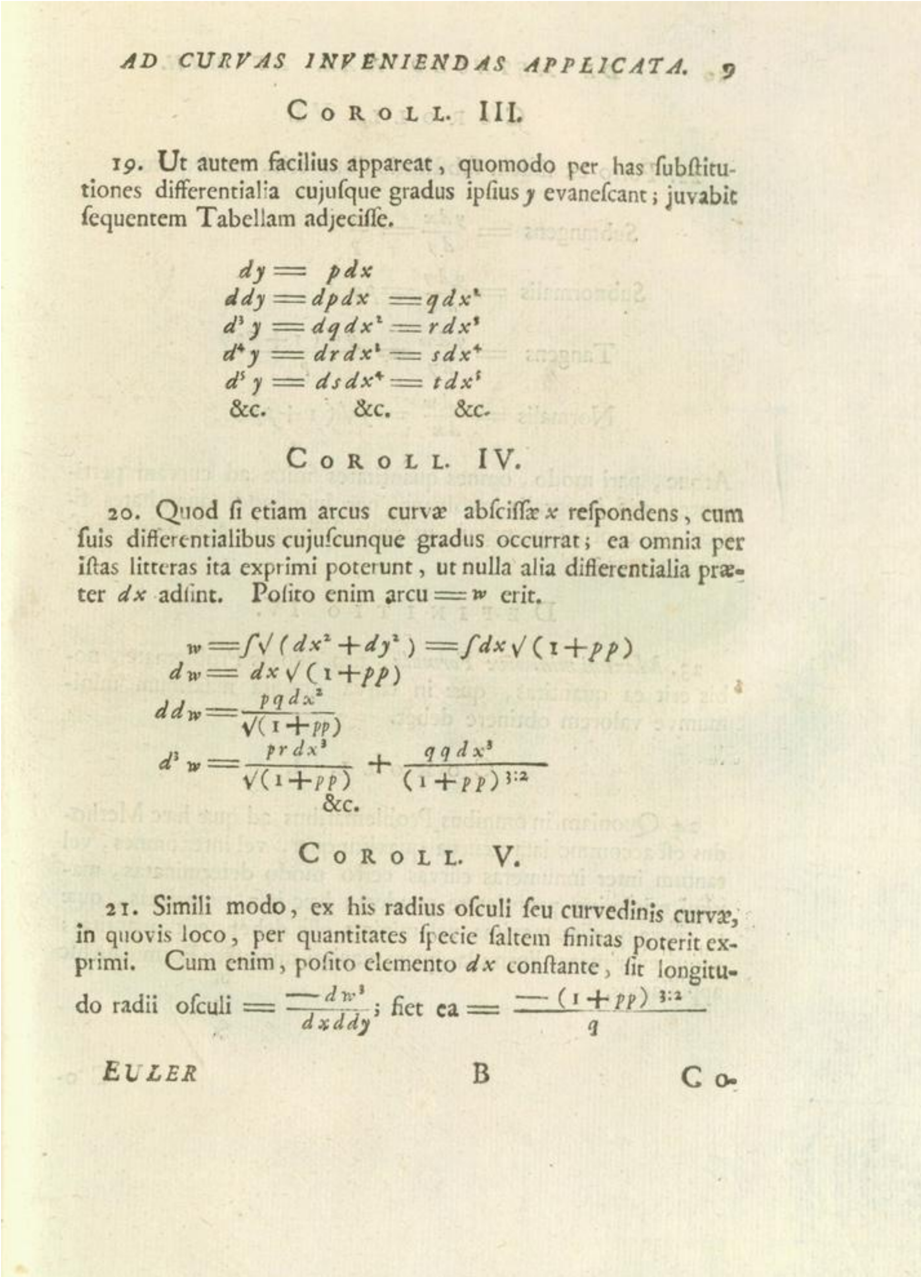
COROLLARIUM I.

2. Reperiuntur igitur per hanc methodum lineæ curvæ, in quibus proposita quæpiam quantitas maximum vel minimum obtineat valorem.

Euler *De Max. & Min.* A Co-



Базельський університет у 17-18 ст.



AD CURVAS INVENIENDAS APPLICATA. 9

COROLL. III.

19. Ut autem facilius appareat, quomodo per has ſubſtitutiones differentialia cujuſque gradus ipſius y evaneſcant; juvabit ſequentem Tabellam adjeciſſe.

$$\begin{aligned} dy &= p\,dx \\ ddy &= dp\,dx = q\,dx^2 \\ d^3y &= dq\,dx^2 = r\,dx^3 \\ d^4y &= dr\,dx^3 = s\,dx^4 \\ d^5y &= ds\,dx^4 = t\,dx^5 \\ &\text{\&c.} \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

COROLL. IV.

20. Quod ſi etiam arcus curvæ abſciſſæ x reſpondens, cum ſuis differentialibus cujuſcunque gradus occurrat; ea omnia per iſtas litteras ita exprimi poterunt, ut nulla alia differentialia præter dx adſint. Poſito enim arcu $= w$ erit.

$$\begin{aligned} w &= \int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int dx\sqrt{(1+pp)} \\ dw &= dx\sqrt{(1+pp)} \\ ddw &= \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{(1+pp)}} \\ d^3w &= \frac{pr\,dx^3}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{qq\,dx^3}{(1+pp)^{3:2}} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

COROLL. V.

21. Simili modo, ex his radius oſculi ſeu curvedinis curvæ, in quovis loco, per quantitates ſpecie ſaltem finitas poterit exprimi. Cum enim, poſito elemento dx conſtante, ſit longitudo radii oſculi $= \frac{-dw^3}{dx\,ddy}$; fiet ea $= \frac{-(1+pp)^{3:2}}{q}$

EULER B Co-

- Вступ до аналізу нескінченно малих (1748) 2 тт. (2 том – перший курс аналітичної та диференціальної геометрії)
- Диференціальне числення (Institutionum calculi differentialis) 1755
- Елементи варіаційного числення (1766) – автор терміна
- Інтегральне числення (Institutionum calculi integralis, 1768—1770), 3 тт.

Будинок Петербурзької Академії наук у другій половині 18 ст.

Definitio 2.

7. Cum functionis cuiuscunque ipsius x differentiale huiusmodi habeat formam $X\partial x$, proposita tali forma differentiali $X\partial x$, in qua X sit functio quaecunque ipsius x, illa functio, cuius differentiale est $= X\partial x$, huius vocatur integrale, et praefixo signo $\int$ indicari solet: ita vt $\int X\partial x$ eam denotet quantitatem variabilem, cuius differentiale est $= X\partial x$.

Corollarium 3.

10. Cum igitur harum ipsius x functionum

$$x^2,\ x^n,\ \sqrt{(aa - xx)}$$

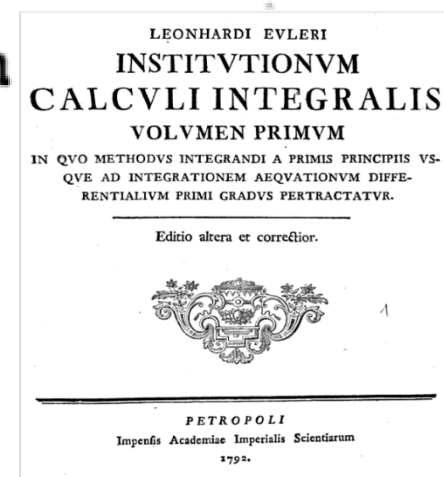
differentialia sint

$$2x\partial x,\ nx^{n-1}\partial x,\ \frac{-x\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

signo integrationis $\int$ adhibendo, patet fore:

$$\int 2x\partial x = xx;\ \int nx^{n-1}\partial x = x^n;\ \int\frac{-x\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} = \sqrt{(aa-xx)}$$

vnde vsus huius signi clarius perspicitur.


LEONHARDI EVLERI
INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

Editio altera et correctior.

PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1792.

Scholion 1.

5. In calculo differentiali iam notaui, quaeſtionem de differentialibus non abſolute ſed relatiue eſſe intelligendam, ita vt, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, non tam ipſum eius differentiale ∂y, quam eius ratio ad differentiale ∂x ſit definienda. Cum enim omnia differentialia per ſe ſint nihilo aequalia, quaecunque functio y fuerit ipſius x, ſemper eſt $\partial y = 0$, neque ſic quicquam amplius abſolute quaeri poſſet. Verum quaeſtio ita rite proponi debet, vt dum x incrementum capit infinite paruum adeoque euaneſcens ∂x, definiatur ratio incrementi functionis y, quod inde capiet, ad iſtud ∂x: etſi enim vtrumque eſt $= 0$, tamen ratio certa inter ea intercedit, quae in calculo differentiali proprie inveſtigatur. Ita ſi fuerit $y = xx$, in calculo differentiali oſtenditur eſſe $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$, neque hanc incrementorum rationem eſſe veram, niſi incrementum ∂x, ex quo ∂y naſcitur, nihilo aequale ſtatuatur. Verum tamen, hac vera differentialium notione obſeruata, locutiones communes, quibus differentialia quaſi abſolute enunciantur, tolerari poſſunt, dummodo ſemper in mente ſaltem ad veritatem referantur. Recte ergo dicimus, ſi $y = xx$, fore $\partial y = 2x\partial x$, tam etſi falſum non eſſet, ſi quis diceret $\partial y = 3x\partial x$, vel $\partial y = 4x\partial x$, quoniam ob $\partial x = 0$ et $\partial y = 0$, hae aequalitates aeque ſubſiſterent; ſed prima ſola rationi verae $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$ eſt conſentanea.

ва

ва

"…якщо ***y*** є деякою функцією від ***x*** , то треба визначити не стільки самий її диференціал ***dy***, скільки його відношення до диференціалу ***dx***. Дійсно, оскільки всі диференціали самі собою дорівнюють нулю, то, яка б не була функція ***y*** кількості ***x***, завжди ***dy*** = 0, так що тут в певному сенсі нема чого й шукати. Правильний же погляд є таким : ***x*** отримає нескінченно малого приросту ***dx***, треба знайти відношення до нього приросту, якого завдяки цьому отримує функція ***y***. Хоча насправді обидва прирости = 0, однак, між ними є певне відношення, яке й шукається як треба у диференціальному численні. Так, коли

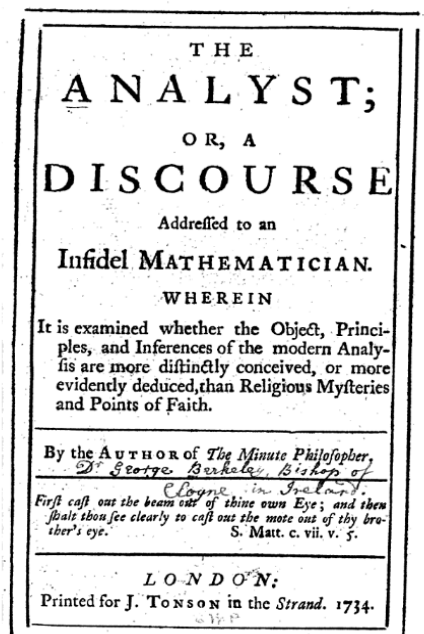
y = ***xx***, то у диференціальному численні встановлюється, що

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

і це відношення приростів є вірним тільки якщо вважати, що приріст ***dx,*** який породжує приріст ***dy,*** дорівнює нулю. "

Недоліки обґрунтування диференціального числення не заважали математикам 18 століття отримувати нові, захоплюючі результати, що допомагало не звертати уваги на хиткість його основ. Однак брак строгості нового методу не залишився непоміченим.

XIII. Now the other Method of obtaining a Rule to find the Fluxion of any Power is as follows. Let the Quantity x flow uniformly, and be it proposed to find the Fluxion of x^n. In the same time that x by flowing becomes $x+o$, the Power x^n becomes $\overline{x+o}|^n$, i. e. by the Method of infinite Series $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} +$ &c. and the Increments o and $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} +$ &c. are one to another as 1 to $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} +$ &c. Let now the Increments vanish, and their last Proportion will be 1 to nx^{n-1}. But it should seem that this reasoning is not fair or conclusive. For when it is said, let the Increments vanish, *i. e.* let the Increments be nothing, or let there be no Increments, the former Supposition that the Increments were something, or that there were Increments, is destroyed, and yet a Consequence of that Supposition, *i. e.* an Expression got by virtue thereof, is retained. Which, by the foregoing Lemma, is a false way of reasoning. Certainly when we suppose the Increments to vanish, we must suppose their Proportions, their Expressions, and every thing else derived from the Supposition of their Existence to vanish with them.


THE
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE
Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.
WHEREIN
It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

By the AUTHOR of *The Minute Philosopher*.
Dr George Berkeley, Bishop of Cloyne in Ireland.

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.

LONDON:
Printed for J. TONSON in the *Strand*. 1734.

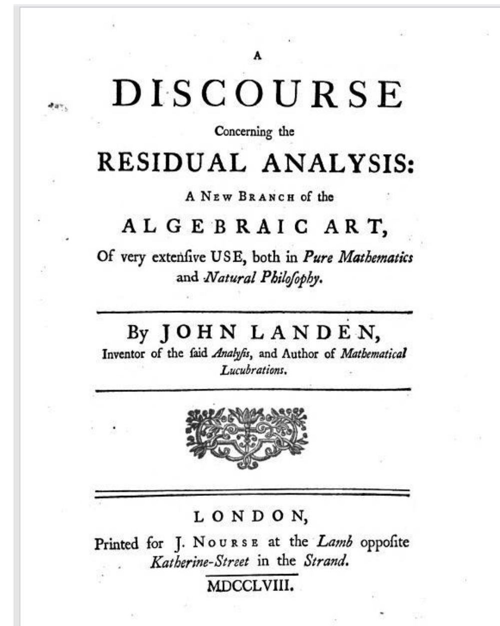
“ Коли прирости зникають, ми повинні вважати, що їхні відношення, їхні вирази та все, що випливає з припущення їхнього існування – зникає разом з ними. ”

Джордж Берклі.

“The Analyst” , 1734 , ст. 20-21

- Джон Лангден “Міркування про різницевий аналіз. Нова гілка алгебраїчного мистецтва” (A discourse concerning the residual analysis: a new branch of the algebraic art) 1758 – не розглядати нескінченно малі, отримувати похідні алгебраїчними методами.

Похідна від $\boldsymbol{x^3}$:



A

DISCOURSE

Concerning the

RESIDUAL ANALYSIS:

A New Branch of the

ALGEBRAIC ART,

Of very extensive USE, both in *Pure Mathematics* and *Natural Philosophy*.

By JOHN LANDEN,

Inventor of the said *Analysis*, and Author of *Mathematical Lucubrations*.

LONDON,

Printed for J. Nourse at the *Lamb* opposite *Katherine-Street* in the *Strand*.

MDCCLVIII.

Замінимо x на y

Розглянемо $\dfrac{y^3 - x^3}{y - x} = y^2 + yx + x^2 = 3x^2$,

якщо $y = x$

It is by means of the following theorem, *viz.*

$$\frac{x^{\frac{m}{n}} - v^{\frac{m}{n}}}{x - v} = x^{\frac{m}{n}-1} \times \frac{1 + \frac{v}{x} + \left(\frac{v}{x}\right)^2 + \left(\frac{v}{x}\right)^3 \ldots (m)}{1 + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{2m}{n}} + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{3m}{n}} \ldots (n)},$$

(where m and n are any integers,)

$$\overline{1+x}^{\frac{m}{n}} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 \text{ \&c.}$$

we have $\overline{1+y}^{\frac{m}{n}} = 1 + ay + by^2 + cy^3$ &c.
and, by subtraction,

$$\overline{1+x}^{\frac{m}{n}} - \overline{1+y}^{\frac{m}{n}} = a.\overline{x-y} + b.\overline{x^2-y^2} + c.\overline{x^3-y^3} + d.\overline{x^4-y^4}$$
&c.

If, now, we divide by the residual $x - y$, we shall get

$$\overline{1+x}^{\frac{m}{n}-1} \times \frac{1+\frac{1+y}{1+x}+\overline{\frac{1+y}{1+x}}^{2}+\overline{\frac{1+y}{1+x}}^{3} \quad (m)}{1+\overline{\frac{1+y}{1+x}}^{\frac{m}{n}}+\overline{\frac{1+y}{1+x}}^{\frac{2m}{n}}+\overline{\frac{1+y}{1+x}}^{\frac{3m}{n}} \quad (n)}$$

$$= a + b.\overline{x+y} + c.\overline{x^2+xy+y^2} + d.\overline{x^3+x^2y+xy^2+y^3} \text{ \&c.}$$

which equation must hold true let y be what it will: From whence, by taking y equal to x, we find, as before,

$$\frac{m}{n} \times \overline{1+x}^{\frac{m}{n}-1} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 \text{ \&c.}$$

Consequently, multiplying by $1 + x$, we have

$\frac{m}{n} \times \overline{1+x}^{\frac{m}{n}}$, or its equal $\frac{m}{n} + \frac{m}{n}ax + \frac{m}{n}bx^2 + \frac{m}{n}cx^3$ &c.

$$= a + \left.\begin{matrix}2b\\a\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}3c\\2b\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}4d\\3c\end{matrix}\right\} x^3 \text{ \&c.}$$

From whence, by comparing the homologous terms, the coefficients a, b, c, &c. will be found.

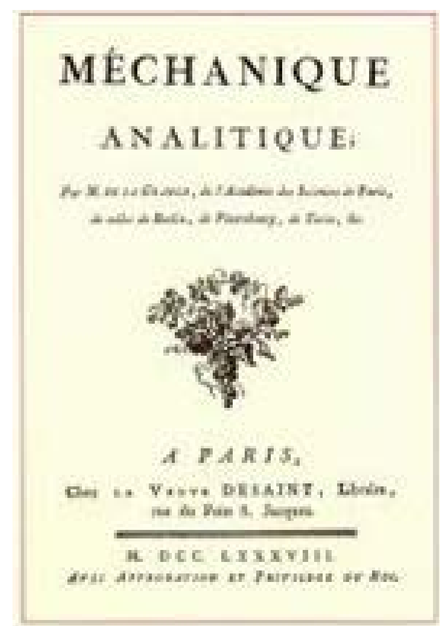

Жан ле Рон д'Аламбер

(Jean le Rond d'Alembert; 16 листопада 1717 — 29 жовтня 1783)

- «Енциклопедія або тлумачний словник науки, мистецтва й ремесел» (Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers), 1745 – головний редактор
- Статті: Диференціали, Рівняння, Динаміка, Геометрія
- У статті Диференціали – означення границі: *одна величина є границею другої, якщо друга, наближаючись до першої, відрізняється від неї менше, ніж на будь-яку наперед задану величину.* Далі: *диференціювання рівнянь полягає просто у тому, що шукають границі відношень скінченних різниць двох змінних, які входять у рівняння.*
- Не розглядав актуальних нескінченно малих
- Позначення функції: jt, j(t+s).

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж (фр. Joseph-Louis Lagrange, італ. Giuseppe Lodovico Lagrangia; 25 січня 1736, Турин — 10 квітня 1813, Париж)

- 1788: «Аналітична механіка» («Mécanique analytique»). Особливо пишався, що вперше з часів Архімеда книга з механіки не містить жодного креслення.
- 1795: Нормальна школа. 1797: Політехнічна школа, курс математичного аналізу. Підручники французькою мовою.
- «Теорія аналітичних функцій» («Théorie des fonctions analytiques», 1797)



- «Теорія аналітичних функцій” не містить нескінченно малих величин.
- *Я не в змозі уявити, що відбувається, коли відношення приростів прямує до границі…*
- Тому відкинув поняття нескінченно малої та переходу до границі взагалі. Похідні, як коефіцієнти степеневого ряду, розклад – алгебраїчними методами:

$$f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+\&c.$$

- Розглядав д

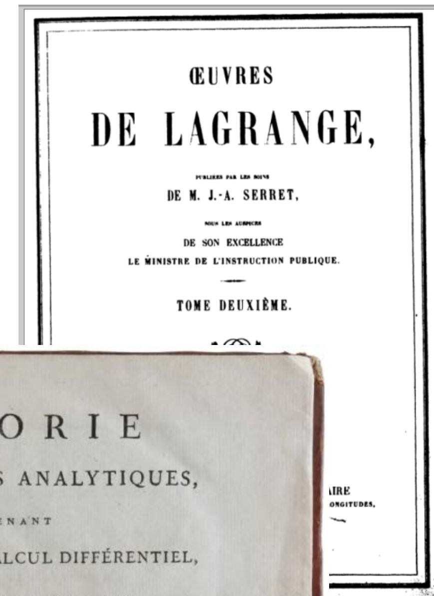
  (у формі Лагранжа) (1772)
- Самий термін “похідна” - “La dérivée“ – належить Лагранжу,

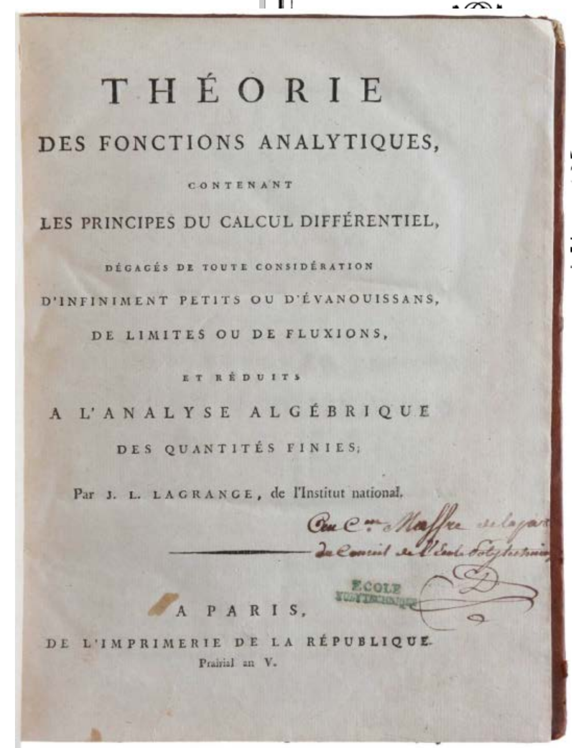
  як і позначення

$$f^{/}(x),\quad f^{//}(x),\ldots$$

1760 - у вигляді

$$\varphi^{/}x=\frac{d\varphi x}{dx},\varphi^{//}x=\frac{d\varphi^{/}x}{dx},\ldots$$





- 1772 - кожна наступна похідна “походить, утворюється” (dérive) з попередньої, як коефіцієнт при першому степені приросту аргументу у розкладі її у степеневий ряд.

On aura, par ce procédé, $f(x+i) = fx + iP$, $P = p + iQ$, $Q = q + iR$, $R = r + iS$, &c.; donc, substituant successivement, $f(x+i) = fx + iP = fx + ip + i^2 Q = fx + ip + i^2 q + i^3 R =$ &c.; ce qui donnera pour le développement de $f(x+i)$, une série de la forme que nous avons supposée au commencement.

16. Après ces considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n.° 3;

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{\&c.},$$

et chercher comment les fonctions dérivées p, q, r, &c. dépendent de la fonction primitive fx.

Pour cela, supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i, il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$; et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi le résultat doit être le même, soit qu'on mette dans la série $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ &c., $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \text{\&c.};$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{\&c.};\\ &+ po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Pour faire l'autre substitution, soit $fx + f'xo +$ &c., $p + p'o +$ &c.; $q + q'o +$ &c. $r + r'o +$ &c., ce que deviennent les fonctions fx, p; q, r, &c. en y mettant $x+o$ pour x, et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o, il est clair que la même formule deviendra

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{\&c.}\\ &+ f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, &c. $p = f'x$, $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, &c.

Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura $p = f'x$, et de-là $p' = f''x$; donc $q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}$; donc $q' = \frac{f'''x}{2}$; et de-là $r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2\cdot 3}$; donc $r' = \frac{f^{\text{iv}}x}{2\cdot 3}$, et de-là $s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{\text{iv}}x}{2\cdot 3\cdot 4}$, et ainsi de suite.

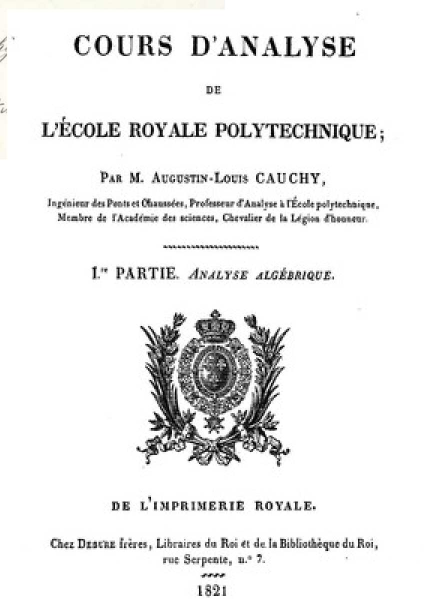
Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3 + \frac{f^{\text{iv}}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4 + \text{\&c.}$$

- Знак факторіала $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ належить Луї Арбогасту (1800)
- Термін “аналітична функція” належить Кондорсе (1782)

- Наступне XIX сторіччя в цілому було сторіччям геометрії, однак як раз в цю добу і було отримано нарешті строге обґрунтування диференціального та інтегрального числення. На початку сторіччя — Огюстеном Луї Коші (1789 — 1857), наприкінці — Карлом Теодором Вільгельмом Вейєрштрассом (1815 — 1897)

Огюстен Луї Коші (Augustin Louis Cauchy 21 серпня 1789 — 23 травня 1857)



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

- Понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики тощо.
- «Курс аналізу» (1821), «Резюме лекцій числення нескінченно малих» (1823), «Лекції з додатків аналізу до геометрії» (1826–1828), систематичне використання поняття границі. Неперервність функції, теорія збіжних рядів, (вперше - точні умови збіжності рядів Тейлора до даної функції, різниця між збіжністю цього ряду взагалі і збіжністю до даної функції), поняття радіуса збіжності, теорема про добуток двох абсолютно збіжних рядів тощо, означення інтеграла як границі сум, існування інтегралу від неперервної функції.
- Розвинув основи теорії аналітичних функцій комплексної змінної (Ейлер, д'Аламбер). Інтегральна теорема Коші, інтегральна формула Коші, розклад функції в степеневий ряд, теорія лишків та її застосування.
- Теорія диференціальних рівнянь: задача Коші, теореми про існування розв'язку для випадку дійсних і комплексних змінних, метод Коші інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го порядку.
- Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «спряжені» комплексні числа та ін.

Нескінченно мала – змінна величина, яка прямує до нуля

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

puis, en passant aux limites,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim(1+\beta)} = e.$$

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite. Telle est la variable α dans les calculs qui précèdent.

- Під назвою *змінної* величини будемо розуміти таку, що послідовно переходить через низку значень, різних між собою. На відміну від неї, *стала* величина – це величина, значення якої залишається фіксованим та визначеним. Якщо значення, що послідовно надаються якій-небудь змінній, наближаються нескінченно до певного фіксованого значення в такий спосіб, що нарешті відрізняються від нього як завгодно мало, то це останнє називається *границею* всіх інших.
- Якщо послідовні числові значення певної змінної нескінченно зменшуються в такий спосіб, що нарешті будуть менше будь-якого наперед заданого числа, то в цьому випадку ця змінна називається *нескінченно малою,* або нескінченно малою величиною. Змінна такого роду має границею нуль.

l'une de l'autre. Cela posé, si la variable y est exprimée en fonction de la variable x par l'équation

$$y = f(x), \tag{1}$$

Δy, ou l'accroissement de y correspondant à l'accroissement Δx de la variable x, sera déterminé par la formule

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

sement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \tag{1}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux

fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

- Якщо змінна y визначена, як функція змінної x рівнянням

$$y = f(x)$$

то Δy, або приріст змінної y, що відповідає приросту Δx змінної x, визначається за формулою

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

- Якщо покласти $\Delta x = i$, то обидва члени *відношення різниць*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

будуть величинами нескінченно малими. Але, хоча вони будуть нескінченно та одночасно наближатися до нуля, самий дріб буде прямувати до іншої, додатної чи від'ємної границі. Ця границя для кожного значення x має також визначене значення, що змінюється разом з x. Наприклад, якщо покласти $f(x) = x^m$, де m - ціле число, то відношення нескінченно малих різниць буде мати вигляд

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1}$$

а границею його буде величина mx^{m-1}, яка є новою функцією змінної x. Так само і взагалі, лише вигляд нової функції, що слугує границею відношення $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ буде залежним від вихідної функції

$y = f(x)$. Щоб підкреслити цю залежність, нову функцію називають *похідною функцією,* и позначають знаком наголосу

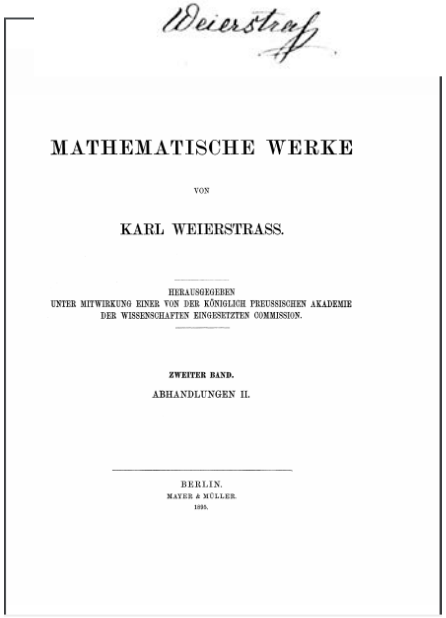
$$y' \quad \text{або} \quad f'(x)$$

Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс

(*Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*; 31 жовтня 1815 - 19 лютого 1897)

- Німецький математик, розробив систему логічного обґрунтування математичного аналізу на основі побудованих ним строгої теорії збіжності та теорії дійсних чисел.
- Лекції у Берлінському університеті (1856-1896):

1. Теорія аналітичних функцій, включно з теорією дійсних чисел.
2. Теорія еліптичних функцій, застосування еліптичних функцій до задач геометрії та механіки.
3. Теорія абелевих інтегралів та функцій.
4. Варіаційне числення.



MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

ZWEITER BAND.

ABHANDLUNGEN II.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1895.

- Арифметизація поняття границі та неперервності замість нечітких якісних та геометричних підходів.
- Курс лекцій 1861 р. : “Якщо $f(x)$ є функцією від x , та x – визначене значення, то під час переходу x в $x+h$ функція зміниться і буде $f(x+h)$; різницю $f(x+h)$ - $f(x)$ називають зміненням, яке отримує функція завдяки тому, що аргумент переходить від x до $x+h$. Якщо можливо визначити для h межу δ таку, що для *всіх* h , за абсолютним значенням ще менших, ніж δ, $f(x+h)$ - $f(x)$ буде менше, ніж будь-яка як завгодно мала величина ε, то кажуть, що нескінченно малим зміненням аргументу відповідають нескінченно малі змінення функції. Бо кажуть, що певна величина може стати нескінченно малою, якщо її абсолютне значення може стати менше будь-якої малої величини, яку взято в довільний спосіб. Якщо деяка функція така, що нескінченно малим зміненням аргументу відповідають нескінченно малі змінення функції, то кажуть, що вона – *неперервна функція* аргументу, або що вона неперервно змінюється разом з власним аргументом. ” /Конспект Г.А.Шварца, вперше надруковано: Dugac, P. Elements d`analyse de Karl Weierstrass (1973)/
- Стаття Heine E. Die Elemente der Functionenlehre (1872) – вперше надруковано означення неперервності на $\varepsilon - \delta$ мові.
- Перший підручник на $\varepsilon - \delta$ мові: Stolz, O. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten (Leipzig: 1885) (Лекції із загальної арифметики згідно сучасної точки зору).

- Для Коші функція $f(x)$ неперервна для значення x_0, якщо, яке б ні було додатне число ε, можна знайти число $\eta(\varepsilon)$ таке, що з нерівності $|h| \leq \eta(\varepsilon)$ випливає, що $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. /Анрі Лебег, Інтегрування та пошук первісних функцій, 1904/

Георг Фрідріх Бернгард Ріман

(*Georg-Friedrich-Bernhard Riemann*, 17 вересня 1826 (Ганновер) - 20 липня 1866 (Італія))

- Німецький математик, механік і фізик, учень Гауса.
- Інтеграл Рімана (1854). (Раніше – Коші, але тільки для неперервних функцій).

Список літератури

- Berkeley, G. (1734). *The Analyst*. Retrieved from https://www.maths.tcd.ie/pub/Hist Math/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf.
- Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola Gallice scripta De ludo pilae reticularis*. Retrieved from https://archive.org/details/bub_gb_kz9nvk99EWoC.
- Cauchy, A. L. (1823). *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*. Retrieved from https://books.google.cz/books/about/Résumé_des_leçons_sur_le_calcul_infin.html?id=uN5UAAAAYAAJ&redir_esc=y
- Lagrange, J. L. (1806). *Leçons sur le calcul de fonctions.* Retrieved from https://archive.org/stream/leonssurlecalcu01lagrgoog#page/n6/mode/2up
- Landen, J. (1758). *A discourse concerning the residual analysis: a new branch of the algebraic art, of very extensive use, both in pure mathematics and natural philosophy*. Retrieved from http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3023828.
- L'Hôpital, de, G. F. A. (1696). *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. Retrieved from http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k205444w
- Ossendrijver, M. (2016). Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph. Retrieved from https://www.academia.edu/21448627/2016_Ancient_Babylonian_astronomers_calculated_Jupiters_position_from_the_area_under_a_time-velocity_graph.
- Стройк, Д. Я. (1964). *Краткий курс истории математики*. Москва: Наука.