

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
VI Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 28—29 грудня 2017 року

Київ
2018

УДК 51(082)

МЗ4

Матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2017 р. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 382 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VI Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 29—30 декабря 2017 г. — Киев: КПИ им. Игоря Сикорского, 2018. — 382 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Sixth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2017. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018. 382 pp.

ISBN 978-617-7021-61-1

Оргкомітет VI Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)

Проф. Н. О. Вірченко (Україна)

Проф. О. В. Іванов (Україна)

Доц. О. О. Диховичний (Україна)

Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

Оргкомитет VI Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)

Проф. Н. А. Вирченко (Украина)

Проф. А. В. Иванов (Украина)

Доц. А. А. Дыховичный (Украина)

Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7021-61-1

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018



ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

SOME COMBINATORIAL IDENTITIES FOR NARAYANA'S COWS SEQUENCE

T. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
tarasgoy@yahoo.com

We investigate some families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Narayana's cows numbers with successive, even, and odd subscripts.

Keywords: Narayana's cows sequence, Fibonacci-Narayana sequence, Fibonacci sequence, Toeplitz-Hessenberg matrix.

1. Narayana's cows sequence. The Fibonacci sequence $\{F_n\}_{n \geq 0}$ is defined by the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and the recurrence relation

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Among the many generalizations of the Fibonacci sequence, one of the most known is the *Narayana's cows sequence* (or *Fibonacci-Narayana sequence*) $\{b_n\}_{n \geq 0}$, which defined by the following third-order recurrence relation

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = b_2 = 1,$$

for $n \geq 3$ (sequence A000930 in On-Line Encyclopedia of Integer Sequences). The first few Narayana's cows numbers are 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60,....

Narayana's cows sequence was introduced by the Indian mathematician Narayana in the 14th century, while studying the following problem: A cow produces one calf every year. Beginning in its fourth year, each calf produces one calf at the beginning of each year. How many cows are there altogether after n years?

Many authors studied the Narayana's cows sequence and its generalizations (see, for example, Bilgici, 2016; Didkivska & St'opochkina, 2013; Flaut & Shpakivskyi, 2013; Ramirez & Sirvent, 2015; Zatorsky & Goy, 2016 and the references given therein).

We study some families of Toeplitz-Hessenberg determinants whose entries are Narayana's cows numbers. This leads to discover new identities for these numbers.

Our approach is similar to Goy, 2017a; Goy, 2017b; Goy, 2017c; Goy, 2017d.

2. Toeplitz-Hessenberg matrices and determinants. A *Toeplitz-Hessenberg matrix* is an $n \times n$ matrix of the form

$$M_n(a_0; a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

where $a_0 \neq 0$ and $a_k \neq 0$ for at least one $k \geq 1$.

The following result gives the multinomial extension for $\det M_n$.

Lemma 1 (Muir, 1960). *Let n be a positive integer. Then*

$$\det M_n = \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-a_0)^{n-(s_1+\dots+s_n)} p_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \quad (1)$$

where the summation is over integers $s_j \geq 0$ satisfying $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$,

and $p_n(s) = \frac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!}$ is the multinomial coefficient.

For brevity and clarity, we will denote

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det M_n(1; a_1, a_2, \dots, a_n).$$

3. Toeplitz-Hessenberg determinants with Narayana's cows numbers entries. Now we evaluate $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ with special entries a_i .

Theorem 2. *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. Then*

$$\begin{aligned} D(b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}) &= 1 - (-1)^n F_{n-1}, \\ D(b_0, b_2, \dots, b_{2n-2}) &= (-1)^{n-1} F_n, \\ D(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) &= \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}}{2}, \\ D(b_1, b_2, \dots, b_n) &= \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{\lfloor n/3 \rfloor}}{2}, \\ D(b_3, b_4, \dots, b_{n+2}) &= \frac{1 + (-1)^n}{2(-1)^{n/2}}, \quad n \geq 2, \\ D(b_3, b_5, \dots, b_{2n+1}) &= 0, \quad n \geq 4, \\ D(b_4, b_5, \dots, b_{n+3}) &= \frac{(-1)^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} + (-1)^{\lfloor n/3 \rfloor}}{2}, \\ D(b_4, b_6, \dots, b_{2n+2}) &= 1, \quad n \geq 3, \\ D(b_5, b_7, \dots, b_{2n+3}) &= n + 1, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

where $\lfloor \alpha \rfloor$ is the floor function of α , F_n is the n^{th} Fibonacci number.

3. Multinomial extension of Toeplitz-Hessenberg determinants. In this section, we focus on multinomial extension of Theorems 2, using Lemma 1.

Theorem 3. *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. Then*

$$\begin{aligned} \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_0^{s_1} b_1^{s_2} \cdots b_{n-1}^{s_n} &= \frac{(-1)^{\lfloor (3n+1)/2 \rfloor} - 1}{2}, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_0^{s_1} b_2^{s_2} \cdots b_{2n-2}^{s_n} &= -F_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_1^{s_1} b_2^{s_2} \cdots b_n^{s_n} &= \frac{(-1)^{\lfloor 4n/3 \rfloor} - 1}{2}, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_1^{s_1} b_3^{s_2} \cdots b_{2n-1}^{s_n} &= (-1)^n - F_{n-1}, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_2^{s_1} b_3^{s_2} \cdots b_{n+1}^{s_n} &= 0, \quad n \geq 4, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_3^{s_1} b_5^{s_2} \cdots b_{2n+1}^{s_n} &= 0, \quad n \geq 4, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_4^{s_1} b_5^{s_2} \cdots b_{n+3}^{s_n} &= \frac{(-1)^{\lfloor (4n-1)/3 \rfloor} + (-1)^{\lfloor 4n/3 \rfloor}}{2}, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_4^{s_1} b_6^{s_2} \cdots b_{2n+2}^{s_n} &= (-1)^n, \quad n \geq 3, \\ \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) b_5^{s_1} b_7^{s_2} \cdots b_{2n+3}^{s_n} &= (-1)^n (n+1), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

where the summation is over integers $s_i \geq 0$ satisfying $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$, $\sigma_n = s_1 + \cdots + s_n$, and F_n is the n^{th} Fibonacci number.

References

- Bilgici, G. (2016). The generalized order- k Narayana cow's numbers. *Math. Slovaca*, 66(4), 795–802.
- Didkivska, T. V., & St'opochkina, M. V. (2003). Properties of Fibonacci-Narayana numbers. *In the World of Mathematics*, 9(1), 29–36. (in Ukrainian)
- Flaut, C., & Shpakivskyi, V. (2013). On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 23, 673–688.
- Goy, T. (2017a). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas identities with multinomial coefficients. In *Proceedings of International Conference «Contemporary Problems of Pure and Applied Mathematics»*, Almaty (Kazakhstan), August 22–25, (p. 61–64). Almaty: Institute of Mathematics and Mathematical Modelling of Committee of Science of MES of RK.
- Goy, T. (2017b). On new Catalan identities using Toeplitz-Hessenberg matrices. In *Proceedings of 11th International Algebraic Conference in Ukraine*, Kyiv, July 3–7 (p. 49). Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.
- Goy, T. (2017c). Some identities for Padovan numbers via the determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices. In *Book of abstracts of 30th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society. «Pure and Applied Mathematics»*, Bab-Ezzouar (Algeria), July 12–15 (pp. 242–244). Bab-Ezzouar: University of Science and Technology Houari Boumediene.
- Goy, T. (2017d). Some Tribonacci identities using Toeplitz-Hessenberg determinants. In *Proceedings of 18th International Scientific M. Kravchuk Conference*, Kyiv (Ukraine), October 7–10 (Vol. 1, pp. 159–161). Kyiv: KPI.
- Muir, T. (1960). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. (Vol. 3). New York: Dover Publications.
- Ramirez, J. L., & Sirvent, V. F. (2015). A note on the k -Narayana sequence. *Ann. Math. Inform.*, 45, 91–105.
- Zatorsky, R., & Goy, T. (2016). Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences. *J. Integer Seq.*, 19, Article 16.2.2.

LYAPUNOV'S STABILITY THEORY FOR A TRIPLE INVERTED PENDULUM WITH A FOLLOWER FORCES

V. V. Kovalchuk

State University Infrastructure and Technologies, Kyiv, Ukraine

kovaltchukvv@ukr.net

This objective of this work is applying the Lyapunov's stability theory for a three-link inverted mathematical pendulum with a follower force (a force tracking the configuration of a system). The character of stability of equilibrium positions of a pendulum has been investigated. The stability diagram for a pendulum is shown.

Keywords: inverted pendulum, dynamical systems, stability, follower force.

The studies the dynamic behavior of an inverted pendulum is of interest to several fields of mechanics and engineering. In the 20th century, studies into pendulum systems revealed a number of unusual dynamic phenomena. One of them is the possibility of stabilizing an unstable equilibrium position of the system by a periodic load (Lobas, 2005). The inverted pendulum has been the most popular benchmark, among others, in nonlinear control theory too (Jadlovská & Sarnovsky, 2012).

A planar triple inverted pendulum consists of massless rods OA_1, A_1A_2, A_2A_3 that carry masses m_1, m_2 and m_3 that are concentrated at their extremities. The rods are of length l_1, l_2 and l_3 . Linear elastic hinges are present in the joints of the system. The lower end O is attached to a viscoelastic hinge. The upper end of the pendulum is attached to a horizontal spring of stiffness c .

The generalized coordinates of the pendulum are the angles ϕ_1, ϕ_2 and ϕ_3 of between the vertical and the lower, middle and upper links.

A follower force \vec{P} , generally asymmetric, is applied to the upper end of the pendulum. The angle between the follower force and the vertical is denoted by

$$\alpha = \delta + k \cdot \phi_3$$

where $\delta = \text{const}$ is the angular eccentricity, $k = \text{const}$ is the orientation parameter of the follower force.

We suppose that the force \vec{P} is constant in magnitude. We assume that all the springs are relaxed when the pendulum is in the vertical position too.

Let us use the parameters of the lower link (m_1, l_1, c_1) to dimensionalize all the other parameters. Dimensionless quantities will be denoted by an overbar:

$$\bar{P} = P \cdot \frac{c_1}{l_1}, \quad \bar{c} = c \cdot \frac{l_1^2}{c_1}.$$

Lagrange equations for the inverted pendulum can be written in a more compact matrix form:

$$M(\phi) \cdot \ddot{\phi} + C(\phi, \dot{\phi}) \cdot \dot{\phi} + G(\phi) = 0, \quad (1)$$

where M — matrix of mass, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ — the vector-column of the generalized coordinates.

It is assumed that in the motion the triple pendulum undergoes small oscillations about the vertical axis. In this situation the non-linear equations of motion of the system can be linearized relative to

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0.$$

The determination of the state of stability of the pendulum is based upon a careful examination of the eigenvalues associated with the matrix of system of linearized differential equations. If one eigenvalue is zero or a pair of eigenvalues is purely imaginary, then we have critical cases of Lyapunov's theory of stability.

The value of the dimensionless *critical divergence* load will be denoted by P_d and the value of the dimensionless *critical flutter* load will be denoted by P_f . Fig. 1 shows a stability diagram for a three-link inverted pendulum, when the orientations parameter of the follower force $k=0,25$.

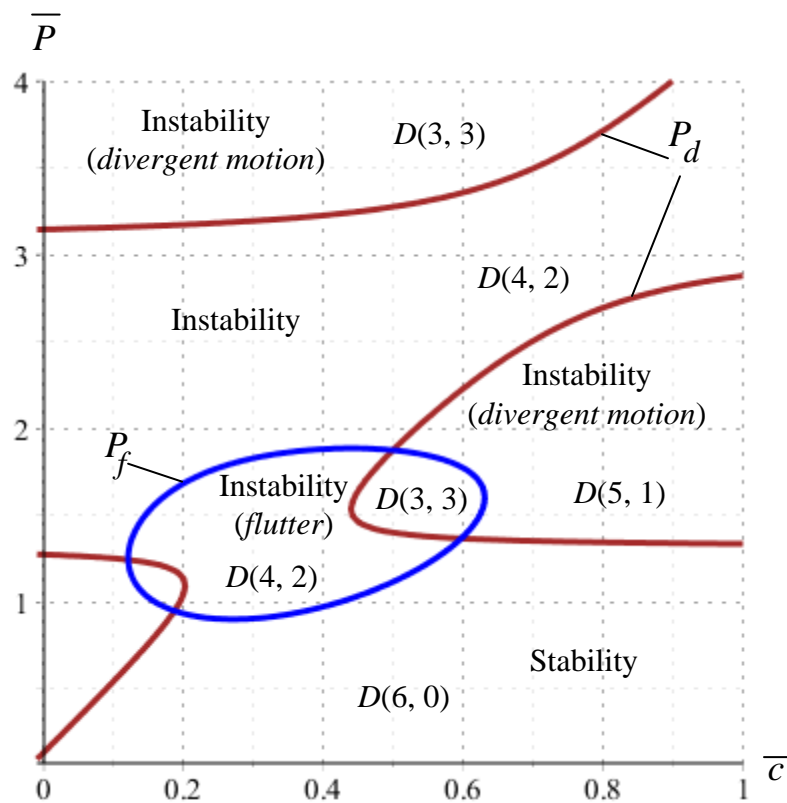


Fig. 1. Stability diagram for triple pendulum

Take for example a dimensionless parameter $\bar{c} = 0,8$ and substitute it into a linearized model of the system. Then for $\bar{P} = 1,0$ the eigenvalues of the matrix are:

$$\left[-0,14 \pm 0,95 i, \quad -0,31 \pm 0,67 i, \quad -2,40 \pm 1,93 i \right].$$

All 6 eigenvalues have a negative real part (domain $D(6,0)$ in Fig. 1). Therefore the system is asymptotically stable.

If $\bar{P} = 2,0$, then eigenvalues are:

$$\left[0,75; \quad -3,67; \quad -0,02 \pm 0,64 i, \quad -1,37 \pm 0,48 i \right].$$

Thus we have one positive eigenvalue (domain $D(5,1)$), the system is instable.

For $\bar{c} = 0,8$ and $\bar{P} = 1,34$ (*critical divergence* load) we have one zero eigenvalue. If a dangerous stability boundary is approached by a representative point moving within the stability domain, the steady state becomes unstable, and the well-known phenomenon «loss of stability» takes place.

For $\bar{c} = 0,4$ and $\bar{P} = 0,972$ (*critical flutter* load) a pair of eigenvalues is purely imaginary. Physically, a safe asymptotic-stability boundary $\bar{P} = P_f$ means soft loss of stability. In this case, stable oscillations (limit cycles) occur instead of asymptotically stable equilibrium.

The behavior of the solutions of equation (1) near the asymptotic stability boundaries in the first approximation determines the mechanisms whereby the pendulum loses stability in equilibrium positions.

For further calculations, we take into account that in terms of the dynamical system theory exist «soft» and «hard» loss of stability, i.e. the stability boundaries of equilibrium states are safe and dangerous (Bautin, 1984). If the representative point cross dangerous boundaries, then very small perturbations of the system lead to significant and irreversible changes in her behavior, though in this case the equilibrium state is asymptotically stable in the sense of Lyapunov from the formal-mathematical point of view.

In order to define whether the corresponding boundary of stability is safe or dangerous, it is necessary to calculate the so-called first Lyapunov value (coefficient) $L_1(\lambda_0)$ on the stability boundary $\bar{P} = P_d$.

References

- Bautin, N. N. (1984). *Behavior of dynamical systems near boundary of stability*. Moscow: Nauka.
- Jadlovská, S., & Sarnovsky, J. (2012). Classical double inverted pendulum—A complex overview of a system. In *Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII), 2012 IEEE 10th International Symposium on* (pp. 103–108). IEEE.
- Lobas, L. G. (2005). Dynamic behavior of multilink pendulums under follower forces. *International Applied Mechanics*, 41(6), 587–613.

GEOMAGNETIC ACTIVITY PREDICTION WITH DEEP STATISTICAL LEARNING

O. Semeniv

Space Research Institute NAS Ukraine and SSA Ukraine, Kyiv, Ukraine

oleg.semeniv@gmail.com

In the article the geomagnetic activity (magnetic storms) prediction technique is described. Recommended to use range of informative characteristics and learning technique for model identification. The model is implemented as adaptive geomagnetic storm warning algorithm for 6 hours using spacecraft's data. Effectiveness of this algorithm and high level of regularity and accuracy of the model is shown.

Key words: support vector machine, space weather, deep learning, prediction.

The advancement of modern technology substantially depends on space researches (Daglis, 2005; Cheremnykh et. al., 2008). Space research is directly connected with different types of detectors and technologies, which can be affected by crisis situations caused by solar wind (Daglis, 2005; Cheremnykh et. al., 2008; Semeniv, 2013; 2015). The planning of long-term space missions requires the development of techniques of risk estimation and space environment state prediction, especially an important factor is the space weather (Cheremnykh et. al., 2008; Semeniv, 2013; 2015)). Disturbances in the ionosphere can degrade radio propagation and satellite communications; solar flares can cause positional errors in navigation systems (Daglis, 2005). Magnetic storms can induce currents in long-distance pipelines and cable networks (Daglis, 2005; Cheremnykh et. al., 2008). Energetic particles and solar proton flares can affect spacecraft by causing a radiation and structural damage. Consequently, predictions of geomagnetic storms have a significant bearing upon the operation of a number of services.

The geomagnetic storms are the most complex phenomena in the near-Earth space. They include a large number of physical processes and effect the near-Earth space environment, for example, accelerate charged particles in space, bring electric currents in space to intensification, cause global magnetic disturbances on the Earth surface, etc. The influence of sun on near earth space is usually characterized by geomagnetic indices (*Kp*-index, *Ap*-index, *Dst*-index and other). *Dst*-index is a measure of the strength of a magnetic storm and it reflects the variations in the intensity of the ring current.

The magnetosphere can be considered as a complex input-output system. As was shown in Daglis (2005), Cheremnykh et. al. (2008), Semeniv (2015) *Dst*-index is responded to geomagnetic storms. So, for it prediction is necessary to solve the model identification problem. There are many different models including a neural network, a linear regression model, and others for *Dst*-index prediction. The most accurate and reliable is a nonlinear discrete dynamical model, that describes a relation between spacecraft observation data and ground measurements from magnetic observatories. Such class of models was chosen in this investigation.

Suppose that a change in the space weather can be represented by a complex system, which is under the influence of some random processes (Semeniv, 2015; Parnowski, 2009). Let after system observations can be received data sets with: Dst-index behavior value $y(l)$ and $\mathbf{u}(l)$, $l \in L$, $\mathbf{u}(l)$ — solar wind state parameters vector, L — data set size. Let we denote the time series of *Dst*-index as, $y_l \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} — the set of real numbers, and suppose, that system can be in K states. Each of the state is presented as the set of events which can be described by the observation data and some additional physical parameters. Based on Cheremnykh et al. (2008), Semeniv (2015), Parnowski (2009), the system states will be divided into $k \in 1, K$, $K = 4$, and present them with

$$f_k = \begin{cases} 1, & \text{if } y(l) > -30nT, \\ 2, & \text{if } -50nT < y(l) \leq -30nT, \\ 3, & \text{if } -100nT < y(l) \leq -50nT, \\ 4, & \text{if } y(l) \leq -100nT. \end{cases} \quad (1)$$

Each event f_k from (1) has additional characteristics: $t_k \in T$, T — maximal duration of the event (hours); $\mathbf{q}_k^{l_1} = [y(l_1), l_1]$ and $\mathbf{q}_k^{l_2} = [y(l_2), l_1]$ — start and stop vector-points of the event, where $y(l_1)$ and $y(l_2)$ the *Dst*-index values at l_1 and l_2 time points. The major parameter that denotes the event is the minimal *Dst*-index value $l \in t_k$ at $t_k \in T$.

Let suppose that there is the events prehistory set — the time series of solar wind and *Dst*-index, and let the set will be presented as matrix $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \mathbf{X}$. Obvious, that can be find a function $f^* : \mathbf{X} \rightarrow \Psi$, that can approximately describe data set $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \mathbf{X}$ with $f^* = f(\mathbf{x}_i)$ in context of events characteristic $\Psi = \left\{ \left(f_1^i, \mathbf{d}_1^i \right), \dots, \left(f_k^i, \mathbf{d}_k^i \right) \right\}$. The problem of event prediction based on the prehistory can be determined as the problem of model identification, that make the projection of the input parameters \mathbf{x}_i into the informative characteristics space with hyperplanes that do not overlap in K regions, such method is known as SVM (Chen, Lin & Schölkopf, 2005; Hsu & Lin, 2002; Podgorodetskaya, Prutsko, & Semeniv, 2016). For simplicity will denote $\Psi = \left\{ \left(f_1^i, \mathbf{d}_1^i \right), \dots, \left(f_k^i, \mathbf{d}_k^i \right) \right\}$ as integer row with numbers $1, \dots, 4$.

Let we select data subset and will train the model to predict magnetic storms $z = 1$ and quite state $z = -1$ based on $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$:

$$\mathbf{D} = \left\{ \left(\mathbf{x}_1, z_1 \right), \dots, \left(\mathbf{x}_N, z_N \right) \right\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z \in \{-1, +1\}.$$

Let hyperplane is presented as

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0,$$

where $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ — model parameters vector, $b \in \mathbb{R}^n$ — scalar bound. We consider that the training vectors are separated by a hyperplane with minimal separation error and the hyperplane width is maximal. Let it be some separation error $\varepsilon \geq 0$, then based on Chen et. al. (2005), Hsu and Lin (2002), hyperplane have to meet the constraints

$$z_i [\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b] - \varepsilon \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad z_i [\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b] < 2\varepsilon.$$

The problem can be described as in Podgorodetskaya et al. (2016)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\xi_i - z_i (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) - 1 \right), \\ \xi_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

The (2) is known as the primal form problem of L1-SVM, with the standard hinge loss. Since L1-SVM is not differentiable, a popular variation is known as the L2-SVM which minimizes the squared hinge loss

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\xi_i - z_i (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b)^2 - 1 \right), \quad (3)$$

L2-SVM is differentiable and imposes a bigger loss for points which violate the margin. To predict the class label of a test data

$$\arg \max_{\mathbf{z}} (\mathbf{w}^T \mathbf{x})_{\mathbf{z}},$$

for kernel SVMs, optimization must be performed in the dual (Podgorodetskaya et al., 2016). For kernel K-class problems based on «one-against-one» approach, was

trained $\frac{K(K-1)}{2}$ RBF SVMs models, where the data from the other classes form the negative cases. Denoting the output of the k th SVM as

$$a_k(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{w}^T \mathbf{x}).$$

The predicted class is

$$\arg \max_k a_k(\mathbf{x}).$$

Most deep learning methods for classification using fully connected layers and convolutional layers have used softmax layer objective to learn the lower level parameters (Nagi et al., 2012; Salakhutdinov & Hinton, 2007; Weston, Ratle & Collobert, 2008). Was used L2-SVM's objective to train deep neural nets for classification. Lower layer weights are learned by backpropagating the gradients from the top layer RBF SVM. To do this, we need to differentiate the SVM objective with respect to the activation of the penultimate layer. Let the objective (3) be $\phi(\mathbf{w})$, and the input \mathbf{x} is replaced with the penultimate activation,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{h}_i} = -Cz_i \mathbf{w} \left(\Omega \left\{ 1 > \mathbf{w}^T \mathbf{h}_i z_i \right\} \right),$$

where $\Omega \left\{ 1 > \mathbf{w}^T \mathbf{h}_i z_i \right\}$ is the indicator function. Likewise, for the L2-SVM, we have

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{h}_i} = -2Cz_i \mathbf{w} \left(\max \left(z_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{h}_i + b \right), 0 \right) \right).$$

For numerical modeling was used OMNI2-web data set [Omniweb.gsfc.nasa.gov](https://omniweb.gsfc.nasa.gov). (2018) for period 1991–2009 years. After data preprocessing and event grouping, was selected prehistory time series on the interval 72 hours with the shift before event start point in 6 hours. As very strong and strong geomagnetic storms are not very frequent phenomena comparing with quiet and little turbulence states, to avoid data imbalances was used the synthesizing procedure. The statistical value of area under receiver operating characteristic curve AUC ROC was used as loss function. The result on training gave 94.64% accuracy (true predicted events) of event prediction with 71.95% for very strong and strong storms prediction. On the test data the total accuracy fell down to 82%, but the accuracy of very strong and strong storms prediction rose to 83.26%. Basically, such behavior was expected as during training was used synthesized data for storms. The accuracy can be increase by blending and adding new features as information parameters, but this will cause the performance issues. Also, some benefit can be archived in combination of genetic algorithm and expectation maximization model for data recovery. Such procedure will permit more accurately form the events prehistory and catch minor changes in time series flow.

References

- Chen, P. H., Lin, C. J., & Schölkopf, B. (2005). A tutorial on v-support vector machines. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 21, 111–136.
- Cheremnykh, O., Yatsenko, V., Semeniv, O., & Shatokhina, I. (2008). Nonlinear dynamics and prediction for space weather. *Ukrayins'kij Fyzychnij Zhurnal (Kyiv)*, 53(5), 502–505.
- Daglis, I. A. (Ed.) (2005). *Effects of space weather on technology Infrastructure*. Dordrecht: Springer Science + Business Media, Inc.
- Hsu, C.-W., & Lin, C.-J. (2002). A comparison of methods for multi-class support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(2), 415–425.
- Nagi, J., Di Caro, G. A., Giusti, A., Nagi, F., & Gambardella, L. M. (2012, December). Convolutional neural support vector machines: hybrid visual pattern classifiers for multi-robot systems. In *Machine Learning and Applications (ICMLA), 2012 11th International Conference on* (Vol. 1, pp. 27–32). IEEE.
- Omniweb.gsfc.nasa.gov. (2018). SPDF-OMNIWeb Service. Available at: <https://omniweb.gsfc.nasa.gov/>
- Parnowski, A. (2009). Regression modeling method of space weather prediction. *Astrophys. and Space Sci.*, 323(2), 169–180.
- Podgorodetskaya, L. V., Prutsko, Y. V., & Semeniv, O. V. (2016). Farmland state estimation based on agrophytocenoses classification and remote sensing satellite data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(5), 55–63.

- Salakhutdinov, R., & Hinton, G. (2007). Learning a nonlinear embedding by preserving class neighbourhood structure. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, PMLR*, 2, 412–419.
- Semeniv, O. (2013). Nonlinear models identification for space weather prediction with inductive modelling. In *Proceedings 4th International Conference in Inductive Modelling. ICIM 2013*, Kyiv, September 16–20 (pp. 209–216).
- Semeniv, O. (2015). Combined approach for space weather prediction with a guaranteed method and evolutionary algorithm. *Journal of Physical Studies*, 19(3).
- Sharifi J., Araabi B. N., & Lucas C. (2006). Multi-step prediction of Dst index using singular spectrum analysis and locally linear neurofuzzy modelling. *Earth Planets Space*, 58(3), 331–341.
- Weston, J., Ratle, F., & Collobert, R. (2008). Deep learning via semi-supervised embedding. In *Proceedings of 25th International Conference on Machine Learning*, Helsinki, Finland, July 5–9 (pp. 1168–1175).

ON DISCRETE DISTRIBUTION OF A RANDOM VARIABLE WITH INDEPENDENT SYMBOLS OF W -REPRESENTATION

V. Voloshyna

Drahomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine

victoria.voloshyna@yahoo.com

In this work our main purpose is to investigate the criteria of pure discreteness of the distribution of a random variable with independent symbols of W -representation. More results on this topic may be found in (Torbin & Voloshyna, 2014).

W -representation of a point from I^2 is received using the following algorithm.

1. First, we divide I^2 into r parts (each of them is a closing of an open set in \mathbb{R}^2) which internal parts do not intersect. Lebesgue measure of sets $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}$ equals to q_0, q_1, \dots, q_{r-1} respectively.

2. Each set Δ_i is divided analogically into $\Delta_{i0}, \dots, \Delta_{i[r-1]}$. The proportion of fragments' measures remains invariant. After the second stage process continues and each set $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ is divided using the same rule.

As a result,

$$\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k} \subset \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}$$

and the sequence of $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}$ is heading to a certain point and

$$\bigcap_k \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k}^W =: \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \dots}^W$$

is called a W -representation of a point.

We will consider a random variable η with independent symbols

$$\eta_k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

(with probability $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{[r-1]k}$ respectively):

$$\eta = \Delta_{\eta_1, \dots, \eta_k, \dots}^W \tag{1}$$

as a random variable with independent symbols of W -representation.

Theorem 1. *If*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} > 0,$$

then the distribution of a random variable η (1) is pure discrete.

Remark 1. If the points with a continuum number of representations does not exist in a certain W -expansion, then theorem 1 is a criteria of the discreteness of the distribution of a random variable η .

Theorem 2. *Let x_1, \dots, x_n, \dots be the points of I^2 , such that each of them has the continuum number of W -representations. For a point x_n we define a sequence*

of sets $(A_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$. Each $A_k^{(n)}$ consist of cylinders from W -expansion of rank k , which contain x_n :

$$A_k^{(n)} = \{(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_k^{(n)}) : x_n \in \Delta_{\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_k^{(n)}}^W\}.$$

Let

$$L := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_n \sum_{[(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_k^{(n)}) \in A_k^{(n)}]} \prod_{j=1}^k p_{\alpha_j^{(n)} j} \right).$$

The distribution of η is pure discrete if and only if $L = 1$.

Reference

Torbin, G. M., & Voloshyna, V. O. (2014). About some probabilistic phenomenas of distributions of random vectors with independent symbols of W -representation. *Naukovy chasopys NPU*, 16(1), 258–278.

КАЗКИ СВОЇМИ РУКАМИ: ІНТЕЛЕКТУАЛЬНЕ МИСТЕЦТВО

І. П. Блажієвська, О. М. Моклячук, О. В. Рибак

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

packsenarrion@rambler.ru, omoklyachuk@gmail.com, semperfi@ukr.net

Стаття створена на базі результатів діючого стартапа «Казки своїми руками», захищеного на Sikorsky Challenge-2017. Робота об'єднує науковий та художній види творчості, створюючи сюжетну візуалізацію з використанням спецефектів у режимі реального часу. Автори проекту своїми «казками» ставлять за мету — реалізувати наглядний симбіоз між фундаментальними науками та інноваційними технологіями, зацікавити сучасну молодь до створення індивідуальних проектів на базі прогресивних ідей.

Ключові слова: пісочна анімація, оптичне мистецтво, сумatics, візуалізація звуків, регулярний поділ площини, проективні та мебіусові перетворення, фрактальна геометрія.

Предмет математики настільки серйозний, що корисно не втратити можливість зробити його трохи захоплюючим.

Блез Паскаль

Одна з головних переваг України — це людський потенціал. Щоб його реалізувати, потрібно виховати молоде покоління професіоналів, які є конкурентоспроможними на ринку праці й можуть бути залучені до цікавих, масштабних проектів сучасної цифрової епохи. У класичній вищій школі викладаються фундаментальні науки як інструментарій, часто без прив'язки до задач практики; численні курси носять характер «точкового влучання» — навчання для вирішення проблем конкретного спрямування, а численні ІТ-фабрики орієнтовані на адаптацію знань випускників ВНЗ та цих курсів до роботи з реальними комерційними проектами. Втрачається час та цінність академічної освіти. Наразі, актуальним завданням є розробити спецкурси з розвитку креативності — уміння створювати зв'язки між речами.

Мистецтво мислити оригінально та поєднувати непоєднане не має вікових обмежень та напряму і пов'язане з активною роботою обох півкуль мозку. Нагадаємо, що ліва півкуля відповідає за логічне мислення (аналіз фактів, математика, мова та письмо, логіка), а права — за моторику та творчість (інтуїція, уява, емоції, музика, живопис, танці, скульптура). У звичайної людини обидві півкулі доповнюють одна одну, у «незвичайної» — спостерігається максимальне функціонування однієї / двох півкуль. Таким чином, креативна людина — це всебічно розвинута особистість, у якій ефективно співпрацюють дві півкулі мозку. І ще нагадаємо важливий факт: діяльність лівої / правої частини тіла (рух, моторика) керується різнойменною півкулею. Тобто, виконанням спеціальних

вправ, можна стимулювати ті чи інші функції мозку, орієнтуючись на конкретний результат.

Як метод навчання обираємо казки або ігри, аудиторія — діти та молодь (7—30 років). Мета — «Роби, як ми! Роби краще!» — в ігровому форматі продемонструвати як наявність творчої фантазії та фундаментальних знань народжують несподівані художні мотиви/сюжети, і запропонувати учасникам навчання, об'єднавшись у групи, зробити власні казки.

Завдання авторів проекту «Казки своїми руками» щодо учасників курсу:

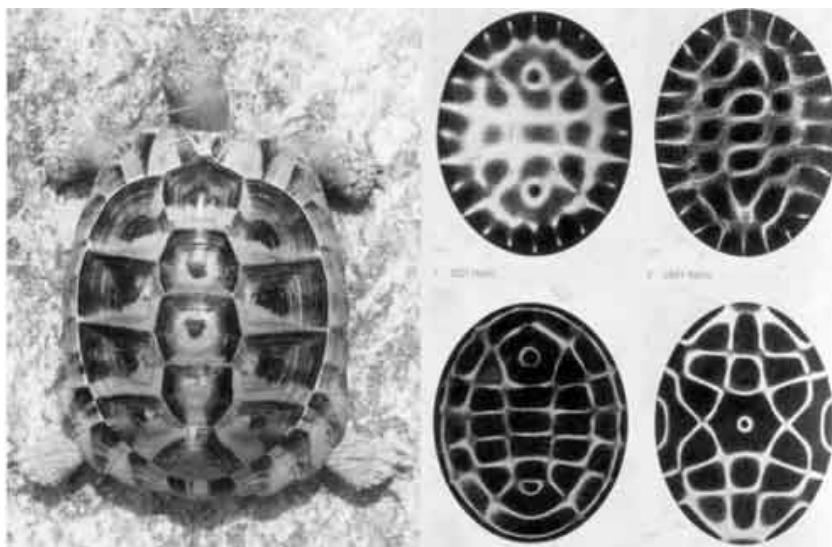
1) активізувати через органи чуттів (зір, слух, рух, дотик) діяльність різних ділянок мозку (робота обох півкуль), підвищити функціональність тіла для максимального сприйняття/передачі інформації;

2) надати базові навички та особисті прийоми з композиції та регулярного поділу площини, стилізації, виражної графіки та оптичних ілюзій, а також ознайомити з технікою малювання піском, долоньками, боді-арту, створення тіньових постановок та театру ляльок;



«Da Vinci's Demons», доповнений шар графіки

3) надати «стартовий пакет» безпечних живих та комп'ютерних спецефектів на базі математичних, програмних та інженерних розробок (алгоритми зі створення зображень шляхом застосування проєктивних і мебіусових перетворень, фрактальних структур, спірографів, осциляторів з візуалізацією хвилеподібних розкладів звуків, абетка зображень з генератора Хладні), зокрема, стандартний набір зі створення фізичних явищ (механічні, світлові, звукові, магнітні, електричні);



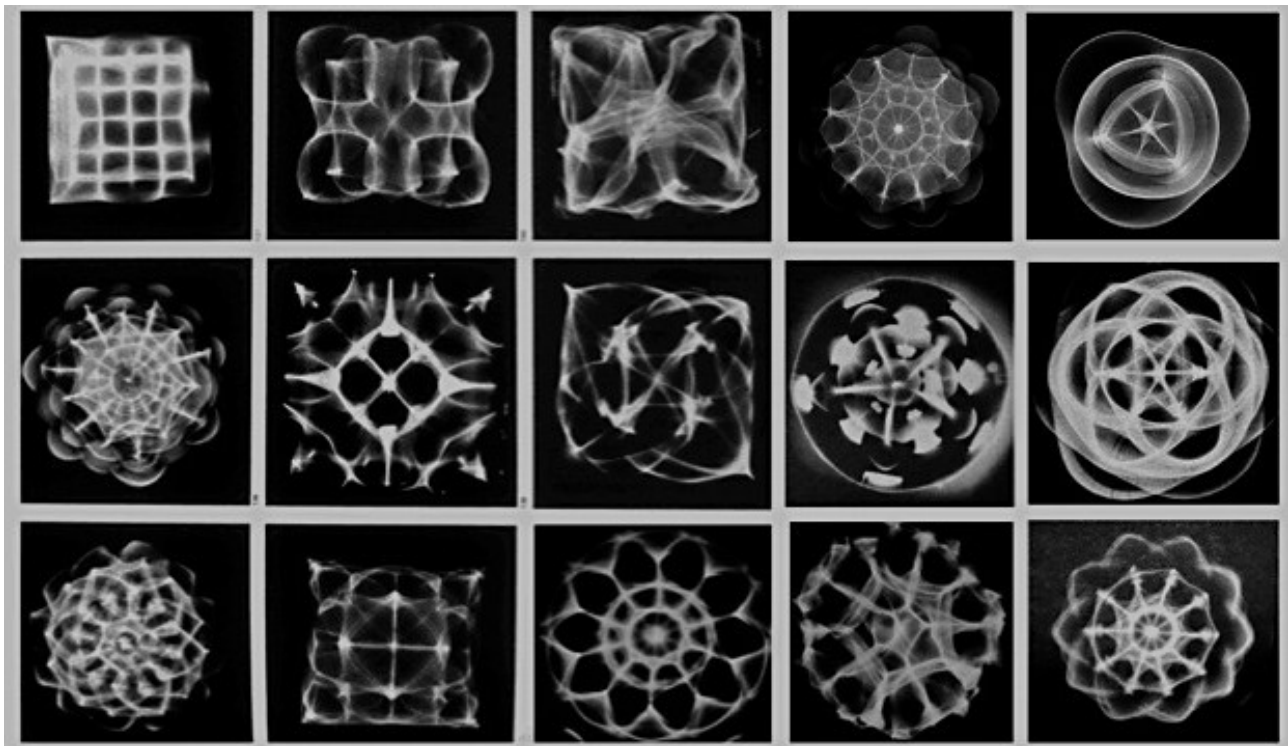
Черепаха: зліва — фото; справа — пісочне зображення на пластині Хладні

4. ознайомити з монтажем / обробкою відео та накладенням музичного супроводу;

5. дати творчу задачу — «створити казку своїми руками» — для колективного розв'язання (поділ на групи).

Варто зазначити, що один з авторів проекту, викладаючи дисципліну «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» у технічному університеті, давав своїм студентам в якості бонусів до стандартного курсу задачі на художнє моделювання елементів навколишнього світу через аналітичне задання кривих/поверхонь, афінні та проєктивні перетворення систем координат. Як показав результат, студентам (16—18 років) таке поєднання формул та творчості стало до вподоби, а викладача надихнуло на створення інтерактивного курсу.

Відокремлені один від одного, фундаментальні науки та класичні види мистецтва, у світі ІТ-технологій програють. Але вигреш можливий при їх гармонійному поєднанні. Причому, дослідники передових університетів та поціновувачі рисунку, музики й науки аналізують геометрію живої природи та алгоритми самоорганізації через проєктивні та мебіусові перетворення (Петухов, 1988), розробляють цікаву візуалізацію хвильового поширення звуку через труби Рубенса (YouTube, 2018a), абетку вібрацій звуків на різних частотах та орнаменти, виконані піском на пластинах Хладні (Chaosophia218.tumblr.com, 2018).



Зображення звукових хвиль (різні частоти) у геометричній формі

Наостанок відмітимо, що творчий стартап «Казки своїми руками» ставить за мету популяризацію фундаментальних наук, переважно серед шкільного та студентського середовища, шляхом демонстрації інтелектуального мистецтва.

Власне, автори-розробники вже успішно зробили арт-перформенси на 20-річчі факультету ФМФ (казка Г.Х. Андерсена «Дикі Лебеді», 2015) (YouTube, 2018б) та Воркшопі пам'яті В. В. Булдігіна (казка-реквієм «Пам'яті Небесної сотні», 2016) (YouTube, 2018в). Наразі триває розробка етно-казок на основі печального колориту творів Г.Х. Андерсена, революційних віршів Л. В. Костенко, В. С. Стуса та Шевченка Т.Г. Переслідується ідея збереження автентичності української культури.

Тенденції часу та запити людей змушують провідних ІТ-розробників здійснювати заходи з популяризації читання, музики, мистецтва, тощо. Наведемо кілька прикладів.

1. 2017 року київська компанія «Live Animations» презентувала книгу Льюїса Керрола «Аліса у країні див», ілюстрації до якої оживають за допомогою смартфона. Живих малюнків у книзі шість — по одному міні-мультфільму до кожного розділу казки. Автори ідеї кажуть: хотіли не просто оживити Алісу, а показати всьому світу феномен сучасного українського мистецтва. Саме тому малюнки до казки виконала відома українська художниця Євгенія Гапчинська. Мета проекту, що розроблявся 9 місяців, — популяризація читання.

2. 2018 року Google оновили додаток Arts & Culture, й тепер користувачі можуть порівнювати селфі з портретами авторства відомих художників та знаходити двійників. За допомогою спеціальної функції, можна наблизитися до твору мистецтва, роздивитися його з усіх боків. Мета проекту, що стартував 2016 року, – це популяризація творів високого мистецтва (понад 70 000 портретів / скульптур з Лувра, галереї Тейт тощо) серед користувачів не залежно від їх геолокації.

Як епілог до статті наведемо мотивуючі слова Д. Пойа: «Найкращий спосіб навчитись чогось — це відкрити самому».

Список літератури

- Chaosophia218.tumblr.com. (2018). Chaosophia218. [online] Retrieved from: <http://chaosophia218.tumblr.com/tagged/cymatics>
- YouTube. (2018a). CYMATICS: Science Vs. Music — Nigel Stanford. [online] Retrieved from: <https://www.youtube.com/watch?v=Q3oItpVa9fs&list=RDQ3oItpVa9fs&t=20>
- YouTube. (2018б). Дикі Лебеді. [online] Retrieved from: <https://www.youtube.com/watch?v=qdVWfR5-SZE&list=LLrs0ydX9nfbis04kVpcF8dw&index=7>.
- YouTube. (2018в). Presentation for IWLTPNTMS workshop. [online] Retrieved from: <https://www.youtube.com/watch?v=ROXIONAjP88>
- Петухов. С. В. (1988). *Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации*. Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика», №6. Москва: Знание.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА (ПОЛИМЕРОВ)

О. В. Бугрим, С. Е. Тимченко, Л. И. Шелест

Национальный горный университет, Украина, Днепр

S.Timchenko@rambler.ru

В статье рассмотрено принципиальное решение задач о ползучести и релаксации стареющего тела. Приведен способ обработки кривой простой ползучести для определения реологических параметров, входящих в его ядро основанный на использовании τ -метода Ланцоша. На примере полимеров показано хорошее соответствие предложенного описания ползучести с результатами эксперимента.

Ключевые слова. Метод Ланцоша, преобразование Лапласа, реологические параметры, наследственно стареющий полимер.

В предположении неизменности коэффициентов Пуассона во времени изучается способ решения задач ползучести наследственно стареющего тела, допускающих псевдоупругую формулировку исходных определяющих уравнений в терминах обобщенных перемещений и деформаций. С целью эффективного решения задач, когда отмеченная формулировка не имеет места, предлагается инвариантное во времени ядро наследственности, которое введением условного времени трансформируется в экспоненту дробного порядка Ю. Н. Работнова. Инвариантность последней в условном времени обеспечивает перестановочность между собой наследственных операторов, что в случае постоянного модуля упругости позволяет получить решение задачи непосредственно из упругого решения с помощью принципа Вольтерра. В качестве иллюстрации рассмотрена задача об изгибе наследственно стареющей пластины на упругом основании. Приведен способ обработки кривой простой ползучести для определения реологических параметров, входящих в ядро. На примере полимеров показано хорошее соответствие предложенного описания ползучести с результатами эксперимента.

Экспериментально установлено, что многие полимеры ведут себя как наследственно упругие тела с изменяющимися во времени механическими свойствами, т.е. стареют. Для изучения процессов ползучести и релаксации учет этого фактора представляется существенным.

Исходную физическую зависимость между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ наследственно стареющего полимера в одномерном случае примем в виде

$$\varepsilon(t) = E_0^{-1}[\zeta(t)\sigma(t) + \int_{t_0}^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-s)\eta(s)\sigma(s)ds]. \quad (1)$$

Здесь $E(t) = E_0\zeta^{-1}(t)$ — зависящий от времени t мгновенный модуль упругости, $\eta(t) = \varkappa(t_0)(1 + \lambda e^{-\gamma t})$ — функция, определяющая старение наследственной реакции материала,

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-s)^{nr+\alpha}}{\Gamma[r(n+1)]}, \quad (r = 1 + \alpha) \quad (2)$$

— экспонента дробного порядка Ю. Н. Работнова (1966), $-1 < \alpha < 0$, $\beta > 0$, $\varkappa(t_0) > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$ — реологические параметры, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, t_0 — момент нагружения.

Соотношение (1) отражает следующие характерные особенности поведения стареющего полимера:

1) наследственная реакция материала в момент приложения нагрузки обладает слабой сингулярностью типа Абеля, с ростом промежутка $t - s$ монотонно стремится к нулю и при достаточно больших s практически зависит только от разности $t - s$, т. е. описывает материал, в котором процесс старения завершился;

2) предельная деформация ползучести, определяемая величиной $\varkappa(t_0)$, зависит от момента нагружения;

3) мгновенная деформация ползучести обнаруживает свойство старения вследствие возрастающего со временем модуля упругости.

Приведем методику определения реологических параметров, входящих в (1).

При $\sigma = \sigma_0 = const$ из уравнения (1) для меры ползучести

$$\chi(\omega) = E_0 \sigma_0^{-1} \varepsilon(\omega + t_0) - \zeta(\omega + t_0) \quad (\omega = t - t_0)$$

имеем

$$\chi(\omega) = \varkappa(t_0) \int_0^{\omega} \left(1 + \lambda e^{-\gamma(t_0+s)}\right) \mathfrak{E}_{\alpha}(-\beta, \omega - s) ds \quad (3)$$

Преобразование Лапласа уравнения (3) по переменной ω приводит к алгебраическому уравнению, которое содержит параметр преобразования p и искомые реологические постоянные

$$\chi^L(p) = \frac{\varkappa(t_0)}{p^r + \beta_0} \left(\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{p + \gamma_0} e^{-\gamma t_0} \right) \quad (4)$$

Лапласову трансформанту $\chi^L(p)$ функции $\chi(\omega)$, определяемой экспериментальным данным для $\varepsilon(t)$ и $E(t)$, можно найти численно для произвольного действительного значения $p > 0$ с помощью квадратурной интерполяционной формулы (Крылов & Шульгина, 1966).

$$p\chi^L(p) = \int_0^{\infty} \chi\left(\frac{s}{p}\right) e^{-s} ds \approx \sum_{k=1}^m A_k \chi\left(\frac{s_k}{p}\right) \quad (5)$$

Узлы интерполяции s_k и коэффициенты A_k приведены в книге Крылов и Шульгина (1966).

Уравнения вида (3), образованные при $p = 1$ и любом другом $p > 0$ для трех кривых ползучести с моментами нагружения t_{0i} ($i = 1, 2, 3$), вместе с предельными соотношениями

$$\chi_i(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\chi_i^L(p) = \frac{\varkappa(t_{0i})}{\beta} \quad (6)$$

Позволяют установить искомые значения реологических параметров. Предполагается, что величины $\chi_i(\infty)$ можно снять с графиков соответствующих зависимостей.

Для определения параметра γ получаем уравнение

$$\Delta g_{12} e^{-\gamma \Delta t_{32}} + \Delta g_{23} e^{-\gamma \Delta t_{12}} = g_{13}$$

Здесь

$$\Delta g_i = \frac{\chi_i^L}{\chi_i(\infty)}, \Delta g_{ik} = g_i - g_k, \Delta t_{ik} = t_{0i} - t_{0k} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Для параметров λ, β, r имеют место формулы

$$\lambda = \frac{(1 + \gamma) \Delta g_{12}}{g_2 e^{-\gamma t_{01}} - g_1 e^{-\gamma t_{02}}}; \beta = \left[1 - g_1^{-1} \left(1 + \frac{\lambda}{1 + \gamma} e^{-\gamma t_{01}} \right) \right]^{-1};$$

$$r = \frac{1}{\ln p} \ln \left[-\beta + \frac{\chi_1(\infty)}{\chi_1^L(p)} \left(\frac{\beta}{p} + \frac{\lambda \beta}{1 + \gamma} e^{-\gamma t_{01}} \right) \right] \quad (0 < p \neq 1) \quad (8)$$

Функция $\zeta(t)$ определяется из испытаний на мгновенную упругую реакцию материала в различном возрасте.

Для изучения процесса релаксации уравнения (1) нужно решить относительно напряжения $\sigma(t)$. Рассмотрим приближенный способ решения, основанный на использовании τ -метода Ланцоша (1961). В обозначениях

$$H^* f(t) \equiv \int_{t_0}^t H(t-s) f(s) ds$$

с учетом выражения $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)$ через оператор Абеля \mathcal{I}_α^* (Работнов, 1966)

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) = \frac{\mathcal{I}_\alpha^*}{1 + \beta \mathcal{I}_\alpha^*}; \mathcal{I}_\alpha^* f(t) \equiv \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f(s) ds \quad (9)$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$(1 + \beta \mathcal{I}_\alpha^*) E_0 \varepsilon(t) = (1 + \beta \mathcal{I}_\alpha^*) \zeta(t) \sigma(t) + \mathcal{I}_\alpha^* \eta(t) \sigma(t) \quad (10)$$

Пусть $[t_0, t_1]$ — интервал, на котором практически завершается процесс старения материала. Определяемые из эксперимента функции старения $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ на этом интервале с достаточной точностью можно аппроксимировать полиномами невысокой степени

$$\zeta(t) = \sum_{m=0}^l \zeta_m \theta^{rm}; \quad \eta(t) = \sum_{m=0}^l \eta_m \theta^{rm}; \quad (11)$$

где

$$\theta = \frac{(t - t_0)}{(t_1 - t_0)} \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Для известной функции $E_0\varepsilon(t)$ и искомой $\sigma(t)$ предполагаем справедливыми аппроксимации вида

$$E_0\varepsilon(t) = E_0 \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \theta^{rm}; \quad \sigma(t) = \sum_{m=0}^n \sigma_m \theta^{rm} \quad (12)$$

Если в правую часть уравнения (10) ввести невязку в форме

$$T_{n+1}^*(\theta^r) (\tau_0 + \tau_1 \theta^r + \dots + \tau_l \theta^{rl}) \quad (13)$$

где $T_{n+1}^*(\theta^r)$ — смещенный полином Чебышева (Ланцош, 1961), τ_k — неизвестные пока параметры, то после подстановки выражений (11) и (12) методом неопределенных коэффициентов определяются все неизвестные σ_m ($m = 0, 1, \dots, n$) и τ_k ($k = 0, 1, \dots, l$). Ввиду свойств полиномов Чебышева величина невязки, характеризующая погрешность решения не превосходит суммы

$\sum_{k=0}^l |\tau_k|$ и соответствующим набором n может быть сделана весьма малой. Метод Ланцоша позволяет получить функцию $\sigma(t)$ из уравнения (1) в форме степенного разложения (12), ускоренно сходящегося к искомому решению (3).

К уравнению вида (1) приводит учет различных факторов, влияющих на механические свойства полимеров. В частности, таким фактором является температура. Эффект температуры и старение при упруго-наследственном поведении материала математически описываются сходным образом.

Пусть одноосное деформирование упруго-наследственного тела при постоянной температуре определяется уравнением (1)

$$\varepsilon(t) = E^{-1} \left[\sigma(t) + \varkappa \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-s) \sigma(s) ds \right] \quad (14)$$

Будем предполагать, что с температурой T изменяются только параметры E, β, \varkappa , тогда как $\alpha = \text{inv}(T)$. С учетом выражения (2) уравнение (14) можно преобразовать так

$$\varepsilon_1(t) = E^{-1}(T) \left[\sigma_1(\psi) + \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-1, \psi - \xi) \eta(T) \sigma_1(\xi) d\xi \right], \quad (15)$$

где введено условное время $\psi(t) = \beta^{\frac{1}{r}}(T)t$, $\xi = \psi(s)$ и обозначено

$$\varepsilon_1(\psi) = \varepsilon[t(\psi)], \quad \sigma_1(\psi) = \sigma[t(\psi)], \quad \eta(T) = \varkappa(T) / \beta(T).$$

Обобщение уравнения (15) на случай переменной температуры $T = T(t)$ достигается представлением условного времени в форме Бугаков (1973).

$$\psi(t) = \int_0^t \beta^{1/r}[T(\rho)] d\rho; \quad \xi = \psi(s) \quad (16)$$

При $\eta(T) = inv(T)$ материал удовлетворяет принципу температурно-временной аналогии (Бугаков, 1973), и решением уравнения (15) будет (Работнов, 1966)

$$\sigma_1(\psi) = \varepsilon_1(\psi)E(T) - \eta \int_0^\psi \mathcal{E}_\alpha(-1 - \eta, \psi - \xi) \varepsilon_1(\xi) E(T) d\xi.$$

Если

$$\eta[T(s)] = \eta_1(\xi) \neq const,$$

т. е. материал не является терморологически простым, то решение уравнения (15) может быть найдено с помощью численной процедуры, рассмотренной выше. Для ее реализации удобно использовать следующий графо-аналитический способ Бугрим, Тимченко и Карманова (2016). По установленной экспериментально зависимости $\beta(T)$ с учетом заданной истории изменения температуры $T(t)$ строится график соответствия условного и истинного времени $\psi = \psi(t)$ согласно соотношению (16). Применительно к какой-либо интерполяционной формуле отбираются узлы интерполяции $\psi_k = \psi(t_k)$, в которых вычисляются значения известных функций $E\varepsilon$ и η . Представляя затем эти функции интерполяционными полиномами вида (11), где $\theta = \psi / \psi_0$, и используя приведенную методику, получим искомое напряжения $\sigma(t) = \sigma_1(\psi)$ $[0; \psi_0]$ в форме разложения (12).

Список литературы

- Бугаков, И. И. (1973). *Ползучесть полимерных материалов*. Москва: Наука.
- Бугрим, О. В., Тимченко, С. Е., & Карманова, Л. В. (2016). Канонические полиномы в задаче об изгибе круглой пластины переменной толщины. В *Материалах XII Международной конференции «Стратегия качества в промышленности и образовании»*, Варна, (с. 57—61). Варна: Технический университет.
- Крылов, В. И., & Шульгина, Л. Т. (1966). *Справочная книга по численному интегрированию*. Москва: Наука.
- Ланцош, К. (1961). *Практические методы прикладного анализа*. Москва: Физматгиз.
- Работнов, Ю. Н. (1966). *Ползучесть элементов конструкций*. Москва: Наука.

МОНІТОРИНГ СТАНУ ОБ'ЄКТІВ КРИТИЧНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net, sergeant@aprodos.kpi.ua

Подано визначення терміна «об'єкти критичної інфраструктури». Обґрунтована доцільність застосування нейронних мереж для моніторингу стану таких об'єктів. Описані етапи побудови та навчання мережі.

Ключові слова: нейронні мережі, моніторинг стану, об'єкти критичної інфраструктури, класифікація надзвичайних ситуацій.

Об'єкти критичної інфраструктури — це системи та ресурси, фізичні чи віртуальні, що забезпечують функції та послуги, порушення яких призведе до найсерйозніших негативних наслідків для життєдіяльності суспільства, соціально-економічного розвитку країни та забезпечення національної безпеки (Бірюков, Кондратов, Насвіт & Суходоля, 2015). Зважаючи на складність таких систем, тепер моніторинг їхнього стану повинен здійснюватися виключно з використанням технологій штучного інтелекту, зокрема, на базі нейронних мереж. Під час створення таких мереж мають максимально використовуватись наявні системи моніторингу вищезгаданих об'єктів. Відповідно, для навчання мереж повинні використовуватися діючі алгоритми та нормативи контролю.

Якщо вважати існуючу сукупність датчиків, що вимірюють параметри об'єкта, входним шаром нейронної мережі, що будується, то першочерговим завданням є встановлення неявно діючої активаційної функції та її оптимізація відповідно до потреб об'єкта. Наступним завданням є перевірка повноти інформації, що надається сукупністю датчиків, та з'ясування доцільності її реконфігурації, виходячи з необхідності створення повноцінного входного шару мережі.

Ураховуючи апріорну неможливість визначення складності задачі класифікації станів об'єкта в більшості випадків, видається доцільним почати з найпростішої мережі й у процесі навчання визначити оптимальну кількість шарів та налаштувати міжнейронні зв'язки, базуючись на критерії допустимого середньоквадратичного відхилення між вихідними даними мережі та наперед підготовленими тестовими даними. Результати процесу навчання використовуються, починаючи з етапу вивчення можливостей модифікації входного шару мережі, шляхом запровадження віртуальних додаткових датчиків та вивчення їх впливу на кінцевий результат. На кожній ітерації алгоритм зворотного поширення похибки розраховується для всього навчального набору даних, щоб обчислити середній або істинний градієнт (Хайкин, 2006). Слід також ураховувати обмеження швидкодії та вартість створення й функціонування мережі.

Як активаційну функцію в багатьох випадках вибирають гіперболічний тангенс:

$$f(x) = \text{th}(x).$$

Ця функція має ряд переваг для розв'язку задачі:

- симетричні активаційні функції, типу гіперболічного тангенса, забезпечують швидшу збіжність, ніж стандартна логістична функція;
- функція має неперервну першу похідну;
- похідна цієї функції може бути обчислена через її ж значення, що пришвидшує обчислення (Друки, 2011).

На першому етапі навчання мережі її навчають правильно розпізнавати та класифікувати стандартні надзвичайні ситуації (ДК 019:2010, 2010). При цьому можуть бути використані навчальні приклади курсів підготовки співробітників ДСНС. На наступному етапі навчання можуть використовуватися матеріали реальних надзвичайних ситуацій, як з вітчизняної, так і зі світової практики. При цьому в результаті порівняння рішень, які реально приймалися в конкретних надзвичайних ситуаціях, з рішеннями, продукованими мережею, роблять висновки про відповідність мережі поставленим завданням. Найскладнішим для оцінювання ефективності мережі є третій етап, у якому використовуються ситуації, отримані за допомогою відповідних комп'ютерних моделей з використанням імітаційного моделювання. Особливу увагу слід приділити неоднозначним (невизначеним) ситуаціям, у яких мережа не може автоматично класифікувати надзвичайну ситуацію. У цьому випадку мережа повинна видати список ситуацій, найближчих до поточної, та запропонувати оператору здійснити класифікацію надзвичайної ситуації вручну. Критерії близькості ситуацій мають бути задані явно на основі показників, з перспективою самостійної їх генерації мережею на основі образів ситуацій. Одним із завдань мережі є реконструкція сукупності традиційних показників за отриманим у той чи інший спосіб образом ситуації.

Список літератури

- Бірюков, Д. С., Кондратов, С. І., Насвіт, О. І., & Суходоля, О. М. (2015). *Зелена книга з питань захисту критичної інфраструктури в Україні*. Київ: НІСД. Узято з: http://www.niss.gov.ua/public/File/2015_table/Green%20Paper%20on%20CIP_ua.pdf.
- ДК 019:2010. (2010). *Класифікатор надзвичайних ситуацій*. (Національний класифікатор України). Київ: Держспоживстандарт України.
- Друки, А. А. (2011). Система поиска, выделения и распознавания лиц на изображениях. *Известия Томского политехнического университета*, 318(5), 64—70.
- Хайкин, С. (2006). *Нейронные сети: полный курс* (2-е изд.). Москва: Издательский дом «Вильямс».

ВПЛИВ ІМПУЛЬСНИХ ЗАВАД НА РЕАЛЬНУ НАДІЙНІСТЬ ЕЛЕКТРОННОЇ АПАРАТУРИ

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net, ssaavvaa@ukr.net

Розглядається задача урахування наявності імпульсних завад на реальну надійність електронної апаратури.

Ключові слова: надійність, функція розподілу імовірності часу безвідмовної роботи, завади в електричних колах.

Традиційно надійність електронної апаратури описують експоненціальною функцією розподілу часу безвідмовної роботи, що може бути обґрунтовано відсутністю помітних деградаційних процесів (наприклад, старіння) в електронних компонентах протягом реальних за тривалістю періодів експлуатації апаратури. Тобто інтенсивність відмов електронних компонентів (інтегральних схем, резисторів, конденсаторів тощо) не змінюється з часом, а залишається сталою

$$\lambda(t) = \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = \text{const}, \text{ якщо } P(t) = e^{-\lambda t}.$$

На змістовному рівні можна вважати, що електронні компоненти з часом не старіють, а залишаються завжди наче б то новими. Як показує практичний досвід, таке припущення значною мірою відповідає дійсності та може вважатися справедливим. Але, у той же час реальні показники надійності, зокрема, частота та інтенсивність відмов електронної апаратури, суттєво відрізняються від оцінок, отриманих з використанням експоненціального розподілу. Особливо це стосується радіотехнічної апаратури, яка призначена для прийому та оброблення ефірних сигналів, що можна пояснити впливом різного роду завад. Насправді, окрім ефірних завад до порушень працездатності призводять внутрішні завади, які виникають при перемиканнях (включеннях або виключеннях) окремих складових (блоків, модулів) системи та інших перехідних процесах під час функціонування апаратури. У більшості випадків зовнішні та внутрішні завади мають характер сторонніх імпульсів, що можуть привести до тимчасової втрати працездатності (так звані збої) або утворення хибних сигналів на виходах апаратури.

Незалежно від джерела виникнення, внутрішні та зовнішні завади можна представити як короткі імпульси довільної форми, що виникають у випадкові моменти часу, а в деяких випадках (наприклад, атмосферні завади під час грози) ці моменти зосереджені на деяких проміжках часу (рис. 1). На рисунку такі імпульси показані умовно у вигляді трикутників, які зосереджені на певних, але випадкових інтервалах часу, тривалість їх і амплітуда теж випадкові. Унаслідок під час оброблення або передавання цифрових сигналів виникають так звані «пачки» або пакетні помилки (*burst error*), які в більшості випадків призводять до втрати працездатності.

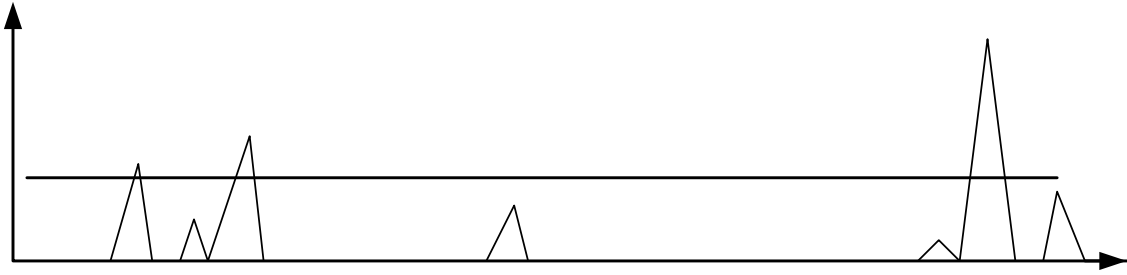


Рис. 1

Зрозуміло, що рівень впливу завад на надійність (працездатність) апаратури залежить від амплітуди імпульсних завад і тривалості імпульсів — короткі імпульси невеликої амплітуди можуть не порушувати працездатності. Тому для коректної оцінки впливу завад на надійність необхідно розглянути деякі порогові обмеження мінімальної амплітуди та тривалості імпульсів, які визначаються конкретним призначенням апаратури, типом сигналів, що обробляються, екрануванням тощо.

На рисунку зображений більш-менш типовий умовний перебіг появи імпульсних завад в електричних колах. Очевидно, задача, яку необхідно розв'язати для оцінки впливу таких завад на надійність пристрою або системи полягає в отриманні функції розподілу ймовірності появи завад, які потенційно можуть порушити працездатність апаратури. Для цього потрібно, насамперед, перейти від залежності, представленій на рисунку, саме до функції розподілу ймовірності появи технічних станів $Q(t)$, що призводять до втрати працездатності.

Виходячи із причин та характеру виникнення таких станів, пропонується скористатися одним із стандартних розподілів часу перебування випадкового процесу $\zeta(t)$, що описує зміни амплітуди завади. У багатьох важливих випадках моменти потраплянь значень такого процесу в область, що є потенційно небезпечною з точки зору втрати працездатності апаратури, являють собою пуасонівський потік подій з інтенсивністю μ . Уважатимемо, що середнє значення часу, яке пробігає між послідовними попаданнями до вказаної критичної області

$$\frac{1}{\mu} \gg M,$$

де M — середній час перебування значень завади в цій області. У найпростішому випадку такий час теж має експоненціальний розподіл з параметром τ . Після визначення критичного часу T перебування значення завади у критичній області (мінімально необхідного проміжку часу для створення завадою умов порушення працездатності системи) маємо можливість задати в загальному випадку величину $\tilde{\zeta}$, що є моментом першого досягнення наступною стохастичною рівністю

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_n \chi_n,$$

де

$$\tilde{\zeta}_h = \sum_{k=1}^h (\eta_k + \zeta_k), \eta_k (1 \leq k \leq n-1)$$

— випадковий проміжок часу між $(k-1)$ перебуванням завади тривалістю, меншої критичної, до потрапляння її в k -й раз до критичної області із часом перебування там знову ж таки меншим за критичний η_h -проміжок часу між $(n-1)$ -м виходом значення завади із критичної області (із тривалістю перебування в ній меншим T) та n -м потраплянням до неї, яке матиме тривалість більшу за T .

Величина η_n є індикатором того, що

$$\zeta_1 < T, \zeta_2 < T, \dots, \zeta_{n-1} < T, \zeta_n \geq T.$$

Вказана структура величини ζ дозволяє знаходити її розподіл у випадку нескладної структури еволюції стохастичної завади.

Можливість імітаційного моделювання цієї величини в разі наявності відповідної моделі завади, зокрема з наступною побудовою її вибіркового розподілу.

Отже, тривалість безвідмовної роботи досліджуваної системи є випадкова величина

$$\zeta = \min(\bar{\zeta}, \tilde{\zeta}),$$

де $\bar{\zeta}$ — тривалість її роботи до того, як станеться «власна» (спричинена внутрішніми деградаційними процесами) відмова, $\tilde{\zeta}$ — тривалість часу до відмови, спричиненої впливом завади.

Природне припущення про незалежність цих величин дозволяє розглядати, наприклад, величину $\bar{\zeta} - \tilde{\zeta}$, розподіл якої є результат згортки відповідних розподілів, причому

$$P\{\bar{\zeta} - \tilde{\zeta} > 0\} = \{\tilde{\zeta} < \bar{\zeta}\},$$

тобто знаходити імовірність того, що відмова системи станеться в результаті дії завади.

Список літератури

Зайцев, А. Н., Рубцов, В. Д., & Троицкий, В. И. (2012). Определение вероятностных характеристик помехи и ее смеси с сигналом по экспериментальным данным. *Научный вестник МГТУ ГА*, (180), 138—147.

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ МІКРОКЛІМАТУ ДЛЯ ПРОМИСЛОВОГО ПРИМІЩЕННЯ, ЩО КОНДИЦІОНУЮТЬСЯ

І. М. Голінко, І. Є. Галицька

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
gal@pti.kpi.ua

Важливим динамічним елементом у системі автоматичного керування штучним мікрокліматом є приміщення. Отримана динамічна модель мікроклімату промислового приміщення, яка представлена еквівалентними залежностями: системою диференційних рівнянь; у просторі стану; матричною передатною функцією. Суттєвою перевагою моделі у просторі станів є можливість використання векторно-матричного математичного апарату для синтезу, дослідження та оптимізації багатовимірних систем у рамках єдиного комп'ютерно-інтегрованого комплексу з технологічними взаємозв'язками між обладнанням кондиціонера.

Ключові слова: промисловий кондиціонер; система керування; математична модель; простір станів, приміщення.

Важливим динамічним елементом у системі керування штучним мікрокліматом є приміщення. Коректно запроектована система повітрообміну промислового приміщення (із врахуванням теплових збурень обладнання) дозволяє суттєво зменшити просторове розподілення температури повітря у приміщенні, а саме приміщення розглядається як динамічний елемент системи керування із зосередженими параметрами (Бондарь, Гордиенко, Михайлов & Нимич, 2005). За основу динамічної моделі промислового приміщення взято проточну ємність (Жученко, Кубрак & Голінко, 2006). При моделюванні прийнято наступні спрощення: у приміщенні відсутні джерела вологовиділення; приведена теплова потужність технологічного та теплотехнічного обладнання $N_E(t)$ враховує тепловиділення обслуговуючого персоналу; модель містить два динамічні елементи із зосередженими параметрами (повітряний простір та стіни приміщення); фізичні властивості матеріальних потоків та поверхні теплообміну приведені до усереднених значень робочого діапазону. Розрахункова схема приміщення зображена на рис. 1.

Моделювання збурення вологості у приміщенні пропонується проводити змінною вологовмісту d_{A0} . У повітряний простір приміщення об'ємом $V_A = H \times L \times C$ із ПСЦК надходить підготовлене повітря з температурою $\theta_{A0}(t)$, вологовміст $d_{A0}(t)$, витрата $G_A(t)$. У процесі теплообміну між технологічним обладнанням (потужність обладнання N_E) та стінами (температура стіни θ_s) у приміщенні встановлюється температура повітря $\theta_A(t)$ із вологовмістом $d_A(t)$. Витяжна система кондиціонера забезпечує відвід повітря. Температура навколишнього повітря — $\theta_N(t)$.

Теплові та матеріальний баланси для динамічних елементів динамічної моделі приміщення представлено системою диференційних рівнянь (1)—(3):

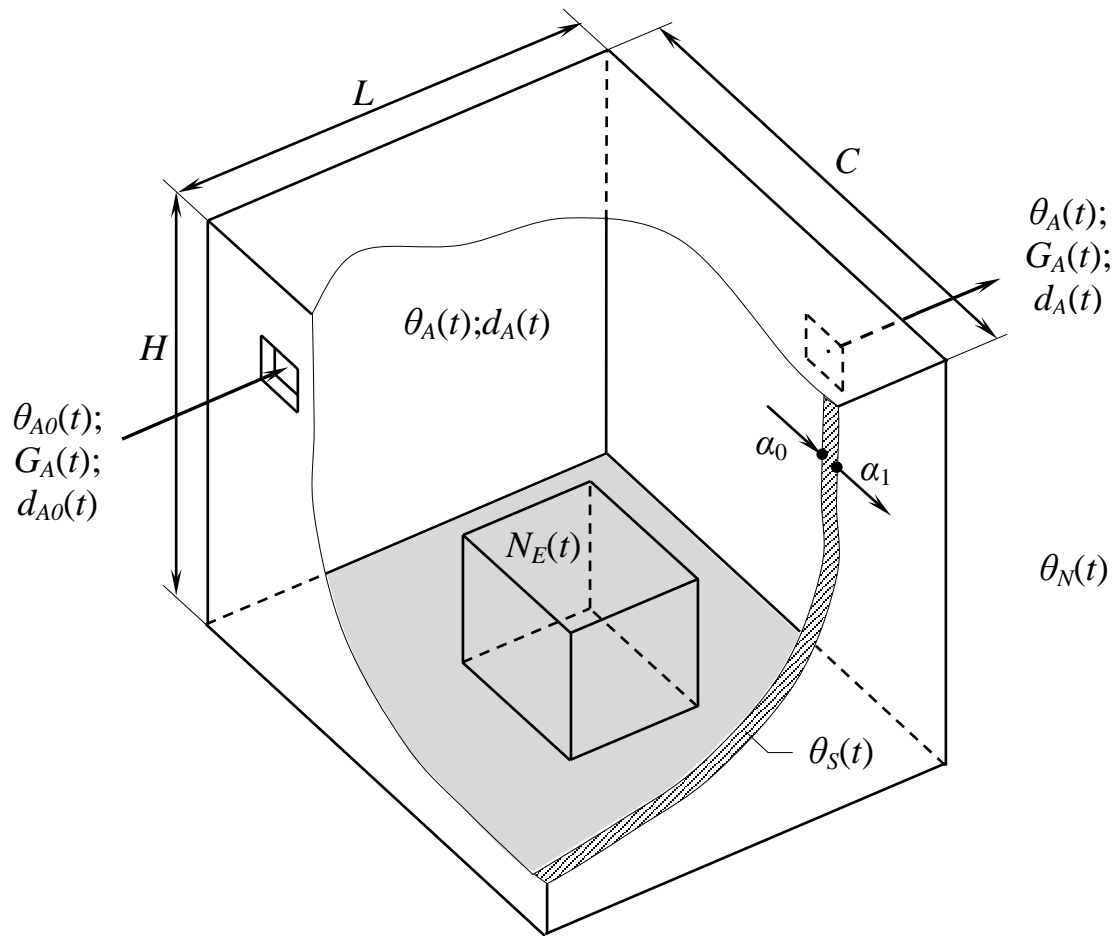


Рис. 1. Розрахункова схема приміщення

$$\begin{cases} G_A c_A (\theta_{A0} - \theta_A) - \alpha_0 F_0 (\theta_A - \theta_S) + N_E = c_A M_A \frac{d\theta_A}{dt}; & (1) \\ \alpha_0 F_0 (\theta_A - \theta_S) - \alpha_1 F_1 (\theta_S - \theta_N) = c_S M_S \frac{d\theta_S}{dt}; & (2) \\ \frac{G_A}{1000} (d_{A0} - d_A) = V_A \frac{d\rho_A}{dt}; & (3) \end{cases}$$

тут c_A, c_S — відповідно теплоємність повітря та матеріалу стіни; α_0, α_1 — відповідно коефіцієнт тепловіддачі всередині приміщення (між повітрям та внутрішньою поверхнею стіни F_0) та ззовні (між зовнішньою поверхнею стіни F_1 та навколишнім повітрям з температурою θ_S); M_A — маса повітря в об'ємі V_A ; M_S — загальна маса матеріалу стін; ρ_A — густина повітря. Рівняння (1) та (2) описують теплові баланси для повітряного простору та теплоізолюючої стіни приміщення, рівняння (3) представляє матеріальний баланс для повітряної суміші.

Після групування подібних та лінеаризації (1)—(3) маємо:

$$\begin{cases} T_A \frac{d\Delta\theta_A}{dt} + \Delta\theta_A = k_0\Delta\theta_{A0} + k_1\Delta G_A + k_2\Delta\theta_S + k_3\Delta N_E; \\ T_S \frac{d\Delta\theta_S}{dt} + \Delta\theta_S = k_4\Delta\theta_A + k_5\Delta\theta_N; \\ T_d \frac{d\Delta d_A}{dt} + \Delta d_A = k_6\Delta d_{A0} + k_7\Delta G_A, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } K_A = c_A G_A + \alpha_0 F_0; K_S = \alpha_0 F_0 + \alpha_1 F_1; T_A = \frac{c_A M_A}{K_A}; T_S = \frac{c_S M_S}{K_S};$$

$$T_d = \frac{\omega V_A}{G_A}; k_0 = \frac{c_A G_A}{K_A}; k_1 = \frac{\theta_{A0} - \theta_A}{K_A}; k_2 = \frac{\alpha_0 F_0}{K_A}; k_3 = \frac{1}{K_A}; k_4 = \frac{\alpha_0 F_0}{K_S};$$

$$k_5 = 1 - k_4; k_6 = 1; k_7 = \frac{d_{A0} - d_A}{G_A}.$$

Систему диференційних рівнянь (4) представимо у просторі станів:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}; \quad (5)$$

$$\text{де } \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \Delta\theta'_A \\ \Delta d'_A \\ \Delta\theta'_S \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/T_A & 0 & k_2/T_A \\ 0 & -1/T_d & 0 \\ k_4/T_S & 0 & -1/T_S \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta d_A \\ \Delta\theta_S \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_0/T_A & 0 & k_1/T_A & k_3/T_A & 0 \\ 0 & k_6/T_d & k_7/T_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5/T_S \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{A0} \\ \Delta d_{A0} \\ \Delta G_A \\ \Delta N_E \\ \Delta\theta_N \end{bmatrix}.$$

Розглянемо систему (4) в області Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta\theta_A (T_A p + 1) = k_0\Delta\theta_{A0} + k_1\Delta G_A + k_2\Delta\theta_S + k_3\Delta N_E; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta\theta_S (T_S p + 1) = k_4\Delta\theta_A + k_5\Delta\theta_N; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta d_A (T_d p + 1) = k_6\Delta d_{A0} + k_7\Delta G_A. \end{cases} \quad (8)$$

Із (8) отримаємо розв'язок відносно змінної Δd_A .

$$\Delta d_A = \frac{1}{T_d p + 1} [k_6 \Delta d_{A0} + k_7 \Delta G_A]. \quad (9)$$

Із (6) знаходимо $\Delta\theta_A$, урахувавши (7). Після групування подібних отримаємо:

$$\Delta\theta_A = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} [(b_1 p + b_0) \Delta\theta_{A0} + (b_3 p + b_2) \Delta G_A + (b_5 p + b_4) \Delta N_E + b_6 \Delta\theta_N], \quad (10)$$

$$\text{тут } a_1 = \frac{T_A + T_S}{1 - k_2 k_4}; a_2 = \frac{T_A T_S}{1 - k_2 k_4}; b_0 = \frac{k_0}{1 - k_2 k_4}; b_1 = \frac{k_0 T_S}{1 - k_2 k_4}; b_2 = \frac{k_1}{1 - k_2 k_4};$$

$$b_3 = \frac{k_1 T_S}{1 - k_2 k_4}; b_4 = \frac{k_3}{1 - k_2 k_4}; b_5 = \frac{k_3 T_S}{1 - k_2 k_4}; b_6 = \frac{k_2 k_5}{1 - k_2 k_4}.$$

Застосовуючи зворотне перетворення Лапласа, можна знайти аналітичний розв'язок (9) та (10) за каналами впливу.

Представимо (9) та (10) багатовимірною моделлю у області Лапласа:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{WZ}; \quad (11)$$

де

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta d_A \end{bmatrix}; \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & W_{14} & W_{15} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{V}^T = [\Delta\theta_{A0} \quad \Delta d_{A0} \quad \Delta G_A \quad \Delta N_E \quad \Delta\theta_N];$$

$$W_{11} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; W_{14} = \frac{b_5 p + b_4}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; W_{15} = \frac{b_6}{a_2 p^2 + a_1 p + 1};$$

$$W_{22} = \frac{k_6}{T_d p + 1}; W_{23} = \frac{k_7}{T_d p + 1}.$$

Висновки

Динамічна модель промислового приміщення представлена еквівалентними залежностями: системою диференційних рівнянь (4); у просторі стану (5); матричною передатною функцією (11). Отримана модель може бути основою для синтезу автоматичної системи керування промислового комплексу штучного мікроклімату та моделювання перехідних процесів мікроклімату у промисловому приміщенні із застосуванням програмного пакету Matlab. Суттєвою перевагою моделі у просторі станів (5) є можливість використання векторно-матричного математичного апарату для синтезу, дослідження та оптимізації багатовимірних систем (Голінко, 2016).

Список літератури

- Бондарь, Е. С., Гордиенко, А. С., Михайлов, В. А., & Нимич, Г. В. (2005). *Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха*. Киев: ООО «Издательский дом „Аванпост-Прим“».
- Голінко, І. М. (2016). Принципи синтезу автоматичних систем керування промисловими кондиціонерами. *Автоматизація технологічних і бізнес-процесів*, (8), 33—42.
- Жученко, А. И., Кубрак, Н. А., & Голинко, И. М. (2006). *Динамика объектов с сосредоточенными параметрами*. Киев: КПИ.

ПРО РУХ СТРИЖНЯ ПІД ДІЄЮ ПОПЕРЕЧНОЇ СИЛИ, ПРИКЛАДЕНОЇ ДО ЙОГО КІНЦЯ

Є. Т. Горалік, Т. О. Лупіна

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна

lypina@i.ua

Розглядається задача про плоскопаралельний рух прямого стрижня під дією сталої за величиною сили, прикладеної до його кінця перпендикулярно до осі, на основі розв'язку диференціальних рівнянь обертального руху відносно центру мас та поступального руху центру мас в проєкціях на осі декартової системи координат.

Ключові слова: плоскопаралельний рух, обертальний рух, поступальний рух, диференціальне рівняння, степеневі ряди, траєкторія.

У студентів спеціальності «Річковий та морський транспорт» при вивченні курсу теоретичної механіки велику цікавість викликають різноманітні задачі зі статички та динаміки плаваючих тіл, у тому числі задачі, пов'язані з рухом та маневруванням суден, які демонструють можливості застосування диференціальних рівнянь для отримання важливих практичних результатів.

У даній задачі моделюється рух судна або іншого плавального засобу при його повороті під дією сталої за величиною сили, прикладеної до корми перпендикулярно до поздовжньої осі без врахування сил опору води.

Рух стрижня масою m і довжиною L розглядатимемо у прямокутній системі координат xOy з центром, що збігається із центром мас стрижня в його початковому положенні (рис. 1).

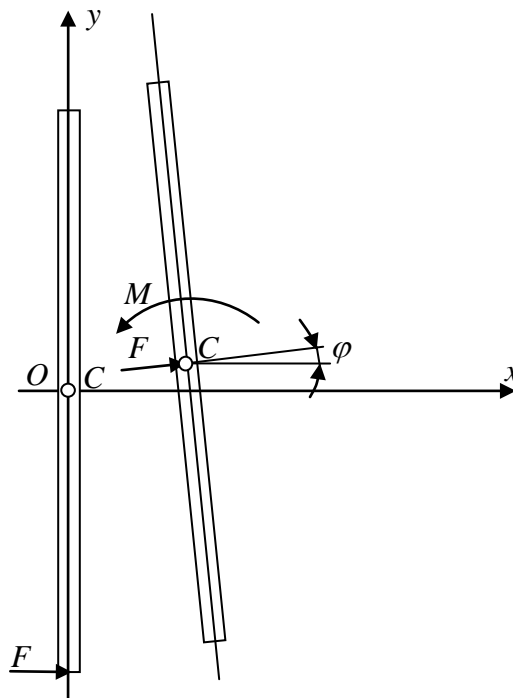


Рис. 1. Початкове і кінцеве положення стрижня

Перенісши прикладену до кінця стрижня силу \vec{F} паралельно самій собі в центр мас стрижня — точку C , розташовану посередині його довжини L , та

приклавши обертальний момент $M = F \frac{L}{2}$, отримаємо еквівалентну систему сил (Павловський, 2002).

Стрижень масою m здійснюватиме плоскопаралельний рух, який можна представити як суму поступального руху центру мас C під дією сили F та обертального руху навколо центру C під дією обертального моменту

$$M = F \frac{L}{2}.$$

Обертальний рух стрижня описується наступним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{\phi} = \frac{M}{I_z}, \quad (1)$$

де $\ddot{\phi}$ — кутове прискорення повороту стрижня, t — час руху, M — обертальний момент, $I_z = \frac{mL^2}{12}$ — момент інерції стрижня відносно осі z .

Після підставлення (1) виразів для M та I_z отримаємо:

$$\ddot{\phi} = \frac{6F}{ml}, \quad (2)$$

Замінивши в рівнянні (2) $\ddot{\phi}$ на $\frac{d\dot{\phi}}{dt}$ і відокремивши змінні, одержуємо:

$$d\dot{\phi} = \frac{6F}{ml} dt$$

Звідси після інтегрування знаходимо:

$$\dot{\phi} = \frac{6F}{ml} t + C_1.$$

З урахуванням початкових умов (при $t = 0$, $\dot{\phi} = 0$) $C_1 = 0$. Остаточню, кутова швидкість повороту стрижня:

$$\dot{\phi} = \frac{6F}{ml} t. \quad (3)$$

Замінивши в рівнянні (3) $\dot{\phi}$ на $\frac{d\phi}{dt}$ і відокремивши змінні, отримаємо:

$$d\phi = \frac{6Ft}{ml} dt.$$

Після інтегрування знаходимо:

$$\phi = \frac{3Ft^2}{ml} + C_2$$

З урахуванням початкових умов (при $t = 0$, $\phi = 0$) $C_2 = 0$. Отже, кут повороту стрижня визначається з виразу (4):

$$\phi = \frac{3Ft^2}{ml}, \quad (4)$$

Час, за який стрижень повернеться на кут ϕ знаходиться з виразу:

$$t = \sqrt{\frac{\phi ml}{3F}} \quad (5)$$

Рух центру мас стрижня в проекціях на осі x і y описується рівняннями:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \cos \phi \quad (6)$$

$$\ddot{y} = \frac{F}{m} \sin \phi, \quad (7)$$

або, з урахуванням (4) — рівняннями:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \cos \frac{3Ft^2}{ml}, \quad (8)$$

$$\ddot{y} = \frac{F}{m} \sin \frac{3Ft^2}{ml}, \quad (9)$$

Замінивши в рівняннях (8)—(9) \ddot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ та \ddot{y} на $\frac{d\dot{y}}{dt}$ і відокремивши змінні, знаходимо:

$$d\dot{x} = \frac{F}{m} \cos \frac{3Ft^2}{ml} dt, \quad (10)$$

$$d\dot{y} = \frac{F}{m} \sin \frac{3Ft^2}{ml} dt. \quad (11)$$

Оскільки останні рівняння не інтегруються в елементарних функціях, застосуємо відомі розвинення тригонометричних функцій у степеневі ряди:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Як відомо (Смирнов, 1974), ці ряди дуже зручні для обчислення значень функцій $\sin x$ і $\cos x$ при малих значеннях кута x $\left(x \leq \frac{\pi}{2}\right)$. При великих значеннях x ці ряди теж збігаються, але повільно, і для обчислення незручні.

Поклавши $x = \frac{3Ft^2}{ml}$ і обмежившись першими п'ятьма членами розкладу, отримаємо:

$$d\dot{x} = \frac{F}{m} \left(1 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^4}{2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^8}{4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{12}}{6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{16}}{8!} \right) dt, \quad (12)$$

$$d\dot{y} = \frac{F}{m} \left(\frac{3F}{ml} t^2 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^6}{3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{10}}{5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{14}}{7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{18}}{9!} \right) dt, \quad (13)$$

Після інтегрування знаходимо:

$$\dot{x} = \frac{F}{m} \left(1 \cdot t - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} \right) + A_1;$$

$$\dot{y} = \frac{F}{m} \left(\frac{F}{ml} t^3 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} \right) + B_1$$

Замінивши в рівняннях (12)—(13) \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$ та \dot{y} на $\frac{dy}{dt}$ і відокремивши змінні, знаходимо:

$$dx = \left(\frac{F}{m} \left(1 \cdot t - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} \right) + A_1 \right) dt;$$

$$dy = \left(\frac{F}{m} \left(\frac{F}{ml} t^3 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} \right) + B_1 \right) dt$$

Після інтегрування отримаємо:

$$x = \frac{F}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right) +$$

$$+ A_1 t + A_2$$

$$y = \frac{F}{m} \left(\frac{F}{4 \cdot ml} t^4 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right) +$$

$$+ B_1 t + B_2$$

З урахуванням початкових умов (при $t = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $x = 0$, $y = 0$) $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, тоді остаточно отримаємо:

$$\dot{x} = \frac{F}{m} \left(1 \cdot t - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^{10} \frac{t^{21}}{21 \cdot 10!} \right)$$

$$\dot{y} = \frac{F}{m} \left(\frac{F}{ml} t^3 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^{11} \frac{t^{23}}{23 \cdot 11!} \right)$$

$$x = \frac{F}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right)$$

$$y = \frac{F}{m} \left(\frac{F}{4 \cdot ml} t^4 - \left(\frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left(\frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left(\frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right)$$

Результати виконаних за останніми формулами числових розрахунків часу повороту, швидкості та координат центру ваги стрижня (або металевго пон-тону) масою $m = 2700$ кг, довжиною $l = 12$ м при значенні поперечної сили

$F = 100$ Н для кутів повороту $\phi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

| ϕ | $t, \text{с}$ | $V_x, \text{м/с}$ | $V_y, \text{м/с}$ | $x, \text{м}$ | $y, \text{м}$ |
|-----------------|---------------|-------------------|-------------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 7,5199 | 0,2710 | 0,04767 | 1,0377 | 0,0905 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 9,2099 | 0,3207 | 0,0854 | 1,5390 | 0,2011 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 10,6347 | 0,3528 | 0,1271 | 2,0202 | 0,3515 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 13,0248 | 0,3762 | 0,2114 | 2,9009 | 0,7537 |

Траєкторію руху центру мас стрижня, побудовану за отриманими даними, показано на рис. 2.

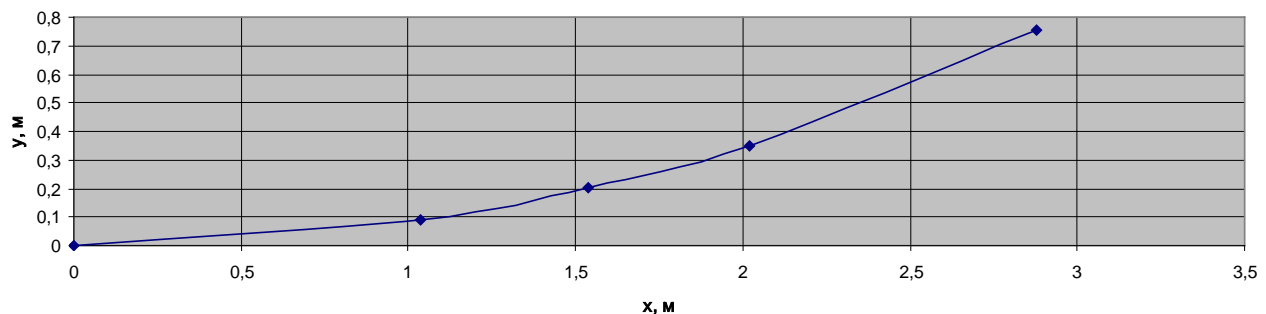


Рис. 2. Траєкторія руху центру мас стрижня при повороті на 90°

Список літератури

- Павловський, М. А. (2002). *Теоретична механіка: Підручник*. Київ: Техніка.
Смирнов, В. И. (1974). *Курс высшей математики*. (Т. 1). Москва: Наука

ПРО АНАЛІТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРЯМОЛІНІЙНИМИ МНОЖИНАМИ МОНОГЕННОСТІ

С. В. Горленко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Класична теорема Коші — Гурса стверджує, що неперервна в області $D \subset \mathbb{C}$ функція $f(z)$ комплексної змінної, моногенна в D , є аналітичною в цій області. Коші довів цю теорему, припускаючи неперервність похідної, Гурса показав, що це припущення зайве. Природно, що узагальнення теорему Коші — Гурса йшло за лінією заміни єдиної її умови — існування похідної $f'(z)$ у кожній точці області D — слабшими.

Моногенність рівносильна одночасному існуванню двох границь:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \text{ та } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \text{Arg} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

(остання в точках, де $f'(z) \neq 0$), тобто рівносильна сукупності двох властивостей:

- 1) сталість розтягів у точці z ;
- 2) консерватизм кутів.

Узагальнюючи теорему Коші — Гурса, природно було розділити ці властивості й охарактеризувати аналітичні функції або тільки в термінах розтягнень, або тільки в термінах збереження кутів. Ці спроби виявилися вдалими.

Перший результат у цьому напрямку одержав Бор (Bohr, 1918). Він довів наступну теорему, що базується на властивості сталості розтягів у точці.

Якщо відображення $w = f(z)$ неперервне й однолисте в області D і в кожній її точці, за винятком можливо, не більше ніж зліченної множини, існує скінченна границя («розтягнення»)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right|,$$

відмінна від нуля, то або функція $f(z)$, або спряжена до неї $\bar{f}(z)$ є аналітичною в області D .

Наведений Бором приклад функції

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{якщо } \text{Im } z \geq 0, \\ \bar{z}, & \text{якщо } \text{Im } z \leq 0, \end{cases}$$

показав, що для неоднолистих відображень його теорема не справджується. Радемахер (Rademacher, 1919) спростив доведення Бора, одночасно усунувши зайве припущення щодо відмінності від нуля розтягнення.

Другим суттєвим результатом виявилася теорема Меньшова (Menchoff, 1926), в основу якої покладену другу характеристичну властивість — консерватизм кутів.

Нехай $f(z)$ — неперервне й однолисте в області D і в кожній її точці, за винятком не більш ніж зліченної множини, існує границя

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Тоді $f(z)$ є аналітичною в D .

Якщо $f'(z)$ не існує, то її аналогом є множина всіх похідних чисел функції $f(z)$ у точці z (множина моногенності). Тоді консерватизм кутів полягає в тому, що всі похідні числа функції $f(z)$ у точці z мають однаковий аргумент, тобто множина моногенності лежить на деякому промені, що виходить з початку координат. Узагальнює вищезгадану теорему Меньшова

Теорема. Нехай $w = f(z)$ неперервна в області $D \subset \mathbb{C}$ функція, причому в кожній точці області D , за винятком не більш ніж зліченної їх множини, множина моногенності $\mathfrak{M}_z(f)$ є підмножиною прямої (можливо й невласною). Тоді $f(z)$ є аналітичною в області D .

Список літератури

- Bohr, H. (1918). Über streckentreue und konforme Abbildung. *Mathematische Zeitschrift*, 1(4), 403–420.
- Menchoff, D. (1926). Sur la représentation conforme des domaines plans. *Mathematische Annalen*, 95(1), 641–670.
- Rademacher, H. (1919). Über streckentreue und winkeltreue Abbildung. *Mathematische Zeitschrift*, 4(1), 131–138.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІН КЛІМАТИЧНИХ ФАКТОРІВ ЗА ДАНИМИ МЕТЕОСТАНЦІЇ «КИЇВ»

Ю. Дикач

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

juliadykach@ukr.net

У роботі проведено статистичний аналіз серій часових рядів даних щоденних інструментальних вимірювань середньодобових температур повітря та кількості опадів за даними метеостанції «Київ» у період з 1951 по 2016 рр. Виявлено загальну тенденцію до зростання температури повітря з середини 1970-х рр., а з кінця 1990-х рр. — зниження кількості опадів у літній період та їх збільшення взимку.

Ключові слова: кліматичні зміни, статистичний аналіз, вплив зміни клімату на стан здоров'я людини

Однією з найбільш важливих проблем, що постали перед наукою у ХХІ столітті, є проблема передбачення та виявлення негативних впливів глобальних кліматичних змін на здоров'я людини. Ця проблема має особливе значення для сталого розвитку людства та тісно пов'язана з необхідністю створення автоматизованої системи експертного оцінювання шкідливих наслідків глобальних змін клімату на здоров'я людей та їх благополуччя.

У даному дослідженні зосереджено увагу на мінливості кліматичних факторів, зокрема температури повітря та кількості атмосферних опадів за даними метеостанції «Київ» за останні 65 років. Серії часових рядів даних щоденних інструментальних вимірювань середньодобових температур повітря та опадів за період з 1951 по 2016 рр. було взято з архіву ЕСА (Ecad.eu, 2017). Архів даних ЕСА містить ряди щоденних спостережень з метеостанцій по всій Європі та з середземноморського регіону.

Необхідність обробки та врахування великої кількості метеорологічної інформації, потрібної під час побудови математичних моделей прогнозування впливу кліматичних показників на стан захворюваності населення, обумовила використання сучасних статистичних та математичних пакетів аналізу даних. Одним з найбільш потужних програмних інструментів, з неймовірно широким набором бібліотек, є IBM SPSS Statistics — провідне статистичне програмне забезпечення, що надає змогу вирішувати широкий спектр дослідницьких задач (Наследов, 2013).

У даному середовищі було реалізовано процедуру статистичної обробки даних: інструментальних вимірювань температури повітря та опадів за даними метеостанції «Київ». Спершу дані щоденної середньодобової температури та кількості опадів розділено за сезонами, розчеплено за десятиліттями та перевірено на нормальність розподілу за допомогою критерію Колмогорова — Смірнова.

Оскільки, опрацьовані дані не відповідають розподілу Гауса, далі використовували кореляцію за методом Спірмена. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена дає змогу статистично встановити наявність зв'язку між явищами (кліма-

тичними показниками та часом). Його розрахунок передбачає визначення для кожної ознаки порядкового номеру, рангу. Ранг може бути зростаючим або спадаючим. Даний метод не встановлює точну силу зв'язку і має орієнтовний характер (Настенко, Якимчук & Носовець, 2017):

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)},$$

де n — кількість ранжованих ознак, d — різниця між рангами за двома змінними, $\sum d^2$ — сума квадратів різниць рангів.

Оцінку значущості коефіцієнту кореляції визначають шляхом розрахунку значення ρ , ґрунтуючись на перевірках двох гіпотез:

- Основна гіпотеза H_0 : $\rho = 0$;
- Альтернативна гіпотеза H_1 : $\rho \neq 0$.

Основна гіпотеза стверджує, що не існує кореляції між ознаками x та y у генеральній сукупності. Альтернативна гіпотеза стверджує, що кореляція між ознаками x та y генеральної сукупності значима. Якщо основну гіпотезу відкидають на певному рівні значущості, це означає, що існує значуща відмінність між значенням r та 0. Якщо основну гіпотезу приймають, це означає, що значення r не сильно відрізняється від 0 і є випадковим.

Таким чином, у результаті статистичних розрахунків досліджено динаміку та отримано усереднені показники кількості опадів та середньодобових температур повітря розділених за сезонами та десятиліттями згідно з даними метеостанції «Київ» з 1951 по 2016 рр. (табл. 1).

Таблиця 1. Усереднені показники кількості опадів та середньодобових температур повітря за даними метеостанції Київ з 1951 по 2016 рр.

| Роки | Кількість опадів, мм | | | | Середньодобова температура повітря, °С | | | |
|------------------|----------------------|-------|------|-------|--|-------|-------|-------|
| | зима | весна | літо | осінь | зима | весна | літо | осінь |
| 1951—1960 | 1,27 | 1,33 | 2,06 | 1,75 | -3,98 | 6,89 | 19,73 | 7,32 |
| 1961—1970 | 1,94 | 1,61 | 2,57 | 1,34 | -5,11 | 7,83 | 18,85 | 8,42 |
| 1971—1980 | 1,45 | 1,43 | 2,38 | 1,60 | -3,61 | 8,21 | 18,51 | 7,72 |
| 1981—1990 | 1,39 | 1,47 | 2,46 | 1,41 | -3,25 | 8,56 | 18,76 | 7,92 |
| 1991—2000 | 1,18 | 1,66 | 2,67 | 1,78 | -2,73 | 8,56 | 19,47 | 7,56 |
| 2001—2010 | 1,38 | 1,51 | 2,42 | 1,60 | -2,80 | 9,42 | 20,57 | 8,99 |
| 2010—2016 | 1,54 | 1,82 | 1,93 | 1,66 | -2,20 | 10,47 | 21,21 | 9,31 |

Досліджуючи отримані розрахункові дані, можна зробити висновок щодо загальної тенденції зростання температури повітря, а отже потепління клімату в м. Києві з середини 1970-х років по теперішній час (рис. 1). Щодо кількості опадів однозначного висновку зробити неможливо, проте, починаючи з кінця

1990-х років, простежують стійку тенденцію їх зниження у літній період та одночасного їх збільшення взимку.

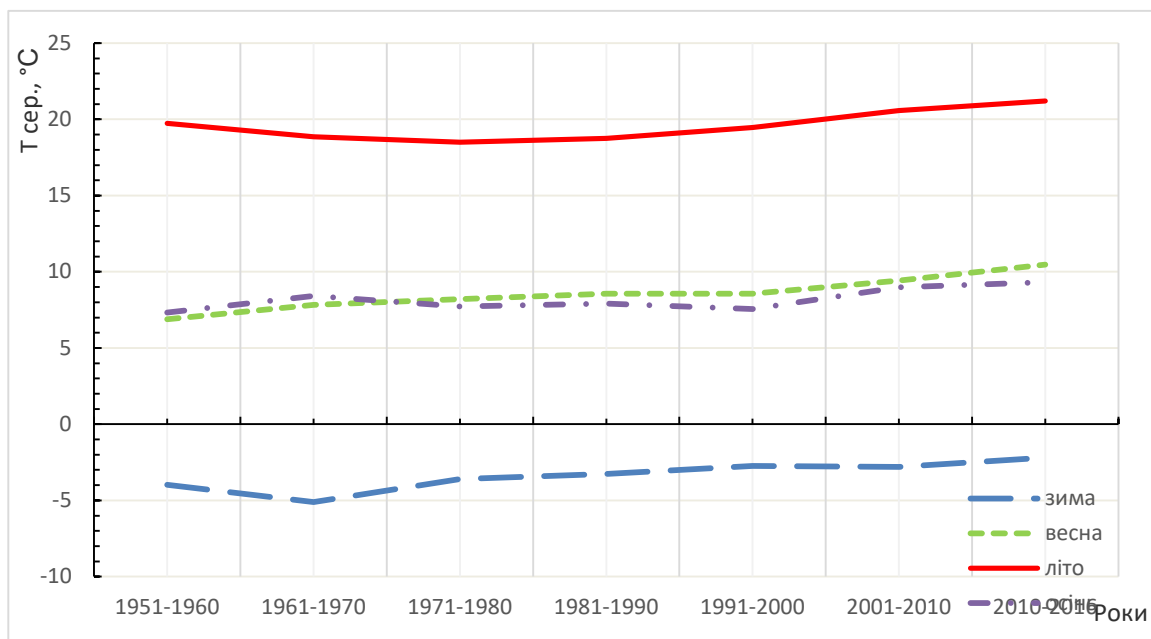


Рис. 1. Динаміка середньодобових сезонних температур з 1951 по 2016 рр. за даними метеостанції «Київ»

Наступний етап дослідження передбачатиме статистичну обробку даних про інфекційні та серцево-судинні захворювання у м. Києві за останні десятиліття та виявлення їх можливої залежності від зміни кліматичних факторів.

Список літератури

- Ecad.eu. (2017). *Daily data*. Available at: <http://www.ecad.eu/dailydata/index.php>.
- Наследов, А. (2013). *IBM SPSS Statistics 20 и AMOS: профессиональный статистический анализ данных*. Санкт-Петербург: Питер.
- Настенко, Є. А., Якимчук, В. С., & Носовець, О. К. (2017). *Інтелектуальний аналіз даних: методичні вказівки до виконання комп'ютерних практикумів з навчальної дисципліни «Інтелектуальний аналіз даних»* (Ч. 1. Кореляційний та регресійний аналіз медичних даних). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.

ПРИХОВАНІ АТРАКТОРИ В СИСТЕМІ ГЕНЕРАТОР — П'ЄЗОКЕРАМІЧНИЙ ВИПРОМІНЮВАЧ

С. В. Донецький

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
dsvshka@gmail.com

Проведено вивчення динаміки неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи «генератор — п'єзокерамічний випромінювач». Знайдені інваріантні торі системи та приховані аттрактори всередині цих торів.

Ключові слова: тор, граничний цикл, прихований аттрактор.

Розгляньмо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \zeta; \\ \dot{\zeta} = -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\beta; \\ \dot{\beta} = \gamma; \\ \dot{\gamma} = \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_0\beta - \alpha_7\gamma, \end{cases} \quad (1)$$

де $\xi, \zeta, \beta, \gamma$ — фазові змінні, $\alpha_i, i = \overline{0, 7}$ — параметри системи.

Ця система отримана в роботах (Krasnopolskaya & Shvets, 2006; Швець & Краснопольська, 2006; Balthazar et al., 2006). Вона використовується як математична модель неідеальної за Зоммерфельдом — Кононенком системи генератор — п'єзокерамічний випромінювач (Коненко, 1964). Фізичний зміст, як фазових координат, так і параметрів системи (1) детально описаний у вище згаданих роботах. У цих роботах доведено, що неідеальність збудження є причиною виникнення детермінованого хаосу в системі (1), та описано декілька типів хаотичних аттракторів цієї системи. Метою даної роботи є пошук інваріантних торів та прихованих аттракторів (Кузнецов, 2013) системи (1).

Так як система (1) є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, то всі подальші пошуки аттракторів цієї системи проводились за допомогою чисельних методів. Методика проведення таких чисельних досліджень детально описана (Krasnopolskaya & Shvets, 1991, 2009; Shvets & Sirenko, 2012).

Нехай параметри системи (1) дорівнюють:

$$\alpha_0 = 0,995, \alpha_1 = 0,0535, \alpha_3 = 9,95,$$

$$\alpha_4 = -0,103, \alpha_5 = -0,0604, \alpha_6 = -0,12, \alpha_7 = 0,01.$$

Параметр α_2 вибираємо в якості біфуркаційного.

При значенні $\alpha_2 = 7,6$ у системі існує граничний цикл. Проекція фазового портрету цього циклу наведена на рис. 1а. При збільшенні параметра α_2 , а саме, при проходженні $\alpha_2 = 7,64$ відбувається біфуркація Неймарка — Сакера і

в системі виникає інваріантний тор. Проекцію фазового портрету інваріантного тора, побудованого при $\alpha_2 = 7,7$ наведено на рис. 1б.

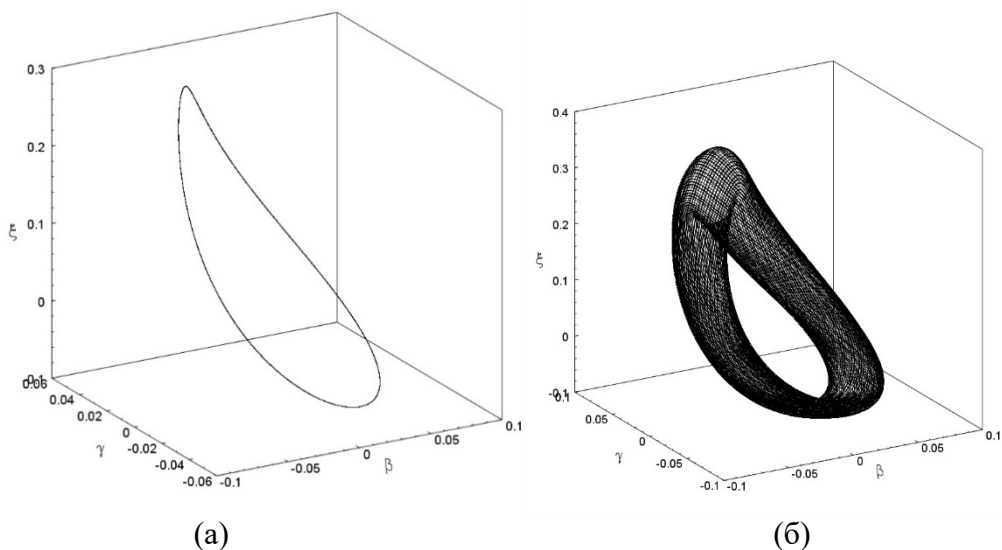


Рис. 1. Проекція фазового портрету: (а) граничного циклу при $\alpha_2 = 7,6$; (б) тора при $\alpha_2 = 7,7$

Інваріантні тори в системі (1) існують при значеннях $7,64 < \alpha_2 < 8,351$. Проекція фазового портрету інваріантного тора побудованого при $\alpha_2 = 7,8452$ наведена на рис. 2а. При цьому значенні в системі виникає ще один аттрактор. А саме — граничний цикл, проекцію фазового портрету якого наведено на рис. 2б.

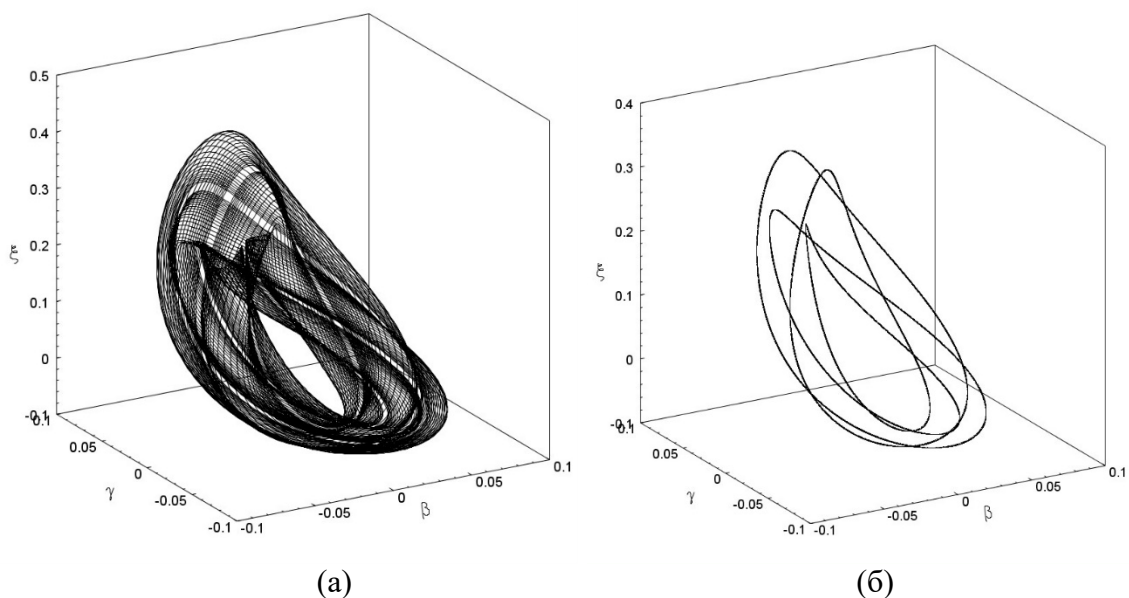


Рис 2. Фазові портрети: (а) тора; (б) граничного циклу при $\alpha_2 = 7,8452$

Цей граничний цикл розташований усередині інваріантного тора, але не має жодної спільної точки із траєкторіями тора. Слід зазначити, що побудований граничний цикл має надзвичайно малий басейн притягання. Виявити такий граничний цикл у комп'ютерних розрахунках удалося лише при використанні

локальної похибки обчислень не більше ніж 10^{-8} . Такі граничні цикли належать до класу, так званих, прихованих атракторів (Кузнецов, 2013) На рис. 3 зображено прихований граничний цикл усередині тора при $\alpha_2 = 7,8452$.

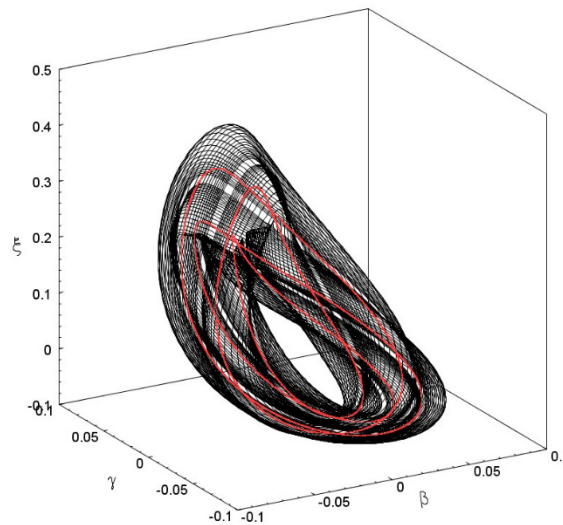


Рис. 3. Прихований граничний цикл (червона лінія) всередині тора (чорна лінія) при $\alpha_2 = 7,8452$

При $\alpha_2 = 8,351$ відбувається руйнація інваріантного тора і в системі (1) виникає резонансний цикл.

Також у системі (1) виявлена бі-стабільність, коли атракторами системи є вкладені один в одній граничні цикли.

Метою подальших досліджень буде знаходження прихованих граничних циклів всередині хаотичних атракторів.

Список літератури

- Balthazar, J. M., Felix, J. L., Brasil, R. M., Krasnopolskaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a nonideal source. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4(1), 011013.
- Krasnopolskaya T. S., & Shvets, A. Yu. (2006). Deterministic chaos in generator – piezoceramic transducer system. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 6(4), 55–74.
- Krasnopolskaya, T. S., & Shvets, A. Y. (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power supply. In *Proceeding of the 8th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, M. Okrouglick and L. Pust, eds., Prague, Czechoslovakia (Vol. 1, pp. 181–184).
- Krasnopolskaya, T. S., & Shvets, A. Y. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3), 532–553.
- Shvets, A. Y., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2, 303–310.
- Кононенко, В. О. (1964). *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. Москва: Наука.
- Кузнецов, С. П. (2013). *Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике*. Ижевск: Институт компьютерных исследований.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Ч. 1. *Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України «КПІ»*, (2), 150—158.
- Швець, О. Ю., & Краснопольська, Т. С. (2006). Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Ч. 2. *Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України «КПІ»*, (4), 147—154.

ПРОГНОЗУВАННЯ ЦІНИ НА НАФТУ ЗАСОБАМИ ARIMA-МОДЕЛЕЙ

Н. М. Задерей¹, Г. Д. Нефьодова¹, М. В. Гаєвський², Т. С. Запорожчук²

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Центральноукраїнський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

zadereyv@ukr.net, mgaevskij@gmail.com

Ціна на нафту є одним із ключових факторів зростання світової економіки та національних економік, тому метою даної роботи є розгляд можливих методів дослідження, аналізу та прогнозування ціни нафти.

Ключові слова: ARIMA-модель, авторегресія, ковзне середнє, ціна нафти.

У сучасній статистичній теорії існує багато різноманітних методів прогнозування інформації. Значна їх частина належить до прогнозування часових рядів. Особливістю прогнозування часових рядів є те, що аналізуються лише дані спостережень без додаткової інформації, без аналізу впливу зовнішніх сил. Звичайно, такий аналіз виглядає досить неповним, але доволі часто прогнози часових рядів є дуже точними. Одним із поширених підходів є методика Бокса — Дженкінса.

Підхід Бокса — Дженкінса до аналізу часових рядів є дуже потужним інструментом для побудови точних прогнозів. Уперше систематичний підхід до побудови моделі ARIMA був викладений Боксом та Дженкінсом (1994). Моделі ARIMA є досить гнучкими та можуть описувати широкий спектр характеристик часових рядів, що зустрічаються на практиці та мають багато практичних застосувань. Однією з головних властивостей ARIMA-моделей є можливість їх використання для нестационарних часових рядів.

Такі моделі включають у себе авторегресію та змінне (ковзне) середнє. У моделі авторегресії кожне значення ряду лінійно залежить від попередніх значень. Модель змінного середнього передбачає, що в помилках моделі в попередні періоди зосереджена інформація про всю передісторію ряду.

Побудова ARIMA-моделі для досліджуваних часових рядів включає наступні основні етапи (див., наприклад, Лук'яненко & Жук, 2013):

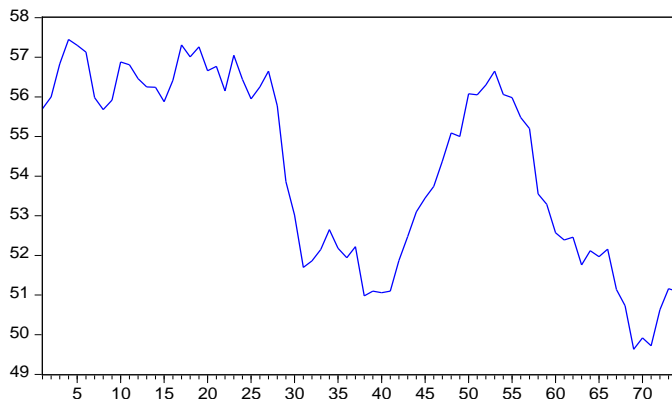
- ідентифікацію пробної моделі;
- оцінювання параметрів моделі та діагностичну перевірку адекватності моделі;
- використання моделі для прогнозування.

Отже, спочатку необхідно отримати стаціонарний ряд. Якщо ряд є нестационарним, то для переходу до стаціонарної ARIMA-моделі прогнозування значень ряду традиційно застосовують оператор взяття послідовних різниць, тим самим виділяється значення параметра d . Таким чином, значення одного параметра в моделі ARIMA(p, d, q) вже відомо, тому далі вже для ряду в перших різницях будуємо модель ARMA(p, q).

Решту параметрів моделі ARMA(p, q) можна визначити за допомогою графіків автокореляційної і часткової автокореляційної функції досліджуваного

показника. Візуальний аналіз ACF/PACF дає змогу зробити висновок, чи можна вважати часовий ряд чистим AR- або MA-процесом, чи він є змішаним ARMA-процесом.

Розглянемо максимальні щоденні дані ціни нафти Brent у період з 30.01.2017 по 12.05.2017 та побудуємо прогноз за допомогою статистичного пакету EViews 8. Графічне зображення нашого часового ряду



Візуально видна нестационарність нашого ряду, тому застосувавши тест Дікі — Фуллера для ряду в перших різницях бачимо, що він є стаціонарним з порядком інтеграції 1.

З корелограми ряду в перших різницях знайдемо параметри p та q

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | 0.223 | 0.223 | 3.7972 | 0.051 |
| | | 2 | 0.242 | 0.202 | 8.3168 | 0.016 |
| | | 3 | -0.067 | -0.170 | 8.6632 | 0.034 |
| | | 4 | -0.033 | -0.042 | 8.7506 | 0.068 |
| | | 5 | -0.054 | 0.019 | 8.9880 | 0.110 |
| | | 6 | 0.055 | 0.080 | 9.2379 | 0.161 |
| | | 7 | 0.198 | 0.196 | 12.488 | 0.086 |
| | | 8 | -0.071 | -0.223 | 12.917 | 0.115 |
| | | 9 | 0.123 | 0.113 | 14.214 | 0.115 |
| | | 10 | -0.093 | -0.033 | 14.968 | 0.133 |
| | | 11 | 0.007 | -0.027 | 14.973 | 0.184 |
| | | 12 | -0.345 | -0.349 | 25.651 | 0.012 |
| | | 13 | -0.089 | 0.021 | 26.375 | 0.015 |
| | | 14 | -0.208 | -0.059 | 30.405 | 0.007 |
| | | 15 | -0.257 | -0.282 | 36.635 | 0.001 |
| | | 16 | -0.079 | -0.016 | 37.234 | 0.002 |
| | | 17 | -0.100 | 0.019 | 38.206 | 0.002 |
| | | 18 | -0.093 | -0.155 | 39.058 | 0.003 |
| | | 19 | -0.272 | -0.203 | 46.562 | 0.000 |
| | | 20 | -0.014 | 0.027 | 46.583 | 0.001 |
| | | 21 | -0.194 | 0.009 | 50.553 | 0.000 |
| | | 22 | -0.001 | -0.027 | 50.553 | 0.000 |
| | | 23 | 0.094 | 0.126 | 51.530 | 0.001 |
| | | 24 | 0.012 | -0.186 | 51.545 | 0.001 |
| | | 25 | -0.006 | 0.015 | 51.548 | 0.001 |
| | | 26 | -0.114 | -0.116 | 53.050 | 0.001 |
| | | 27 | 0.061 | -0.117 | 53.486 | 0.002 |
| | | 28 | 0.001 | 0.114 | 53.486 | 0.003 |
| | | 29 | 0.218 | 0.075 | 59.413 | 0.001 |
| | | 30 | 0.146 | -0.136 | 62.128 | 0.001 |
| | | 31 | 0.160 | -0.062 | 65.465 | 0.000 |
| | | 32 | 0.051 | 0.088 | 65.812 | 0.000 |

Проаналізувши корелограму часового ряду в перших різницях отримаємо модель ARIMA(19,1,12).

Для оцінювання якості моделі проаналізуємо значення деяких критеріїв прогнозу. Одним з найпоширеніших на практиці є критерій середньої

абсолютної процентної похибки (MAPE — Mean Absolute Percent Error), який показує середню абсолютну похибку прогнозу в відсотках. Для нашого прикладу значення MAPE=0,64%, що свідчить про високу прогнозну якість моделі.

Тепер побудуємо прогноз ціни на нафту та порівняємо його із реальними даними

| Дата | Ціна ринку на нафти (max) | ARIMA(19,1,12) |
|------------|---------------------------|----------------|
| 15.05.2017 | 51,06 | 51.415 |
| 16.05.2017 | 51,10 | 51.487 |
| 17.05.2017 | 51,87 | 52.193 |
| 18.05.2017 | 52,48 | 52.806 |
| 19.05.2017 | 53,10 | 52.899 |
| 20.05.2017 | 53,45 | 52.745 |
| 21.05.2017 | 53,74 | 52.492 |
| 22.05.2017 | 54,38 | 53.085 |
| 23.05.2017 | 55,09 | 53.145 |
| 24.05.2017 | 55,15 | 53.714 |

Оскільки сучасні статистичні пакети дають змогу будувати ARIMA-моделі з різними параметрами, то можна порівняти нашу модель з іншими.

Список літератури

Бокс, Дж., & Дженкінс, Г. (1994). *Аналіз часових рядів: Прогноз и управление*. Мир: Мир.
Лук'яненко, І.Г., & Жук, В. М. (2013). *Аналіз часових рядів*. (Ч. 1. Побудова ARIMA, ARCH/GARCH моделей з використанням пакету EViews 6.0): Практичний посібник для роботи в комп'ютерному класі. Київ: НаУКМА.

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАНИЦЬ У ЗАДАЧАХ З ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Т. В. Іваненко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com

У доповіді розглянуто задачі фінансової математики, для розв'язання яких застосовують границі, а саме довічні ренти, неперервне нарахування відсотків та неперервні потоки платежів.

Ключові слова: грошові потоки, дисконтування та нарощення грошових сум, неперервні ренти, декурсивний та антисипативний способи нарахування відсотків.

Фінансова математика — це дисципліна, що вивчає математичні методи, які застосовуються у фінансових розрахунках. Предметом вивчення фінансової математики зокрема є грошові суми, які має отримати або сплатити суб'єкт фінансового ринку, а також грошові потоки, які створюються при кредитуванні або інвестуванні.

Для оцінки як одиничних сум коштів, так й грошових потоків, використовують теперішню (приведену) PV та майбутню FV_n вартість грошей. Розрахунок цих показників здійснюється шляхом дисконтування або нарощення номінальної вартості грошових сум за певною річною відсотковою ставкою $r\%$, n — кількість періодів. Нарухування відсотку може здійснюватись дискретно один або декілька разів за період (як правило рік), але може бути застосоване неперервне нарахування відсотка. Якщо зменшувати період і збільшувати частоту нарахування відсотка m , то сума складних відсотків буде збільшуватись. Розглянемо граничний випадок (1), коли $m \rightarrow \infty$, та застосуємо другу важливу границю

$$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)} \right)^{u(x)} = e:$$

$$FV_n = PV \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{nm} = PV \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m/r} \right)^{n \cdot \frac{m}{r} \cdot r} = PV \cdot e^{rn} \quad (1)$$

Неперервну ставку нарахування процента позначають δ і називають *силою росту* (Аньшин, 2000). Тоді формула (1) для знаходження нарощеної за n років суми набуде вигляду (2):

$$FV_n = PV \cdot e^{\delta n} \quad (2)$$

Сила росту характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу.

Для неперервного нарахування відсотків за складною обліковою ставкою нарощена сума обчислюється за формулою (3):

$$\begin{aligned}
FV_n &= \frac{PV}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{nm}} = \frac{PV}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-m/d}\right)^{n \cdot \frac{m}{-d} \cdot (-d)}} = \\
&= \frac{PV}{e^{-dn}} = PV \cdot e^{dn} = PV \cdot e^{\delta n}
\end{aligned} \tag{3}$$

Формули неперервного нарахування відсотків за процентною (2) та обліковою (3) ставками збігаються, оскільки при зменшенні інтервалу нарахування відмінність між декурсивним та антисипативним способами нарахування відсотків зникає, тому що початок періоду збігається з його кінцем.

Застосовується неперервне нарахування відсотку при аналізі складних фінансових задач та обґрунтуванні вибору інвестиційного рішення; якщо платежі за період надходять багато разів тощо.

Знайдімо зв'язок між дискретними та неперервними ставками:

$$FV_n = PV \cdot (1 + r)^n \text{ та } FV_n = PV \cdot e^{\delta n}.$$

Для цього складемо рівняння еквівалентності (4):

$$(1 + r)^n = e^{\delta n} \tag{4}$$

З рівняння (4) випливає, що

$$\delta = \ln(1 + r) \text{ або } r = e^{\delta} - 1.$$

Границі також застосовують для оцінки неперервних рент. Якщо протягом кожного періоду надходження або виплати відбуваються дуже часто, так, що проміжки між ними нескінченно малі, то ануїтет називається неперервним. Позначимо за p кількість надходжень або виплат за період. Тоді майбутню та теперішню вартість такого ануїтету відповідно буде виражено формулами (5):

$$\begin{aligned}
FV_n &= \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}} & PV &= \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm} - 1}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Для обчислення майбутньої вартості неперервної ренти слід у формулах (5) перейти до границі, коли $p \rightarrow \infty$. Оскільки від p залежить тільки знаменник, знайдемо його границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \left(1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{m \left(1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right)}{\frac{m}{p}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{m \left(- \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}} \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right) \left(\frac{-m}{p^2} \right) \right)}{\frac{-m}{p^2}} = -m \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right) \quad (6)$$

Підставляємо (6) у формули (5):

$$FV_n = \frac{CF_k \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{nm} - 1 \right)}{m \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right)} \quad PV = \frac{CF_k \left(1 - \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{-nm} \right)}{m \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right)} \quad (7)$$

Формули (7) виражають майбутню та теперішню вартості неперервного потоку платежів (Капустян & Пасенченко, 2013).

Тепер нехай не лише платежі надходять неперервно, а й відсотки нараховуються неперервно ($m \rightarrow \infty$). Застосуємо рівняння еквівалентності для дискретних та неперервних ставок (8):

$$\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{n \cdot m} = e^{\delta n}; \quad m \cdot \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right) = \delta. \quad (8)$$

Підставимо (8) у формули (7):

$$FV_n = \frac{CF_k \left(e^{\delta n} - 1 \right)}{\delta}; \quad PV = \frac{CF_k \left(1 - e^{-\delta n} \right)}{\delta}. \quad (9)$$

Формули (9) визначають майбутню та теперішню вартості неперервного потоку платежів з неперервним нарахуванням відсотків (Борисенко та ін., 2006).

Безстроковим ануїтетом (довічною рентою) у західній практиці вважається ануїтет при $n \geq 50$. Математично $n \rightarrow \infty$. Тоді задача знаходження FV не має сенсу, але PV визначити можна. Нехай $p = 1, m = 1$. Теперішню вартість сталого ануїтету постнумерандо можна знайти як суму спадної геометричної прогресії за формулою (10):

$$PV = \frac{CF}{1+r} + \frac{CF}{(1+r)^2} + \frac{CF}{(1+r)^3} + \dots = \frac{CF}{r}. \quad (10)$$

Якщо $p \neq 1, m \neq 1$, у формулі (5) перейдемо до границі, коли $n \rightarrow \infty$ (11):

$$PV = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CF_k \cdot \overbrace{\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{-nm}}^{\rightarrow 0} - 1}{1 - \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}}} = \frac{CF_k}{p \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)} \quad (11)$$

Якщо проценти нараховуються неперервно ($m \rightarrow \infty$), то формула (11) набуває вигляду:

$$PV = \frac{CF_k}{p \left(\frac{\delta}{e^p} - 1 \right)}.$$

Список літератури

- Аншин, В. М. (2000) *Инвестиционный анализ: Учебно-практическое пособие*. Москва: Дело.
- Борисенко, О. Д., Мішура, Ю. С., Радченко, В. М., & Шевченко, Г. М. (2006) *Збірник задач з фінансової математики*. Київ: Техніка.
- Капустян, В. О., & Пасенченко, Ю. А. (2013) *Фінансова математика: Навчальний посібник* (2-ге вид., доповн.). Київ: Прінт-Сервіс.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛООВОГО САМОЗАЙМАННЯ ПИЛОВУГІЛЬНИХ СУМІШЕЙ ТА ЙОГО МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Б. В. Кузьменко

Інститут вугільних енерготехнологій (ІВЕ) НАН України, Київ, Україна

bkuzmenko@i.ua

На основі дослідження розробленої математичної моделі процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей встановлено, що початок цього процесу та його подальший перебіг відбувається за детермінованих умов. Математичну модель цього процесу складає система трьох нелінійних диференціальних рівнянь. Фазовою траєкторією математичної моделі Семенова — Хзмаляна (Хзмалян, 1990), в жодному разі не є атрактор.

Ключові слова: теплове самозаймання, фазова траєкторія, атрактор, динамічна система, диференціальні рівняння.

Математична модель процесу теплового самозаймання складається із 3 диференціальних рівнянь: теплового балансу — рівняння динаміки температури $y_2(x)$ пиловугільної суміші, (1); рівняння для концентрації окиснювача $z_2(x)$ — кисню, (2); рівняння для концентрації вуглецю $u_2(x)$ — (3), та початкових умов.

$$\frac{d}{dx} y_2(x) = z_2(x) u_2(x) \left[\frac{1}{(y_2(x))^2} e^{\frac{-1}{y_2(x)}} \right] - \Omega [y_2(x) - y_{20}] - \sigma A [y_2(x)^4 - y_{20}^4], \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} z_2(x) = -\frac{1}{\Theta} \left[\frac{1}{(y_2(x))^2} e^{\frac{-1}{y_2(x)}} \right], \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} u_2(x) = -\alpha \left[z_2(x) u_2(x) \left[\frac{1}{(y_2(x))^2} e^{\frac{-1}{y_2(x)}} \right] - \Omega [y_2(x) - y_{20}] - \sigma A [y_2(x)^4 - y_{20}^4] \right], \quad (3)$$

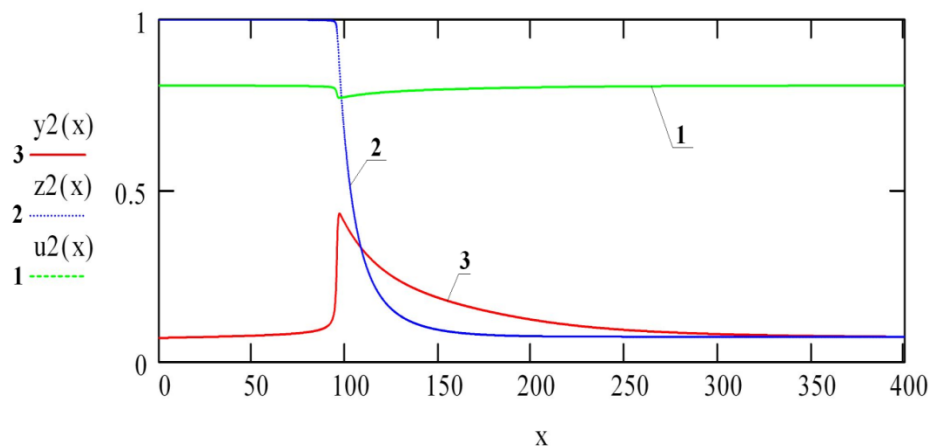


Рис. Графік залежності для температури $y_2(x)$ пиловугільної суміші, концентрації окиснювача $z_2(x)$ — кисень та концентрації вуглецю $u_2(x)$ у відповідності з математичною моделлю (1)—(3)

Параметри: $\alpha = 0.1, \theta = 2.3, \sigma = 10, \Omega = 0.03$.

Початкові умови: $y_{20} = 0.07, z_{20} = 1.0, u_{20} = 0.807, x = 0, 1, \dots, 400$.

Розрахунки виконані на ПЕОМ з використанням пакету прикладних програм комп'ютерної математики MathCad дали змогу побудувати графіки залежностей для всіх основних показників процесу — $y_2(x), z_2(x), u_2(x)$, x — узагальнений час, $(y_2(x), z_2(x), u_2(x))$ — т. з. фазові траєкторії для процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей). Аналіз геометричної форми цих кривих вказує на відсутність атрактора (дивного атрактора).

Дослідимо питання динаміки координат (абсциси й ординати) точки максимуму кривої температури $y_2(x), y_{\max(2)}(x)$. Для цієї точки

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = 0,$$

з урахуванням (1)—(3), матимемо

$$[\alpha z^2 + (1 - \alpha)z] \frac{1}{y_{\max}^2} e^{-\frac{1}{y_{\max}}} - \Omega(y_{\max} - y_1) - \sigma A [y_2(x)^4 - y_{20}^4] = 0, \quad (4)$$

$$Z = \frac{(\alpha - 1)A + \sqrt{(\alpha - 1)^2 A^2 + 4\alpha AB}}{2\alpha A},$$

$$A = \frac{1}{y_{\max}^2} e^{-\frac{1}{y_{\max}}}, \quad B = \Omega(y_{\max} - y_1) + \sigma A [y_2(x)^4 - y_{20}^4].$$

Звідки маємо:

$$\frac{dy_{\max}}{d\chi} = \frac{(y_{\max} - y_1) \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\alpha \Omega y_{\max}^2 (y_{\max} - y_1) e^{\frac{1}{y_{\max}}}}}{\theta_{ad} [3y_{\max}^2 + (1 - 2y_1)y_{\max} - y_1] e^{\frac{1}{y_{\max}}}}, \quad (5)$$

Вираз (5) дає змогу аналізувати залежність для критичної-екстремальної температури і процесу у цілому. За даними Семенова М. М. ця величина буде температурою самозаймання пиловугільної суміші, якщо критичний мимовільний розігрів становить

$$\Delta y_{\max} = \frac{R y_{0.\max}^2}{E}.$$

Вплив випадкових факторів на теплове самозаймання пиловугільної суміші (Третьяков, Федотов, Волков, Зайчик, та ін.) використана математична модель детермінованого типу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dc}{dt} = \beta(c_0 - c) - k(T)c; \\ c_p \frac{dT}{dt} = Qk(T)c - \alpha(T - T_0); t = t_n, c = c_n, T = T_n, \\ k(T) = z \exp\left(-\frac{E}{RT}\right); \end{array} \right.$$

або

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{Qc_0\beta k(T)}{\beta + k(T)} - \alpha(T - T_0); t = t_n, T = T_n.$$

МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОГО ТИПУ:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{Qc_0\beta k(T)}{\beta + k(T)} - \alpha(T - T_0) + \xi(t); t = t_n, T = T_n,$$

$\xi(t)$ — випадкова величина (шум) с нульовим середнім.

Випадкова величина типу білого гаусівського шуму

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{d\mathcal{X}} = [\bar{C} - \alpha\bar{C}(1 - \bar{C})] \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}} - \Omega(\theta - \theta_1) + \xi_\theta(\mathcal{X}); \\ \frac{d\bar{C}}{d\mathcal{X}} = -\frac{1}{\theta_{ad}} [\bar{C} - \alpha\bar{C}(1 - \bar{C})] \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}} + \xi_{\bar{C}}(\mathcal{X}); \end{array} \right. \quad \mathcal{X} = 0, \theta = \theta_1, \bar{C} = 1,$$

$\xi_\theta(\mathcal{X}), \xi_{\bar{C}}(\mathcal{X})$ — випадкові величини (шум) з нульовим середнім

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}[1 + \xi_\alpha(t)], \beta(t) = \bar{\beta}[1 + \xi_\beta(t)],$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ — сталі, що відповідають деяким числовим характеристикам випадкових функцій $\alpha(t), \beta(t)$; $\xi_\alpha(t), \xi_\beta(t)$ — гаусові незалежні випадкові функції

$$M[\xi_\alpha(t)] = M[\xi_\beta(t)] = 0, \quad M[\xi_\alpha(t)\xi_\beta(t)] = 0,$$

$$M[\xi_\alpha(t)\xi_\alpha(t')] = 2D_1\delta(t - t'), \quad M[\xi_\beta(t)\xi_\beta(t')] = 2D_2\delta(t - t').$$

Дельта-корельованість процесів $\xi_\alpha(t), \xi_\beta(t)$ відповідає малому значенню часу кореляції $\alpha(t), \beta(t)$ в порівнянні з характерними часовими масштабами температури і концентрації пиловугільної суміші.

$$dx = \gamma[-x + \mu(1 - x) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \sigma\theta}\right)]d\tau - \gamma x (2\sigma_1)^{\frac{1}{2}} dW_1,$$

$$d\theta = [\delta(1 - x) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \sigma\theta}\right) - \theta]d\tau - \theta(2\sigma_2)^{\frac{1}{2}} dW_2,$$

$$\theta = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0), \quad x = \frac{C_0 - C}{C_0}, \quad \tau = \frac{M[\alpha]t}{C},$$

$$\gamma = \frac{CM[\beta]}{M[\alpha]}, \quad \sigma = \frac{RT_0}{E}, \quad \mu = \frac{k(T_0)}{M[\beta]},$$

$$\delta = \frac{C_0EQk(T_0)}{RT_0^2M[\alpha]}, \quad \sigma_i = \frac{D_iM[\alpha]}{C}, \quad i = 1, 2.$$

Рівняння Фоккера — Планка має вигляд:

$$\frac{\partial f(x, \theta, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma L_1 - L_2 + \gamma \sigma_1 \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2},$$

$$L_1 = -\frac{\partial}{\partial x} [\gamma \sigma_1 x - x + \mu(1-x) \exp\left(\frac{\theta}{1+\sigma\theta}\right)] + \gamma \sigma_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2,$$

$$L_2 = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\delta(1-x) \exp\left(\frac{\theta}{1+\sigma\theta}\right) + (\sigma_2 - 1)\theta \right] + \sigma_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \theta^2.$$

Нами отримано його розв'язок в Кузьменко та Мальчевський (2011).

Список літератури

- Кузьменко, Б. В., & Мальчевський, І. А. (2011). *Теплове самозаймання пилувугільних сумішей: Монографія*. Київ: Наукова думка.
- Хзмалян, Д. М. (1990). *Теория топочных процессов*. Москва: Энергоатомиздат.

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ КЕРУВАННЯ СТАНАМИ ДЕЯКИХ МЕТАЛЕВИХ АНТИФЕРОМАГНЕТИКІВ

В. М. Кучкін, О. В. Кравцов

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

kychkinvladislav@gmail.com

В процесі теоретичного дослідження антиферомагнетика з трикутним спіновим порядком на прикладі металевого $IrMn_3$ встановлена можливість ефективного керування його станами за допомогою спінового струму. Для часткового випадку упорядкування магнітних моментів в даному матеріалі розглянуто магнітну динаміку, що призводить до перемикання між рівноважними станами в ньому. Визначені основні параметри, що впливають на процес переходу: амплітуда початкового імпульсу спінового струму, коефіцієнт згасання. Знайдено діапазон початкових імпульсів, при якому відбувається зміна стану. Розрахунки, проведені аналітично та за допомогою чисельного моделювання, добре узгоджуються між собою.

Ключові слова: динамічні рівняння, керування станами, стійкий стан, спіновий струм, антиферомагнетик.

Актуальною темою досліджень у світі залишається розробка та створення нових обчислювальних пристроїв. При цьому виявилось (Gomonay & Loktev, 2015; Wadley et al., 2016; Hoffmann & Bader, 2015; Kohn et al., 2013; Frangou et al., 2016), що застосування у спінтроніці антиферомагнетиків може істотно покращити характеристики сучасної комп'ютерної техніки — майже в 1000 разів зростає швидкість виконання операцій, збільшується об'єм пам'яті та зменшуються розміри пристроїв. Антиферомагнетики — це матеріали з нетривіальною магнітною структурою, при якій магнітні моменти окремих атомів взаємно компенсуються і тому сам матеріал не створює зовнішнього магнітного поля.

Для створення нових обчислювальних пристроїв потрібно мати якомога більше інформації про властивості наявних антиферомагнетиків. Хоча ключову роль у вивченні антиферомагнетиків відіграють експериментальні дослідження, однак найчастіше вони є занадто дорогими; крім того, деяку важливу інформацію можна отримати на етапі суто теоретичного розгляду проблеми. Тому теоретичний підхід до дослідження є безумовно важливим і актуальним.

Як правило, теоретичне дослідження є сильно ускладненим математично, оскільки потрібно описати взаємодію багатьох частинок. Тільки в окремих випадках вдається отримати аналітичні результати, що можуть бути безпосередньо перевірені в реальному експерименті.

З використанням антиферомагнетиків пов'язано багато задач теоретичного характеру, зокрема це задачі керування процесами запису, збереження та зчитування інформації. Це все називається *керуванням стану антиферомагнетику*. Крім того, внаслідок наявності значної кількості антиферомагнітних структур наразі не виявляється можливим однозначно описати всі їх разом, тому доводиться вивчати різні кристалічні структури окремо.

Завдяки чутливості антиферомагнетиків до дії спін-поляризованного струму (Gomonay & Loktev, 2014) (електричний струм, що характеризується певним напрямом спінів електронів) виявляється можливим обрати саме цей шлях для запису інформації (перемикання між станами «0» і «1») у матеріалах-антиферомагнетиках. Тому одразу виникають задачі вивчення взаємодії такого струму та матеріалу, що є прикладами задач багатьох тіл, які досить складно розв'язувати навіть чисельно. У цьому випадку доводиться переходити до максимально реальних, але сильно спрощених моделей і намагатися досліджувати вже їх. Одним з основних існуючих методів дослідження є підхід, що полягає у використанні узагальнених рівнянь Ландау — Ліфшиця.

Крім того, для нормального функціонування обчислювальних та запам'ятовуючих пристроїв потрібно, щоб вони могли зберігати інформацію досить тривалий час. Інакше кажучи, набутий після перемикання стан антиферомагнетика має бути стійким. Для перевірки на стійкість використовують різні методи з теорії нелінійного аналізу, теорії стійкості динамічних систем та ін. Тут, як правило, доводиться мати справу із сильно нелінійними диференціальними рівняннями, які в загальному випадку не розв'язуються аналітично, і дослідження хоча б однієї конкретної системи може бути надскладним завданням.

При зчитуванні інформації також виникають проблеми, пов'язані зі стійкістю стану при взаємодії «струм — зразок». Для повністю електричного зчитування потрібно підібрати такі характеристики струму, які будуть однозначно вказувати на стан системи та не будуть змінювати її стан. Зокрема тут потрібно досліджувати стійкість рівноважних станів до дії зовнішнього збурення у вигляді цього струму.

Роботу присвячено теоретичному дослідженню можливості керування станами металевго антиферомагнетика із трикутною магнітною структурою на прикладі $IrMn_3$. Цей матеріал має привабливі властивості для практичного застосування завдяки можливості запису та зчитування за допомогою електричного струму навіть при досить високих температурах (порядку 500 K) (Marti et al., 2014). Досліджено таку геометрію, при якій різним стійким станам («0» і «1») антиферомагнетика відповідають різні площини упорядкування магнітних спінів (рис. 1), оскільки в цьому випадку розпізнавання стану антиферомагнетика стає простішим, ніж для одноплощинної ситуації (Gomonay & Loktev, 2015). Теоретичні дослідження саме розглянутої геометрії дотепер не проводились, тому робота є актуальною і важливою для подальшого вивчення властивостей антиферомагнетиків, а також цікавою з математичної точки зору.

Для дослідження керування станами у антиферомагнетик у обрано підхід, заснований на узагальненому рівнянні Ландау — Ліфшиця (Gomonay & Loktev, 2014; Landau & Lifshitz, 1935)

$$\dot{\mathbf{M}} + \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_M = \frac{\alpha_G}{M_s} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} + \frac{\sigma j_s}{M_s d_{AF}} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{e}_{pol}). \quad (1)$$

У цьому рівнянні \mathbf{M} — вектор намагніченості підґратки, γ — гіромагнітне відношення, \mathbf{H}_M — ефективне магнітне поле, яке задається густиною магнітної енергії w_{mag} формулою

$$\mathbf{H}_M = -\frac{\partial w_{mag}}{\partial \mathbf{M}},$$

α_G — коефіцієнт згасання, $M_s = |\mathbf{M}| = \text{const}$ — намагніченість насичення, σ — стала, що залежить від степені спінової поляризації, d_{AF} — товщина антиферромагнітного шару, через який протікає спіновий струм з поляризацією \mathbf{e}_{pol} та густиною j_s . Виходячи з (1) показано, що динаміка магнітних спінів в $IrMn_3$ описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\gamma_{AF}\dot{\theta} + \frac{dw_{an}}{d\theta} = 0, \\ \dot{\theta}(0) = p, \\ \theta(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де γ_{AF} — коефіцієнт дисипації, p — початкова амплітуда імпульсу спінового струму, w_{an} — густина потенціальної енергії. Для дослідження динамічних рівнянь (2) було використано метод фазового простору завдяки його наочності; при аналітичному розгляді застосовувались методи теорії динамічних систем (Гилмор, 1984).

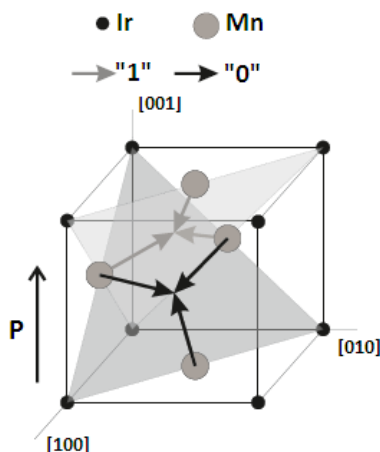


Рис. 1. Різним стійким станам $IrMn_3$ відповідають різні площини упорядкування магнітних спінів

З динамічних рівнянь для опису динаміки магнітних спінів для конкретного випадку двохплощинної геометрії (рисунок 1) отримано вираз для густини потенціальної енергії. При дослідженні цього виразу підтверджено наявність двох стійких станів в $IrMn_3$ (статична задача), при цьому знайдені стани рівноваги, що відповідають різним станам антиферромагнетика («0» та «1», рис. 2).

Для аналітичного дослідження динамічних рівнянь використовувалися різні наближення густини потенціальної енергії, отримані внаслідок розкладу виразу для неї в ряд Тейлора в околі особливої точки (Гилмор, 1984) та виходячи з фізичних міркувань. Результатом даного етапу можна вважати отримання діапазону початкових імпульсів струму, що призводять до ефективного (найбільш енергетично вигідного) перемикання антиферромагнетика (запис інформації).

Іншим важливим параметром, що також характеризує систему, є коефіцієнт згасання. Для різних його значень також були виконані розрахунки. Проведене порівняння аналітичних розрахунків з чисельним експериментом указує на правильність отриманих результатів та узгодження обох підходів.

Досліджені стани рівноваги є стійкими, що фізично означає можливість довготривалого зберігання антиферромагнетиком свого стану, а тим самим, і інформації.

З отриманих результатів випливає, що ефективне зчитування стану можливе при початкових імпульсах струму, менших за розрахований мінімальний критичний. Інші особливості процесів зчитування вимагають додаткового дослідження, як теоретичного так і експериментального.

Список літератури

- Frangou, L., Oyarzun, S., Auffret, S., Vila, L., Gambarelli, S., & Baltz, V. (2016). Enhanced spin pumping efficiency in antiferromagnetic IrMn thin films around the magnetic phase transition. *Physical review letters*, 116(7), 077203.
- Gomonay, E. V., & Loktev, V. M. (2014). Spintronics of antiferromagnetic systems. *Low Temperature Physics*, 40, 17.
- Gomonay, E. V., & Loktev, V. M. (2015). The generalized Landau—Lifshitz equations as tools for description of the dynamics induced by spin-polarized current in multisublattice antiferromagnet. *Low Temperature Physics*, 41, 698.
- Hoffmann, A., & Bader, S. D. (2015). Opportunities at the frontiers of spintronics. *Phys. Rev. Applied*, 4(4), 047001.
- Kohn, A., Kovács, A., Fan, R., McIntyre, G. J., Ward, R. C. C., & Goff, J. P. (2013). The antiferromagnetic structures of IrMn 3 and their influence on exchange-bias. *Scientific reports*, 3, 2412.
- Landau, L., & Lifshitz, E. (1935). On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 8, 153.
- Marti, X., Fina, I., Frontera, C., Liu, J., Wadley, P., He, Q., ... & Kuneš, J. (2014). Room-temperature antiferromagnetic memory resistor. *Nature materials*, 13(4), 367.
- Wadley, P., Howells, B., Železný, J., Andrews, C., Hills, V., Campion, R. P., ... & Martin, S. Y. (2016). Electrical switching of an antiferromagnet. *Science*, 351(6273), 587–590.
- Гилмор, Р. (1984). *Прикладная теория катастроф*. Москва: Мир.

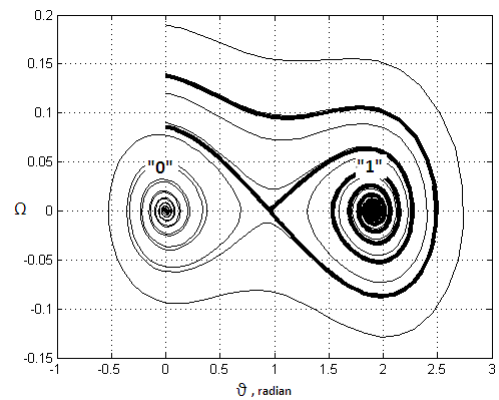


Рис. 2. Фазовий портрет досліджуваної динамічної системи

ДВОВИМІРНА МІШАНА ЗАДАЧА В ТЕХНОЛОГІЯХ ПОЛІГРАФІЧНОГО ВИРОБНИЦТВА

О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик, Т. С. Звінська

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
olgakushlyk64@gmail.com, bodo_kush@hotmail.com, tania.zvinska@gmail.com

Побудована математична модель визначення розподілу температури пластини-штампу в тигельній друкарській машині, проведено аналіз розв'язування двовимірної мішаної задачі для рівняння теплопровідності.

Ключові слова: тигельна друкарська машина, форма, рівняння теплопровідності, крайові умови, початкові умови, метод Фур'є, задача Штурма — Ліувілля.

На сьогоднішній день високий друк витіснений офсетним плоским друком, хоча для нього залишається актуальним використання при нумерації (післядрукарська обробка продукції), тисненні фольгою. Відомо, що в тигельній друкарській машині форма закріплюється на плоскій нерухомій поверхні, на яку друкарські валики накочують фарбу. Якщо форма є металом з полімерним покриттям, то подача робочої температури (її підтримки) теном $120\text{—}140^\circ$, а якщо магнієве кліше, тоді — $160\text{—}180^\circ$. У загальному випадку, оптимальний варіант вибору подачі температури визначається експериментально, виконавши невелику кількість макетів для отримання якісного візуального зображення. Постає питання описання закону зміни температури пластини (її зростання) до моменту виключення тена, коли підтримується температура навколишнього середовища.

У Кушлик-Дивульська (2012) наведено поняття теорії рівнянь математичної фізики, означення, теореми, класичні методи розв'язування задач математичної фізики. Розглянуто також основні методи для практичних задач вже побудованих математичних моделей фізичних процесів. На основі опрацювання теоретичного матеріалу, розв'язування типових задач (Кушлик-Дивульська, Поліщук & Орел, 2011), та більш науковому підході до вивчення дисципліни «Математичний опис процесів-2. Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології» складено математичну модель для описання нагрівання пластини з подальшим її аналізом.

На виробництві при підтримці сталої температури в цеху проводиться підігрів теном пластини тигеля для подальшого отримання відповідної продукції. Задача полягає у знаходженні розподілу температури прямокутної пластинки (як штамп кріпиться в тигельну машину) розміру $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$, якщо її початкова температура дорівнює $D = \text{const}$, на краях $x = 0$, $y = 0$ підтримується також нульова температура, на двох інших краях $x = b$ та $y = c$ відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, згідно з яким кількість тепла, що протікає через одиницю площі в одиницю часу пропорційна різниці температур і зовнішнього середовища. За припущень розгляду поміщення пластини в початок координат та вважаючи умовним нулем кімнат-

ну температуру, приходимо до відповідної математичної моделі двовимірної мішаної задачі:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + (x - b)(y - c)t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$u(x, y, 0) = D, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \quad (1)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) - hu_x(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, y, t) - hu_y(x, c, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

У записаній задачі початкова функція $\varphi(x, y, t) = 0$, крайові умови для $x = 0, y = 0$ першого роду, а для $x = b$ та $y = c$ — третього роду, які є однорідними (подальші дослідження передбачають зміну крайових умов на неоднорідні). Інтенсивність джерел тепла, розміщених всередині пластинки, дорівнює $f(x, y, t) = (x - b)(y - c)t$. Як описано вище, в окремих випадках, для відповідного покриття пластин, температура подається сталою величиною, вона є лінійно залежною від часу $y = kt$. У рівнянні теплопровідності вважаємо, у загальному випадку, коефіцієнтом число a , число $h = 1$.

Розв'язування задачі (1) за умови $f(x, y, t) = 0$ проведено за методом Фур'є

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t) \neq 0. \quad (2)$$

Підставляючи (2) у (1) та крайові умови, відокремлюючи змінні, отримуємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad (3)$$

та задачу для функції $V(x, y)$ в одержаній двовимірній задачі на власні значення $V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, яка розбивається на дві двовимірні задачі Штурма — Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X'(b) - X(b) = 0, X(0) = 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0; \\ Y'(c) - Y(c) = 0, Y(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Задачі (4), (5) є однотиповими. Нетривіальний розв'язок (4) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками для

$$X(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x, \quad \nu = \sqrt{\lambda}$$

системи рівнянь

$$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 0, \\ -\nu A \sin \nu b + \nu B \cos \nu b = 0. \end{cases}$$

Отже, для системи (4)

$$\nu = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2b} \right)^2, \quad X_n(x) = C_1 \sin \frac{\pi(2n-1)}{2b} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

відповідно,

$$\lambda - \mu = \left(\frac{\pi(2m-1)}{2c} \right)^2, \quad Y_m(y) = C_2 \sin \frac{\pi(2m-1)}{2c} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Отже, власним значенням задачі

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2b} \right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{2c} \right)^2$$

відповідатимуть власні функції

$$V_{n,m}(x,y) = A_{n,m} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2b} x \sin \frac{\pi(2m-1)}{2c} y, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де $A_{n,m} = C_1 C_2$ — деякий сталий множник і його, згідно з теорією, визначають таким чином, щоб норма власної функції $V_{n,m}(x,y)$ була рівна одиниці, тобто

$$\int_0^b \int_0^c V_{n,m}^2 dy dx = A_{n,m}^2 \int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi(2n-1)}{2b} x \sin^2 \frac{\pi(2m-1)}{2c} y dy dx = 1.$$

З останньої рівності знаходимо $A_{n,m} = 2(bc)^{-1/2}$.

Ортогональність функцій $\{V_{n,m}(x,y)\}$ у розглядуваному прямокутнику очевидна і не вимагає доведення.

Таким чином, система функцій

$$V_{n,m}(x,y) = 2(bc)^{-1/2} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2b} x \sin \frac{\pi(2m-1)}{2c} y \quad (6)$$

є ортонормованою системою власних функцій прямокутної мембрани.

Підставивши знайдені власні значення $\lambda_{n,m}$ у рівняння (3) та зінтегрувавши його, одержимо

$$T_{n,m}(t) = b_{n,m} e^{-a^2(\lambda_{n,m})t}, \quad b_{n,m} = \text{const},$$

$$u_{n,m}(x,y,t) = b_{n,m} e^{-a^2(\lambda_{n,m})t} V_{n,m}(x,y)$$

нескінченну множину частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (1), які задовольняють крайові умови.

Ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x, y, t) \quad (7)$$

також буде розв'язком рівняння (1) і задовольнятиме крайові умови, якщо він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази за змінними t, x, y в розглядуваній області

$$D = \{(x, y, t) \mid t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c\}.$$

Визначають коефіцієнти $b_{n,m}$ в ряді (7) з початкової умови

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Оскільки початкова математична модель задається неоднорідним рівнянням теплопровідності, тому

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} R_{n,k}(t) \sin \frac{\pi(2n-1)}{2b} x \sin \frac{\pi(2m-1)}{2c} y$$

І коефіцієнти $R_{n,k}(t)$ знаходимо підстановкою цього ряду в неоднорідне рівняння та початкову умову.

Запропонована математична модель задачі є досить трудомісткою в обчисленнях, тому зручно користуватись готовими програмними продуктами, наприклад, Matlab, і відразу будувати розв'язок графічно для подальшої оцінки проведеного експерименту.

Список літератури

- Кушлик-Дивульська, О. І. (2012). *Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології: Навчальний посібник*. Київ: КПІ.
- Кушлик-Дивульська, О. І., Поліщук Н. В., & Орел, Б. П. (2011). *Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології: Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи для студентів видавничо-поліграфічного інституту*. Київ: КПІ.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛІРНИХ ПРОФІЛІВ ДРУКАРСЬКИХ МАШИН ЦИФРОВОГО ДРУКУ

О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик, М. О. Петров

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
olgakushlyk64@gmail.com, bodo_kush@hotmail.com, questerprod@gmail.com

Показано відтворення корпоративних кольорів засобами цифрового друку, досліджено залежності колірної охоплення, показано застосування методу шансів для вибору показників друку.

Ключові слова: цифровий друк, кольоровідтворення, відтінок, контраст друку, ймовірність; метод шансів.

У статті Зоренко (2015а) проведено аналіз точності відтворення нейтрально-сірих відтінків при різноманітних режимах кольоровідтворення. Проаналізовано в монографії Зоренко (2015б) динаміку зміни загального контрасту друку та визначено раціональні режими технологій кольоровідтворення для додрукарських процесів підготовки тонового оригіналу. Однак, дані роботи стосуються офсетного способу відтворення поліграфічної продукції, відповідно ці правила можуть бути застосовані до цифрового друку дуже обмежено.

Для визначення колірної охоплення у цифрових методах друку (Домасев & Гнатюк, 2009) потрібна достатня кількість взірців кольору. Очевидно, що в якості таких взірців необхідно взяти, по-перше, базові фарби — жовту, пурпурну, голубу, синю, зелену, червону, чорну; по-друге, різні тонові градації (колірні густини) цих кольорів, наприклад, тонові шкали з деякої кількості взірців, змінюючих свою густину від 0% (білий колір) до 100% (колір максимальної насиченості) з деяким постійним чи змінним кроком, і, по-третє, кольори, що отримуються змішуванням двох базових кольорів один з одним (ці кольори будуть лежати на лінії, що з'єднує два базових кольори один з одним). Ці взірці відтворюються даним пристроєм на даному матеріалі, потім за допомогою спектрофотометра проводиться вимірювання спектрального апертурного коефіцієнту відбиття для кожного взірця і розрахування координат відносно обраного опорного білого кольору.

Число колірних взірців, що використовуються в розрахунках, повинно бути достатнім, щоб забезпечити необхідну точність (як правило, не менше 150—200 взірців). Проміжні значення колірних координат можуть бути отримані шляхом інтерполяції отриманих значень. Побудова колірної охоплення зазвичай проводиться для профілювання пристроїв, а тому можливо провести протилежні дії: використати колірний профіль для визначення його колірної охоплення. Для цього використовується програма ProfileMaker 5.0 і розмітка шкали (рис.1) TC 9.18 RGB, яка містить 918 взірців кольору.

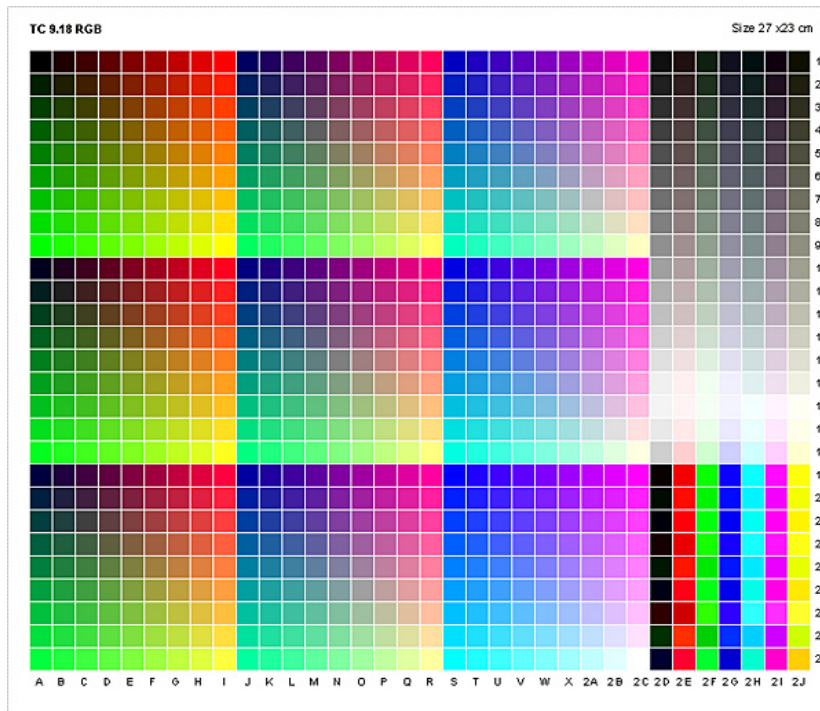


Рис. 1. Шкала TC 9.18 RGB

Колірне охоплення виражається у вигляді одного числового значення з побудованої фігури. Так як розрахунки для площини виключають одну повноцінну координату (рис. 2) колірної системи, результат у такому випадку матиме суттєву похибку. Тому для точного визначення колірного охоплення застосовується обчислення об'єму фігури у просторі, що вимірюється в кубічних дельта-Е (ΔE^3). Для цього можна застосовувати спеціальні програмні засоби, такі як Matlab, де можна візуалізувати фігуру та розрахувати її об'єм за допомогою спеціальної функції (qHull). Як альтернативи, застосовуються онлайн-калькулятори, які також візуалізують колірне охоплення за введеними даними та розраховують колірне охоплення по 8 вершинах.

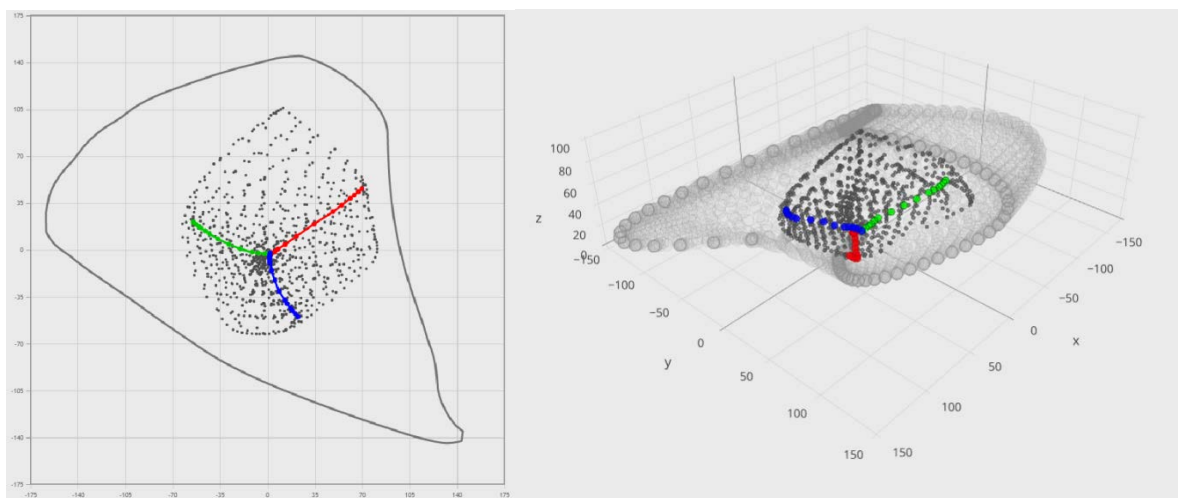


Рис. 2. Візуалізація колірного охоплення

Через те, що кожен окремий елемент може впливати на колірні характеристики, існують різні колірні профілі під різні умови. Проведена для досліджень систематизація ряду профілів за характеристиками, виділено 3 параметри, які впливають на колір, для яких можна підібрати відповідні колірні профілі, прогножуючи очікуваний результат за допомогою методу шансів:

1. Папір: глянцева або матова.
2. Фарба: сертифікована або чорнила від стороннього виробника.
3. Система друкування принтеру: 4-колірна (СМУК) або 6-колірна (СМУК+1c+1m).

Відповідно до означених параметрів можливо підібрати 8 різних їх комбінацій — колірних профілів, для яких можна отримати значення об'єму колірного охоплення в кубічних дельта-Е (ΔE^3).

З офсетного друку відомо, що стандартне колірне охоплення повинно бути приблизно 409 тис. ΔE^3 , та багато струменевих принтерів вже перевищують цей показник, наближаючись до колірного охоплення RGB (sRGB — 840 тис. ΔE^3 , Adobe RGB — 1220 ΔE^3).

Для принтерів серії Epson Stylus Photo, які актуально обрати для такого дослідження з літератури Домасев та Гнатюк (2009) дослідні показники колірного охоплення:

- 1) Сертифікована фарба, 6-колірів, глянцева папір — 553980 ΔE^3 ;
- 2) Сертифікована фарба, 6-колірів, матова папір — 653370 ΔE^3 .

На деяких типах паперу класу premium, колірне охоплення може сягати 700 тис. ΔE^3 і більше.

Часто виникають у реальних виробничих процесах явища, які пов'язані з необхідністю поєднувати фарби з різних партій виготовлення (відповідно вони мають різні колірні показники), чи комбінування сертифікованих та несертифікованих фарб. Для оцінки ймовірності потрапляння у відповідність кольоровому охопленню можна скористатись методом шансів.

Як відомо, шансом називають відношення ймовірності того, що подія відбудеться до ймовірності того, що вона не відбудеться, тобто для $P(A)$ — ймовірність події, маємо визначення шансової переваги (шансу) за формулою

$$\Omega = \frac{P(A)}{1 - P(A)}. \quad (1)$$

Проведено ряд експериментальних досліджень, як приклад, для сертифікованої фарби отримано профіль на глянцевому папері для 6-колірної системи друку: для 100 взірців отримано з невеликим відхиленням від контрольного значення (553980 ΔE^3) 92 профілі, для інших 8-ми можна вважати отримання браку. Заміна системи друкування на 4-колірну дала вже інший результат: тільки в 35 випадках значення було близьким до контрольного. За формулою (1) маємо для перших 100 взірців

$$\Omega_1 = \frac{P(A_1)}{1 - P(A_1)} = \frac{0,92}{0,08} = 11,5,$$

для другої групи взірців

$$\Omega_2 = \frac{P(A_2)}{1 - P(A_2)} = \frac{0,35}{0,65} = 0,54.$$

Тоді за допомогою відношення шансів можна пояснити взаємозв'язок між двома якісними величинами, власне

$$\omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{11,5}{0,54} \approx 21,3.$$

Уважають відношення шансів перехресним відношенням або наближеним відносним ризиком, тому у проведених розрахунках не варто міняти систему на 4-колірну. Проведення таких досліджень є актуальним для невеликих типографій для виконання невеликої кількості замовлень, де можна було б нестачу матеріалів компенсувати наявними іншими.

Список літератури

- Домасев, М. В., & Гнатюк, С. П. (2009). *Цвет, управление цветом, цветовые расчеты и измерения*. Санкт-Петербург: Питер.
- Зоренко, Я. В. (2015а). Параметри тонових оригіналів у сучасних методах кольоровідтворення. *Технологія і техніка друкарства*, (1(47)), 24—29.
- Зоренко, Я. В. (2015б). *Технології репродукування плоским офсетним друком: Монографія*. О. М. Величко (ред.). Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет».

ФОРМУВАННЯ ВІДБИТКА У ПЛОСКОМУ ОФСЕТНОМУ ДРУЦІ

О. І. Кушлик-Дивульська, Б. Р. Кушлик

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

olgakushlyk64@gmail.com, bodo_kush@hotmail.com

Проведено аналіз практичних підходів з математичної точки зору на основі експериментальних досліджень щодо удосконалення якості офсетного друку. Розглянуто та досліджено механічне перенесення фарби на задруковуваний матеріал методами інтегрального числення за допомогою елементів теорії поля.

Ключові слова: офсетний друк, технологічний процес, потік векторного поля, растрова точка, інтегральне числення, об'єм, площа.

Для забезпечення ідентичності відбитків упродовж всього накладу має бути стабільним встановлений оптимальний режим друкування. У статті Кушлик-Дивульська та Кушлик (2017) показано використання математичної статистики для визначення виду розподілу вимірюваних основних чинників, що впливають на якість виготовлення малотиражної поліграфічної продукції плоским офсетним друком, виконання основного закону похибок. Розглянуто можливість оптимального налаштування виробничого процесу на відповідному етапі його підготовки з метою економії витратних матеріалів.

Теоретично, досягнувши ідеальних показників точної подачі фарби та зволожувального розчину, при певній стабільній швидкості, процес повинен стабілізуватися (Кушлик & Кушлик-Дивульська, 2017). Однак, на практиці неможливо отримати ідеально однакові значення подачі фарби та зволожувального розчину по друкарських ділянках хоча б лише тому, що фарба подається зонально, де в кожній зоні відкриття фарбового ножа характеризує певну кількість фарби, що подається у фарбовий апарат відповідно до кількості друкувальних елементів на цій ділянці на друкарській формі; зволожувальний розчин при цьому подається суцільним накатом, і його практично неможливо дозувати по кожній зоні окремо.

У роботі Кушлик (2014) розглянуто друкувальний елемент із позиції теорії поля. Оскільки друкувальний елемент має чітко означену площу, тому визначено її як скалярне поле, яке необхідно перенести на задруковуваний матеріал. Одиничний растровий елемент, точніше кількість фарби, яка на ньому знаходиться, описано за допомогою формули Остроградського — Гаусса, як об'єм фігури, що має певну площу основи та певний тип поверхні, що її обмежує зверху. Через потік векторного поля можна характеризувати таке явище, як перенесення фарби із друкарської форми на відбиток. Відповідно до цього, знаючи нормативні значення площі друкувального елемента на друкарській формі, норму розтискування, а також нормативну товщину фарбового шару, можна точно визначити кількість фарби, яка необхідна для досягнення оптимальної насиченості в даній точці. Або, навпаки, за наявності якихось збоїв, чітко визначити, яка саме із причин викликає спотворення.

Розглядається у просторі деяка область V , у цій області задано поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Відносно поверхні σ можна припускати, що в кожній її точці визначено нормаль

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}, \quad (|\vec{n}| = 1).$$

Нехай у кожній точці поверхні σ визначено векторну функцію

$$\vec{F} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k},$$

тобто векторне поле на поверхні σ . Розіб'ємо поверхню σ довільним способом на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Сума

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{n}_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)) \Delta\sigma_i.$$

є інтегральною, а її скінченну границю за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин та незалежності від вибору точок $M_i \in \Delta\sigma_i$ називають поверхневим інтегралом другого роду:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)) \Delta\sigma_i.$$

За правилом обчислення скалярного добутку для виразу i -го доданку маємо

$$(\vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)) \Delta\sigma_i = |\vec{F}_i| |\vec{n}_i| \cos\varphi \Delta\sigma_i = |\vec{F}_i| \cos\varphi \Delta\sigma_i. \quad (1)$$

Останній вираз визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}_i| \cos\varphi$. Отже, коли відомо, що векторне поле \vec{F} є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ , то добуток (1) дорівнює об'єму рідини, яка протікає через площу $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора \vec{F}_i .

Розглянемо векторне поле

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(точка-растровий елемент описана її положенням просторі, тобто радіус-вектором), як швидкість рідини, яка змінюється водночас зі зміною координат точки. Обчислимо його потік через поверхню прямого циліндра S з радіусом R та висотою H , вісь якого збігається з віссю Oz , а нижня основа лежить на площині Oxy , яку можна інтерпретувати як частину плоскої області відбитка, на яку переноситься фарба (задруковуваний матеріал). Не втрачаючи загальності, вважаємо нормаль направлену на зовнішній бік циліндра.

Для бічної поверхні циліндра S_1 справедлива рівність

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_1^0 = \text{пр}_{\vec{n}_1^0} \vec{a} = R.$$

На верхній основі циліндра S_2 маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_2^0 = \text{пр}_{\vec{n}_2^0} \vec{a} = H,$$

на нижній основі S_3 маємо, що

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_3^0 = 0.$$

У цьому разі обчислення потоку рідини дає

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1^0 dS + \iint_{S_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2^0 dS + \iint_{S_3} \vec{a} \cdot \vec{n}_3^0 dS = \\ &= \iint_{S_1} R dS + \iint_{S_2} H dS + \iint_{S_3} 0 dS = R \cdot 2\pi R H + H \pi R^2 = 3\pi R^2 H. \end{aligned}$$

Аналогічний результат отримуємо за відомою формулою Остроградського — Гаусса, а саме

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iiint_V \text{div } \vec{a}(M) dx dy dz, \text{ де} \\ \text{div } \vec{a}(M) &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \Pi &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iiint_V 3 dx dy dz = 3V_{\text{циліндра}}. \end{aligned}$$

Оскільки об'єм вказаного циліндра $V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H$, тому $\Pi = 3\pi R^2 H$.

Отже, якщо у формулі Остроградського — Гаусса покласти

$$P = x, Q = y, R = z,$$

то отримаємо вираз для обчислення об'єму області через інтеграл за його орієнтованою в додатному напрямку зовнішню нормалю до межі області

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy.$$

З іншого боку, розглянуто формулу Остроградського — Гаусса для плоского випадку, власне на площині Oxy . Якщо напрям дотичної в кожній точці співпадає з додатним напрямком обходу кривої, вектор \vec{n} — зовнішня нормаль до кусково-гладкого контура Γ , який обмежує вказану правильну гладку (кусково-гладку) область G в площині, тоді

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{n} dl = \int_{\Gamma} P dy - Q dx.$$

У випадку для перенесення фарби на площину, маємо на площині круг радіуса R . Обчислення за формулою, з однієї сторони, дає

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 2S_{\text{круга}} = 2\pi R^2.$$

Для обчислення

$$\int_{\Gamma} Pdy - Qdx$$

записуємо параметричні рівняння кола

$$\int_{\Gamma} Pdy - Qdx = \int_0^{2\pi} (R \cos t \cdot R \cos t - R \sin t \cdot (-R \sin t)) dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2.$$

Отже, проведені дослідження вказують на можливість визначення товщини фарбового шару, як висоти циліндричної поверхні, з урахуванням її максимального перенесення на площину

$$P = 3\pi R^2 H \approx 2\pi R^2.$$

Математичні обчислення дають можливість корегування подачі фарбного розчину в процесі налаштування друкарської машини до друку та оптимальності її передачі на відбиток.

Список літератури

- Кушлик, Б. Р. (2014). Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком. (Дис. канд. техн. наук). Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ: ВПК «Політехніка».
- Кушлик, Б. Р., & Кушлик-Дивульська, О. І. (2017). *Стабілізація друкування малотиражної продукції офсетним друком: Монографія*. О. М. Величко (Ред.). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Кушлик-Дивульська, О. І., & Кушлик Б. Р. (2017). Принципи статистичного аналізу показників при аналізі якості відбитків плоского офсетного друку. *Технологія і техніка друкарства*, (1(55)), 10—20.

РОЗШИРЕННЯ СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

С. М. Лапач

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

lapach@ukr.net

У роботі розглядається розширення сфери застосування теорії планування експериментів на інші багатовимірні методи статистики, в яких виконується побудова моделей, а саме, дисперсійний аналіз, кластерний аналіз, дискримінантний аналіз. Можливість такого поширення ґрунтується на застосуванні робастних планів експерименту, які задовольняють множині вимог, висунутих до навчальних матриць у вказаних методах.

Ключові слова: планування експериментів, регресійний аналіз, дискримінантний аналіз, кластерний аналіз, дисперсійний аналіз, робастні плани експерименту, регресійний аналіз.

Стан проблеми. На початку свого існування планування експериментів чітко позиціонувалося як частина вибіркового методу, яка забезпечувала при обмежених ресурсах на експериментальні дослідження отримання оцінок заданої якості й надійності, наприклад, Финни (1970) і Шенк (1972). Але у процесі розвитку став домінувати напрям, у якому превалювали математичні властивості планів експерименту й оцінок математичної моделі (Бродский, 1976; Ермаков, 1983). У результаті планування експериментів стало розглядатися як метод у рамках регресійного або дисперсійного аналізу. При цьому ці два розділи планування стали повністю незалежними один від одного, з різними планами. Віддалення від вибіркового методу і превалювання теоретичної частини над потребами наукової практики викликало ряд проблем у теорії планування експерименту, які розглядалися, зокрема, в Лапач (2012), Налимов (1971), Налимов (1980). Крім сказаного, в теорії планування експерименту відмежовувалися від так званого пасивного експерименту, тобто спостережень і накопиченої інформації. Проте в багатьох випадках при проведенні реальних досліджень відсутня можливість активного експерименту. Відмова працювати з такого роду даними різко обмежує сферу застосування теорії планування експериментів. У даній роботі розглядатимемо штучне обмеження сфери планування експериментів регресійним аналізом (і то частково: тільки активний експеримент) з метою поширення його на більшість багатовимірних статистичних методів, результатом яких є математична модель в тій чи іншій формі.

Розширення сфери застосування. Потрібно сказати, що роботи з розширенням сфери застосування теорії планування експерименту почали з'являтися досить давно. Початкове розділення планування експериментів на обслуговування регресійного аналізу і ANOVA окремо було викликано впевненістю, що методи обробки результатів у регресійному аналізі непридатні для моделей дисперсійного аналізу, так як у ньому незалежні змінні мають нечислову природу (вимірюються у шкалі найменувань). У роботах Айвазяна (1985) і Трофимова

(1985) показана можливість використання стандартних схем методу найменших квадратів до змінних нечислової природи, звідси, з урахуванням її (природи) при подальшому аналізі та використанні отриманих математичних моделей. У подальшому Дрейпер (2007) показав переваги застосування регресійного аналізу замість ANOVA, таким чином прибравши цю перепону. Аналогічна робота відносно аналізу таблиць часток та пропорцій за допомогою регресійного аналізу виконано в Лапач (2001). У багатьох прикладних роботах незалежно від теоретичних дискусій і обґрунтувань в одній регресійній моделі успішно застосовувались одночасно незалежні змінні як числової, так і нечислової природи, наприклад, Радченко (1988) і Радченко (2014).

У ряді робіт виконано розширення сфери застосування планування експериментів на дискримінантний аналіз (Зварич, 2017) і пасивний експеримент (Лапач, 2013).

За межами розгляду з широко застосовуваних багатовимірних статистичних методів залишився тільки кластерний аналіз. По суті, це комплекс процедур з геометричною сутністю і деякими статистичними оцінками, які на практиці практично не застосовуються. У більшості робіт з кластерного аналізу ніяких вимог до матриці, за якою виконуються обчислення, не приводиться. Але вони таки існують (Енюков (1986), Мандель (1988)), хоча й ігноруються більшістю. Це — незалежність класифікаційних змінних і випадковість матриці. На перший погляд, у кластерному аналізі немає місця для застосування планування експериментів. Але, по-перше, є досить поширений клас задач регресійного аналізу з неоднорідними областями факторного простору (Плюта (1989), Лапач & Радченко (2016)). У цих задачах побудові регресійної моделі передують визначення однорідних під областей факторного простору. Тобто, фактично план експерименту використовується не для регресійного, а для кластерного аналізу. Для регресійного фактично використовуються фрагменти плану. Можемо констатувати наявність додаткових особливих вимог у таких задачах, де використовується тандем «кластерний + регресійний»:

- 1) збереження квазі-оптимальних властивостей за випадковими фрагментами плану, які утворились після виділення кластерів для можливості побудови якісних моделей;

- 2) рівномірність розподілу точок в багатовимірному просторі і якнайбільша кількість рівнів варіювання для забезпечення можливості більш точного виділення кластерів;

- 3) можливість побудови фрагментів плану, якщо кластер включає занадто мало точок.

По-друге, існують класи задач кластерного аналізу в яких проводиться активний експеримент, а не оброблення накопичених спостережень. Наприклад, це задачі маркетингу, у яких досліджуються розподіл споживачів на групи за смаками і психотипами. Для розбиття на групи використовується кластерний аналіз та експеримент активний, тобто може бути сплановано. Особлива вимога тут така ж, як друга в попередній групі, тобто рівномірність розподілу точок у

багатовимірному просторі і якнайбільша кількість варіювання для забезпечення можливості більш точного виділення кластерів.

Якщо ми розглянемо робастні плани експерименту на основі ЛП_τ-чисел (Лапач, 2001, 2016), то можемо зробити висновок про можливість і доцільність їх застосування в даному контексті. Так, п. 2 вони задовольняють повністю; п. 1 — частково, так як можуть бути кластери занадто малого розміру, для яких фрагмент плану не буде зберігати свої квазиоптимальні властивості; п. 3 задовольняється процедурами для добудови вибірки, розробленими для поширення планування на пасивний експеримент (Лапач, 2013).

Отже, при можливості активного експерименту і при застосуванні кластерного аналізу в інтересах регресійного доцільно використовувати робастні плани експерименту на основі псевдовипадкових чисел.

Відповідність робастних планів різних видів вимогам, які висуваються при проведенні багатофакторних досліджень зведено в табл. 1.

Звертаємо увагу, що тут відсутні властивості, які зазвичай нібито відповідають вимогам, і приводяться для різних видів плану (Налимов, 1980). Це викликано тим, що критерії, які висуваються теоретиками класичної теорії планування експериментів, як критерії оптимальності планів, дуже слабо зв'язані з вимогами експериментаторів і навіть з вимогами вибіркового методу. Так, про забезпечення репрезентативності у випадку застосування будь-якого критерію оптимальності планів мова навіть не йде. Репрезентативність може бути побічним наслідком застосування багаторівневих багатофакторних регулярних планів (Бродский, 1976), але розробники не тільки не планували, але навіть не задумувалися про необхідність цього. Зауважмо при цьому, що виконання ряду вказаних в табл. 1 вимог веде до набуття планом оптимальності в розумінні класичної теорії планування експериментів. Мова йде про такі вимоги як незалежність факторів, рівномірний розподіл точок плану в багатовимірному просторі, максимальне число рівнів варіювання. Зокрема, плани, які задовольняють вказаним вимогам, наближаються за своїми властивостями до А- і D-оптимальних планів.

Таблиця 1. Відповідність планів вимогам

| | | Вид плані | | |
|-----------------|--|----------------|---------------------------|-----------------------|
| | | На основі БФРП | На основі ЛП _τ | Узагальненої свастики |
| Вимоги до плану | Незалежність факторів | Так | Так | Так |
| | Максимальне число рівнів варіювання | Ні | Так | Так |
| | Стійкість до малих змін в плані (значення, пропуск окремих рядків) | Ні | Так | Так |
| | Можлива варіативність умов | Ні | Так | Частково |

| | | | |
|--|-----|-----|----------|
| Мінімізація ресурсів на виконання досліджень | Ні | Так | Так |
| Гарантований достатній розмір для отримання надійних результатів | Так | Так | Ні |
| Випадковість | Ні | Так | Частково |
| Рівномірний розподіл точок плану в багатовимірному просторі | Так | Так | Так |
| Можливість оперативної зміни розміру вибірки | Ні | Так | Ні |
| Можливість використання вже існуючих експериментів | Ні | Так | Ні |

Висновки. Робастні плани експерименту основі псевдовипадкових чисел (ЛП_τ або Холтона) можуть розглядатись як універсальні плани для застосування в методах багатовимірної статистики таких як регресійний, дисперсійний, дискримінантний і кластерний аналіз. Для цього вони мають всі необхідні властивості. Також розподіл на активний і пасивний експеримент, який існує тільки в теорії планування експериментів може бути усунено. Указані твердження було підтверджено як теоретичним обґрунтуванням різних дослідників так і практичним застосуванням у реальних дослідженнях.

Отже, теорія планування експериментів повинна бути розділом вибіркового методу, який займається формуванням вибірок для багатofакторних статистичних методів, у зв'язку з чим необхідна ґрунтовна переробка теоретичних основ цього розділу математичної статистики.

Список літератури

- Айвазян, С. А., Енюков, И. С., & Мешалкин, Л. Д. (1985). *Прикладная статистика. Исследование зависимостей*. Москва: Финансы и статистика.
- Бродский, В. З. (1976). *Введение в факторное планирование эксперимента*. Москва: Наука.
- Долішній, А. Ю., & Лапач, С. М. (2013). Застосування регресійного аналізу замість ANOVA. В *Тезах доповідей загальноуніверситетської науково-технічної конференції молодих вчених та студентів, присвяченої дню Науки. Секція «Машинобудування», підсекція «Технологія машинобудування»*, Київ, 21—31 травня (с. 31—32). Київ: КПІ.
- Дрейпер, Н., & Смит, Г. (2007). *Прикладной регрессионный анализ* (3-е изд.) Москва: Диалектика.
- Енюков, И. С. (1986). *Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа: Пакет ППСА*. Москва: Финансы и статистика.
- Ермаков, С. М. (Ред.) (1983). *Математическая теория планирования эксперимента*. Москва: Наука.
- Зварич, В. І., & Лапач, С. М. (2017). Дискримінантний аналіз і планування. В *Матеріалах Всеукраїнської науково-технічної конференції молодих вчених та студентів «Інновації*

- молоді — машинобудуванню», Київ, 21—31 травня. Київ: КПІ.*
- Лапач, С. Н., Радченко, С. Г., & Бабич, П. Н. (1993). Планирование, регрессия и анализ моделей PRIAM (ПРИАМ). *Каталог программные продукты Украины*. Киев, 24–27.
- Лапач, С. Н., Чубенко, А. В., & Бабич, П. Н. (2001). *Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel* (2-е изд. перераб. и доп.). Киев: Морион.
- Лапач, С. М., Радченко, С. Г. (2007). Проблеми визначення структури рівняння регресії в множинному регресійному аналізі. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»,* (1), 150—155.
- Лапач, С. Н., & Радченко, С. Г. (2012). Основные проблемы построения регрессионных моделей. *Математичні машини і системи,* (4), 125–133.
- Лапач, С. М. (2013). Поширення методів планування експерименту на пасивний експеримент. В *Тезах доповідей Восьмої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання. МОДС 2013»,* Чернігів — Жукин, 24—28 червня (с. 329—324). Чернігів: Черніг. держ. технол. ун-т.
- Лапач, С. Н., & Радченко, С. Г. (2016). Регрессионный анализ в условиях неоднородности факторного пространства. *Математичні машини і системи,* (3), 55—63.
- Лапач, С. Н. (2016). Робастные планы эксперимента. *Математичні машини і системи,* (4), 111—121.
- Мандель, И. Д. (1988). *Кластерный анализ*. Москва: Финансы и статистика.
- Налимов, В. В. (1971). *Теория эксперимента*. Москва: Наука.
- Налимов, В. В., & Голикова, Т.И. (1980). *Логические основания планирования эксперимента*. (2-е изд., перераб. и доп.). Москва: Металлургия.
- Плюта, В. (1989). *Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании*. Москва: Финансы и статистика.
- Радченко, С. Г., Бурбело, Ю. С., Котенко, Э. В., Лапач, С. Н., Сидоренко, Ю. А., & Лищинский, В. С. (1988). Оптимизация технологических условий сварки полиэтиленовых труб. *Пластические массы,* (9), 29—31.
- Радченко, С. Г., Лапач, С. Н., Двейрин, А. З., & Василевский, Е. Т. (2014). Математическое моделирование прочности болтовых соединений композиционных материалов типа углепластиков. *Открытые информационные технологии: Сб. науч. тр.* Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», (63), 61—71.
- Трофимов, В. П. (1985). *Логическая структура статистических моделей*. Москва: Финансы и статистика.
- Финни, Д. (1970). *Введение в теорию планирования эксперимента*. Москва: Наука.
- Шенк, Х. (1972). *Теория инженерного эксперимента*. Москва: Мир.

МОДЕЛІ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ДАНИМИ В ЕКОЛОГІЇ

В. В. Листопадова, М. В. Хоменко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

listopadovavv@gmail.com, nushevo17@gmail.com

Для дослідження біосистем та популяцій в екології використовують математичні моделі, в основі яких лежать диференціальні рівняння. У статті розглянуто спосіб, який дозволяє враховувати невизначеність даних і параметрів, якщо біосистема моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: біосистема, математична модель, система диференціальних рівнянь.

Біосистема чи окрема популяція вивчаються в часовій динаміці, а саме досліджуються «точковими» моделями, в основі яких лежать звичайні диференціальні рівняння (Вольтерра, 1976). У цьому випадку маються на увазі моделі, параметри яких залежать тільки від часу і описують їх зміну. Математично це представляється у вигляді систем диференціальних рівнянь. Якщо модель «розподілена», то параметри біосистеми залежать від просторових змінних. У такому випадку в основі моделі лежать диференціальні рівняння в частинних похідних або інтегро-диференціальні рівняння. Але при моделюванні конкретних біосистем виникає складність, пов'язана з неточністю даних. Так як вихідний стан і параметри функціонування екосистем нам точно не відомі, то задають інтервальні оцінки (Полуэктов, 1974).

Ми розглянемо спосіб, який дозволить урахувати невизначеність даних і параметрів для випадку, якщо початкова «точкова» модель складається з системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Модель з невизначеними даними. Уважатимемо, що біосистема моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}_+$ — параметр часу, \mathbb{R} — множина дійсних чисел, $x = x(t) \in D \ni \mathbb{R}_t^n$

— вектор чисельності родів. Тоді $\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n)' \mid \forall i x_i \in \mathbb{R} \right\}$ і

$\mathbb{R}_+^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \right\}$, «'» — позначає дію транспонування матриці, у тому

числі й вектора-стовпця чи вектора-рядка. Далі індекси у векторів будемо писати зверху, а їх компоненти — знизу. Припустимо існування замкнутого інваріанта

відносно системи рівнянь (1) множини $D \in \mathbb{R}^n$. Інваріантність розуміється

в тому сенсі, що якщо $x(0) \in D$, то $x(t) \in D$ для будь-яких $t \geq 0$, для яких існує розв'язок. При накладанні на систему рівнянь (1) початкової умови

$$x(0) = x^0, \quad (2)$$

отримаємо задачу Коші.

Умова гладкості функції f забезпечує існування тільки одного розв'язку в околі точки $t = 0$. Припустимо, що існує єдиний розв'язок задачі для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\varphi(t, x)$ функцію, якій належить стан біосистеми заданому значенню x у момент часу t . При цьому використаємо ідеї базового поняття нечіткої логіки, наведені в роботах Заде (1976), Zadeh (1969), які стосуються нечітких множин, описаних функціями належності цим множинам, що можуть приймати будь-які значення в інтервалі $[0, 1]$, а не тільки значення 0 чи 1.

Нехай функція $\varphi : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ неперервна за x в \mathbb{R}_+^n . Також накладемо умову, що більшому значенню функції $\varphi(t, x)$ відповідає більша «впевненість» в тому, що стан біосистеми в момент часу t дорівнює x . Терміна «ймовірність» ми будемо уникати, так як мова йде не про випадковість, а про невизначеність.

Позначимо через $\rho(t, \tau, x^\tau)$ розв'язок $x(t)$ системи рівнянь (1) у момент часу t при умові $x(\tau) = x^\tau$. Нехай G — комплексна підмножина в \mathbb{R}^n з гладкою границею θ . Тоді позначимо

$$G_t = \rho(t, 0, G). \quad (3)$$

Отже, множина G_t комплексна і має гладку границю $\theta_t = \rho(t, 0, \theta)$.

Лема 1. Нехай $\varphi(t, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ і $\int_{G_t} \varphi(t, x) dx$ не залежать від t . Тоді $\varphi(t, x)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} + \operatorname{div}(\varphi f) = 0. \quad (4)$$

Лема 2. Нехай задано початкову умову

$$\varphi(0, x) = \varphi_0 \in C^1(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Тоді розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\rho(0, t, x)) e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\tau, \rho(\tau, t, x)) d\tau} \quad (6)$$

2. Невизначеність даних в класичних моделях. Багато класичних моделей зображаються системою вигляду (1) з

$$f(t, x) = f(x) = (a - Bx)x, \quad (7)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, a і B — вектор і матриця відповідних розмірностей. Елементи вектора a і матриці B вважаємо задано точно, а за викладеною схемою вважатимемо заданий з функції належності $\varphi_0(x^0)$ початковий стан x^0 біосистеми.

Лема 3. Якщо матриця B — невироджена, то $\forall x \neq 0$

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\rho(0, t, x)) e^{bB^{-1}at - (e + bB^{-1}) \ln \frac{x}{\rho(0, t, x)}}, \quad (8)$$

де \ln використано поелементно, e — вектор-рядок з n одиниць, b — вектор-рядок діагональних елементів матриці B .

Потрібно зауважити, що формулою (7) описують багато класичних моделей біосистем.

Наприклад, розглянемо моделі динаміки чисельності для біосистем типу «хижак — жертва».

Приклади.

1. В одновимірному випадку рівняння Ферхюльста — Пірла з $f(x) = r \frac{K - x}{K}$ є частинним випадком рівняння (7) з $a = r$ і $B = \frac{r}{K}$. Тоді з формули (8) отримаємо:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\rho(0, t, x)) \left[\frac{\rho(0, t, x)}{x} \right]^2 e^{rt}. \quad (9)$$

2. Для біосистем, якщо $b = 0$ з формули (8) одержимо формулу:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\rho(0, t, x)) \prod_{i=1}^n \frac{x_i(0, t, x)}{x_i}. \quad (10)$$

Це справедливо для моделей динаміки чисельності системи «хижак — жертва».

Біосистема типу «хижак — жертва» описується системою рівнянь моделі Лоткі — Вольтерра (Вольтерра, 1976):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(x_1)x_1 - V(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = kV(x_1)x_2 - m(x_2)x_2 \end{cases}. \quad (11)$$

У лінійному випадку

$$\varepsilon(x_1) \equiv \varepsilon = const, m(x_2) \equiv m = const, V(x_1) = ax_1$$

система набуде вигляду (7) при $n = 2$ з

$$a = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -m \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ ka & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, справедлива формула (10).

Висновок. У даній статті розглянуто біосистему, яка моделюється системою диференціальних рівнянь. При цьому параметри вважаються неперервними. Таким чином, це дозволяє поставити і розв'язати нові задачі, які принципово не можуть бути розв'язані з використанням більш простіших моделей. До таких, наприклад, відносять: дослідження коливань чисельності, вивчення властивостей показника росту чисельності біосистеми, вивчення моментів вікового розподілення. Неперервна модель дозволяє компактно викласти всі основні результати.

Список літератури

- Zadeh, L. A. (1969). Biological application of the theory of fuzzy sets and systems. In *The Proceedings of an International Symposium on Biocybernetics of the Central Nervous System* (pp. 199–206). Little Brown.
- Алексеев, В. В., Крышев, И. И., & Сазыкина, Т. Т. (1992). *Физическое и математическое моделирование экосистем*. Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат.
- Вольтерра, В. (1976). *Математическая теория борьбы за существование*. Москва: Наука.
- Заде, Л. А. (1976). *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. Москва: Мир.
- Израэль, Ю. А. (1984). *Экология и контроль состояния природной среды*. Москва: Гидрометеоиздат.
- Полуэктов, Р. А. (1974). *Динамическая теория биологических популяций*. Москва: Наука.

**ДО ПОСТАНОВКИ ТА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ
ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК
У ВИГЛЯДІ ЕЛІПТИЧНОГО ПАРАБОЛОЇДА**

В. Ф. Мейш, Є. Д. Бєлов

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
vfmeish@gmail.com

В роботі розглядається постановка та чисельний алгоритм розв'язування задач теорії оболонок у вигляді еліптичного параболоїду. Для розв'язку вихідної системи рівнянь використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих співвідношень по просторовим неортогональним координатам та явній апроксимації по часовій координаті. Наведено числовий приклад.

Ключові слова: оболонка у вигляді еліптичного параболоїда, динамічні процеси, чисельні методи.

Розглядається оболонка постійної товщини у вигляді еліптичного параболоїда. Серединна поверхня вихідної оболонки задається в криволінійній неортогональній системі координат x^1, x^2 . Згідно параметричного завдання серединної поверхні оболонки використовуються співвідношення (Бахвалов, Бабушкин & Іваницькая, 1958; Бабенко, Бобир, Бойко & Боронко, 2009)

$$x = ax^1 \cos x^2, \quad y = bx^1 \sin x^2, \quad z = (x^1)^2, \quad x^1 \in [0; \infty), \quad x^2 \in [0; 2\pi] \quad (1)$$

Рівняння (1) є параметричними рівняннями еліптичного параболоїда (рис. 1).

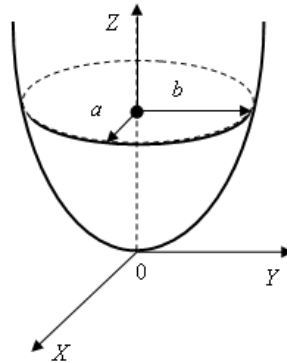


Рис. 1

Рівняння (1) визначають коефіцієнти першої та другої квадратичної форми серединної поверхні оболонки, що розглядається, згідно формул

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j}, \quad (i, j = 1, 2); \quad (2)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} \right].$$

Згідно з формулами (1) визначається фундаментальний визначник метричного тензора g . При цьому, $g = a_{11}a_{22} - a_{11}^2$, $g \neq 0$, що вказує на неортогональність вихідної системи рівнянь.

Динамічну поведінку оболонок у вигляді еліптичного параболоїда описують за допомогою лінійного варіанту уточненої теорії тонких оболонок типу Тимошенка (Головко, Луговой & Мейш, 2012). Закон розподілення переміщень по товщині оболонки приймається у вигляді

$$u_1^z = u_1(x^1, x^2, t) + z\phi_1(x^1, x^2, t), \quad (3)$$

$$u_2^z = u_2(x^1, x^2, t) + z\phi_2(x^1, x^2, t),$$

$$u_3^z = u_3(x^1, x^2, t);$$

$$u^{1z} = u^1(x^1, x^2, t) + z\phi^1(x^1, x^2, t) \quad (4)$$

$$u^{2z} = u^2(x^1, x^2, t) + z\phi^2(x^1, x^2, t).$$

У співвідношеннях (3), (4) величини з нижніми індексами відповідають коваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки $\bar{U}_1 = (u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2)$, а величини з верхніми індексами — контрваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень $\bar{U}^1 = (u^1, u^2, u^3, \phi^1, \phi^2)$ (Головко та ін., 2012; Галимов, 1977).

Для виведення рівнянь коливань конічних оболонок застосовується варіаційний принцип Гамільтона — Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (5)$$

де Π — потенціальна, K — кінетична енергії оболонки відповідно, A — робота зовнішніх сил.

Після стандартних перетворень у функціоналі (5) отримаємо наступні рівняння коливань вихідної оболонки в загальному вигляді:

$$\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i, \quad (i, j = 1, 2); \quad (6)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3; \quad \rho I \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i.$$

У формулах (3) індексами 1, 2 позначені змінні по координатах x^1, x^2 : $u^1, u^2, u_3, \phi^1, \phi^2$ — контрваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} — контрваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів; P^i, P_3, m^i — компоненти зусиль на поверхні

оболонки; ∇_i — контрваріантна похідна; ρ — густина матеріалу оболонки; h — товщина оболонки; $I = h^3 / 12$.

У розгорнутому вигляді, згідно з Кильчевский (1972) рівняння коливань (3) в дивергентній формі записуються

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \quad (7) \\
& + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{1n} - b_2^1 T^{2n} = \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}; \\
& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \\
& + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{22} + q^2 = \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}; \\
& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + \\
& + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + q^3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \\
& + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t^2}; \\
& \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \\
& + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

У співвідношеннях (7) величини Γ_{ij}^k є коефіцієнтами символів Крістоффеля другого роду (Бабенко та ін., 2009; Кильчевский, 1972).

Для побудови чисельного алгоритму використовується інтегро-інтерполяційний підхід побудови скінчено-різницевих схем за просторовими координатами x^1, x^2 та явній різницевій апроксимації за часовою координатою t (Головка та ін., 2012; Навал, Пацюк & Римский, 1986). Розглядається побудова різницевих рівнянь на прикладі першого рівняння системи (7). Інтегруємо перше рівняння системи (7) по області

$$\Omega_1 = \left\{ x_{l-1/2}^1 \leq x^1 \leq x_{l+1/2}^1, x_{m-1/2}^2 \leq x^2 \leq x_{m+1/2}^2 \right\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \right. \quad (8)$$

$$\left. + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} - b_2^1 T^{23} + q^1 \right] d\Omega dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} \right] d\Omega dt.$$

У цьому випадку різницевий аналог першого рівняння (7) має вигляд:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{11})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{11})_{l-1/2,m}^n \right] + \quad (9) \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l-1/2,m}^n \right] + \\ & + (\Gamma_{11}^1 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^1 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^1 T^{22})_{l,m}^n - \\ & - (b_1^1 T^{13})_{l,m}^n - (b_2^1 T^{23})_{l,m}^n + q_{l,m}^1 = \rho h (u_{l,m}^1)_{\bar{t}\bar{t}}. \end{aligned}$$

У різницевих рівняннях (9) Δx^1 , Δx^2 , Δt — відповідають різницеvim крокам за просторовими та часовій координатам. Позначення різницевих величин та їх похідних запроваджено згідно з роботами Головка та ін. (2012), Навал та ін. (1986), Самарський (1977). Як чисельний приклад, розглядалася задача динамічної поведінки оболонки вигляду еліптичного параболоїду при $a/b = 1,2$ при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження. Покладалися умови жорсткого защемлення у вершині та на зрізі параболоїда. Отримані залежності величин u_3 за координатою x^1 у перерізах $x^2 = 0$ та $x^2 = \pi/2$ в різні моменти часу на досліджуваному часовому інтервалі.

Список літератури

- Бахвалов, С. В., Бабушкин, Л. И., & Иваницкая, П. П. (1958). *Аналитическая геометрия*. Москва: Учпедгиз.
- Бабенко, А. Є., Бобир, М. І., Бойко, С. Л., & Боронко, О. О. (2009). *Теорія пружності*. (Ч. 1). Київ: Основа.
- Головка, К. Г., Луговой, П. З., & Мейш, В. Ф. (2012). *Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках*. А. Н. Гузь (Ред.). Киев: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т».
- Галимов, К. З. (1977). *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*. Казань: Изд-во Казанского ун-та.
- Кильчевский, Н. А. (1972). *Основы тензорного исчисления с приложениями в механике*. Киев: Наукова думка.
- Навал, Н. К., Пацюк, В. М., & Римский, В. К. (1986). *Нестационарные волны в деформируемых средах*. Кишинев: Штиница.
- Самарский, А. А. (1977). *Теория разностных схем*. Москва: Наука.

О ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВУХСЛОЙНОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДОЙ

В. Ф. Мейш¹, Ю. А. Мейш²

¹Институт механики имени С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

²Национальный транспортный университет, Киев, Украина
juliamuish@gmail.com

В работе рассматриваются нестационарные процессы распространения сферических волн в системе сферическая оболочка — двухслойная грунтовая среда. Каждый слой грунтовой среды описывается в рамках поведения трехкомпонентной грунтовой среды, согласно уравнений механики сплошных сред. Для численного решения указанных задач используется конечно — разностная схема Мак-Кормака. Приведены закономерности распространения волн давления в указанной системе.

Ключевые слова: сферическая оболочка, двухслойная грунтовая среда, сферические волны, нестационарные процессы, численные методы.

Рассматривается задача о взаимодействии подкрепленной сферической полости радиуса R (сферическая оболочка) с двухслойной грунтовой средой. Каждый слой грунта рассматривается как трехкомпонентная среда, состоящая из газообразной, жидкой и твердой компонент с соответствующими параметрами. Импульсная нагрузка $P_3(t)$ прилагается к внутренней поверхности сферической оболочки. Уравнения колебаний замкнутой сферической оболочки радиуса R и толщиной h имеют вид Головки, Луговой та Мейш (2012):

$$\rho_{sh} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(t) - P_r(t), \quad (1)$$

$$T_{11} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2}, \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2},$$

где u_3 — перемещение точек срединной поверхности оболочки; $P_3(t)$ — нагрузка на внутреннюю поверхность сферической оболочки; $P_r(t)$ — давление грунта на оболочку; ρ_{sh} , E , ν — физико-механические параметры материала оболочки.

Каждый слой грунта описывается уравнением состояния трехкомпонентной среды (водонасыщенного грунта) согласно модели В. М. Ляхова (Головки та ін., 2012; Ляхов, 1982; Лучко та ін., 1989)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}}, \quad (2)$$

где вводятся такие обозначения: α_i — содержание по объему компонент; ρ_{i0} — плотность; V_{i0} — их удельный объем; c_{i0} — скорость звука в компонентах при атмосферном давлении P_0 ; i — номер компоненты (1 — воздух, 2 — жидкость,

3 — твердые частички). При давлении $P = P_0$ плотность среды ρ_0 и удельный объем V_0 определяется по формулам

$$\rho_0 = \frac{1}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1.$$

При давлении P параметры компонент слоев обозначим V_i , ρ_i , c_i , а среды в целом V и ρ . Плотность среды при давлении P состоит из начальной плотности ρ_0 и членов, обусловленных сжатием каждой из компонент.

Уравнение сжатия нелинейной упругой многокомпонентной среды записываем в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}, \quad (3)$$

где $\chi_i = \frac{1}{\gamma_i}$, γ_i — показатель изэнтропии i -й компоненты.

Преимуществом этой модели является ее простота, возможность представления зависимости скорости звука, скорости волны от давления в виде простых соотношений. Скорость звука при давлении P , определяется из условия

$$c = \left(\frac{dP}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и имеет вид

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i - 1} \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения сферических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах для каждого слоя (Рождественский & Яненко, 1978)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho U^2 + P)] - \frac{2}{r} P &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho U)] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где r — пространственная координата, t — временная координата, U — скорость, ρ — плотность, P — давление.

Соответственно для каждого слоя записываются уравнения состояния:

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho} = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем, рассматривается нестационарное поведение двухслойной среды при определенных начальных условиях. Предполагается, что к границе некоторой сферической полости радиуса $r = R$ прилагается нагрузка $P_3(t)|_{r=R}$. Начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} \rho(R, t_0) = \rho_0, \\ U(R, t_0) = 0, \\ P(R, t_0) = P_3(t), \end{cases}$$

где ρ_0 — плотность среды на границе полости при атмосферном давлении.

Связанность задачи взаимодействия оболочка — грунтовая среда обеспечивается заданием условий непроникновения на деформированную поверхность контакта оболочка — грунтовая среда

$$\dot{u}_3 = U_r,$$

где U_r — скорость границы грунтовой среды на контакте.

Граничные условия на границе рассматриваемой полости при $t > 0$ вычисляются исходя из уравнений движения первого слоя среды — уравнения (1), (5), (6).

Алгоритм решения задачи о поведении двуслойной грунтовой среды при нагружении замкнутой подкрепленной сферической полости нестационарной нагрузкой $P_3(t)|_{r=R}$ основывается на применении конечно-разностной схемы предиктор — корректор Мак-Кормака (Флетчер, 1991).

На шаге предиктор разностные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k &= \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \rho^n U^n)_{k+1} - (r^2 \rho^n U^n)_k}{\Delta r} \right], \quad (7) \\ (\tilde{\rho} \tilde{U})_k &= (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left\{ \frac{[r^2 \rho (U^2 + P)^n]_{k+1} - [r^2 (\rho U^2 + P)^n]}{\Delta r} - 2P_k^n r_k \right\}, \\ F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) &= 0. \end{aligned}$$

На шаге корректор уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_k^{n+1} &= 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \tilde{\rho} \tilde{U})_k - (r^2 \tilde{\rho} \tilde{U})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}, \quad (8) \\ (\rho U)_k^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho^n U^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{U}^n)_k - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{[r^2(\tilde{\rho}\tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r^2(\tilde{\rho}\tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - 2\tilde{P}_k r_k \right],$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Величины ρ_0^{n+1} и P_0^{n+1} находятся согласно следующих формул:

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0^2} \left[\frac{-3r_0^2(\tilde{\rho}_0\tilde{V}_0) + 4r_1^2(\tilde{\rho}_1\tilde{V}_1) - r_2^2(\tilde{\rho}_2\tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

Для нахождения разностных величин давления $P(t)$ в уравнении состояния согласно формул (6)—(9) используется итерационная процедура Ньютона — Рафсона.

Рассматривается замкнутая сферическая оболочка в двухслойной грунтовой среде при внутренней, импульсной нагрузке $P_3(t)$ — уравнения (5), (6). Соответствующие разностные уравнения — (7)—(9). Расчеты проводились для стальной оболочки радиуса $R = 0,1$ м; толщиной $h = 0,01$ м. Модуль Юнга материала оболочки $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона — $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho_{sh} = 7880$ кг/м³. Осесимметрическая импульсная нагрузка $P_3(t)$ задавалась в виде:

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где T — время нагрузки; A — амплитуда нагрузки; $\eta(t)$ — функция Хевисайда. При расчетах полагалось $A = 10$ МПа; $T = 50$ мкс.

Задача решалась для двух типов двухслойных водонасыщенных грунтов. Характеристики компонент слоев грунтов следующие:

$$1) \text{ воздух — } \rho_1 = 1,2 \text{ кг/м}^3; c_1 = 330 \text{ м/с}; \gamma_1 = 1,4;$$

$$2) \text{ вода — } \rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3; c_2 = 1500 \text{ м/с}; \gamma_2 = 7;$$

$$3) \text{ твердый компонент — } \rho_3 = 2650 \text{ кг/м}^3; c_3 = 4500 \text{ м/с}; \gamma_3 = 4.$$

Расчеты проводились на пространственном интервале $R \leq r \leq 20R$. Граница раздела грунтовых сред полагалась в точке $r = 6R$. В первом варианте расчетов первый слой грунта брался с характеристиками:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0,7; \alpha_3 = 0,3 \text{ (менее плотная среда),}$$

характеристик второго слоя грунта:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0,3; \alpha_3 = 0,7 \text{ (более плотная среда).}$$

Во втором варианте расчетов рассматривалось прохождение волн из более плотной среды в менее плотную с указанными выше характеристиками. Исследованы закономерности и особенности прохождения волн давления по про-

странственной координате r (вхождение волны импульса в первую среду, отражение и похождение волн через границу раздела и т. д.).

Список литературы

- Головки, К. Г., Луговой, П. З., & Мейш, В. Ф. (2012). *Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках*. А. Н. Гузь (Ред.). Киев: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т».
- Лучко, И. А., Плаксий, В. А., Ремез Н. С., Бойван, В. С., & Бондарь, П. П. (1989). *Механический эффект взрыва в грунтах*. Киев: Наукова думка.
- Ляхов, В. М. (1982). *Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах*. Москва: Недра.
- Рождественский, Б. Л., & Яненко, Н. И. (1978). *Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике*. Москва: Наука.
- Флетчер, К. (1991). *Вычислительные методы в динамике жидкостей*. (Т. 2). Москва: Мир.

АПСАННЕ ВЫЯВЫ СЕГМЕНТАЦЫІ

А. І. Міцюхін, В. А. Віхляеў

*Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыяэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by*

Надзейная і правільная эксплуатацыя складанай і параўнальна дарагой сельгаспадарчай тэхнікі прад'яўляе асаблівыя патрабаванні да кваліфікацыі аператара, падвышанай увагі і асцярожнасці пры кіраванні, напрыклад, збожжаўборачным камбайнам. Акрамя непасрэднага кіравання рухам камбайна, камбайнер адсочвае дакладнасць выканання такіх функцыянальных дзеянняў як напаўненне бункера збожжам, пагрузку зерня, і пр. Для павышэння надзейнасці кіравання камбайнам камбайнёру надаецца памочнік.

Сучасная сельгаспадарчая тэхніка, як правіла, абсталявана тэлеметрычнай сістэмай аддаленага маніторынгу і кантролю, элементамі тэхналогіі 4.0. Дадатак да існуючай тэлеметрыі сістэмай, пабудаванай па метадалогіі аналізу і пазнавання вобразаў, дазваляе вырашаць задачы, звязаныя з паўаўтаматычным (аўтаматычным) кіраваннем такой тэхнікай. Відавочным вынікам гэтага з'яўляецца павышэнне надзейнасці і дакладнасці кіравання, а таксама аптымізацыя колькасці абслуговага персаналу.

Аперацыі пазнавання на выявах ізаляваных аб'ектаў такіх як перашкоды руху, папярэднічае этап сегментацыі або выбар прыкмет, якія б адлюстроўвалі дакладна інфармацыю аб аб'екце. Пажадана мець дэскрыптары сегментацыі зручныя для наступнага эфектыўнага лічбавага працэсу пазнавання. У артыкуле разглядаецца матэматычны падыход эфектыўнага пераўтварэння дадзеных сегментацыі пры ўмове рэальнага абмежавання апаратнай прадукцыйнасці інфармацыйнай сістэмы, якая усталявана на борце сельгаспадарчай машыны. Выкананне дадзенай умовы патрабуе скарачэння памернасці дадзеных, атрыманых на этапе сегментацыі.

Няхай у якасці перашкод разглядаюцца асобныя аб'екты некаторай формы. У выніку сегментацыі перашкоды $f(x, y)$, атрыманай відэакамерамі бартавой інфасістэмы, выяўлен малюнак $g(x, y)$:

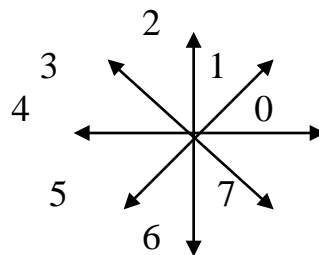
$$g(x, y) = T[f(x, y)] = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\},$$

дзе T — аператар сегментацыі па f , $\{(x_i, y_i)\}$ — прасторавыя зменныя. Роўнасць $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ азначае замкнёную мяжу; пікселі (x_i, y_i) , (x_{i-1}, y_{i-1}) , адказваюць ўласцівасці m -смежнасці пры $1 \leq i \leq n$. Ўлічваюцца толькі знешнія сегменты выявы перашкоды. Дадзеныя сегментацыі звычайна запісваюцца спісам значэнняў пікселяў $g(x, y)$. Вядома, што пэўнай эфектыўнасці апісання можна дасягнуць, выкарыстоўваючы ланцужнавы код Фрымана (Gonzales, Woods & Eddins, 2002). Як правіла, такое кадаванне

грунтуецца на адрэзках з 4- або 8-сумежнасці (напрамкамі). Пры значным аб'ёме мноства адлікаў $g(x,y)$ і выканання патрабавання дакладнай сегментацыі, кадаванне з дапамогай ланцужнага кода можа стаць недапушчальным па прычыне параўнальна вялікіх вылічальных выдаткаў. Кодавае слова g ланцужнага кода ўяўляе сабой выпадковую паслядоўнасць знакаў дыскрэтнай крыніцы $G = \{g_1, g_2, \dots, g_J\}$, $J = 2^n$, інфармацыі без памяці, дзе n — даўжыня двайковага кода. Выхадам крыніцы з'яўляецца паслядоўнасць адзіночных статыстычна незалежных знакаў. Кожны i -й сімвал з'яўляецца на выхадзе крыніцы з верагоднасцю p_i . Напрыклад, у выпадку кадавання 8-сумежным кодам алфавіт крыніцы G гэта мноства цэлых лікаў $\{0, 1, \dots, 7\}$. Статыстычныя характарыстыкі $p(g_i) = \{p_1, p_2, \dots, p_J\}$ крыніцы вызначаюцца з улікам апрыёрнага аналізу магчымых формаў мадэляў перашкод або вымераных гістаграм.

У працы разглядаецца метады поўнай ліквідацыі лішкавасці дадзеных сегментацыі, атрыманых на аснове кадавання кодам Фрымана і пераўтварэння выявы ў каардынатнае прастору, восьмі якога служаць ўласныя вектары каварыяцыйнай матрыцы дадзеных сегментацыі.

Прыклад. Эфектыўнае апісанне выявы перашкоды. Кадаванне ланцужным кодам рэалізуецца пры дапамозе выкарыстання крыніцы, паказанай на мал. 1.



Мал. 1. Нумарацыя адрэзкаў злучэння сумежных пікселяў знешніх сегментаў перашкоды

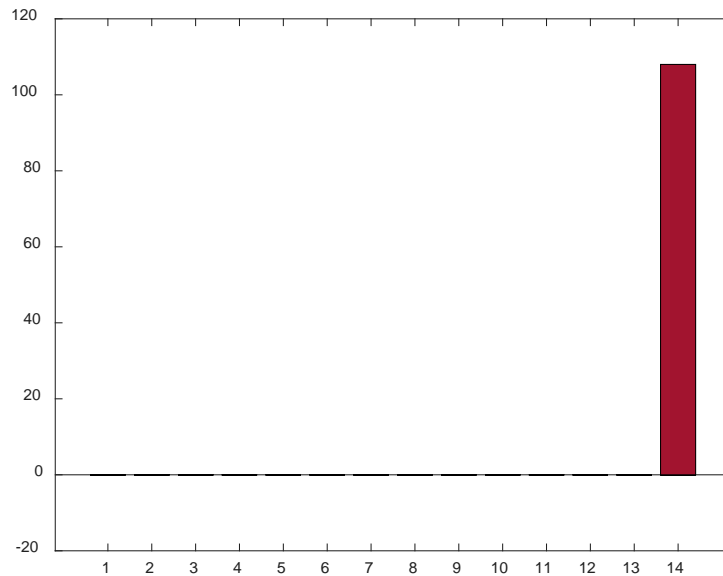
Аб'екту адпавядае наступнае кодавае слова ланцужнага кода:

$$\varphi = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 6, 6, 6, 0, 6, 0, 6, 0, 6, 0, 6).$$

Пры вектарным апісанні выявы сярэдня колькасць інфармацыі ў ім роўна энтрапіі крыніцы. Так як энтрапія не залежыць ад таго ў якім парадку бяруцца элементы выявы, вектар φ запішам у выглядзе дзвюхмерных вектараў матрыцы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}^T. \quad (1)$$

Вылічаныя значэння ўласных лікаў $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{14}\}$ каварыяцыйнай матрыцы \mathbf{C} выявы (1) кажуць аб магчымасці кампактнага апісання выявы перашкоды (Mitsiukhin, 2017).



Мал. 2. Графічнае апісанне ўласных лікаў $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{14}\}$.

Пазначым \mathbf{A} матрыцу ўласных вектараў матрыцы \mathbf{C} . Вылічэнне матрыцы каэфіцыентаў Хатэлінга памерам $N \times 2$ мае выгляд

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & 14.6969 \end{pmatrix}^T.$$

Для скарачэння памернасці матрыца \mathbf{Y} ўяўляецца паменшанай колькасцю $M < N$ каэфіцыентаў. Адсутныя $(N - M)$ замяняюцца сярэднім значэннем па кожнаму радку матрыцы \mathbf{Y} . З мал. 2 вынікае, што $M=1$ і можна адкінуць $N - M = 14 - 1 = 13$ каэфіцыентаў ў кожным слупку матрыцы \mathbf{Y} . Зваротнае пераўтварэнне вылічаецца як $\Phi = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Дакладнае аднаўленне (захоўванне) выявы сегментацыі запатрабуе выкарыстання вектара с каардынатамі $\mathbf{y}_{14} = (0 \quad 14.6969)$ і вектара матэматычнага чакання

$$\mathbf{m} = (0 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0).$$

Калі загадзя вылічыць \mathbf{m} , дакладнае апісанне дадзеных забяспечваецца толькі двума значэннямі каардынат вектара \mathbf{y}_{14} .

Выкажам здагадку, што вектар φ ланцужнага кода задаваны з дапамогай $n = 3$ на элемент выявы. Пераўтвораная выява $\mathbf{y} = (0 \quad 14.6969)$ кадуецца с дапамогай $k=8$ біт на піксель. Сярэдні лік біт на элемент адноўленай выявы роўны

$$(2 \cdot 8) / 28 \cong 0,57 \text{ біт.}$$

Параўнальна невялікі выйгрыш у сціску з выкарыстаннем кода Фрымана, можна атрымаць, калі да яго прымяніць энтропійнае кадаванне. Вылічэнні энтрапіі H паказалі, што для большасці разгледжаных імавернасных мадэляў крыніц G , значэння энтрапіі знаходзяцца ў дыяпазоне

$$H = \sum_{i=1}^{2^n} -p_i \log p_i = 2,4 - 2,81 \text{ бит на символ.}$$

У гэтым выпадку сярэдняя даўжыня L_n атрыманага двайковага кода можа набліжацца толькі да

$$(2,4 - 2,81) + 1 \geq L_n \geq H.$$

Але гэта значна вышэй за колькасць біт на элемент адноўленай выявы:

$$(2,4 - 2,8) + 1 \gg 0,57 \text{ бит на пиксель.}$$

Выснова. Інтэграваны падыход на грунце кадавання Фрымана і артаганальнага пераўтварэння ў базісе дыскрэтных уласных функцый дазваляе ажыццявіць эфектыўны сціск дадзеных сегментацыі без страт.

Гэтая праца выкана ў рамках навукова-тэхнічных даследаванняў з канструктарскім бюро ААТ «Навукова-тэхнічны цэнтр камбайнабудавання», г. Гомель.

Спіс літаратуры

- Gonzales, R. C., Woods, R. E., & Eddins, S. L. (2002). *Digital image processing*. New Jersey: Prentice Hall.
- Mitsiukhin, A. (2017). Efficient description of the boundary of the object under observation. In *Engineering for a Changing World: Proceedings; 59th IWK, Ilmenau Scientific Colloquium, Technische Universität Ilmenau, September 11–15, 2017* (Vol. 59, No. 2.2. 02). Retrieved from db-thuringen.de/rsc/viewer/dbt_derivate_00039296/ilm1-2017iwk-018.pdf?page=6.

ДО РОЗРАХУНКУ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОГО КРИЛА В НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

М. В. Ногін

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nvnogin@gmail.com

З метою теоретичного розрахунку основних компонент швидкості й сили для тонкого профіля в потоках як потенціальної, так і ідеальної нестисливих рідин в нестационарному режимі, досліджується інтегральне рівняння спеціального вигляду. Одержано спрощення методу Некрасова (1947). Робота є продовженням досліджень автора Ногін (2017), Ногін (2017).

Ключові слова: тонкий профіль, циркуляція, інтенсивність, метод Жуковського, вихор.

На основі робіт Некрасов (1947), Ногін (2017), Ногін (2017), Горелов та Куляев (1971) із застосуванням теореми Біо — Савара, інтенсивність $\gamma(x, t)$, що є частиною похідною від циркуляції Γ , змінюється, як хвиля, що переміщується вздовж осі Ox зі швидкістю U_∞ , як наслідок — вихори у сліді перемішуються.

Розгляньмо випадок гармонічних коливань з круговою частотою ω .

Нехай

$$\gamma(x, t) = U_\infty \tilde{\gamma}(x) e^{i\omega t},$$

$$V_y(x, t) = U_\infty f(x) e^{i\omega t},$$

де $\tilde{\gamma}(x), f(x)$ — безрозмірні функції.

Зміну вихорів у сліді можна виразити через інтенсивність на профілі (Войткунський, Федяевський & Фаддеев, 1968; Некрасов, 1947; Горелов & Куляев, 1971):

$$\gamma(x, t) = \gamma(a, t) e^{\frac{i\omega(x-a)}{U_\infty}}, x \in (a, \infty),$$

де $2a$ — дуга профілю.

Отже, інтенсивність знаходимо, як розв'язок інтегрального рівняння з ядром Коші виду (Некрасов, 1947; Горелов & Куляев, 1971):

$$\int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi - \frac{i\omega}{U_\infty} \int_a^\infty \frac{e^{\frac{i\omega(\eta-a)}{U_\infty}}}{x - \eta} d\eta \int_{-a}^a \tilde{\gamma}(\xi) d\xi = 2\pi f \quad (1)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (1) знаходимо, використовуючи метод Жуковського (Некрасов, 1947; Чаплыгин, 1949) у класі функцій, обмежених на краю профілю, тобто в точці $x = a$.

Відповідно до Некрасов (1947) запровадимо нові координати:

$$x = \cos \theta, \quad \xi = \cos \varphi, \quad x_1 = \cos \sigma, \quad \eta = \operatorname{ch} \lambda,$$

тоді

$$\tilde{\gamma}_0(\xi) = g(\varphi), \quad \tilde{\gamma}_0(x_1) = g(\sigma).$$

Тоді маємо інтегральне рівняння виду

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(\varphi) \sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi - \frac{ik}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{e^{-ik \cos \varphi} \sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi \int_0^\pi g(\sigma) e^{ik \cos \sigma} \sin \sigma d\sigma + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{e^{ik \operatorname{ch} \lambda} \operatorname{sh} \lambda}{\cos \theta - \cos \lambda} d\lambda \int_0^\pi g(\sigma) e^{ik \cos \sigma} \sin \sigma d\sigma \right\}, \quad (2)$$

де k — число Струхалія (для стаціонарного режиму $k = 0$).

Відповідно до Некрасов (1947), Чаплыгин (1949), Горелов та Куляев (1971) розв'язок (2) шукаємо у вигляді аналогу ряду Фур'є:

$$g(\varphi) = \frac{c_0}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sin n\varphi.$$

Очевидно, що

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{\varphi \rightarrow \pi} g(\varphi) = \infty \Rightarrow x = -1 \\ g(0) = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

Власне, сума ряду обмежена функція скрізь в $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right.$

Очевидно, що $g(\varphi)$ — непарна функція, адже це властивість дотичних до швидкості.

Завдяки знайденій інтенсивності $\gamma(\dot{x}, t)$ знаходимо відповідно:

1) циркуляцію:

$$\Gamma_{\alpha_0}(t) = \int_0^{x_0} \gamma(\xi, t) d\xi,$$

де α_0 — кут атаки;

2) компоненту швидкості (саме у випадку гармонічних коливань):

$$v_{y_0}(x, t) = U_\infty f(x) \cos \omega t,$$

причому безрозмірна функція $f(x)$ визначається формою коливань тонкого крила.

Остаточно,

$$\Gamma(\alpha, t) - \Gamma_0 = U_\infty a \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{i\omega}{U_\infty}(\alpha_0 - \alpha)} \right\},$$

де $\alpha = \alpha_0 - U_\infty t$, C — комплексна безрозмірна стала.

Зокрема, за методом Некрасова (1947):

$$C = \frac{e^{-ik}}{\pi k \left[H_0^{(1)}(k) - iH_1^{(2)}(k) \right]},$$

причому, $k = \frac{a\omega}{U_\infty}$, $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$, де J_n, N_n — функції Бесселя і

Неймана відповідно; $H_n^{(0)}$ — нульового порядку.

Справедливі наступні рівності

$$H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty e^{-ixt} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad H_1^{(2)}(x) = \frac{dH_0^{(2)}}{dx}.$$

Стосовно обчислення динамічних реакцій, що діють на тонкий профіль, зручно скористатись методом Л. І. Седова (Седов, 1966), який у 1935 році узагальнив формули С. О. Чаплигіна (Чаплыгин, 1949), для рухомої системи координат:

I. Метод Чаплигіна у стаціонарному режимі (Чаплыгин, 1949):

$$R_0 = R_{0x} - iR_{0y} = \frac{i}{2} \rho \oint_\gamma \left(\frac{d\omega_0}{d\zeta} + U_\infty \right)^2 d\zeta.$$

II. Метод Седова (Седов, 1966):

$$R_x + iR_y = i\rho q_0 \Gamma - i\rho C_m \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{i\rho}{2} \oint_\gamma \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)^2 d\zeta + \\ + \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{d(SC_m)}{dt} + \rho S q_n + i\rho \oint_\gamma \zeta \frac{d\omega}{d\zeta} d\zeta \right],$$

де q_0 — вектор швидкості початку рухомої системи координат, γ_1 — довільний контур у рідині, яка охоплювана цим контуром, C_m — центр ваги цієї площі, z_M — координата точки перетину γ_1 з лінією вихору сліду.

Автор висловлює подяку члену-кореспонденту НАН України Г. О. Воропаєву за цінні поради при виконанні цієї роботи.

Список літератури

- Войткунский, Я. И., Федяевский, К. К., & Фаддеев, Ю. И. (1968). *Гидромеханика*. Ленинград: Судостроение.
- Горелов, Д. Н., & Куляев, Р. Л. (1971). Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью. *Изв. АН СССР. МЖГ*, (6), 38—47.
- Лойцянский, Л. Г. (1966). *Механика жидкости и газа*. Москва: Наука.
- Некрасов, А. И. (1947). *Теория крыла в нестационарном потоке*. Москва: Изд-во АН СССР.
- Ногин, Н. В. (2017). Стационарный процесс обтекания тонкого профиля потоком идеальной жидкости. У *Матеріалах V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 29—30 грудня 2016 р. (с. 88—89). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.

- Ногін, М. В. (2017). Обчислення компонент сили для тонкого крила у стаціонарному режимі. У *Матеріалах XVIII Міжнародної наукової конференції ім. акад.а Михайла Кравчука, Луцьк — Київ, 7—10 жовтня* (Т. 1, с. 118—119). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Седов, Л. И. (1966). *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва: Наука.
- Чаплыгин, С. А. (1949). *Избранные работы по теории крыла*. Москва: Гостехиздат.

СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РОДСТВЕННЫХ КРАЕВОМУ УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ РИМАНА С ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. С. Полетаев

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,

Одесса, Украина

poletayev_gs@ukr.net

Рассмотрены уравнения, выражающие краевые условия родственных задач Римана — Гильберта — Привалова двух абстрактных задач с взаимно обратными правильно факторизуемыми рациональными коэффициентами. Установлено свойство и формулы, связывающие решения, соответствующие единице в правой части этих уравнений. Метод основан на подходах автора для соответствующих абстрактных уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гольдерности функций, индекса.

Ключевые слова: задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.

1. Сообщение продолжает статью Полетаев (2017).

1.1. Всякое кольцо R с единицей e , рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец (R^+, R^-) [$\equiv (R^-, R^+)$] будем называть «кольцом с факторизационной парой». Кратко, кольцом с ФП.

1.2. Обозначим через \mathfrak{R}_r совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$, все полюсы которых, при их существовании, конечны и не вещественны. Пределы функций из \mathfrak{R}_r на бесконечности конечны. Пусть $\mathfrak{R}_r^+, (\mathfrak{R}_r^-)$ — совокупности функций из \mathfrak{R}_r , все полюсы которых, при их существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости, соответственно (ср. Крейн, 1958, с. 13—14). Проверяется, что \mathfrak{R}_r — кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) = 1, z \in \mathbb{C}$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а $\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$ — его подкольца с единицей. Можно показать, что кольцо \mathfrak{R}_r является кольцом с ФП $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ (Полетаев, 1988; 2000; ср. McNabb & Schumitzky, 1972).

2. В случае, когда правая часть равна единице, рассматривается вопрос о свойствах, выражающих связь между решениями уравнений, являющихся краевыми условиями следующих двух задач.

Задача 1. «Для заданных рациональных функций — коэффициентов $A(x), B(x); x \in \{-\infty; \infty\}$ найти пару рациональных функций $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in \mathfrak{R}_-$, все полюсы первой из которых, при существовании,

расположены в нижней, а второй — в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A(x)X^+(x) + Y_-(x) = B(x); x \in \{-\infty; \infty\}, \quad (1)$$

где все известные функции определены на сомкнутой вещественной оси, причём предполагается, что при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$ каждая из них имеет совпадающие между собой конечные значения, равные соответствующим пределам.»

Задача 2. «Для заданных рациональных функций — коэффициентов $A(x), B(x); x \in \{-\infty; \infty\}$ найти пару рациональных функций $X_1^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_{1-}(z) \in \mathfrak{R}_-$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй — в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A^{-1}(x)X_1^+(x) + Y_{1-}(x) = B(x); x \in \{-\infty; \infty\}, \quad (2)$$

где все известные функции определены на сомкнутой вещественной оси, причём предполагается, что при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$ каждая из них имеет совпадающие между собой конечные значения, равные соответствующим пределам.»

3. Главный результат. Исходим из возможности продолжения уравнений (1), (2) на всю комплексную плоскость, заменой в этих уравнениях вещественного переменного $x \in \{-\infty; \infty\}$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций:

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z); z \in \mathbb{C}; \quad (3)$$

$$A^{-1}(z)X_1^+(z) + Y_{1-}(z) = B(z); z \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

где, по предположению, $A(z), B(z) \in \mathfrak{R}_r; z \in \mathbb{C}$ — известные функции; $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in (\mathfrak{R}_r)_-$, $X_1^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_{1-}(z) \in (\mathfrak{R}_r)_-; z \in \mathbb{C}$ — искомые; \mathbb{C} — расширенная комплексная плоскость. Учитывая возможность реализации в кольце $R = R_3$ с ФП ($R_{n \times n}$) подходов из Полетаев (1988; 2000) (ср. McNabb & Schumitzky, 1972)), или Полетаев (2015, 2016), установлено (Полетаев, 2016) следующее

Свойство. При соответствующих условиях, произведения:

1) составляющих $X_e^+(z), X_{e1}^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$, а также,

2) разности между единицей и составляющей $Y_{e-}(z)$ на разность между единицей и составляющей $Y_{e1-}(z)$ — решений уравнений (3), (4) и Задач 1., 2. при правой части, равной единице, $B(z) = 1; z \in \mathbb{C}$, соответственно, — равны единице.

Формульным выражением свойства являются следующие соотношения:

$$X_e^+(z)X_{e1}^+(z) = 1, \quad (5)$$

$$[1 - Y_{e-}(z)] \cdot [1 - Y_{e1-}(z)] = 1.$$

Построены иллюстративные примеры. При соответствующих ограничениях, аналогичное свойство имеет место и в более общей ситуации, когда правая часть $B(z) \in \mathfrak{R}_r^-$. Этим реализуются связанные с рассмотренным свойством положения, обнаруженные при изучении одного подвида абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец кольца с факторизационной парой (Полетаев, 2016).

Список литературы

- McNabb, A., & Schumitzky, A. (1972). Factorization of operators—I: Algebraic theory and examples. *Journal of Functional Analysis*, 9(3), 262—295.
- Крейн, М. Г. (1958). Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. *Успехи математических наук*, 13(5 (83)), 3—120.
- Полетаев, Г. С. (1988). *Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами: Препринт 88.31*. Киев: АН УССР, Институт математики.
- Полетаев, Г. С. (2000). Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой. *Вестник Херсонского гос. техн. университета*, 2, 191—195.
- Полетаев, Г. С. (2015). Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коэффициентом в кольце с факторизационной парой. В *Abstracts of XVII International Conference DSMSI, Kyiv, May 27–29* (p. 46). Київ: Київський національний університет.
- Полетаев, Г. С. (2016). Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары. У *Матеріалах IV Міжнародної наук.-практичної конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 24—25 грудня 2015 р.* (с. 85—88). Київ: КПІ.
- Полетаев, Г. С. (2016). Общее свойство решений родственных Римана — Гильберта — Привалова задач с взаимно обратными рациональными коэффициентами. *Наукові нотатки*, (56), 187—192.
- Полетаев, Г. С. (2017). Разрешимость задач родственных типу Римана — Гильберта — Привалова со взаимно обратными в кольце рациональными коэффициентами. В *Матеріалах Восемнадцатой Международной научной конференции им. акад. М. Кравчука, Луцк — Киев, 7—10 октября* (Т. 1, с. 221—224). Киев: КПІ.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОБОТИ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Н. В. Поліщук, Л. С. Бур

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

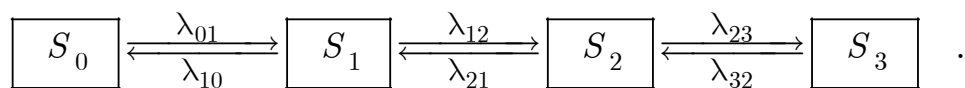
nvpolin@gmail.com, lidabur96@gmail.com

Розглянуто триканальну систему масового обслуговування з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах, наведено матриці інтенсивностей переходів, диференціальні рівняння Колмогорова, рівняння фінальних станів і формули Ерланга для ймовірностей станів системи. Для поліграфічного комплексу із трьох друкувальних машин і однієї ремонтної бригади розраховано ймовірності фінальних станів і дохід від роботи комплексу.

Ключові слова: система масового обслуговування (СМО), ймовірності станів, дохід.

Багатоканальні системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються у прикладних задачах. Вони розглядаються також у дисципліні «Дослідження операцій» для економічних і технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Для цих систем досліджуються задачі ефективності, надійності роботи.

Маємо триканальну СМО з відмовами, яка може перебувати в чотирьох станах: S_0 , S_1 , S_2 , S_3 . Граф системи має вигляд:



У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану S_i в стан S_j , $i, j = 0, 1, 2, 3$, з інтенсивністю λ_{ij} .

Матриця інтенсивностей переходів для станів системи має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00}^* & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11}^* & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\lambda_{22}^* & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{33}^* \end{pmatrix}^T,$$

де λ_{ii}^* , $i = 0, 1, 2$ — сумарна інтенсивність потоків, які виводять систему зі стану S_i .

Складемо матрицю інтенсивностей переходів для даної системи:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{01} & 0 & 0 \\ \lambda_{10} & -(\lambda_{10} + \lambda_{12}) & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda_{21} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{32} & -\lambda_{32} \end{pmatrix}^T.$$

Позначаємо $p_i(t)$ — ймовірність знаходження системи у стані S_i , $i = 0, 1, 2$, у момент часу t . Ці ймовірності задовольняють матричній системі диференціальних рівнянь Колмогорова (Кремер, Прутко, & Тришкин, 2000):

$$\Lambda \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \\ p'_2(t) \\ p'_3(t) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} p'_0 = -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1, \\ p'_1 = \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2, \\ p'_2 = \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3, \\ p'_3 = \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3, \end{cases}$$

з початковим умовами: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$.

У кожний момент часу t , для функцій $p_i(t)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$$

У теорії випадкових процесів доведено (Кремер, Прутко, & Тришкин, 2000), що, якщо кількість станів системи скінчена і з кожного з них можна за скінчене число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

які задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ \lambda_{23}p_2 - \lambda_{32}p_3 = 0, \end{cases}$$

при умові $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга (Поліщук, Кушлик-Дивульська & Орел, 2011):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad (1)$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Запропонована система масового обслуговування може бути використана для аналізу ефективності й надійності роботи промислових комплексів, які містять декілька каналів обслуговування. У роботах Поліщук (2016, 2017) система масового обслуговування розглянута для дослідження роботи поліграфічного комплексу із двох друкувальних машин. Застосуємо цю систему для дослідження ефективності роботи поліграфічного комплексу із трьох друкувальних машин і однієї ремонтної бригади. Розгляньмо можливість збільшення доходу від роботи цього комплексу при зменшенні тривалості ремонту машин.

Нехай стан системи S_0 — усі три машини працюють, S_1 — дві машини працюють, одна в ремонті, S_2 — одна працює, дві машини в ремонті, S_3 — три машини в ремонті. Нехай середній час безвідмовної роботи однієї машини $t_0 = 10$ годин, ремонт машини триває $t_1 = 3$ години. При переході зі стану S_0 у стан S_1 з ладу може вийти перша, друга або третя машина з інтенсивністю $\lambda = 1/t_0 = 1/10$, тому $\lambda_{01} = 3\lambda = 3/t_0 = 10$. При переході зі стану S_1 у стан S_2 — може вийти з ладу або одна, або друга із двох працюючих машин, тому $\lambda_{12} = 2\lambda = 2/t_0 = 1/5$, зі стану S_2 в S_3 — остання із працюючих машин, тому $\lambda_{23} = 1/t_0 = 1/10$.

Зворотний потік ремонту має інтенсивності

$$\lambda_{10} = \lambda_{21} = \lambda_{32} = 1/t_1 = 1/3.$$

Обчислюючи фінальні ймовірності за формулами (1), маємо

$$p_0 = 0,384; \quad p_1 = 0,346; \quad p_2 = 0,208; \quad p_3 = 0,062 .$$

Нехай норма доходу від роботи трьох друкувальних машин 120 y.e. за одиницю часу, двох машин 70 y.e. за од. ч., однієї машини 30 y.e. , ремонт однієї машини коштує 20 y.e. за од.ч. Тому дохід від роботи комплексу буде дорівнювати

$$D = 120p_0 + 70p_1 + 30p_2 - 20(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$= 105p_0 + 50p_1 + 10p_2 - 20p_3 = 64,22 \text{ y.e. за од. часу.}$$

З'ясуємо, як зміниться дохід, якщо тривалість ремонту зменшити вдвічі, тобто $\bar{t}_1 = 1,5$, тоді інтенсивність потоку ремонту визначаємо відповідно

$$\bar{\lambda}_{10} = \bar{\lambda}_{21} = \bar{\lambda}_{32} = 1/\bar{t}_1 = 2/3.$$

При цьому ремонт однієї машини буде коштувати 35 *у.е.* за од. часу. Для фінальних ймовірностей станів тепер маємо:

$$\bar{p}_0 = 0,623; \bar{p}_1 = 0,280; \bar{p}_2 = 0,084; \bar{p}_3 = 0,013.$$

При цих змінах дохід \bar{D} від роботи комплексу визначається:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= 120\bar{p}_0 + 70\bar{p}_1 + 30\bar{p}_2 - 35(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3) \\ &= 120\bar{p}_0 + 35\bar{p}_1 - 5\bar{p}_2 - 35\bar{p}_3 = 83,69 \text{ у.е. за од. часу}\end{aligned}$$

Оскільки $\bar{D} > D$, то економічна доцільність прискорення ремонту машин очевидна.

Список літератури

- Кремер, Н. Ш., Прутко, Б. А., & Тришкин, И. М. (2000). *Исследование операций в экономике*. Москва: ЮНИТИ.
- Поліщук, Н. В. (2016). Застосування систем масового обслуговування в дисципліні «Дослідження операцій». В *Матеріалах XVII міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 19—20 травня (Т. 3, с. 310—311). Київ: КПІ.
- Поліщук, Н. В. (2017). Дослідження надійності деякої системи масового обслуговування. У *Матеріалах П'ятої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 29—30 грудня 2016 р. (с. 89—90). Київ: КПІ ім. І. Сікорського.
- Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І., & Орел, Б. П. (2011). *Дослідження операцій: конспект лекцій*. Київ: КПІ.

СКЛАДНІ МЕРЕЖІ, ІЄРАРХІЇ ТА МІЖСИСТЕМНІ ВЗАЄМОДІЇ

О. Д. Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

od_polishchuk@ukr.net

Вводяться потокові характеристики та потокові серцевини складних мережевих та ієрархічно-мережевих систем. Аналізується, яким чином вони дозволяють зменшувати розмірність моделей таких систем та вирішувати низку важливих прикладних задач. Досліджуються міжсистемні взаємодії різних типів та аналізується їх вплив на процес функціонування систем.

Ключові слова: складна мережа, мережева система, потік, ієрархія, серцевина, мультиплекс, асоціація, конгломерат, системне середовище

Системи різного походження, типу та призначення є чи не найскладнішим об'єктом наукових досліджень. Це пояснюється необхідністю визначення їх складу та структури, пізнання законів функціонування та особливостей взаємодії між собою та з навколишнім середовищем великої кількості різнорідних об'єктів, які діють для досягнення спільної і часто не до кінця зрозумілої досліднику цілі. Вивченням складних систем займається ціла низка дисциплін, які надалі називатимемо *системними* (загальна теорія систем, системний аналіз, дослідження операцій тощо). У кожній із природничих та гуманітарних наук можна виділити певний «системний» підрозділ, який стосується її предметної області. Одним з напрямків системних досліджень, який почав бурхливо розвиватися протягом останніх десятиліть, стало вивчення складних мережевих систем (СМС). Мережеві структури є у мікро- та макросвіті, біологічних системах та людському соціумі. Предметом дослідження теорії складних мереж (ТСМ) є (Barabási & Frangos, 2002) створення універсальних моделей мережевих структур, визначення статистичних властивостей, які характеризують їхню поведінку та прогнозування поведінки мереж при зміні їх структурних властивостей. Загалом ТСМ реалізує структурний напрямок досліджень СМС. Це зовсім не применшує її значення, оскільки причиною неефективного функціонування багатьох реальних систем є саме вади їх структури. До того ж існували та існують системи, які можна вивчати, досліджуючи виключно їхню структуру.

Природні та штучні, фізичні та біологічні мережі, мережі мікро- та макросвіту мають багато спільного. Однак, незважаючи на подібність структур, вони породжують суттєво різні системи (Поліщук, Поліщук & Яджак, 2015). Схожість мережевих структур допомагає в розробленні універсальних методів дослідження цих структур, але не завжди відповідних систем. Предметом дослідження системних дисциплін (Антонов, 2004), які загалом реалізують функціональний напрямок системних досліджень, є вивчення різних класів та типів систем, основних принципів та закономірностей їхньої поведінки, процесів цілеутворення, функціонування, розвитку та взаємодії із зовнішнім середовищем. Загалом у системних дисциплінах структура системи розглядається спі-

льно з функціями, які реалізуються складовими цієї структури та системою загалом, причому функція має пріоритет над структурою. Однією з визначальних особливостей реально функціонуючих СМС є рух потоків у них (Поліщук & Поліщук, 2013). В одних випадках забезпечення руху потоків є основною ціллю утворення та функціонування таких систем, у інших — основним процесом, який забезпечує їх життєдіяльність. Теорія мережевих потоків вирішує низку практично важливих проблем, які стосуються насамперед можливостей мережі, як структури, забезпечити рух потоків (Li, Springer, Bebis & Gunes, 2013), ніж особливостей процесу функціонування системи. Вивчення довільної системи потребує цілісного погляду на неї, який можна сформулювати лише поєднуючи структурний та функціональний напрямки системних досліджень.

У доповіді вводяться потокові аналоги основних понять ТСМ та показується, що врахування руху потоків у мережі дозволяє наблизити проблематику ТСМ до проблематики відомих системних дисциплін: проводити класифікацію мережевих систем, ідентифікувати цілі їх утворення та розвитку, визначати функції, які сприяють реалізації цих цілей тощо. Визначення поточкових характеристик мережі дозволяє в кожному конкретному випадку побудувати поточкову модель реальної мережевої системи, вчасно її корегувати та визначати перспективи розвитку СМС. Поточкові характеристики мережевих систем дозволяють більш реалістично визначати напрямки пріоритетного росту і переважного приєднання в безмасштабних мережах та досліджувати процеси функціонування СМС на всіх етапах їх життєвого циклу. Вони також дають можливість зменшувати розмірність моделей СМС та підвищувати їх адекватність, ідентифікуючи фіктивні та приховані вузли і зв'язки мережі, пов'язувати з елементами структури параметри їх функціонування, визначати критично завантажені складові системи та здійснювати пошук альтернативних шляхів руху потоків в обхід ізольованих зон мережі.

Складні мережі можуть налічувати мільйони та мільярди елементів. Кількість процесів, які перебігають у системах з такою структурою є принаймні на порядок більшою. Зазвичай основний спосіб вирішення проблеми розмірності полягає у спрощенні моделі за рахунок відкидання найменш важливих з точки зору дослідника елементів. Поряд з видаленням зі структури системи фіктивних вузлів та зв'язків ще одним способом спрощення моделей СМ є введення поняття k -серцевини мережі (Dorogovtsev, Goltsev & Mendes, 2006), тобто найбільшої підмережі вихідної СМ, усі вузли якої мають структурний ступінь не менший за k та вилученні зі структури мережі вузлів зі ступенем меншим за k . Використання поточкових характеристик СМС дозволяє ввести поняття поточкової серцевини мережевої системи. Поточкові серцевини СМС дають можливість будувати значно адекватніші з функціональної точки зору спрощені моделі мереж, ніж їх k -серцевини, виділяючи найбільш важливі зі структурної та функціональної точки зору складові системи. Ці поняття розширюють можливості розв'язання низки важливих прикладних задач: керованості, спостережуваності, синхронізації тощо.

Вважається, що мережевий підхід дозволяє частково подолати проблему складності принаймні на рівні вивчення структури системи. Однак, не менш важливими та розповсюдженими як під час дослідження фізичного світу, так і в людському суспільстві є ієрархічні структури. У соціумі ієрархія застосовується для оптимізації процесу управління та ефективної організації роботи створених людиною систем різного типу та призначення. Ієрархізація є методом наукового пізнання, який спрощує дослідження великих складних систем, та зручним способом структуризації знань, який впорядковує зберігання отриманих даних та полегшує пошук необхідної інформації. Загалом ієрархічний підхід також спрямований на подолання проблеми складності.

Зазвичай під час дослідження мережевих структур у них не враховується наявність певного впорядкування чи підпорядкування складових, хоча воно безумовно існує в переважній більшості мережевих систем. З іншого боку, ієрархічні структури не враховують зв'язки між складовими одного рівня ієрархії. Структура реальних штучних та природних систем загалом не вкладається в поняття «чистої» мережі або ієрархії. Ієрархічно-мережеві структури, тобто структури, кожен складову певного рівня ієрархії яких можна зобразити у вигляді підмережі нижчого рівня ієрархії або підпорядкувати їй таку підмережу, більш точно та природно відображають особливості взаємодій у складних системах (Поліщук, Тютюнник & Яджак, 2007). У доповіді визначається потокова матриця суміжності складної ієрархічно-мережевої системи (СІМС), яка дозволяє досліджувати функціональні особливості системи, пов'язуючи їх зі складовими структурами. Введено поняття потокової серцевини СІМС, яка дає можливість будувати спрощені моделі системи меншої розмірності одночасно відстежуючи кількісну міру збереження її адекватності. Запропоновано принципи формування інформаційних моделей та моделей оцінювання реальних СІМС та проаналізовано їх переваги і недоліки. Основною вадою інформаційних моделей є величезні об'єми даних, які часто не піддаються оперативному аналізу, формуванню своєчасних прогнозів та виробленню правильних рішень. Моделі оцінювання в цьому розумінні є значно гнучкішими та динамічнішими являючись водночас відображенням інформаційних моделей у чітко структуровану сукупність оцінок стану та якості функціонування, починаючи зі складових системи найнижчого рівня ієрархії та закінчуючи системою загалом. Основною перевагою моделей оцінювання є на порядки менші обсяги інформації, які значно легше піддаються аналізу та дозволяють оперативно локалізувати найбільш загрозливі складові системи. Тотожність структур СІМС, її інформаційної моделі та моделі оцінювання дозволяє переходити від незадовільної оцінки складової до даних, які описують її стан та процес функціонування, аналізу цієї інформації з метою дослідження причин виявлених недоліків та усунення цих недоліків безпосередньо у складовій системі.

Будь-яка реальна система є відкритою, тобто вона взаємодіє з іншими системами. Одним з різновидів міжсистемних взаємодій є так звані мультиплекси, у яких вузли однієї мережі можуть одночасно бути вузлами багатьох інших ме-

реж. Між вузлами окремих мережевих шарів існують різні види взаємодій, які можуть мати різну природу, призначення та матеріальний носій. Оскільки кожна мережа є структурою певної мережевої системи, один і той самий вузол мультиплексу є елементом багатьох систем, реалізуючи в них різні функції. Під час дослідження мультиплексів також використовується поняття **k**-серцевини (Corominas-Murtra, Fuchs & Thurner, 2014), як поєднання *k*-серцевин окремих шарів-мереж. Ми вводимо поняття ядра мультиплексу, як структури, та потокової серцевини мультиплексу, як системи взаємодіючих у процесі свого функціонування шарів — мережевих систем. Ці поняття дозволяють спростувати моделі системних взаємодій мультиплексного типу одночасно відстежуючи кількісну міру збереження їх адекватності. Розглядаються також відмінні від мультиплексного види міжсистемних взаємодій, які полягають у спільному функціонуванні кількох систем склад елементів яких не перетинається. Уводяться поняття асоціації, конгломерату та системного середовища, як трьох різних типів такого виду взаємодій та аналізується характер породжуваних ними впливів на поведінку системи. Отримані у роботі результати дозволяють суттєво спростити моделювання складних систем та поєднати структурний та функціональний напрямки їх досліджень.

Список літератури

- Barabási, A.-L., Frangos, J. (2002) *Linked: the new science of networks*. New York: Basic Books.
- Corominas-Murtra, B., Fuchs, B., & Thurner, S. (2014). Detection of the elite structure in a virtual multiplex social system by means of a generalised K-core. *PloS one*, 9(12), e112606.
- Dorogovtsev, S. N., Goltsev, A. V., & Mendes, J. F. F. (2006). K-core organization of complex networks. *Physical review letters*, 96(4), 040601.
- Li, B., Springer, J., Bebis, G., & Gunes, M. H. (2013). A survey of network flow applications. *Journal of Network and Computer Applications*, 36(2), 567–581.
- Антонов, В. А. (2004). *Системный анализ*. Москва: Высшая школа.
- Поліщук, Д. О., & Поліщук, О. Д. (2013) Моніторинг потоку транспортних мереж із частково впорядкованим рухом. У *Матеріалах XXIII науково-технічної конференції молодих науковців Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАНУ*, Львів, 23—25 жовтня (с. 326—329). Львів: ФМІ НАНУ.
- Поліщук, Д. О., Поліщук, О. Д., & Яджак, М. С. (2015). Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: I. Опис методик. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (1), 21—31.
- Поліщук, О. Д., Тютюнник, М. І., & Яджак, М. С. (2007). Оцінка якості функціонування складних систем на основі паралельної організації обчислень. *Відбір і обробка інформації*, (26(102)), 121—126.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

С. Н. Потемкина¹, А. В. Розанов²,

¹Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

²Саратовский государственный аграрный университет
имени Н. И. Вавилова, Саратов, Россия

s.potemkina@tltsu.ru, arosanov@yandex.ru

Рассматриваются особенности применения электростатической теоремы Гаусса для вектора электрического смещения при расчёте поля в диэлектрике. Особое внимание обращается на условия применимости теоремы Гаусса и граничные условия для поля в диэлектрике.

Ключевые слова: теорема Гаусса, условия применимости, диэлектрики, вектор электрического смещения, граничные условия, расчет полей и потенциалов.

Теорема Гаусса для электростатических полей системы зарядов применима для практических расчетов в случае, когда выражение для потока электрического поля Φ_E через воображаемую замкнутую поверхность, охватывающую заряды, является простым, например, когда вектор \vec{D} во всех точках поверхности перпендикулярен (параллелен) ей или пересекает поверхность под заданным углом (Ландау & Лившиц, 2005).

При расчете полей в диэлектриках формула для потока вектора электростатического поля Φ_E сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется алгебраической суммой сторонних $q_{\text{стор}}$ и связанных $q_{\text{связ}}$ зарядов внутри этой поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = (q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}}) \quad (1)$$

где \vec{E} — напряжённость поля в диэлектрике, \vec{P} — вектор поляризованности, ϵ_0 — электрическая постоянная свободного пространства.

Проблема состоит в том, что формула (1) устанавливает связь свойств неизвестного заранее поля \vec{E} через свойства связанных зарядов $q_{\text{связ}}$, которые в свою очередь определяются величиной этого же поля \vec{E} .

Чтобы при расчете электростатических полей в диэлектриках исключить эту неопределенность, вместо потока вектора электростатического поля Φ_E следует использовать Φ_D — поток вектора электрического смещения, который определяется только сторонними зарядами:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}} \quad (2)$$

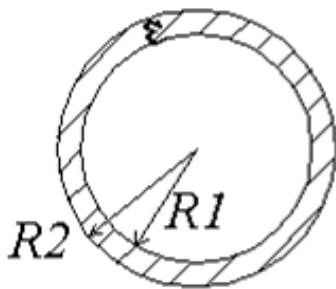
где \vec{D} — вектор электрического смещения (Беликов, 1986).

При отсутствии на границе раздела диэлектрик-диэлектрик или диэлектрик-вакуум сторонних зарядов для расчёта электростатического поля в ди-

электриках удобнее использовать теорему Гаусса для поля вектора \vec{D} , так как вектор \vec{D} в этом случае не испытывает скачка при переходе через границу раздела, и нет необходимости учитывать граничные условия (Ясников и др., 2011).

Вектор электрического смещения \vec{D} , строго говоря, является вспомогательным вектором, не имеющим глубокого физического смысла, но его использование дает возможность значительно упростить и ускорить расчеты характеристик электростатических полей в многослойных диэлектриках (Потемкина, 2010).

В качестве примера рассмотрим расчет характеристик электрического поля уединенного шарового проводника радиуса R_1 , окруженного прилегающим к



нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с проницаемостью ϵ и наружным радиусом R_2 (см. рис.). Сообщим шаровому проводнику заряд Q . Тогда вне и на поверхности проводника возникает электрическое поле, характеризуемое вектором \vec{D} . Это поле обладает сферической симметрией и, следовательно, для расчета величины электрического смещения поля применима теорема Гаусса для вектора \vec{D} в диэлектрике (2).

Так как силовые линии вектора \vec{D} не испытывают скачков при переходе через границу раздела двух диэлектриков, то рассчитав величину поля вектора \vec{D} , найдем значение модуля вектора \vec{E} в интересующих нас точках, используя формулу связи между векторами \vec{E} и \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

В силу очевидной симметрии замкнутую поверхность, охватывающую заряд, выберем в виде сферы радиуса r . Площадь поверхности сферы:

$$S_{\text{сфер}} = 4\pi r^2$$

Напряженность поля, создаваемого в диэлектрике зарядом Q , будет равна:

$$E_r = \frac{Q}{4} \pi \epsilon \epsilon_0 r^2$$

На основе связи между E и потенциала φ , найдем значение φ :

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Проинтегрируем это соотношение и получим:

$$\varphi(r) = \left(\frac{Q}{4} \pi \epsilon \epsilon_0 r \right) + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования const определяем из условия:

$$\phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2}.$$

Зная потенциал, легко определить ёмкость проводника:

$$C = \frac{Q}{\phi(R_1)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1}{1 + \frac{R_1(\epsilon - 1)}{R_2}}.$$

Следует иметь в виду, что рассмотренный выше метод применим не всегда. Его использование возможно и целесообразно, если поле обладает каким-либо видом симметрии – сферической, цилиндрической или плоской, и, следовательно, имеется возможность выбора достаточно простой замкнутой поверхности, площадь которой легко рассчитать (Розанов & Потемкина, 2017).

Применение теоремы Гаусса для поля вектора \vec{D} дает возможность облегчить и ускорить расчёт основных характеристик поля в диэлектрике – напряженности электростатического поля, величины потенциала и электрического смещения и сформировать у студентов навыки физически обоснованного выбора и приложения математических методов к решению практических задач.

Список литературы

- Беликов, Б. С. (1986). *Решение задач по физике. Общие методы* (с. 107—110). Москва: Высшая школа.
- Ландау, Л. Д., & Лившиц, Е. М. (2005). *Теоретическая физика* (Т. VIII. Электродинамика сплошных сред, с. 37). Москва: Физматлит.
- Потемкина, С. Н. (2010). Математические методы в преподавании курса физики. У Матеріалах *Тринадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 13—15 травня* (Т. 3, с. 229). Київ: КПІ.
- Розанов, А. В., & Потемкина, С. Н. (2017). Моделирование краевых эффектов для электростатического поля плоского конденсатора. В *Матеріалах V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 29—30 грудня 2016 року (с. 96—99). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Ясников, И. С., Потемкина, С. Н., Ведутенко, Е. А., & Потемкина, Л. О. (2011). *Электричество и магнетизм: Практикум*. (Ч. 3, с. 45—46). Тольятти: Изд-во ТГУ.

МАТЕМАТИЧНА ПОДЕЛЬ ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА ДОМІШКОВИМИ ЦЕНТРАМИ

А. С. Пушак, Я. С. Пушак, Н. М. Пирч

Українська академія друкарства, Львів, Україна

apushak@gmail.com, yaroslav.pushak@gmail.com, pnazar@ukr.net

Розглянуто процес поглинання світлових квантів домішковими центрами, однорідно розподіленими в об'ємі речовини. Приведено математичну модель процесу поглинання за умови, що всі поглинаючі центри будуть поглинати кванти світла. Показано взаємозв'язок густини світлового потоку з ймовірністю поглинання усіма домішковими центрами за умови поглинання всіма центрами.

Ключові слова: ймовірність, поглинання, домішкові центри, кванти світла.

При розгляді поглинання світла речовиною приймається, що поглинаюче середовище однорідне і кількість поглинутого світла пропорційна довжині шляху світла. Тобто процес поглинання однорідних середовищ описується законом Ламберта — Бугера:

$$I = I_0 e^{-kx}, \quad (1)$$

де I_0 — інтенсивність світла, яка падає на середовище, I — інтенсивність світла, яка пройшла товщину шару x , k — коефіцієнт поглинання.

Однак в більшості випадків поглинаюче середовище неоднорідне і поглинаючі центри можна розглядати дискретно розподіленими в певному прозорому об'ємі. Наприклад, такою системою може бути кристалічна система на основі матриці монокристала, у яку вкраплені мікрокристали, приблизно однакового розміру, які однорідно розподілені в усьому об'ємі матриці.

Розглядаючи таку систему, вже не можна скористатися класичним законом поглинання, а потрібно статистичний підхід до опису процесу поглинання, оскільки від розподілу поглинаючих центрів залежатиме результуюче поглинання світла певного об'єму речовини.

Модель даної кристалічної системи можна розглянути наступним чином (рис. 1):

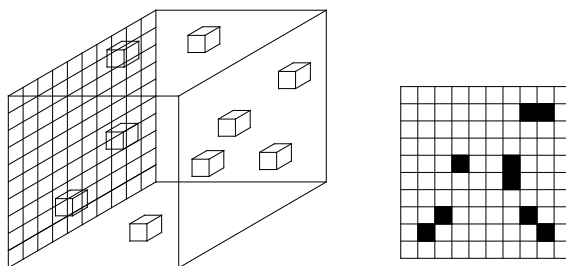


Рис. 1

Поглинаючі центри (маленькі кубики) розподілені однорідно в певному об'ємі. Проекцію поглинаючих центрів на одну із граней подано на рис. справа, де кількість темних квадратиків відповідає кількості поглинаючих центрів.

Дана модель ілюструє, наприклад, тонкий шар фарби з домішковими поглинаючими центрами, які розподілені в шарі фарби. Залежно від розподілу домішкових центрів за певної їх концентрації можливе різне поглинання світлових квантів. Тому задача полягає у знаходженні взаємозв'язку з найменшою концентрацією поглинаючих центрів, тобто коли вони однорідно розподілені в тонкому шарі фарби, з густиною світлового потоку. Таким чином можна контролювати розхід різних пігментів, які використовуються в поліграфії як домішкові центри поглинання, для найбільш чіткого відображення кольорового зображення за освітлення у звичайних побутових умовах, а також у затемнених приміщеннях. Для знаходження взаємозв'язку густини світлового потоку тобто кількості світлових квантів які падають на поверхню зразка (рис. 1) за умови такого розподілу поглинаючих центрів, що всі центри будуть задіяні в поглинанні квантів застосуємо теорію випадкових процесів. Математична модель даної задачі виглядає наступним чином: при заданій кількості поглинаючих центрів k , заданій надійності α потрібно оцінити кількість світлових квантів, які ми повинні задіяти, щоб кожен поглинаючий центр з ймовірністю $1 - \alpha$ поглинув принаймні один світловий квант. Розглянемо однорідний марковський процес (Пирч, 2013) з наступними станами: ω_i — стан при якому рівно i центрів поглинання вже поглинули принаймні по одному кванту світла, $p_i(j)$ — ймовірність того, що після випущених j квантів рівно i центрів вже поглинули принаймні один квант. Нехай p_{ij} — ймовірність переходу зі стану ω_j у стан ω_i . Тоді

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{k}, & \text{якщо } i = j \\ \frac{k-i}{k}, & \text{якщо } i = j + 1 \\ 0, & \text{у решти випадках} \end{cases}$$

Матриця однокрокових ймовірностей переходу Π матиме діагональний вигляд,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k-1}{k} & \frac{2}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k-2}{k} & \frac{3}{k} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k-1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix},$$

тому її власні значення рівні діагональним елементам.

Отже,

$$p_k(n) = C_1 \left(\frac{1}{k}\right)^n + C_2 \left(\frac{2}{k}\right)^n + \dots + C_k \left(\frac{k}{k}\right)^n.$$

Константи C_i знаходимо з початкових умов:

$$p_k(1) = 0, p_k(2) = 0, \dots, p_k(k) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k} = \frac{(k-1)!}{k^{k-1}}.$$

Запишемо відповідну систему рівнянь для знаходження констант C_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 + \dots + C_k = 0, \\ C_1 \left(\frac{1}{k}\right) + C_2 \left(\frac{2}{k}\right) + \dots + C_k \left(\frac{k}{k}\right) = 0, \\ \dots \\ C_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{k-1} + C_2 \left(\frac{2}{k}\right)^{k-1} + \dots + C_k \left(\frac{k}{k}\right)^{k-1} = \frac{(k-1)!}{k^{k-1}}, \end{array} \right.$$

або після помноження i -го рівняння на k^{i-1}

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 + \dots + C_k = 0, \\ C_1 + 2C_2 + \dots + kC_k = 0, \\ \dots \\ C_1 + 2^{k-1}C_2 + \dots + k^{k-1}C_k = (k-1)! \end{array} \right. .$$

Числа C_i знаходимо за формулами Крамера:

$$C_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & i-1 & 0 & i+1 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & (i-1)^{k-2} & 0 & (i+1)^{k-2} & \dots & k^{k-2} \\ 1 & \dots & (i-1)^{k-1} & (k-1)! & (i+1)^{k-1} & \dots & k^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (k-1)^2 & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{k-1} & 2^{k-1} & \dots & (k-1)^{k-1} & k^{k-1} \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{k-i}(k-1)! \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq k \\ l, r \neq i}} (l-r) \\
= & \frac{(-1)^{k-i}(k-1)!}{\prod_{1 \leq r < l \leq k} (l-r)} = \frac{(-1)^{k-i}(k-1)!}{\prod_{1 \leq l \leq i-1} (i-l) \prod_{i+1 \leq l \leq k} (l-i)} = \\
& = \frac{(-1)^{k-i}(k-1)!}{(i-1)!(k-1)!} = (-1)^{k-1} C_{k-1}^{i-1}.
\end{aligned}$$

Тут ми скористались формулою для визначника Вандермонда. Отже,

$$\begin{aligned}
p_k(n) &= 1 - C_{k-1}^1 \left(\frac{k}{k}\right)^n + C_{k-1}^2 \left(\frac{k-1}{k}\right)^n - C_{k-1}^3 \left(\frac{2}{k}\right)^n + \dots + (-1)^i C_{k-1}^i \left(\frac{k}{k}\right)^n = \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i \left(\frac{k}{k}\right)^n.
\end{aligned}$$

Оскільки послідовність $p_k(n)$ є зростаючою, то ми скориставшись обчислювальними пакетами, за заданими k та α зможемо знайти найменше n таке, що

$$p_k(n) \geq 1 - \alpha.$$

Можемо також знайти аналітичну, дещо грубу, оцінку для числа n . Серед

усіх значень $\binom{i}{k}$ найбільшим є $\binom{k-1}{k}$, серед усіх біноміальних коефіцієнтів

C_{k-1}^i найбільшим є $C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ (де $\lfloor x \rfloor$ — ціла частина числа x), тому

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i \left(\frac{i}{k}\right)^n \right| \leq \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n = (k-1) C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n \leq \alpha.$$

Звідки

$$n \geq \log_{\frac{k-1}{k}} \frac{\alpha}{(k-1) C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}}.$$

Список літератури

Пирч, Н. М. (2013). *Практикум з теорії випадкових процесів: Навчальний посібник*. Львів: Видавництво Української академії друкарства.

КОНЦЕПЦИЯ КОРРЕКТНОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

С. Г. Радченко

Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина
lapach@ukr.net

В работе рассмотрены методы создания корректных условий при решении задач моделирования. Сформулированы условия корректности при проведении исследований. Использование концепции корректности при моделировании и оптимизации режимов светодиодной системы освещения витаминной оранжереи при наличии исходной мультиколлинеарности факторов позволило получить адекватные и информативные регрессионные статистические модели влияния параметров освещения на изучаемые критерии качества.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, план эксперимента, статистическая модель, мультиколлинеарность факторов.

Экспериментально-статистические методы исследования широко используются при создании и совершенствовании сложных систем и процессов. Для получения многофакторных статистических моделей обычно используют регрессионный анализ при аппроксимации исходных данных, полученных путем проведения многофакторного эксперимента. Необходимая информация для получения искомой модели — значимо влияющие факторы, закон распределения исходных данных и др. — обычно отсутствует. Задача решается в условиях реально заданных сложных систем. Получаемые результаты могут содержать систематические ошибки и значительные случайные ошибки и в этом случае не имеют реального смысла. Указанные условия являются типичными для экспериментально-статистической методологии. Однако на это не всегда обращается необходимое внимание.

Для решения подобных задач необходимо использовать корректные методы. Впервые на это было обращено внимание в 1902 г. при решении задачи по теплопроводности. Получаемое решение, по мнению французского математика Ж. Адамара, не имело реального смысла, так как сравнительно малые исходные погрешности, которые невозможно было исключить, приводили к значительным конечным ошибкам. Авторитет Ж. Адамара был велик, и задачами такого класса редко занимались до 40-х годов прошлого века. Однако в реальной жизни такие задачи продолжали появляться и требовали своего решения.

Сложность и специфичность решения математических задач с неточными исходными данными заключаются в том, что реализация решения на современных ЭВМ в рамках классических методов не гарантирует устойчивых результатов. Акад. А. Н. Тихонов считал, что «устойчивые математические методы решения неустойчивых задач с неточными данными относятся к классу математических задач, выходящих за пределы классической математики» (Тихонов, 1989).

Были сформулированы следующие условия корректности:

1. При определенных начальных значениях задача имеет решение.
2. Выполнение условий решения задачи различными исследователями приводит к однозначному решению.
3. При сравнительно малых нарушениях условий получаемые конечные результаты изменяются сравнительно незначительно.

Если нарушается хотя бы одно условие корректности, задача относится к некорректно поставленной.

Типичной некорректно поставленной задачей часто является определение коэффициентов многофакторной статистической модели с использованием метода наименьших квадратов. Будем полагать, что используется полиномиальная модель определенного порядка. Матрица эффектов представляется как матрица Гильберта; известно, что матрица Гильберта имеет дискриминант отличный от нуля. С возрастанием порядка матрицы дискриминант быстро уменьшается и получаемое решение становится неустойчивым, воспользоваться им становится практически невозможным. На получаемые результаты влияют алгоритм и программа, используемые при решении задачи.

Практика решения прикладных задач в разных областях исследований ставила проблему поиска математиками и специалистами общих методов их решения. Получил распространение метод регуляризации некорректно поставленных задач в различных модификациях. Значительные работы были проведены школами акад. А. Н. Тихонова, акад. М. М. Лаврентьева и их учениками и последователями (Тихонов & Арсенин, 1986). Разработанные методы позволили решать неустойчивые прикладные задачи обработки сигналов и изображений в области астрофизики, томографии, оптики, спектроскопии, ядерной физики и в других областях, в математических моделях которых число обусловленности составляло $10^4 \dots 10^6$, а после регуляризации становилось около 10^2 . Использование методов статистической регуляризации создает неустранимую систематическую ошибку. Конкретный выбор параметра регуляризации затруднен, так как методология его выбора является стохастической. Применение методов регуляризации ограничено и не позволяет получить «истинное» решение задачи.

Одним из основных подходов при создании корректных условий при решении задач моделирования является использование устойчивых (ортогональных) планов экспериментов и устойчивых структур статистических моделей. Основой таких планов является полный факторный эксперимент. По теореме Бродского все эффекты полного факторного эксперимента ортогональны друг к другу (Бродский, 1976, с. 24—29). Если число опытов полного факторного эксперимента слишком велико и его использовать не представляется возможным, необходимо применять планы дробных факторных экспериментов, статистические свойства которых близки к свойствам полного факторного эксперимента. Такими планами являются многофакторные регулярные планы и планы на основе ЛП_т равномерно распределенных последовательностей (Радченко, 2011, с. 93—111; Лапач (2016); Соболев & Статников, 2006; Радченко, 2013). Такие

дробные факторные планы обеспечивают ортогональность всех главных эффектов друг к другу и ортогональность некоторых взаимодействий факторов или их слабую коррелированность между собой. Ортогональность эффектов в статистической модели позволяет интерпретировать их в причинных и структурных связях факторов и критериев качества моделируемых систем и изучать механизмы происходящих явлений в виде обоснованного анализа. Такое свойство моделей соответствует понятию семантической информационной.

Преобразование исходных данных, заданных в натуральных значениях факторов, проводится путем использования системы контрастов. Контрасты должны быть ортогональны друг к другу и нормированы, что достигается использованием ортогональных полиномов Чебышева (Радченко, 2011, с. 54—57).

Для нестандартных областей факторного пространства разработан топологический метод устойчивого оценивания статистических моделей. Метод позволяет устойчиво оценивать коэффициенты модели в условиях высокой коррелированности факторов (Радченко, 2011, с. 172—185). Сущность метода заключается в том, что область образа факторного пространства, в которой факторы коррелированы и задача построения статистической модели является некорректной, преобразуется в область прообраза факторного пространства, в которой факторы ортогональны и в которой возможно корректное получение модели. Структура и коэффициенты такой модели будут устойчивыми. Топологический метод устойчивого оценивания коэффициентов статистической модели позволяет получить модели, наиболее близкие к «истинным».

В условиях нестандартных областей факторного пространства и значительной исходной мультиколлинеарности факторов, чтобы избежать решения некорректно поставленных задач, применяют метод использования фиктивных факторов (алгоритм RASTA13). Он заключается в представлении фактора, коррелированного с другими факторами, в виде двух факторов: физического и фиктивного (Радченко, 2011, с. 187—189). Оба фактора должны быть такими по числу уровней, с которыми можно было бы оптимально планировать эксперимент. Один из двух факторов может быть взят как реальный фактор, который имеет физический смысл и исследуется в эксперименте. Второй – как фиктивный (формальный) и не имеющий физического смысла. Сочетание двух факторов позволяет функционально представить уровни коррелированного фактора в соответствии с требованиями матрицы плана эксперимента. В рабочей матрице эксперимента коррелированный фактор представляется заданными условиями значений уровней, которые он имеет в исходной постановке задачи.

Примером создания корректных условий при построении многофакторных статистических моделей с использованием фиктивных факторов является исследование и оптимизация режимов светодиодной системы освещения космической оранжереи (Коновалова и др., 2016). Изучалось влияние параметров работы облучателя с цифровым управлением, выполненного на основе белых и красных светодиодов, на критерии качества растений: продуктивность посева

листовых овощей по сухой массе и концентрацию аскорбиновой кислоты в биомассе.

Управляемые факторы: X_1 — суммарная плотность светового потока, падающего на растения; X_2 — отношение уровней потока фотонов красных и белых светодиодов; X_3 — частота и скважность подаваемых от облучателя световых импульсов.

В качестве плана эксперимента был выбран многофакторный регулярный робастный план эксперимента: 3 фактора, каждый из которых изменяется на 4 уровнях, всего 16 опытов. План эксперимента позволяет оценить все главные эффекты ортогонально друг к другу, взаимодействия слабо коррелированы (коэффициенты парной корреляции меньше 0,4).

Поскольку в данном эксперименте фактор X_3 коррелирован с фактором X_1 , начальные условия приводят к некорректно поставленной задаче. Поэтому для создания корректных условий решения задачи был привлечен метод использования фиктивных факторов: уровни варьирования фактора X_3 в матрице плана эксперимента представлены уровнями фиктивного фактора X_{3f} с привлечением алгоритма RASTA13.

По результатам эксперимента были построены регрессионные статистические модели влияния световых режимов освещения на изучаемые критерии качества растений. Анализ статистических характеристик построенных моделей показал, что обе модели являются адекватными и информативными. Средняя погрешность аппроксимации составила 5,1 и 8,4% соответственно. Полученные модели позволили найти световые режимы, обеспечивающие максимум сухой массы посева и максимум концентрации аскорбиновой кислоты в биомассе.

Список литературы

- Бродский, В. З. (1976). *Введение в факторное планирование эксперимента*. Москва: Наука.
- Коновалова, И. О., Беркович, Ю. А., Ерохин, А. Н., Смолянина, С. О., Яковлева, О. С., Знаменский, А. И., ...Цвирко, В. И. (2016). Оптимизация светодиодной системы освещения витаминной космической оранжереи. *Авиакосмическая и экологическая медицина*, 50(3), 17—22.
- Лапач, С. Н. (2016). Робастные планы эксперимента. *Математичні машини і системи*, (4), 111—121.
- Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа: Монография*. Киев: «Корнійчук».
- Радченко, С. Г. (2013). Многофакторные планы экспериментов для совместного проведения оптимизации и моделирования. *Математичні машини і системи*, (3), 124—130.
- Соболь, И. М., & Статников, Р. Б. (2006). *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: Учебное пособие для вузов*. (2-е изд.). Москва: Дрофа.
- Тихонов, А. Н. (1989). Выступление на годичном общем собрании Академии наук СССР. *Вестник Академии наук СССР*, (2), 94—95.
- Тихонов, А. Н., & Арсенин, В. Я. (1986). *Методы решения некорректных задач* (3-е изд.). Москва: Наука.

ВПЛИВ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕКРУГОВИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ

Л. С. Рожок

Національний транспортний університет, Київ, Україна

r.l.s@ua.fm

У просторовій постановці з використанням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації досліджено напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів, поперечних переріз поверхні відліку яких, описаний рівнянням овалів Касині, при дії локального навантаження.

Ключові слова: локальне навантаження, овали Касині, напружений стан, порожнисті циліндри.

Багато елементів конструкцій сучасної техніки, що виконані у вигляді оболонок різноманітної форми та структури, знаходяться під дією розподіленого та локального навантаження. Широке використання оболонкових елементів пояснюється намаганням задовольнити вимогам, що зумовлені складними умовами роботи машин, споруд та інших агрегатів.

Разом з універсальними підходами до розв'язання задач механіки та математичної фізики, що базуються на використанні методів скінчених різниць, скінчених елементів, та інших дискретних методів, широко використовуються підходи до розв'язання певних класів задач, що дозволяють звести тривимірну крайову задачу до звичайних диференціальних рівнянь на основі апроксимації розв'язку за іншими координатами за допомогою аналітичних засобів.

Розглядаються циліндри, з круговим, еліптичним та двома видами овального поперечного перерізу в ортогональній криволінійній системі координат s, ψ, γ , де s — довжина дуги вздовж твірної ($0 \leq s \leq l$), ψ — полярний кут у поперечному перерізі ($0 \leq \psi \leq 2\pi$), γ — нормальна координата по товщині циліндра ($-\frac{H}{2} \leq \gamma \leq \frac{H}{2}$). Подібні форми поперечного перерізу можна описати одним рівнянням для овалів Касині в полярній системі координат (Савелов, 1960)

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\psi + \sqrt{\cos^2 2\psi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0,$$

де ρ — полярний радіус, c — половина відстані між фокусами, a — добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів c та a характеризує форму поперечного перерізу (рис.1). Якщо $c = 0$ — маємо коло (1), при $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — еліпс (2), $c = a\sqrt{2}$ — овал (3), $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ — сплюснутий овал (4).

Прикладене в околі більшої півосі циліндра локальне навантаження можна подати у вигляді ряду

$$q_{\gamma}(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[\sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right].$$

Тут, параметр β характеризує ділянку прикладання навантаження. На рис. 2 показане локальне навантаження для одного з циліндрів (3), що розглядаються.

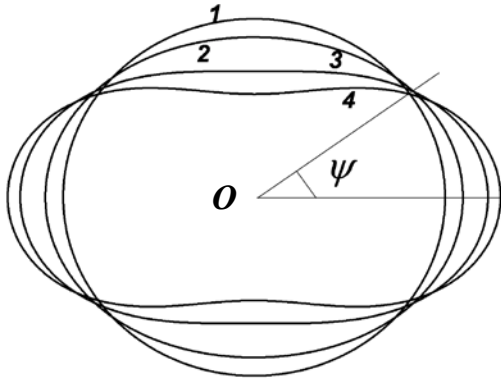


Рис. 1. Поперечний переріз поверхні відліку ($\gamma = 0$)

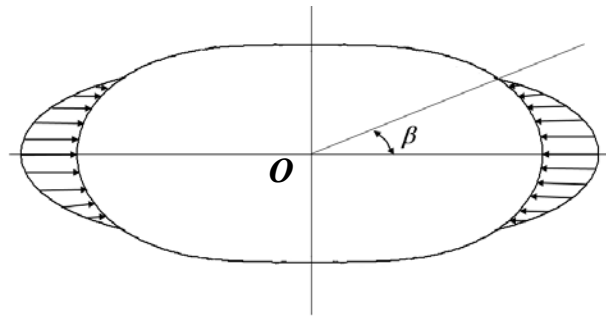


Рис. 2. Локальне навантаження на зовнішній поверхні ($\gamma = H/2$)

За вихідні приймаються основні рівняння просторової теорії пружності для ізотропного тіла (Тимошенко, 1972). На торцях циліндра розглядаються умови типу простого опирання. За розв'язувальні функції приймаються компоненти напруження і переміщення, у яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (Рожок, 2017).

Граничні умови на торцях циліндра дозволяють відокремити змінні в напрямку твірної циліндра шляхом подання розв'язувальних функцій та компонентів навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є вздовж твірної. Для відокремлення змінних у напрямку напрямної циліндра, у розв'язувальній системі диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів Фур'є вздовж твірної, добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що перешкоджають даному відокремленню, замінюються доповняльними функціями.

Отримана таким чином розв'язувальна система рівнянь, формально не буде містити в собі членів, що не дозволяють відокремити змінні у напрямку напрямної циліндра. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції, а також компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є відокремлюють змінні вздовж напрямної циліндра, отримавши при цьому систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді

$$\frac{d\sigma_{\gamma,n,k}}{d\gamma} = (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,n,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3;$$

$$\frac{d\tau_{s\gamma,n,k}}{d\gamma} = -c_1\lambda_n\sigma_{\gamma,n,k} - \phi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n\phi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2u_{s,n,k} - b_{66}\phi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n\phi_{4,k}^2;$$

$$\frac{d\tau_{\psi\gamma,n,k}}{d\gamma} = -c_2\phi_{3,k}^1 - 2\phi_{2,k}^1 - b_{22}\phi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n\phi_{3,k}^3 - b_{22}\phi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2u_{\psi,n,k}; \quad (1)$$

$$\frac{du_{\gamma,n,k}}{d\gamma} = c_4\sigma_{\gamma,n,k} - c_2\phi_{4,k}^2 + c_1\lambda_nu_{s,k} - c_2\phi_{1,k}^3;$$

$$\frac{du_{s,n,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,n,k} - \lambda_nu_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,n,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,n,k} - \phi_{3,k}^2 + \phi_{2,k}^2,$$

$$(k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N})$$

із крайовими умовами

$$\begin{aligned} \gamma = -H/2 : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \\ \gamma = H/2 : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отримана крайова задача (1), (2) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Grigorenko & Rozhok, 2014). Оскільки, у наслідок введення доповняльних функцій, кількість невідомих перевищує кількість рівнянь у системі (1), то у процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу, значення амплітуд доповняльних функцій визначаються за допомогою процедури знаходження коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок (Фихтенгольц, 1949).

На основі викладеного підходу досліджується напружений стан порожнистих ізотропних циліндрів, що знаходяться під дією локального навантаження.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндрів $l = 80$, товщина $H = 4$; параметри поверхні відліку — $a = 20, c = 0$ (коло 1), $c = 8$ (еліпс 2), $c = 14,14$ (овал 3), $c = 16$ (сплюснутий овал 4). Механічні параметри: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = 1$. Ділянка прикладеного

локального навантаження $\beta = \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8}$. Значення сталої навантаження q_0 вибирається таким чином, щоб максимальне значення навантаження було однаковим, як при $\beta = \frac{\pi}{8}$.

Результати розв'язання задачі подано в середньому перерізі по довжині $l = 40$ у табл. 1 для розподілу полів переміщень u_γ поверхні відліку та у табл. 2 для розподілу полів напружень σ_ψ на внутрішній та зовнішній поверхні циліндра вздовж напрямної в інтервалі $0 \leq \psi \leq \pi/2$.

Табл. 1

| γ | ψ | $u_\gamma E_0 / q_0$ | | | | | | | |
|----------|-----------|----------------------|--------|--------|--------|-------------------|--------|--------|--------|
| | | $\beta = \pi / 16$ | | | | $\beta = \pi / 8$ | | | |
| | | c | | | | | | | |
| | | 0 | 8 | 14,14 | 16 | 0 | 8 | 14,14 | 16 |
| 0 | 0 | 50,11 | 46,39 | 37,84 | 33,44 | 47,08 | 42,53 | 32,31 | 27,24 |
| | $\pi/10$ | 37,93 | 31,48 | 16,69 | 9,98 | 36,30 | 29,58 | 14,99 | 8,82 |
| | $3\pi/10$ | -14,50 | -23,36 | -39,41 | -41,67 | -13,64 | -21,64 | -34,41 | -34,72 |
| | $\pi/2$ | -40,15 | -43,82 | -49,20 | -47,12 | -38,61 | -41,22 | -43,31 | -39,38 |

З табл. 1 видно як впливає зміна ділянки прикладання локального навантаження на розподіл переміщень u_γ в залежності від форми поперечного перерізу поверхні відліку. Так, більш суттєві зміни спостерігаються для циліндрів зі сплюснутим овальним поперечним перерізом (4), порівняно з круговим циліндром (1). Абсолютні значення переміщень зменшуються в 1,5 рази для $\beta = \frac{\pi}{16}$ та в 1,7 рази для $\beta = \frac{\pi}{8}$.

Табл. 2

| γ | ψ | $10\sigma_\psi / q_0$ | | | | | | | |
|----------|-----------|-----------------------|--------|--------|--------|-------------------|--------|--------|--------|
| | | $\beta = \pi / 16$ | | | | $\beta = \pi / 8$ | | | |
| | | c | | | | | | | |
| | | 0 | 8 | 14,14 | 16 | 0 | 8 | 14,14 | 16 |
| $H/2$ | 0 | -11,62 | -11,89 | -12,84 | -13,40 | -9,99 | -9,95 | -10,05 | -10,05 |
| | $\pi/10$ | -5,63 | -12,99 | -17,74 | -13,67 | -5,62 | -12,43 | -16,08 | -12,10 |
| | $3\pi/10$ | 4,30 | -0,97 | -22,43 | -32,13 | 4,25 | -0,64 | -19,14 | -26,21 |
| | $\pi/2$ | 6,42 | 5,23 | 2,17 | 0,90 | 6,48 | 5,27 | 2,32 | 1,13 |
| $-H/2$ | 0 | 11,49 | 11,42 | 11,37 | 11,18 | 10,09 | 9,81 | 9,21 | 8,72 |
| | $\pi/10$ | 6,36 | 0,21 | -5,26 | -3,55 | 6,34 | 0,51 | -4,28 | -2,72 |
| | $3\pi/10$ | -2,43 | -6,75 | -22,21 | -28,04 | -2,39 | -6,36 | -19,52 | -23,46 |
| | $\pi/2$ | -4,61 | -5,14 | -5,89 | -4,80 | -4,64 | -5,04 | -5,29 | -3,96 |

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової, призводить до збільшення жорсткості циліндрів у зоні більшої півосі ($\psi = 0$), де мають місце максимальні значення локального навантаження. Характер розподілу напружень σ_ψ залежно від зміни ділянки прикладеного навантаження та відхилення форми поперечного перерізу наведено в табл. 2.

Таким чином, варіюючи геометричними параметрами циліндрів, можна знайти найоптимальнішу форму їх поперечного перерізу, залежно від зміни ділянки прикладеного локального навантаження.

Список літератури

- Grigorenko, Ya. M., & Rozhok, L. S. (2014). Applying discrete Fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders. *Int. App. Mech.*, 50(2), 105—127.
- Рожок, Л. С. (2017). Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*, (1), 36—39.
- Савелов, А. А. (1960). *Плоские кривые: Систематика, свойства, применение*. Москва: Физматлит.
- Тимошенко, С. П. (1972). *Курс теории упругости*. Киев: Наукова думка.
- Фихтенгольц, Г. М. (1949). *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. (Т. 3.). Москва: Наука.

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ И КИНЕТИКИ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ СРЕД, ЛЕГИРОВАННЫХ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В. А. Савва

Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

vadimsavva@yandex.by

Предложена модель сред и уравнения, описывающие возбуждение и флуоресценцию при разных мощностях импульсного лазерного воздействия. На основе экспериментальных данных оценены относительные параметры сред. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом.

Ключевые слова: фотолюминесценция, эффективность, люминофоры, европий, празеодим.

В работе Leanenia et al. (2017) представлены результаты экспериментальных исследований сред, содержащих редкоземельные элементы. Измерены эффективность их возбуждения и флуоресценции в огромном диапазоне мощности $10^1 - 10^8 \text{ Вт} / \text{см}^2$ излучения накачки длительностью $T_p = 10 \text{ нс}$. Среды оказались эффективными люминофорами, перспективными как излучатели или лазерные среды в видимом диапазоне спектра. Сходные по структуре матрицы с родственными редкоземельными элементами показали свойства, резко различающиеся на порядки величин. Так, эффективность их возбуждения оставалась неизменной в большом интервале мощностей, а при достижении некоторого порога, она резко падала, причем пороговые мощности сред различались на порядки. Времена затухания флуоресценции также различались на порядки, а при больших мощностях наблюдалась неэкспоненциальная кинетика свечения некоторых сред. Для выяснения этих особенностей в данной работе проведено теоретическое описание явлений возбуждения и флуоресценции, на основе предложенной модели сред, баланса энергии в них и с использованием данных эксперимента. Результаты расчета вполне согласуются с экспериментом и объясняют относительные различия характеристик сред.

Излучение вызывает переходы $0 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ между уровнями энергии (двухступенчатая накачка): уровень 2 быстро заселяется, и при высоких мощностях его населенность насыщается, что и объясняет падение эффективности после достижения пороговой мощности. В процессе накачки часть ионов возвращается в основное состояние в процессе $3 \rightarrow 0$ очень быстрой релаксации. По окончании накачки ионы безызлучательно переходят $2 \rightarrow 1$ на уровень 1, с которого происходит флуоресценция.

Динамика возбуждения среды описывается уравнениями для населенностей уровней 0 и 2

$$\begin{aligned}\frac{dn_0}{dt} &= -Bun_0 + B(1+m)un_2; \\ \frac{dn_2}{dt} &= Bun_0 - B(1+m)un_2; \quad n_0(0) = 1; n_2(0) = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь Bu и mBu — вероятности в нижнем и верхнем каналах накачки. Из (1) следует, что к моменту T_p окончания накачки населенность

$$n_2(T_p) = \frac{1}{m+2} \left\{ 1 - e^{-(m+2)BuT_p} \right\}.$$

При малых мощностях $BuT_p \ll 1$ излучения населенность растет линейно

$$n_2(T_p)_{BuT_p \ll 1} = BuT_p$$

с увеличением мощности, а при больших — выходит на насыщение на уровне

$$n_2(T_p)_{BuT_p \gg 1} = \frac{1}{m+2} = n_2^{max},$$

который далее не меняется, сколь бы ни увеличивалась плотность мощности возбуждающего излучения. Параметр $m+2$ определяет максимально возможный уровень возбуждения среды, а $m_i = B_i^{23} / B_i^{02}$. Индекс $i = 1, 2, 3$ определяет среду $CaGa_2S_4:Eu^{2+}$, $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$, и $CaGa_4O_7:Eu^{3+}$, соответственно.

Эффективность возбуждения и эффективность флуоресценции среды определяем как отношение запасенной в среде энергии к энергии излучения накачки, пропорциональной BuT_p ,

$$\eta_i = \frac{1 - e^{-(m_i+2)B_i u_i T_p}}{(m_i+2)B_i u_i T_p}, \quad i = 1, 2, 3.\tag{2}$$

Пороговую плотность излучения

$$u_i^{thr} = 1 / (m_i + 2) B_i u_i T_p$$

находим из (2) по точке пересечения прямых $\eta_i \equiv 1$ и $\eta_i \equiv 1 / y$, где

$$y_i = (m_i + 2) B_i u_i T_p = 1.$$

Отношение порогов i среды к порогу среды с $i = 1$ (Eu^{2+}) например, есть

$$\frac{u_i^{thr}}{u_1^{thr}} = \frac{B_1(m_1+2)}{B_i(m_i+2)} = \frac{W_i}{W_1}$$

и равно отношению экспериментально определенных в Leanenia et al. (2017), Савва, Леоненя и Урманов (2017) мощностей возбуждающего излучения

$$W_i = \{ 2.5 \cdot 10^4, 5.0 \cdot 10^5, 2.5 \cdot 10^7 \} \text{ Вт / см}^2.$$

Отсюда следует *первый инвариант*, связывающий экспериментальные пороги с введенными параметрами накачки сред

$$W_i B_i (m_i + 2) = \text{const}1, \text{ или } W_1 B_1 (m_1 + 2) = W_2 B_2 (m_2 + 2) = W_3 B_3 (m_3 + 2). \quad (3)$$

Он позволяет вычислить относительные значения параметров накачки

$$\frac{B_i (m_i + 2)}{B_1 (m_1 + 2)} = \left(\frac{W_i}{W_1} \right)^{-1}; \quad \frac{B_2 (m_2 + 2)}{B_1 (m_1 + 2)} = 0.05; \quad \frac{B_3 (m_3 + 2)}{B_1 (m_1 + 2)} = 10^{-3}. \quad (4)$$

Используя экспериментальные времена флуоресценции $\tau_i = \{0.49, 4.65, 1300\} \cdot 10^{-6} \text{ с}$ и длины волн ее излучения $\lambda_i = \{555, 494, 612\} \text{ нм}$, удалось определить отношения B_i / B_1 и $(m_i + 2) / (m_1 + 2)$. Заметим, что накачка действует в канале $0 \rightarrow 2$, а флуоресценция происходит при переходах канале: $1 \rightarrow 0$. Коэффициенты B этих каналов могут сильно различаться $B_i^0 = \beta_i B_i$, где B_i^0 коэффициент в канале $1 \rightarrow 0$, а β_i — неизвестный нам множитель. Из соотношения Эйнштейна следует

$$8\pi h\nu_i^3 / c^3 = A_i^0 / B_i^0 = 1 / B_i^0 \tau_i = 1 / B_i \tau_i \beta_i.$$

Поскольку среды представляют собой весьма схожие матрицы, легированные «родственными» редкоземельными элементами Eu^{2+} , Pr^{3+} , Eu^{3+} , допустимо предположить, что параметр β_i не сильно различен в этих средах, т. е. полагаем $\beta_i \equiv \beta$. Отсюда получаем *второй инвариант*:

$$B_i \tau_i \lambda_i^{-3} = \text{const}2, \quad \text{или} \quad B_1 \tau_1 \lambda_1^{-3} = B_2 \tau_2 \lambda_2^{-3} = B_3 \tau_3 \lambda_3^{-3}. \quad (5)$$

Он позволяет по экспериментальным данным τ_i , λ_i определить отношение коэффициентов в канале накачки $0 \rightarrow 2$ двух сред

$$\frac{B_i}{B_1} = \left(\frac{\tau_i}{\tau_1} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^3. \quad (6)$$

Таким образом, два построенных инварианта (3) и (5)

$$W_i B_i (m_i + 2) = W_1 B_1 (m_1 + 2); \quad B_i \tau_i \lambda_i^{-3} = B_1 \tau_1 \lambda_1^{-3}; \quad i = 1, 2, 3; \quad (7)$$

определяют отношения B_i / B_1 и $(m_i + 2) / (m_1 + 2)$ по отдельности

$$\frac{B_i}{B_1} = \left(\frac{\tau_i}{\tau_1} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^3, \quad \frac{m_i + 2}{m_1 + 2} = \left(\frac{W_i}{W_1} \right)^{-1} \frac{\tau_i}{\tau_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{-3}. \quad (8)$$

Подставив численные значения, получаем отношения характеристик сред:

$$\frac{B_2}{B_1} = 0.0743; \quad \frac{B_3}{B_1} = 0.505 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{m_2 + 2}{m_1 + 2} = 0.676; \quad \frac{m_3 + 2}{m_1 + 2} = 1.98. \quad (9)$$

Таким образом, модель среды, предположения и данные экспериментов, позволили определить характеристики каждой среды по отношению к анало-

гичной характеристике среды с ионами Eu^{2+} . Величины $\frac{m_i + 2}{m_1 + 2}$, определяют относительные значения максимально возможного возбуждения сред:

$$\frac{(n_2^{max})_i}{(n_2^{max})_1} = \left(\frac{m_i + 2}{m_1 + 2} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Это позволяет оценить способность разных сред запастись энергией, а также эффективность преобразования возбуждающего излучения в излучение флуоресценции, т. е. сравнительные качества люминофоров.

Чтобы вычислить абсолютные значения B_i и m_i , необходимы дополнительные экспериментальные данные для этих люминофоров.

Среда с Pr^{3+} наиболее эффективна в наборе энергии излучения накачки. Сюда (при $m_1 = 2$) удастся закачать энергии в 1.5 раза больше, чем в среду с Eu^{2+} и в 3 раза больше, чем в среду с Eu^{3+} . Хотя коэффициент поглощения ионов Pr^{3+} в 13.5 раз меньше, чем у Eu^{2+} , (потому и порог в 20 раз больше), Однако канал $2 \rightarrow 3$ не столь сильно «вредит», он в 3 раза слабее, чем у Eu^{2+} (при $m_1 = 2$). Среда с ионами Eu^{3+} невозможно сильно возбудить, увеличивая мощность импульса накачки, поскольку верхний ее канал большую часть энергии переводит в тепло, оставляя на целевом уровне лишь малую часть, вдвое меньшую, чем у Eu^{2+} . К тому же для такого заселения требуется мощность в 1000 раз большая, чем у Eu^{2+} .

Кинетика флуоресценции среды с учетом кросс-релаксации. По завершении этапа накачки ионы, заселившие уровень 2 в количестве $n_2(T_p)$, в результате безызлучательной релаксации $2 \rightarrow 1$ быстро переходят на уровень 1, с которого происходит флуоресценция с временем $\tau_{fl} = A_{1 \rightarrow 0}^{-1}$, причем одновременно возможна кросс-релаксация. Последняя наблюдается при значительных уровнях возбуждения среды, когда ион с энергией E_1 , имеет недалеко соседа, также с энергией E_1 . В результате взаимодействия один ион отдает энергию другому, переходя в основное состояние, а тот, получив энергию, оказавшись в зоне 3, переходит в основное состояние. Процесс описываем кинетическим уравнением

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 - 2rn_1^2; \quad n_1(0) = n_1^0. \quad (11)$$

Его решение имеет вид

$$n_1(t) = \frac{n_1^0 e^{-t}}{1 + 2n_1^0 r (1 - e^{-t})}; \quad (12)$$

здесь $t = At$ — безразмерное время, отсчитываемое от начала этапа флуоресценции; параметр $r = CR / A$ описывает кросс-релаксацию.

Кинетические кривые (12) представляют интенсивность флуоресценции, пропорциональную $n_1(t)$. Они показывают неэкспоненциальную кинетику при большой населенности уровня, что согласуется с экспериментальными кривыми в Leanenia et al. (2017) для среды с Eu^{2+} .

Таким образом, предложенная модель хорошо описывает процессы возбуждения и флуоресценции сред, содержащих один из типов ионов: Eu^{2+} , Pr^{3+} , Eu^{3+} в твердых матрицах, представляющих собой мелкодисперсные кристаллические структуры. Расчеты в совокупности с данными измерений позволили количественно оценить основные параметры этих сред по отношению к какой-либо одной среде (с ионами Eu^{2+}).

Список литературы

- Leanenia, M. S., Lutsenko, E. V., Rzhetski, M. V., Pavlovskii, V. N., Yablonskii, G. P., Naghiyev, T. G.,..., Tagiev, O. B. (2017). Photoluminescence of $Ca_xBa_{1-x}Ga_2S_4 : Eu^{2+}$ solid solutions in wide excitation intensity and temperature intervals. *Journal of Luminescence*, 181, 121–127.
- Савва, В. А., Леоненя, М. С., & Урманов, Б. Д. (2017). Спектральные и энергетические характеристики халькогенидов с ионами Eu^{2+} , Pr^{3+} и Eu^{3+} при возбуждении интенсивным наносекундным излучением. В *Сборнике статей 11-го Белорусско-Российского семинара «Полупроводниковые лазеры и системы на их основе»*, Минск, 15—19 мая (с. 150—152). Минск: Институт физики НАН Беларуси.

УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНИХ СЦЕНАРІЇВ ПЕРЕХОДУ ДО ХАОСУ В НЕІДЕАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

В. О. Сіренко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

sir_vasiliy@ukr.net

Розглянута неідеальна, за Зоммерфельдом — Кононенком, детермінована коливальна динамічна система. Описані нові сценарії переходу від усталених регулярних режимів коливань до хаотичних.

Ключові слова: неідеальна система, сценарій переходу до хаосу.

Будь-яка коливальна система складається із двох основних підсистем, джерела збудження коливань та коливального навантаження. Неідеальною за Зоммерфельдом — Кононенком (Коненко, 1964) називається така система, у якій потужність джерела збудження порівнянна з потужністю, що споживає коливальне навантаження.

Розглянемо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha_1 p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha_1 q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha_1 p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha_1 q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_1.\end{aligned}\tag{1}$$

де $p_1, q_1, \beta, p_2, q_2$ — фазові координати, τ — час, $A, B, N_1, N_3, \alpha, \mu_1$ — деякі параметри. Ця система вперше отримана у роботі Krasnopolskaya та Shvets (1990) для опису динаміки коливань вільної поверхні рідини в циліндричному баку, платформа якого збуджується електродвигуном обмеженої потужності

Як встановлено в роботах Ibrahim (2005), Shvets (2007) система рівнянь (1) використовується для опису коливань рідини в циліндричних баках, для моделювання коливань тонкостінних оболонки, для вивчення маятникових систем з віброуючою точкою підвісу й ряду інших актуальних задач нелінійної динаміки. Залежно від розглянутої прикладної задачі параметри A, B, N_1, N_3 мають різний фізичний або геометричний сенс. У свою чергу фазові змінні p_1, q_1, p_2, q_2 є узагальненими координатами коливальної підсистеми, а фазова змінна — описує функціонування джерела збудження коливань.

У роботах Krasnopolskaya та Shvets (1994, 2009), Швець та Сіренко (2011, 2014), Shvets та Sirenko (2012, 2015) встановлено існування великого різноманіття регулярних і хаотичних атракторів системи (1) та описані деякі

сценарії переходу до хаосу. В даній роботі описані нові сценарії переходу до детермінованого хаосу, які узагальнюють класичні сценарії Фейгенбаума та Помо — Маневілля.

Так як система рівнянь є нелінійною, то в загальному випадку, детальне та всебічне дослідження її динаміки може бути проведено тільки з використанням різних чисельних та компютерних методів Krasnopolskaya та Shvets (1994, 2009), Швец та Сиренко (2014).

Нехай параметри системи приймають наступні значення: $A = 1,12; B = -1,531; N_1 = -1; \alpha = -0,3; \mu_1 = 0,5$. Проаналізуємо сценарії переходів до хаосу при зміні параметра N_3 . При кожному значенні параметра з проміжку $-0,65269 < N_3 < -0,6369$ у системі одночасно існують два однокітних стійких граничних циклів. Проекції фазових портретів таких граничних циклів, побудовані при $N_3 = -0,64$ представлені на рис. 1 (а)—(б). При збільшенні параметра $N_3 = -0,6368$ відбувається подвоєння періодів існуючих симетричних граничних циклів з рис. 1 (а)—(б). Проекції фазових портретів циклів подвоєних періодів зображені на рис. 1 (в)—(г). Подальше збільшення значення параметра N_3 приводить до виникнення симетричних циклів учетвереного періоду і т. д. Такий нескінченний процес подвоєння періодів кожного з існуючих граничних циклів закінчується виникненням хаотичного атрактора при $N_3 = -0,6295$ (рис. 2).

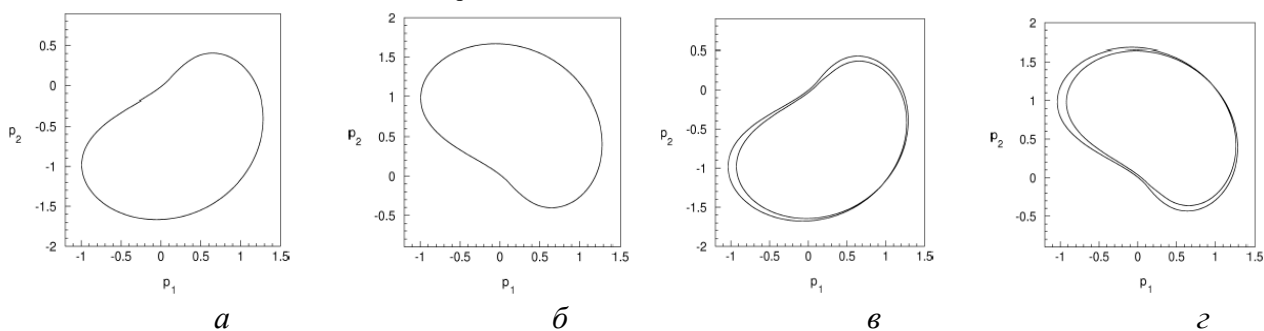


Рис. 1. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -0,64$ (а)—(б), $N_3 = -0,6368$ (в)—(г)

Виниклий хаотичний атрактор має складну структуру фазового портрета, його проекція складається із двох симетричних щодо горизонтальної осі частин.

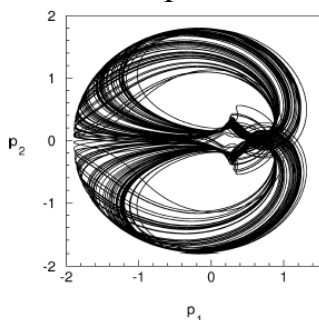


Рис. 2. Проекція фазового портрета хаотичного атрактора при $N_3 = -0,6295$

Амплітуди часових реалізацій даного хаотичного атрактора більш ніж у два рази перевищують амплітуди часових реалізацій граничних циклів каскаду біфуркацій подвоєння. Рух типової траєкторії по хаотичному атрактору можна умовно розбити на дві фази. У першій із цих фаз траєкторія робить хаотичні блукання вздовж витків верхньої (нижньої) частини атрактора. У непередбачений момент часу траєкторія переходить з верхньої (нижньої) частини атрактора в його нижню (верхню) частину й починає робити хаотичні блукання вздовж витків нижньої (верхньої) частини. Потім, у непередбачений момент часу, знову відбувається перехід траєкторії з нижньої (верхньої) частини атрактора в його верхню (нижню) частину. Такий процес повторюється нескінченно. Таким чином перехід до хаосу має особливості характерні як для сценарію Фейгенбаума (нескінченний каскад біфуркацій подвоєння граничних циклів), так і для переміжності (непередбачувана переміжність між верхньою та нижньою частинами отриманого хаотичного атрактора).

Розглянемо ще один тип переходу до хаосу. При кожному значенні параметру $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ у системі існують граничні цикли (рис. 3 (а)—(б)). Зміна параметра N_3 , яка супроводжується виходом його значення, як через ліву, так і через праву границі інтервалу $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ приводить до зникнення обох граничних циклів і виникнення хаотичного атрактора. Проекція фазового портрета такого хаотичного атрактора такого типу зображена на рис. 3 (в).

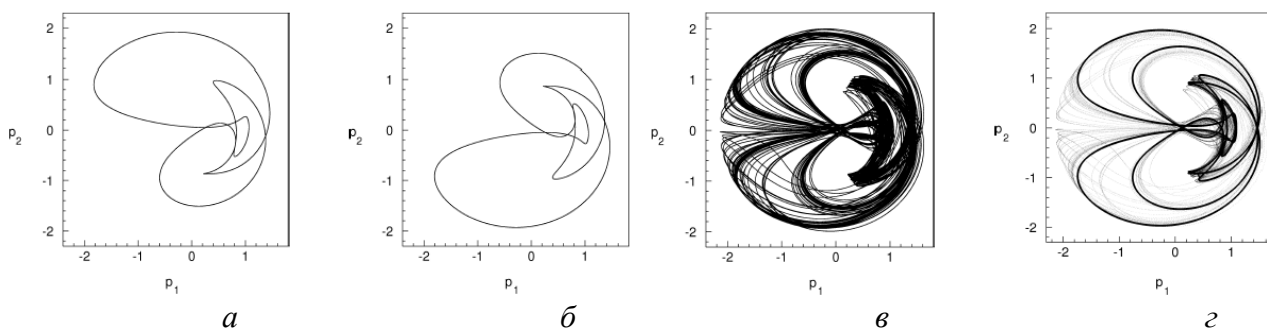


Рис. 3. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -1,183$ (а)—(б); проекції фазового портрета й розподілу інваріантної міри хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$ (в)—(г).

На рис. 3 (г) наведений розподіл інваріантної міри для фазового портрета хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$. Отриманий розподіл проясняє механізм виникнення даного хаотичного атрактора. Контури чітко прорисованої області на рис. 3 (г) за своєю формою нагадують два «склеєних», симетричних граничних цикла. Виникнення хаосу має багато характерних для переміжності особливостей. Однак у цьому випадку рух траєкторії по атрактору включає три фази, дві ламінарні й турбулентну. У першій ламінарній фазі траєкторія здійснює квазіперіодичні рухи в малому околі одного із «склеєних», циклів, або «верхнього», або «нижнього». У непередбачений момент часу відбувається ту-

рбулентний сплеск і траєкторія виходить у віддалені, від околу зниклого циклу, області фазового простору. Такій турбулентній фазі руху відповідають більш світлі ділянки розподілу інваріантної міри на рис. 3 (г). Потім траєкторія знову робить квазіперіодичні рухи в малому околі одного зі зниклих граничних циклів. Причому, після завершення турбулентної фази, траєкторія може як повернутися в першу ламінарну фазу руху, так і перейти у другу ламінарну фазу, який відповідають квазіперіодичні рухи в малому околі другого зі зниклих граничних циклів. Такий процес руху траєкторії по атрактору виду «одна з ламінарних фаз — турбулентна фаза — одна з ламінарних фаз», повторюється нескінченну кількість разів. Причому, непередбаченими є як моменти часу «зриву», траєкторії в турбулентну фазу, так і «перемикання», між двома ламінарними фазами. Таким чином перехід до хаосу нагадує класичний сценарій Помо — Манневілья. Однак, на відміну від класичного сценарію, ми маємо не одну, а дві ламінарні фази.

Список літератури

- Ibrahim, R. A. (2005). *Liquid sloshing dynamics: Theory and applications*. Cambridge University Press.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets A. Yu. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3), 532–553.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1990). Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank. *Soviet Applied Mechanics*, 26(8), 787–794.
- Krasnopol'skaya, T. S., & Shvets, A. Yu. (1994). Chaotic surface waves in limited power — supply cylindrical tank vibrations. *J. of Fluids & Structures*, 8(1), 1–18.
- Shvets, A. Yu. (2007). *Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation*, 59(4), 602–614.
- Shvets, A. Yu., & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2, 303–310.
- Shvets, A. Yu., & Sirenko, V. O. (2015). New ways of transitions to deterministic chaos in non ideal oscillating systems. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (1(99)), 45–51.
- Кононенко, В. О. (1964). *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. Москва: Наука.
- Швец, А. Ю., & Сиренко, В. А. (2011). Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе «бак с жидкостью — электродвигатель». *Динамические системы*, 1(29), 113–131.
- Швец, А. Ю., & Сиренко, В. А. (2014). *Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках*. Збірник праць Інституту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики», 11(4), 386–398.

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ЯК ЕФЕКТИВНІ ЗАСОБИ ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ ДАНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІНИ «МЕТОДИКА НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ, ПАТЕНТОЗНАВСТВО»

Н. Б. Сокульська, В. М. Сокульський

*Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна*

natalya.sokulska@gmail.com

Серед основних тенденцій розвитку світової економіки у ХХІ столітті виділяють зростаючу роль науково-технічного прогресу. Прискорений розвиток науково — технічної й інноваційної сфер діяльності набуває стратегічного значення.

Важливою складовою стабільного зростання та забезпечення конкурентоспроможності країни є залучення до дослідницької діяльності молодих науковців. Правильна мотивація та демонстрація прикладного значення математичних теорій молодим інженерам може сприяти зацікавленню та заохоченню до наукової роботи і, як наслідок, впровадженню ними важливих винаходів і розробок.

Ключові слова: методика наукових досліджень, кореляційний аналіз, регресійний аналіз.

Створення сприятливих умов для розвитку та підвищення ефективності наукової й інноваційної діяльності є пріоритетним завданням державної науково-технічної й інноваційної політики розвинених країн світу. Однією з передумов є залучення до такої діяльності молодих науковців, що здатні швидко й ефективно впроваджувати нові знання, оцінювати отримані результати за допомогою системи показників та індикаторів.

В Україні таке залучення відбувається шляхом заохочення кращих випускників магістратури до здобуття наукових ступенів та звань через виконання певних необхідних норм наукової роботи. У процесі її виконання дослідникам подекуди вдається отримати не лише нові теорії, а й вагому науково-технічну продукцію. Розуміння важливості таких досліджень і вміння правильно їх оформити та оприлюднити є одним з головних завдань, що ставляться перед випускником магістратури. Тому у вищих навчальних закладах запроваджують дисципліни, що готують їх випускників до наукової роботи.

Для курсантів ступеня «Магістр» галузі «Механічна інженерія» Національної академії сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного пропонується вивчення дисципліни «Методика наукових досліджень, патентознавство». У процесі навчання до курсантів доводяться не лише теоретичні основи науки, а й способи та засоби аналізу експериментальних даних, отриманих під час проведення дослідів, зокрема, методи математичної статистики.

Яскравий приклад залежності результатів винахідницької діяльності від наукової роботи під час написання дисертацій дають кореляційний та регресійний аналізи даних, отриманих з Аналітичних довідок стану розвитку науки й техніки 2012—2017 рр., за ознаками, наведеними у табл. 1.

Таблиця 1

| Роки | Природничі науки | | | Технічні науки | | | Загалом | | |
|------|------------------------------|--|---|------------------------------|--|---|------------------------------|--|---|
| | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій (докторських та кандидатських) | Публікаційна діяльність (статті у фахових виданнях) | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій (докторських та кандидатських) | Публікаційна діяльність (статті у фахових виданнях) | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій (докторських та кандидатських) | Публікаційна діяльність (статті у фахових виданнях) |
| 2007 | | | | | | | 7536 | 5876 | 103770 |
| 2008 | | | | | | | 7618 | 4705 | 118436 |
| 2009 | | | | | | | 7018 | 7200 | 62397 |
| 2010 | | | | | | | 7832 | 8129 | 183235 |
| 2011 | | | | | | | 8829 | 7672 | 194378 |
| 2012 | 3812 | 11652 | 57103 | 2423 | 3989 | 30355 | 8638 | 8234 | 196194 |
| 2013 | 3552 | 11457 | 60305 | 2372 | 4007 | 32200 | 8504 | 8850 | 201872 |
| 2014 | 3551 | 11535 | 55408 | 2432 | 3958 | 37824 | 7926 | 8918 | 203975 |
| 2015 | 3136 | 10752 | 43954 | 2213 | 3652 | 31857 | 7361 | 7956 | 179727 |
| 2016 | 3254 | 10282 | 41753 | 2063 | 3232 | 28880 | 8144 | 4645 | 157319 |

Висновки стосовно щільності лінійного зв'язку між кількостями захищених дисертацій, отриманих охоронних документів, публікаційною діяльністю в галузях наук та загалом можна отримати, знайшовши точкові оцінки коефіцієнтів кореляції між відповідними змінними. Для цього зручно скористатись командою «Аналіз даних» надбудови Пакету аналізу в Microsoft Excel. За даними табл. 1 відповідні кореляційні матриці матимуть вигляд:

— для природничих наук:

| | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| Охоронні документи (патенти) | 1 | 0,86102486 |
| К-ть захищених дисертацій | 0,86102486 | 1 |

| | К-ть захищених дисертацій | Публікаційна діяльність |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| К-ть захищених дисертацій | 1 | 0,93943109 |
| Публікаційна діяльність | 0,93943109 | 1 |

— для технічних наук:

| | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| Охоронні документи (патенти) | 1 | 0,97462236 |
| К-ть захищених дисертацій | 0,97462236 | 1 |

| | К-ть захищених дисертацій | Публікаційна діяльність |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| К-ть захищених дисертацій | 1 | 0,54851380 |
| Публікаційна діяльність | 0,54851380 | 1 |

— загалом:

| | | |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| | Охоронні документи (патенти) | К-ть захищених дисертацій |
| Охоронні документи (патенти) | 1 | 0,2760806 |
| К-ть захищених дисертацій | 0,2760806 | 1 |

| | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| | К-ть захищених дисертацій | Публікаційна діяльність |
| К-ть захищених дисертацій | 1 | 0,54851380 |
| Публікаційна діяльність | 0,54851380 | 1 |

Зважаючи на властивості коефіцієнта кореляції, зокрема на близькість його абсолютної величини до 1, можна стверджувати, що найщільніший прямий зв'язок ($\rho \approx 0,97$) спостерігається між захищеними кандидатськими й докторськими дисертаціями та отриманими охоронними документами (в т. ч. патентами на винаходи) у галузі технічних наук. У галузі природничих наук у процесі написання дисертацій більша увага зосереджується на публікаційній діяльності. Оскільки в загальному переліку захищених дисертацій є велика частка робіт гуманітарних галузей, то точкова оцінка коефіцієнта кореляції між кількостями захищених робіт та отриманих охоронних документів суттєво слабшає. Такі дані свідчать про те, що у плані науково-технічних розробок переважають технічні спеціальності.

Метою регресійного аналізу є встановлення форми зв'язку між ознаками (факторами).

Провівши повний аналіз прямої лінії регресії за допомогою модуля Regression команди «Аналіз даних», можна на основі перевірки значущості коефіцієнта детермінації та коефіцієнтів рівняння регресії зробити висновки щодо адекватності побудованої моделі, записати довірчі інтервали для коефіцієнтів лінійної регресії, вважаючи, що всі припущення щодо побудови регресійної моделі виконуються, спрогнозувати значення результативної ознаки від факторної, дослідити, чи можна побудувати більш адекватну модель регресії (нелінійну).

До прикладу, провівши такий аналіз між захищеними кандидатськими і докторськими дисертаціями та отриманими охоронними документами (в т. ч.

| | | | |
|------------------------------|-------------|---|------|
| Модуль Regression | | Рівень значущості | 0,05 |
| Регресійна статистика | | | |
| Множинний R | 0,974622362 | Модуль коефіцієнта кореляції (корінь із коефіцієнта детермінації) | |
| R-квадрат | 0,949888749 | Коефіцієнт детермінації | |
| Нормований R-квадрат | 0,933184998 | Нормований коефіцієнт детермінації = $((n-1)*R^2-m)/(n-m-1)$ | |
| Стандартна похибка | 41,17017136 | Залишкове середньоквадратичне відхилення (корінь із залишкової дисперсії) | |
| Спостереження | 5 | Кількість спостережень n | |

| | | | | | | |
|--|--------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| Однофакторний дисперсійний аналіз (ANOVA) | | | | | | |
| | df | SS | MS | F | Значущість F | |
| Регресія | 1 | 96388,251 | 96388,25 | 56,86679477 | 0,004834488 | |
| Залишок | 3 | 5084,94903 | 1694,983 | | | |
| Усього | 4 | 101473,2 | | | | |
| | Коефіцієнти | Стандартна похибка | t-статистика | p-значення | Нижні 95% | Верхні 95% |
| Y-перетин | 542,8117427 | 233,823294 | 2,321461 | 0,102946702 | -201,3183365 | 1286,9418 |
| Змінна X | 0,466553843 | 0,06186889 | 7,541008 | 0,004834488 | 0,26965939 | 0,6634483 |



патентами на винаходи) в галузі технічних наук можна отримати коефіцієнти рівняння прямої регресії, на основі p -значень вказати їх значущість (в цьому випадку кутовий коефіцієнт рівняння регресії значущий, адже його p -значення менше за 0,05, а вільний член — ні), а за допомогою середньоквадратичної похибки оцінок — оцінити розсіювання даних навколо регресійної прямої, виявити статистично значущу залежність між двома змінними і спрогнозувати значення результативної змінної. На основі величини «Значущість F », що також менша за заданий рівень значущості (0,05), можна стверджувати, що коефіцієнт детермінації значущий. Отже, дана модель, у цілому, є адекватною: її можна використовувати для прогнозування.

Таким чином, на основі проведеного аналізу, можна стверджувати, що між кількістю захищених дисертацій та кількістю отриманих охоронних документів у галузі технічних наук спостерігається тісний прямий зв'язок, як наслідок, розвиток наукової діяльності в даній галузі сприятиме створенню корисних моделей, винаходів тощо. Та, з іншого боку, протягом останніх п'яти років виконання таких робіт поступового зменшується. Тому створення сприятливих умов та підвищення ефективності в цій галузі має стати пріоритетним завданням державної науково-технічної й інноваційної політики, адже зростання науково-технічного потенціалу країни є запорукою її економічного зростання.

Список літератури

- Аналітична довідка (2012). *Стан розвитку науки і техніки, реалізації пріоритетних напрямів розвитку науки і техніки та результати наукової, науково — технічної, інноваційної діяльності та трансферу технологій у 2011 році* Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <https://goo.gl/co1PPF>
- Аналітична довідка (2013). *Стан розвитку науки і техніки, результати наукової, науково — технічної, інноваційної діяльності, трансферу технологій за 2012 рік*. Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <https://goo.gl/ZpLeCF>
- Аналітична довідка (2014). *Стан розвитку науки і техніки, результати наукової, науково — технічної, інноваційної діяльності, трансферу технологій за 2013 рік*. Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <https://goo.gl/S3SYPY>
- Аналітична довідка (2015). *Стан розвитку науки і техніки, результати наукової, науково — технічної, інноваційної діяльності, трансферу технологій за 2014 рік*. Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <http://mon.gov.ua/activity/nauka/informacijno-analitichni-materiali.html>
- Аналітична довідка (2016). *Стан розвитку науки і техніки, результати наукової, науково — технічної, інноваційної діяльності, трансферу технологій за 2015 рік*. Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <http://mon.gov.ua/activity/nauka/informacijno-analitichni-materiali.html>
- Аналітична довідка (2017). *Стан розвитку науки і техніки, результати наукової і науково-технічної діяльності за 2016 рік*. Київ: Український інститут науково-технічної експертизи та інформації. Узято з <http://mon.gov.ua/activity/nauka/informacijno-analitichni-materiali.html>

СПОСОБИ ПОКРАЩАННЯ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Є. А. Сторожук, В. А. Максимюк, І. С. Чернишенко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

stevan@ukr.net

Розроблено три підходи до подолання зсувного й мембранного замикання при розв'язанні крайових задач теорії оболонок чисельними методами. Ефективність запропонованих підходів показано на прикладі розв'язання тестової задачі для циліндричної панелі під дією власної ваги.

Ключові слова: змішані функціонали, векторні співвідношення для деформацій, точки надзбіжності, циліндрична панель.

Обчислювальні методи механіки деформівних твердих тіл такі, як метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), варіаційно-різницевий метод (ВРМ) на певному етапі свого розвитку зіштовхнулися з так званою проблемою замикання (locking) або виродження. Цей ефект проявляється у сповільненій збіжності чисельних методів. Залежно від вимірності і постановки задачі виділяють зсувне, мембранне, об'ємне, товщинне і трапецоїдальне замикання.

Автори запропонували три підходи до розв'язання цих проблем.

1. Підхід з використанням змішаних функціоналів. З досвіду розв'язування задач теорії оболонок практично встановлено, що вибір системи незалежних варійованих функцій належним чином дозволяє уникнути небажаних явищ типу замикання та пришвидшити збіжність чисельних методів. Ті величини, які апріорно будуть малими, слід вибирати за незалежні функції.

Наприклад, щоб уникнути так званого зсувного замикання при застосуванні зсувних моделей для розрахунку тонких оболонок, можна побудувати змішаний функціонал $\Pi(u, \phi, \varepsilon^f)$ (Максимюк & Чернышенко, 2004), у якому додатково варіюються зсувні деформації $(\varepsilon_{13}^f, \varepsilon_{23}^f)$, які, очевидно, будуть малими. Його можна подати через функціонал $\Pi(u, \phi)$, у якому варіюються тільки переміщення (u_1, u_2, u_3) та кути повороту (ϕ_1, ϕ_2) , у такий спосіб:

$$\Pi(u, \phi, \varepsilon^f) = \Pi(u, \phi) - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [G_{13}(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^f)^2 + G_{23}(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^f)^2] d\Sigma. \quad (1)$$

Щоб уникнути мембранного замикання, необхідно за додатково варійовані функції взяти мембранні деформації $(\varepsilon_{11}^f, \varepsilon_{22}^f, \varepsilon_{12}^f)$ і побудувати відповідний змішаний функціонал (Максимюк & Чернышенко, 2004). Так, у випадку використання моделей, у яких мають місце гіпотези Кірхгофа — Лява, приходимо до змішаного функціоналу виду

$$\Pi(u, \varepsilon^f) = \Pi(u) - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [G_{11}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^f)^2 + G_{22}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^f)^2 + G_{12}(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^f)^2] d\Sigma, \quad (2)$$

де $\Pi(u)$ — функціонал, у якому варіюються тільки переміщення (u_1, u_2, u_3) .

2. Підхід з використанням векторних співвідношень для деформацій. Традиційно вирази для компонент деформації тонких оболонок $(\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}; i, j = 1, 2)$ записуються у скалярному вигляді через компоненти вектора переміщень (u_1, u_2, u_3) на основі класичної теорії непологих оболонок Кірхгофа — Лява (Голованов & Корнишин, 1990). У декартовій системі координат це не призводить до якихось ускладнень, а у криволінійній системі координат може призвести до вироджуваних явищ типу замикання (мембранне замикання або жорстке зміщення), які проявляються у сповільненій збіжності чисельних методів.

Подання деформацій у векторній формі (Максимюк, Сторожук & Чернышенко, 2012)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \\ \mu_{11} &= -\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad 2\mu_{12} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_1 \partial \alpha_1} - \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \phi_1 = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \end{aligned} \quad (3)$$

(1 → 2)

безпосередньо через вектори переміщень $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{n}$ і кутів повороту $\vec{\phi} = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2$ з подальшим застосуванням чисельного методу також у векторній формі дозволяє уникнути негативного впливу жорстких зміщень на збіжність результатів.

3. Підхід з використанням так званих точок надзбіжності. Для ліквідації негативних явищ мембранного і зсувного замикання при розрахунку тонких оболонок автори пропонують модифікації МСЕ і ВРМ з обчисленням компонент деформації, записаних у звичайній (скалярній) формі, у точках їх надзбіжності.

Числовий приклад. Розглянемо відому тестову задачу (Голованов & Корнишин, 1990) про деформацію під дією власної ваги перекриття у вигляді циліндричної панелі, опертої торцями на діафрагми, які перешкоджають переміщенням в своїй площині (рис. 1).

Параметри панелі, віднесеної до циліндричної системі координат (z, r, ϕ) , такі:

$$\begin{aligned} L &= 15,24 \text{ м}; \quad R = 7,62 \text{ м}; \quad h = 0,0762 \text{ м}; \quad E = 2,06 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0; \\ G_{rz} &= G_{r\phi} = E/2; \quad d \cdot h = 4,29 \cdot 10^3 \text{ Па}, \end{aligned}$$

де d — питома вага матеріалу.

Спочатку наведемо результати розв'язання даної задачі з використанням змішаних функціоналів (1)—(2) і ВРМ. У табл. 1 для різних варіантів вибору деформацій за незалежні функції і кількості вузлів $(K_z \times K_\phi)$ розбиття чверті

панелі представлені відносні прогини, які досягають максимальних значень (u_3^{\max} / h) на серединах прямолінійних сторін.

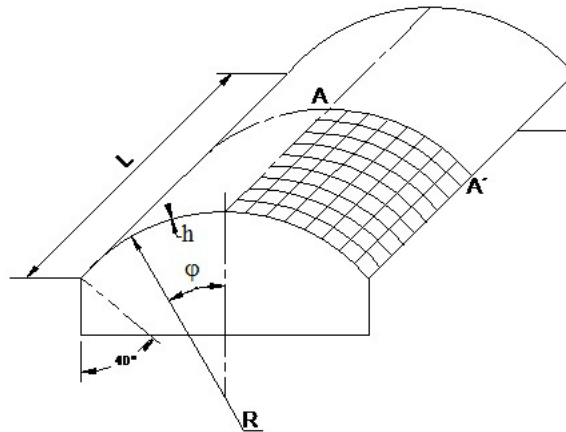


Рис. 1. Перекриття у вигляді циліндричної панелі

Таблиця 1. Максимальні прогини циліндричної панелі

| Варіант | Функції | | | $K_z \times K_\phi$ | $-u_3^{\max} / h$ |
|---------|------------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------|-------------------|
| 1 | ϵ_{zz}^f , | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×6 | 0,69 |
| 2 | ϵ_{zz}^f , | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×11 | 1,10 |
| 3 | ϵ_{zz}^f , | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×21 | 1,16 |
| 4 | ϵ_{zz}^f , | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×41 | 1,17 |
| 5 | ϵ_{zz}^f , | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 11×11 | 1,10 |
| 6 | ϵ_{zz}^f | | | 6×21 | 0,29 |
| 7 | | $\epsilon_{\phi\phi}^f$ | | 6×21 | 0,76 |
| 8 | | | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×21 | 0,36 |
| 9 | | $\epsilon_{\phi\phi}^f$, | $\epsilon_{z\phi}^f$ | 6×21 | 1,15 |
| 10 | | | | 6×21 | 0,29 |
| 11 | | | | 11×21 | 0,34 |
| 12 | | | | 11×81 | 0,95 |
| 13 | | | | 11×321 | 1,10 |
| 14 | (Голованов & Корнишин, 1990) | | | | 1,19 |

Крім наведених в табл. 1 додатковими функціями у варіантах 1—13 були також деформації поперечного зсуву $\epsilon_{rz}^f, \epsilon_{r\phi}^f$. Варіанти 1—5 показують практичну збіжність результатів розрахунків, отриманих згідно з розробленою методикою, до середнього значення (варіант 14) кращих даних різних авторів (Голо-

ванов & Корнишин, 1990), а також переваги вибору мембранних деформацій за незалежні функції, на відміну від варіантів 10—13, де спостерігається уповільнена збіжність. З варіантів 3, 6—9 видно, що в даному випадку доцільно вибрати $\varepsilon_{\phi\phi}^f, \varepsilon_{z\phi}^f$ за додаткові незалежні функції.

Дана тестова задача також розв’язана МСЕ, в якому використовуються геометричні співвідношення у векторній формі (3), а компоненти деформації обчислюються в точках надзбіжності. На рис. 2 показано характер розподілу прогинів уздовж центрального перерізу панелі AA'. Суцільною лінією зображені результати точного розв’язку (Scordelis & Lo, 1964), хрестиками (+) — дані, отримані традиційним МСЕ (Фондер & Клау, 1973), а кружечками (o) — результати чисельного розв’язку за допомогою модифікованого (розробленого авторами) варіанту МСЕ.

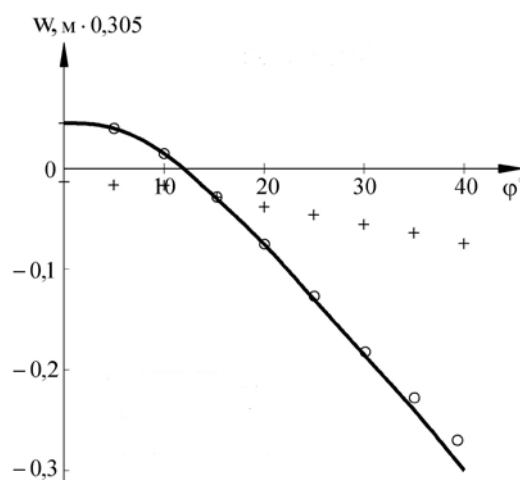


Рис. 2. Розподіл прогинів вздовж центрального перерізу AA'

Таким чином, з порівняння отриманих результатів з даними інших авторів можна зробити висновок про можливість використання розроблених підходів (методик) для розв’язання задач даного класу.

Список літератури

- Scordelis, A. C., & Lo, K. S. (1964). Computer analysis of cylindrical shells. *American Concrete Institute Journal*, 61(5), 539–560.
- Голованов, А. И., & Корнишин, М. С. (1990). *Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек*. Казань: Издательство КФТИ.
- Деруга, А. П. (2002). Вариационно-разностные схемы на основе сверхсходимости. В *Докладах IV Всероссийского семинара «Проблемы оптимального проектирования сооружений»*, НГАСУ, Новосибирск (с. 118—130). Новосибирск: НГАСУ.
- Максимюк, В. А., & Чернышенко, И. С. (2004). Смешанные функционалы в физически нелинейных задачах статики композитных оболочек. *Прикладная механика*, 40(11), 45—83.
- Максимюк, В. А., Сторожук, Е. А., & Чернышенко, И. С. (2012). Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор). *Прикладная механика*, 48(6), 3—80.
- Фондер, Г. А., & Клау, Р. В. (1973). Явное добавление смещений тела как жесткого целого в криволинейных конечных элементах. *Ракетная техника и космонавтика*, 3(3), 62—72.

КОНЦЕПЦІЯ КВАЗІПОХІДНИХ У НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. Ю. Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна
opazen@gmail.com

Розв'язано задачу про визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій конструкції (для декартової, циліндричної та сферичної системи координат) з кусково-сталими коефіцієнтами теплопровідності, при наявності зосереджених джерел тепла та нетрадиційних (двоточкових) крайових умовах. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані.

Ключові слова: температурне поле, концепція квазіпохідних, нестандартні крайові умови.

Постановка задачі та її математична модель. У загальному випадку (Величко, Лозинський & Семерак, 2011; Тацій, Стасюк & Пазен, 2016) задача про розподіл температурного поля в багатошаровій конструкції (прямокутній, циліндричній або сферичній системі координат), область якої обмежена площинами $r = r_0$ і $r = r_n$ та поділена на n шарів різної товщини, зводиться до розв'язування на відрізку диференціального рівняння

$$\frac{1}{r^l} \left(r^l \lambda(r) y' \right)' = -f(r), \quad r > 0, \quad l = 0, 1, 2. \quad (1)$$

при певних крайових умовах. Тут $t(r)$ — температура, $\lambda(r)$ — коефіцієнт теплопровідності, $f(r)$ — функція розподілу внутрішніх джерел тепла, а точки $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n$ — сліди перетину відповідних площин з віссю Or . $l = 0$ — декартова система координат, $l = 1$ — циліндрична, $l = 2$ — сферична.

Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності. На границях шарів закладається наявність зосереджених джерел тепла.

Надалі використовуватимемо наступні позначення: θ_k — характеристична функція напіввідкритого проміжку $[r_k, r_{k+1})$, тобто

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [r_k, r_{k+1}) \\ 0, & \text{якщо } x \notin [r_k, r_{k+1}) \end{cases};$$

$\lambda_k > 0$ — коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[r_k, r_{k+1})$; $\delta_k(r - r_k)$ — δ -функція Дірака з носієм у точці $r = r_k$; s_k — дійсні числа.

Покладімо

$$\lambda(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \theta_k, \quad f(r) = - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(r - r_k),$$

причому функції $\lambda_k(r)$ на відповідних проміжках уважатимемо неперервними.

Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{1}{r^l} \left(r^l \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(r) \theta_k \cdot t' \right)' = - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(r - r_k) \quad (2)$$

Позначимо ще $t^{[1]} = r^l \lambda t'$ — квазіпохідна.

До рівняння (2) слід додати систему двох лінійно-незалежних крайових умов, що в загальному випадку є нелокальними (Тацій, Стасюк & Пазен, (2016)):

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t(r_0) + p_{12} \cdot t^{[1]}(r_0) + q_{11} \cdot t(r_n) + q_{12} \cdot t^{[1]}(r_n) = \psi_0 \\ p_{21} \cdot t(r_0) + p_{22} \cdot t^{[1]}(r_0) + q_{21} \cdot t(r_n) + q_{22} \cdot t^{[1]}(r_n) = \psi_n \end{cases} \quad (3)$$

Тут p_{ij}, q_{ij}, ψ_k — відомі дійсні числа, $t(r_0), t^{[1]}(r_0), t(r_n), t^{[1]}(r_n)$ — значення температури та теплового потоку в точках $r = r_0$ і $r = r_n$ відповідно.

Крайова задача (2), (3) є математичною моделлю розподілу температурного поля багат шаровій конструкції при найбільш загальних крайових умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла, побудова розв'язку якої детально вивчено та описано у працях Тацій, Стасюк та Пазен (2013, 2016).

Для знаходження розподілу стаціонарного температурного поля можна користуватись наступними співвідношеннями

$$\bar{T}_{i-1}(r_{i-1}) = B_{i-1}(r_{i-1}, r_i) \left[\bar{T}_i(r_i) - \bar{S}_i \right] \quad (4)$$

$$\bar{T}_i(r) = B_i(r, r_i) \cdot \bar{T}_i(r_i) \quad (5)$$

що дає можливість знайти розподіл температурного поля на будь-якому інтервалі з $[r_i, r_{i+1})$.

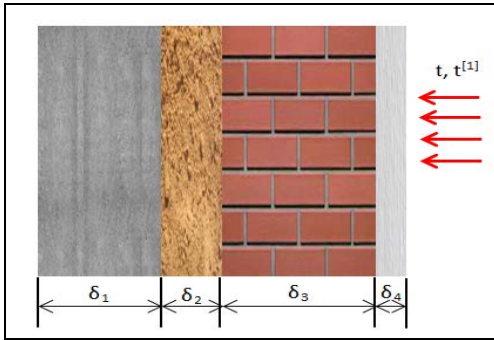
Слід підкреслити, що моделі процесів теплопровідності в багат шарових структурах з урахуванням внутрішніх джерел тепла викладені в запропонованій роботі з єдиної точки зору (рівняння теплопровідності (1) розглядається як в декартових, так і в циліндричних та сферичних координатах при різних $l = 0, 1, 2$) і вирішальну роль при цьому відіграє концепція квазіпохідних.

Приклад. Чотиришарова конструкція складається з важкого бетону на гранітному наповнювачі, глини, червоної цегли і пінопласту товщини яких відповідно дорівнюють: $l_1 = 20\text{см}$, $l_2 = 10\text{см}$, $l_3 = 25\text{см}$, $l_4 = 5\text{см}$ (рис. 1). Уважається, що відомими є лише температура та густина теплового потоку на зовнішній поверхні конструкції $t_4 = 10,44^\circ\text{C}$, та квазіпохідна $t_4^{[1]} = -360,36$.

Коефіцієнти теплопровідності важкого бетону $\lambda_0 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, глини —

$$\lambda_1 = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad \text{червоної цегли} \quad \lambda_2 = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}} \quad \text{і пінопласту} \quad —$$

$$\lambda_3 = 0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}.$$



Між шарами стінки виникають точкові (s_k) джерела тепла інтенсивністю

$$s_1 = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, \quad s_2 = -300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, \quad s_3 = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Необхідно визначити розподіл температурного поля в чотиришаровій конструкції за умов різних систем координат (декартова, циліндрична та сферична).

Розв'язування. Циліндрична система координат. Знайдемо розв'язок задачі, коли на зовнішній поверхні конструкції відомими є значення температури та квазіпохідної.

Розгляньмо вектор

$$\bar{T}_3(r_4) = \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,44 \\ -360,36 \end{pmatrix}$$

Використавши формули (4) та (5) знайдемо, що значення вектора

$$\bar{T}_3(r_3) = B_3^{-1}(r_4, r_3) \times \bar{T}_3(r_4) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r_4) - \ln(r_3)}{\lambda_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 429,53 \\ -360,36 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(r_2) &= B_2^{-1}(r_3, r_2) \times [\bar{T}_3(r_3) + \bar{S}_3] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r_3) - \ln(r_2)}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} t_3 \\ t_3^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 716,62 \\ -480,36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Також знайдемо значення наступних векторів

$$\bar{T}_2(r_2) = \begin{pmatrix} 716,62 \\ -480,36 \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_1(r_1) = \begin{pmatrix} 733,83 \\ -180,36 \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_0(r_0) = \begin{pmatrix} 840,48 \\ -380,36 \end{pmatrix}.$$

Використавши (8), розподіл температурного поля та квазіпохідної в кожному шарі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(r) &= \begin{pmatrix} 840,48 - 316,96 \cdot \ln(2r) \\ -380,36 \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_1(r) = \begin{pmatrix} 733,83 - 128,82 \cdot \ln(1,42r) \\ -180,36 \end{pmatrix}; \\ \bar{T}_2(r) &= \begin{pmatrix} 716,62 - 1055,73 \cdot \ln(1,25r) \\ -480,36 \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_3(r) = \begin{pmatrix} 429,53 - 9009 \cdot \ln(0,95r) \\ -360,36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогічно проводяться розрахунки для інших систем координат.

Розв'язок поставленої задачі для декартової системи координат наведено в роботі Тацій, Стасюк та Пазен (2013).

Розподіл температурного поля чотиришарової конструкції у різних системах координат наведено на рис. 2.

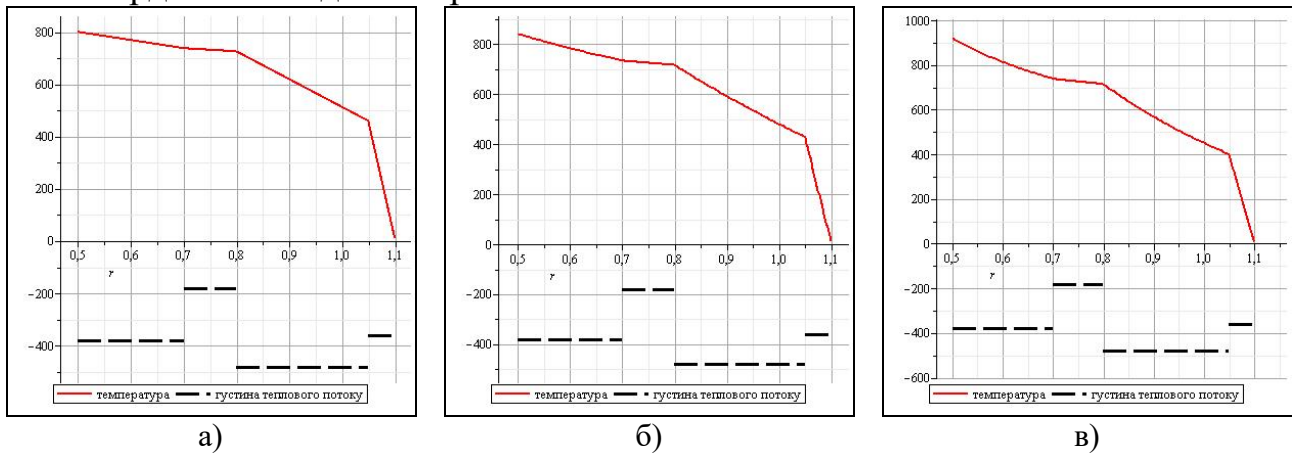


Рис. 2. Розподіл температурного поля та квазіпохідної по товщині конструкції при системі координат а) декартова; б) циліндрична; в) сферична

Список літератури

- Величко, Л. Д., Лозинський, Р. Я., & Семерак, М. М. (2011). *Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі*. Львів: Споллом.
- Тацій, Р. М., Стасюк, М. Ф., & Пазен, О. Ю. (2013). Нестандартні крайові умови в задачах теплопровідності у багатошарових структурах. У *Матеріалах Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 19—20 квітня (с. 168—171), Київ: КП.
- Тацій, Р. М., Стасюк, М. Ф., & Пазен, О. Ю. (2016). Концепція квазіпохідних в задачах математичного моделювання. У *Матеріалах IV Конференції з міжнародною участю «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця»*. Суми, 1—2 грудня (Ч. 1, с. 144—147). Суми: СДПУ ім. А. С. Макаренка.

ПРО ВІКІВСЬКЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗВ'ЯЗОК ЗІ СТОХАСТИЧНИМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯМ В АНАЛІЗІ БІЛОГО ШУМУ ЛЕВІ

М. М. Фрей

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна*

mashadyriv@ukr.net

У зв'язку з розвитком фізики та математики існує потреба розвивати теорію основних і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних. Один з найбільш успішних підходів до побудови такої теорії полягає в конструюванні просторів щойно згаданих функцій таким чином, що природне спарювання між основними та узагальненими функціями породжене інтегруванням відносно деякої ймовірнісної міри на дуально-ядерному просторі. Спочатку це була стандартна гауссівська міра, відповідна теорія називається *гауссівський аналіз білого шуму* (напр., Hida, Kuo, Potthof, Streit, 1993); потім були реалізовані численні узагальнення. Зокрема, важливі для застосувань результати можна отримати, якщо у якості вищезгаданої міри використати так звану міру білого шуму Леві, відповідна теорія називається *аналіз білого шуму Леві* (Bertoin, 1996).

Важлива роль у гауссівському аналізі належить так званій *властивості хаотичного розкладу* (ВХР): грубо кажучи, кожен квадратично інтегровну відносно гауссівської міри випадкову величину можна розкласти в ряд стохастичних інтегралів Іто від невинуватих функцій. У аналізі Леві немає ВХР (крім гауссівського та пуассонівського частинних випадків). Тим не менш, існують різні узагальнення цієї властивості. Ми маємо справу з литвинівським узагальненням ВХР, вводимо природний добуток на відповідних просторах регулярних узагальнених функцій та вивчаємо пов'язані питання. Цей добуток називається *віківським добутком*.

Основні результати дослідження полягають у вивченні властивостей віківського добутку та віківських версій голоморфних функцій. Зокрема, ми встановили, що оператор стохастичного диференціювання є диференціюванням відносно віківського множення.

За аналогією з майкснерівським аналізом (Kachanovsky, 2008), отримані результати можна застосувати для вивчення стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу, які використовуються при моделюванні багатьох фізичних процесів, зокрема, у структурно неоднорідних середовищах.

Дані дослідження можна розглядати як внесок у подальший розвиток аналізу білого шуму Леві.

Ключові слова: Процес Леві, стохастичне диференціювання, віківський добуток.

Нехай \mathcal{D} — класичний простір Шварца всіх дійснозначних нескінченно диференційованих функцій на \mathbb{R}_+ з компактними носіями, \mathcal{D}' — множина лінійних неперервних функціоналів на \mathcal{D} . Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ спарювання між елементами просторів \mathcal{D}' та \mathcal{D} .

Ми розглядаємо процес Леві без гауссівської частини і зсуву, який задовольняє певні умови (Dyriv, Kachanovsky, 2014). Далі розглянемо ймовірнісну трійку $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$, де \mathcal{C} — циліндрична σ -алгебра, μ — міра білого шуму

Леві (Lytvynov, 2003). Позначимо $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ — простір комплекснозначних квадратично інтегровних за μ функцій на \mathcal{D}' ; нехай також $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$. За допомогою нижнього індексу \mathbb{C} , ми будемо позначати комплексифікації просторів. Наприклад, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ — комплексифікація \mathcal{H} , елементами якої є функції вигляду $f + ig, f, g \in \mathcal{H}$.

Розглянемо литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу. Позначимо $\hat{\otimes}$ — симетричний тензорний добуток і $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}')$ — множина поліномів на \mathcal{D}' , яка складається з нуля та елементів вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \omega \in \mathcal{D}', N_f \in \mathbb{Z}_+, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f називають *степенем полінома* f ; $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} 0} := \mathbb{C}$. Оскільки міра білого шуму Леві μ має голоморфне в нулі перетворення Лапласа (Lytvynov, 2003), то \mathcal{P} є щільною множиною в (L^2) . Позначимо через \mathcal{P}_n множину поліномів степеня не більше n , через $\bar{\mathcal{P}}_n$ — замикання \mathcal{P}_n в (L^2) . Нехай для $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n := \bar{\mathcal{P}}_n \ominus \bar{\mathcal{P}}_{n-1}, \mathbf{P}_0 := \bar{\mathcal{P}}_0$. Зрозуміло, що $(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n$.

Нехай $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, n \in \mathbb{Z}_+$. Позначимо через $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ ортогональну проекцію монома $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ на \mathbf{P}_n . Визначимо дійсні (тобто білінійні) скалярні добутки $(\cdot; \cdot)_{ext}$ в $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, n \in \mathbb{Z}_+$, поклавши для $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle : \mu(d\omega),$$

і нехай $|\cdot|_{ext}$ — відповідні норми, тобто

$$|f^{(n)}|_{ext} = \sqrt{(f^{(n)}, f^{(n)})_{ext}}.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, поповнення $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ відносно норми $|\cdot|_{ext}$.

Для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ визначимо віківський моном

$$:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \stackrel{\text{def}}{=} (L^2) - \lim_{k \rightarrow \infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)} \rangle: ,$$

де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \rightarrow F^{(n)}$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ множина $\{:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: | f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}\}$ щільна в \mathbf{P}_n , тому $F \in (L^2)$ тоді й тільки тоді, коли існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, така, що

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle : \quad (1)$$

і (Lytvynov, 2003)

$$\|F\|_{(L^2)}^2 = \int_{D'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbb{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|_{ext}^2 < \infty.$$

Для $\beta \in (0,1]$ і $q \in \mathbb{Z}$ чи $\beta = 0$ і $q \in \mathbb{Z}_+$ визначимо простори $(L^2)_q^\beta \subseteq (L^2)$ як гільбертові, що складаються з елементів форми (1), для яких

$$\|F\|_{(L^2)_q^\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |f^{(n)}|_{ext}^2 < \infty.$$

Покладемо $(L^2)^\beta := pr \lim_{q \rightarrow \infty} (L^2)_q^\beta$ (проективна границя просторів).

Розглянемо ланцюжок

$$(L^2)^\beta \subset (L^2)_q^\beta \subseteq (L^2) \subseteq (L^2)_{-q}^{-\beta} \subset (L^2)^{-\beta}, \quad (2)$$

де $(L^2)_{-q}^{-\beta}, (L^2)^{-\beta} = ind \lim_{q \rightarrow \infty} (L^2)_{-q}^{-\beta}$ (індуктивна границя просторів) є дуальними просторами до просторів $(L^2)_q^\beta, (L^2)^\beta$ відповідно, відносно (L^2) . Простори $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ складаються з формальних рядів форми (1) таких, що

$$\|F\|_{(L^2)_{-q}^{-\beta}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-qn} |f^{(n)}|_{ext}^2 < \infty.$$

Ланцюжок (2) називається *параметризованим регулярним оснащенням простору* (L^2) .

Для $F \in (L^2)^{-\beta}$ визначимо S -перетворення $(SF)(\lambda), \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, як формальний, взагалі кажучи, ряд

$$(SF)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (F^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext}, \quad (3)$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_+$ — ядра з розкладу (1) для F (кожен доданок даного ряду визначений коректно, але ряд може розбігатися). Зокрема, $(SF)(0) = F^{(0)}, S1 \equiv 1$.

Означення 1. Для $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ та, голоморфної у $F^{(0)}$ функції, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, визначимо віківський добуток $F \diamond G$ та віківську версію $h^\diamond(F)$, формально поклавши

$$F \diamond G := S^{-1}(SF \cdot SG), h^\diamond(F) := S^{-1}h(SF).$$

Очевидно, що так визначений віківський добуток \diamond , є комутативним, асоціативним і дистрибутивним (над \mathbb{C}). Функцію h , з даного означення, можна представити у вигляді

$$h(u) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m (u - (SF)(0))^m, \quad (4)$$

тоді

$$h^\diamond(F) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m (F - (SF)(0))^{\diamond m},$$

де $F^{\diamond m} := \underbrace{F \diamond \dots \diamond F}_m$, $F^{\diamond 0} := 1$.

На просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ можна ввести аналог симетричного тензорного добутку, який ми позначимо символом \diamond . Нестрого кажучи, $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ — це симетризація добутку $F^{(n)}$ та $G^{(m)}$, якщо їх аргументи різні, і нуль, якщо хоча б один аргумент $F^{(n)}$ дорівнює хоча б одному аргументу $G^{(m)}$ (строге визначення див., напр., у Dyriv та Kachanovsky (2014)). У Dyriv та Kachanovsky (2014) доведено, що елемент $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ є коректно визначеним і справедлива оцінка

$$\left| F^{(n)} \diamond G^{(m)} \right|_{ext} \leq \left| F^{(n)} \right|_{ext} \left| G^{(m)} \right|_{ext}.$$

З результатів роботи (Kachanovsky, 2015) випливає, що для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ і $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$

$$(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{ext} (G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext} = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m})_{ext}.$$

Використовуючи цю формулу, неважко підрахувати наступні координатні формули.

Твердження 1. Для $F_1 \dots F_n \in (L^2)^{-\beta}$

$$F_1 \diamond \dots \diamond F_n = \sum_{m=0}^{\infty} : \langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k_1 \dots k_n \in \mathbb{Z}_+, k_1 + \dots + k_n = m} F_1^{(k_1)} \diamond \dots \diamond F_n^{(k_n)} \rangle :,$$

зокрема, для $F, G \in (L^2)^{-\beta}$

$$F \diamond G = \sum_{m=0}^{\infty} : \langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k=0}^m F^{(k)} \diamond G^{(m-k)} \rangle :,$$

$$h^\diamond(F) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} : \langle \circ^{\otimes m}, \sum_{n=1}^m h_n \sum_{k_1 \dots k_n \in \mathbb{N}, k_1 + \dots + k_n = m} F^{(k_1)} \diamond \dots \diamond F^{(k_n)} \rangle :,$$

де $F_j^{(k_j)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k_j)}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$ — ядра з розкладу (1) для F_j ;
 $F^{(k)}, G^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k)}$ — ядра з цього ж розкладу для F і G відповідно;
 $h_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — коефіцієнти з розкладу (4) для h .

Для того, щоб надати поняттям «віківський добуток» та «віківська версія голоморфної функції» неформального сенсу, слід, очевидно, вивчити питання збіжності рядів із твердження 1. За аналогію з майкснерівським аналізом (Kachanovsky, 2008) приходимо до таких результатів.

Теорема 1. Нехай $F, G \in (L^2)^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1]$. Тоді віківський добуток $F \diamond G \in (L^2)^{-\beta}$. Більш того, для будь-яких $F_1 \dots F_n \in (L^2)^{-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, існують $q, q' \in \mathbb{Z}_+$, ($q > q' + (1 - \beta) \log_2 n + 1$) такі, що

$$\|F_1 \diamond \dots \diamond F_n\|_{-q, -\beta} \leq \sqrt{\max_{m \in \mathbb{Z}_+} [2^{-m} (m + 1)^{(n-1)}]} \|F\|_{1-q', -\beta} \dots \|F_n\|_{-q', -\beta}.$$

З теореми 1 випливає, що якщо $F \in (L^2)^{-\beta}$ та $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ є поліномами, то $h^\diamond(F) \in (L^2)^{-\beta}$. Але, для загальних h ситуація є складнішою: виявляється, що випадки $\beta = 1$ та $\beta \in [0, 1)$ є суттєво різними.

Теорема 2. Нехай $F \in (L^2)^{-1}$ та функція $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в $(SF)(0)$. Тоді $h^\diamond(F) \in (L^2)^{-1}$.

Нехай тепер $\beta \in [0, 1)$. Оскільки $(L^2)^{-\beta} \subset (L^2)^{-1}$, то для $F \in (L^2)^{-\beta}$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, віківська версія $h^\diamond(F)$ є коректно визначеним елементом $(L^2)^{-1}$. У той же час, $h^\diamond(F)$ може не належати $(L^2)^{-\beta}$, якщо h не є поліномом.

Запровадимо оператор стохастичного диференціювання D і розглянемо зв'язок між D та віківським численням. Нехай $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$. Визначимо узагальнений частковий добуток $(F^{(m)}, f^{(1)})_{ext} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-1)}$, поклавши для кожного $g^{(m-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-1)}$

$$((F^{(m)}, f^{(1)})_{ext}, g^{(m-1)})_{ext} = (F^{(m)}, g^{(m-1)} \diamond f^{(1)})_{ext}.$$

Означення 2. Визначимо оператор стохастичного диференціювання $(D^\circ)(f^{(1)})$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, як лінійний неперервний оператор на просторі $(L^2)^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1]$, поклавши

$$(DF)(f^{(1)}) := \sum_{m=1}^{\infty} m : \langle \circ^{\otimes(m-1)}, (F^{(m)}, f^{(1)})_{ext} \rangle :=$$

$$:= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) : \langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+1)}, f^{(1)})_{ext} \rangle :,$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ — ядра з розкладу (1) для $F \in (L^2)^{-\beta}$.

Визначимо характеристичну множину простору $(L^2)^{-\beta}$ у термінах S -перетворення, поклавши

$$\mathcal{B}_\beta := S(L^2)^{-\beta} \equiv \{ \mathcal{K} \mid \exists F \in (L^2)^{-\beta} : \mathcal{K} = SF \}.$$

Очевидно, \mathcal{B}_β складається з формальних рядів вигляду (3), які можуть розбігатися як числові ряди, але ядра яких задовольняють умову: існує $q \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1-\beta} 2^{-qm} \left| F^{(m)} \right|_{ext}^2 < \infty.$$

З теореми 1 випливає, як наслідок, таке

Твердження 2. \mathcal{B}_β є алгеброю відносно поточкового множення.

Нехай $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_\mathbb{C}$. Визначимо «похідну за напрямком» $D_g^\diamond : \mathcal{B}_\beta \rightarrow \mathcal{B}_\beta$.

Покладемо для

$$(SF)(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} (F^{(m)}, \cdot^{\otimes m})_{ext} \in \mathcal{B}_\beta,$$

де $F \in (L^2)^{-\beta}$, $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ — ядра з розкладу (1) для F ,

$$(D_g^\diamond SF)(\cdot) := \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) (F^{(m+1)}, g \diamond (\cdot^{\otimes m}))_{ext} \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) ((F^{(m+1)}, g)_{ext}, \cdot^{\otimes m})_{ext}.$$

Оскільки

$$S^{-1}(D_g^\diamond SF) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) : \langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+1)}, g)_{ext} \rangle := (DF)(g),$$

то визначення D_g^\diamond є коректним і справедливе таке

Твердження 3. Оператор стохастичного диференціювання $(D \circ)(g)$, $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_\mathbb{C}$, є прообразом «похідної за напрямком» D_g^\diamond формального ряду $S \circ$ при S -перетворенні, тобто для всіх $F \in (L^2)^{-\beta}$

$$(DF)(g) = S^{-1}(D_g^\diamond SF) \in (L^2)^{-\beta}.$$

Теорема 3. *Оператор стохастичного диференціювання D є диференціюванням відносно віківського множення, тобто для будь-яких $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ та $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$*

$$D(F \diamond G)(g) = (DF)(g) \diamond G + F \diamond (DG)(g) \in (L^2)^{-\beta}.$$

Наслідок. Нехай $F \in (L^2)^{-\beta}, g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна у $(SF)(0)$ функція. Тоді

$$(Dh^{\diamond}(F))(g) = h^{\diamond}(F) \diamond (DF)(g) \in (L^2)^{-1},$$

де h^{\diamond} — віківська версія звичайної похідної функції h .

Список літератури

- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dyryv, M. M., & Kachanovsky, N. A. (2014). On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, 6(2), 212–229.
- Hida, T., Kuo, H. H., Potthof, J., & Streit, L. (1993). *White noise. An infinite dimensional calculus*. Dordrecht: Kluwer.
- Kachanovsky, N. A. (2015). Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular test functions of Lévy white noise analysis. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 21(04), 336–360.
- Kachanovsky, N. A. (2008). An extended stochastic integral with and a Wick calculus on parameterized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise. *Infinite Dimensional Analysis. Quantum Probability and Related Topics*, 11(4), 541–564.
- Lytvynov, E. (2003). Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 6(01), 73–102

ЗАСТОСУВАННЯ ІНВЕРСІЇ ДО ПОБУДОВИ ВЗАЄМНОГО БАЗИСУ ДЛЯ ДОВІЛЬНОГО БАЗИСУ МНОЖИНИ ВЕКТОРІВ ЕВКЛІДОВОЇ ПЛОЩИНИ

О. Л. Чепок

Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Запропоновано, заснований на використанні інверсії, спосіб побудови у явному вигляді взаємного базису для довільного базису множини векторів евклідової площини. Наведено конкретний приклад моделювання достатньо складного математичного і фізичного поняття, що сприяє усвідомленню його сутності.

Ключові слова: базис множини векторів, взаємний базис, скалярний добуток векторів, інверсія.

На певних етапах побудови курсу теоретичної механіки тривимірного евклідового простору виникає потреба у розгляданні взаємних базисів множини векторів. Як відомо (див, наприклад, Борисенко & Тарапов, 1972), два базиси $E : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і $E' : \vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ називаються *взаємними (біортогональними)*, якщо вектори, що до них входять, задовольняють співвідношення

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (1)$$

З геометричної точки зору, умова (1) означає, що, якщо на двох взаємних базисах побудовані паралелепіпеди, то ребра одного з них є перпендикулярними до граней іншого, і навпаки. З аналітичної точки зору не важко обґрунтувати, що

$$\vec{e}^i = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3},$$

де сукупності (i, j, k) складають циклічні перестановки чисел $(1, 2, 3)$, і навпаки (Борисенко & Тарапов, 1972). При цьому зрозуміло, що, якщо базис E є ортонормованим, то взаємний до нього базис E' просто збігається з базисом E .

Аналогічні міркування справджуються і для базисів $E : \vec{e}_1, \vec{e}_2$ і $E' : \vec{e}^1, \vec{e}^2$ множини векторів евклідової площини. У той же час, на відміну від евклідового простору, на площині є можливість реальної побудови векторів базису E' за допомогою векторів базису E .

Отже, представимо вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 базису E евклідової площини, відповідно, напрямленими відрізками $\overrightarrow{OE_1}$ і $\overrightarrow{OE_2}$ (відкладемо вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 від точки O) (рис. 1). Зрозуміло, що точки O, E_1, E_2 не є колінеарними.

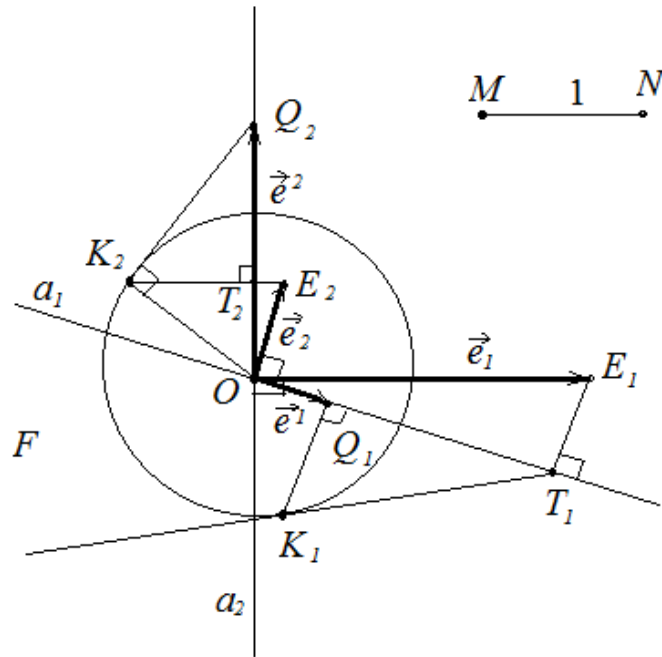


Рис. 1

Взаємний до базису E базис E' складається з таких векторів \vec{e}'^1 і \vec{e}'^2 , що $\vec{e}'^1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}'^1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\vec{e}'^2 \cdot \vec{e}_1 = 0$, $\vec{e}'^2 \cdot \vec{e}_2 = 1$.

Шукатимемо вектор \vec{e}'^1 у вигляді напрямленого відрізка $\overrightarrow{OQ_1}$. Умова $\vec{e}'^1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ означає, що $\vec{e}'^1 \perp \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OQ_1} \perp \overrightarrow{OE_2}$. Проведімо через точку O перпендикулярно до прямої OE_2 пряму a_1 . Шукана точка $Q_1 \in a_1$. $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OE_1} = 1$. За означенням скалярного добутку векторів

$$\left| \overrightarrow{OQ_1} \right| \left| \overrightarrow{OE_1} \right| \cos \left(\angle(\overrightarrow{OQ_1}; \overrightarrow{OE_1}) \right) = 1.$$

Звідси випливає, що $\cos \left(\angle(\overrightarrow{OQ_1}; \overrightarrow{OE_1}) \right) > 0$, шуканий напрямлений відрізок $\overrightarrow{OQ_1}$ утворює з напрямленим відрізком $\overrightarrow{OE_1}$ гострий кут. Проведімо $E_1T_1 \perp a_1$. Точка Q_1 належить променю OT_1 прямої a_1 . Із прямокутного трикутника $\triangle E_1OT_1$ маємо

$$OT_1 = OE_1 \cos \left(\angle E_1OT_1 \right) = \left| \overrightarrow{OE_1} \right| \cos \left(\angle \left(\overrightarrow{OQ_1}; \overrightarrow{OE_1} \right) \right), \quad \left| \overrightarrow{OQ_1} \right| = OQ_1.$$

Таким чином, для шуканої точки Q_1 ,

$$OQ_1 \cdot OT_1 = 1 \text{ або } OQ_1 \cdot OT_1 = MN^2,$$

якщо відрізок MN обрано за одиницю вимірювання довжин відрізків. Отримана рівність означає, що точка Q_1 є інверсною до точки T_1 відносно кола інверсії F з центром у точці O , радіус якого дорівнює довжині відрізка MN . Стандар-

тну побудову точки Q_1 у випадку, коли точка T_1 лежить поза колом F , продемонстровано на рис. 1.

Вектор \vec{e}^2 будемо шукати у вигляді напрямленого відрізка $\overrightarrow{OQ_2}$. Умова $\vec{e}^2 \cdot \vec{e}_1 = 0$ означає, що $\vec{e}^2 \perp \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OQ_2} \perp \overrightarrow{OE_1}$. Перпендикулярно до прямої OE_1 через точку O проводимо пряму a_2 .

$$Q_2 \in a_2, \overrightarrow{OQ_2} \cdot \overrightarrow{OE_2} = 1, \left| \overrightarrow{OQ_2} \right| \left| \overrightarrow{OE_2} \right| \cos \left(\angle \left(\overrightarrow{OQ_2}; \overrightarrow{OE_2} \right) \right) = 1,$$

Оскільки $\cos \left(\angle \left(\overrightarrow{OQ_2}; \overrightarrow{OE_2} \right) \right) > 0$, то шуканий напрямлений відрізок $\overrightarrow{OQ_2}$

утворює з напрямленим відрізком $\overrightarrow{OE_2}$ гострий кут. Проводимо $E_2T_2 \perp a_2$. Шукана точка Q_2 належить променю OT_2 прямої a_2 . Із прямокутного $\triangle E_2OT_2$

$$OT_2 = OE_2 \cos \left(\angle E_2OT_2 \right) = \left| \overrightarrow{OE_2} \right| \cos \left(\angle \left(\overrightarrow{OQ_2}; \overrightarrow{OE_2} \right) \right), \left| \overrightarrow{OQ_2} \right| = OQ_2,$$

для шуканої точки Q_2

$$OQ_2 \cdot OT_2 = 1, OQ_2 \cdot OT_2 = MN^2.$$

Отже, точка Q_2 є інверсною до точки T_2 відносно кола інверсії F . У випадку, коли точка T_2 лежить усередині кола F , відповідну побудову продемонстровано на рис. 1.

Таким чином, у явному вигляді побудовані вектори $\vec{e}^1 = \overrightarrow{OQ_1}$ і $\vec{e}^2 = \overrightarrow{OQ_2}$, які на евклідовій площині утворюють базис E' , взаємний до базису E .

Можливість реального моделювання складних математичних (і фізичних) об'єктів є доцільною складовою сучасних прийомів навчання.

Список літератури

Борисенко, А. И. & Тарапов, И. Е. (1972). *Векторный анализ и начала тензорного исчисления: Учебное пособие*. (4-е изд.). Харьков: Изд-во Харьковского университета.

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ОДИН ІЗ СУЧАСНИХ ІНСТРУМЕНТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНОМАНІТНИХ ГАЛУЗЕЙ ЛЮДСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Н. В. Шаповалова, О. І. Криворучко

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Київ, Україна*

shaponv@gmail.com, alena11mia@gmail.com

Розглянуто поняття імітаційного моделювання та моделі, перераховано різновиди імітаційного моделювання.

Ключові слова: імітаційне моделювання, метод Монте-Карло, метод імітаційного моделювання, агентне моделювання, метод дискретного моделювання, системна динаміка, модель.

Дана робота присвячена огляду деяких напрямів розвитку імітаційного моделювання, сферах застосування та основного інструментарію імітаційного моделювання.

У сучасному світі імітаційне моделювання надзвичайно важлива галузь математики, яка дозволяє розв'язувати економічні, соціальні задачі, допомагає інженерам при моделюванні різноманітних процесів та явищ. Саме стрімкий розвиток промисловості та дослідження економічних процесів стимулювали стрімкий розвиток цього напрямку математики.

Мета роботи зробити огляд основних термінів і понять імітаційного моделювання, основних етапів моделювання, популярних пакетів для проведення імітаційного моделювання та навести типові приклади завдань імітаційного моделювання.

У широкому розумінні імітаційне моделювання — це процес конструювання моделі реальної системи та експериментування на цій моделі з метою визначення поведінки системи або оцінити (у рамках обмежень, зумовлених деяким критерієм чи сукупністю критеріїв) різні стратегії, що забезпечують функціонування цієї системи. У вузькому розумінні імітаційне моделювання — це відтворення на електронно обчислювальній машині реальної виробничої чи організаційної системи. Стандартного терміну для імітаційного моделювання не існує (Томашевський, 2005).

Моделювання в загальному вигляді являє собою один з основних методів пізнання, є формою відображення дійсності та полягає у з'ясуванні або відтворенні тих чи інших властивостей реальних об'єктів, процесів, явищ за допомогою абстрактного опису у вигляді зображення, плану, карти, сукупності рівнянь, алгоритмів і програм (Білецький & Смирнов, 2013).

Серед переваг імітаційного моделювання відзначають:

1) відображення динамічних процесів і поведінкових аспектів зовнішнього середовища;

2) можливість виявлення закономірностей, динамічних тенденцій розвитку й функціонування складної системи в умовах неповної та неточної інформації;

3) опис взаємодії та поведінки безлічі активних агентів у соціальних системах;

4) реалізацію принципів об'єктно-орієнтованого проектування й застосування високотехнологічних рішень при побудові комп'ютерних моделей та інше (Давыдов, 2008).

Виділяють наступні різновиди імітаційного моделювання: метод Монте-Карло (метод статистичних випробувань), метод імітаційного моделювання (статистичне моделювання), імітаційне ігрове моделювання, агентне моделювання, метод дискретного моделювання, системна динаміка (Вендров, 2004).

Імітаційне моделювання являється відносно молодою наукою. Вище згадане дискретне моделювання було запропоноване в 1961 році Дж. Форрестом як інструмент дослідження інформаційних зворотних зв'язків у виробничо-господарській діяльності. У системній динаміці процеси, що відбуваються в реальному світі, представляються в термінах накопичувачів і потоків між ними. Математично модель у таких системах є системою диференціальних рівнянь, описуючи поведінку системи та її структуру як безліч взаємодіючих зворотних зв'язків і затримок.

Агентське моделювання з'явилося в 90-х роках і використовується для дослідження децентралізованих систем, динаміка функціонування яких визначається не глобальними правилами й законами (як в інших парадигмах моделювання), а коли ці глобальні правила й закони є результатом індивідуальної активності членів групи. Мета агентських моделей — отримати уявлення про ці глобальні правила, загальну поведінку системи, виходячи із припущень про індивідуальну, приватну поведінку її окремих активних об'єктів і взаємодію цих об'єктів в системі (Киселева, 2009).

Основним поняттям імітаційного моделювання являється поняття модель. Модель являє собою абстрактний опис системи, рівень деталізації якої залежить від мети моделювання і можливості отримання вихідних даних з необхідною точністю. Іншими словами, включення чи не включення в опис системи певного параметра залежить від його важливості в моделюванні та необхідності в точності отриманих результатів (Биндер & Хеерман, 1995).

Розроблення імітаційної моделі включає наступні етапи:

- 1) формулювання мети дослідження;
- 2) збір інформації і даних;
- 3) розроблення концептуальної моделі;
- 4) перевірка концептуальної моделі на адекватність поставленій задачі і виконання структурного критичного аналізу;
- 5) переведення концептуальної моделі в машинне подання за допомогою програмних засобів;
- 6) верифікація отриманої моделі;
- 7) повернення до пунктів 1—3 (залежно від виявленої помилки) у разі неадекватності отриманої моделі;
- 8) розроблення, виконання й аналіз експериментів;

9) документування та подання отриманих результатів (Биндер & Хеерман, 1995).

Один з найвідоміших методів моделювання є метод Монте-Карло. Цей метод являє собою загальну назву групи числових методів, які засновані на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного процесу, який формується в той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо. Цей метод імітації застосовується для наближеного відтворення реальних явищ, об'єднуючи чутливість і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. З допомогою цього методу можна побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі (Ермаков, 1971).

Усі підходи, які об'єднані загальною назвою метода Монте-Карло мають у своїй основі єдиний шаблон:

- 1) визначити область можливих вхідних даних;
- 2) випадковим чином згенерувати вхідні дані з визначеної вище області за допомогою деякого заданого розподілу ймовірностей;
- 3) виконати детерміновані обчислення над вхідними даними;
- 4) проміжні результати окремих розрахунків звести у кінцевий результат.

Метод Монте-Карло часто використовується у фінансах і бізнесі для оцінки інвестицій у проектах на корпоративному рівні або для оцінки похідних фінансових інструментів. Також можна використовувати його для моделювання графіків проекту, де використовуються агреговані оцінки для найгіршого оцінки для найгіршого випадку та найкращого варіанту, і найбільш ймовірна тривалість для кожного завдання, щоб визначити результати для всього проекту (Биндер & Хеерман, 1995).

Найбільш простими прикладами застосування методу Монте-Карло є визначення площі водоймища, розрахунок числа π , інтегрування, генерації випадкових чисел з можливістю задання розподілу.

З допомогою методу Монте-Карло можна аналізувати ризики. Ця можливість реалізована у програмному комплексі Spider Project. Результатом аналізу ризиків по методу Монте-Карло у програмному комплексі Spider Project являються:

- 1) діаграма розподілу ймовірності Монте-Карло;
- 2) гістограма з накопиченими частотами;
- 3) індекс критичності (Соболь, 1973).

Дуже корисні підходи методу Монте-Карло при проектуванні освітлення, які створюють фотореалістичні зображення віртуальних 3D-моделей, із застосуванням у відеоіграх, архітектурі, дизайні та кінематографічних спецефектах (Гулд & Тобочник, 1995).

Найбільш відомими системами для проведення імітаційного моделювання являються: AnyLogic, GPSS, Simplex3, Poses, Powersim, Aimsun.

Список літератури

- Биндер, К., & Хеерман, Д. В. (1995). *Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике*. Москва: Физматлит.
- Білецький, В. С., Смирнов, В. О. (2013). *Модельовання процесів збагачення корисних копалин: Монографія*. Донецьк: Східний видавничий дім.
- Вендров, А. М. (2004). Методы и средства моделирования бизнес-процессов (обзор). *Информационный бюллетень*, (10(137)), С. 1—32.
- Гулд Х., & Тобочник Я. (1990). *Компьютерное моделирование в физике*. (Т. 2). Москва: Мир.
- Давыдов, А. *Системная социология*. (2-е изд.). Москва: Изд-во ЛКИ.
- Ермаков, С. М. (1971). *Методы Монте-Карло и смежные вопросы*. Москва: Наука.
- Киселева, М. В. (2009). Имитационное моделирование систем в среде AnyLogic. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009.
- Соболь, И. М. (1973). *Численные методы Монте-Карло*. Москва: Наука.
- Томашевський, В. М. (2005). *Модельовання систем*. Київ: Видавнича група ВНУ.
- Хеерман, Д. В. (1990). *Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике*. Москва: Наука.

ГЕОМЕТРИЯ В МИСТЕЦТВІ СТВОРЕННЯ ОРНАМЕНТІВ

Н. В. Шаповалова, І. І. Слободенюк

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Київ, Україна

shaponv@gmail.com, iolickslobodenyuk@gmail.com

У доповіді розглянуто застосування геометрії в мистецтві створення орнаментів, описано метод побудови орнаменту, який називається геометричною побудовою орнаменту. Описано мотиви геометричних орнаментів, їх смислове значення, принципи побудови орнаментів та їх прикладне застосування.

Ключові слова: орнамент, геометричний орнамент, вишивка, ромб, коло, хрест, зигзаги, трикутники, меандри, шеврони, хвилясті лінії, розетки, квадрати, композиція.

Протягом усього свого життя люди отримують потрібну їм інформацію та знання з різних джерел. І чи не найбільшу кількість цих знань приховують у собі саме знаки, символи, різноманітні образи, літери, цифри, з яких творяться мова й пісні, формуються обряди і традиції, складаються орнаменти вишивки, прикраси архітектурних споруд.

Символи, знаки й орнаменти в цілому — це своєрідна книга про життя та вірування наших предків, написана універсальною мовою міжкультурного спілкування. Таким чином люди тих часів виражали свої думки, своє світосприйняття та перші спроби пізнати світ та вплинути на таємні й непізнані сили природи.

Орнамент є таке розбиття площини на нескінченну кількість клітин, при якому будь-яка клітина одержується з будь-якої іншої за допомогою руху. У повсякденному житті людство часто стикається з використанням орнаментів і розглядає їх як об'єкт мистецтва. Насправді орнаменти мають геометричну суть. Знання геометричного змісту орнаменту дозволить ефективно розв'язувати широкий клас задач, пов'язаних з мистецтвом та інженерією.

Орнамент (від лат. *ornamentum* — прикраса) візерунок, що складається з ритмічно впорядкованих елементів; призначається для прикраси різних предметів (посуду, знарядь праці та зброї, текстильних виробів, меблів, книг та ін.), архітектурних споруд (як ззовні, так і в інтер'єрі), творів пластичних мистецтв (головним чином прикладних), у первісних народів також самого людського тіла (розфарбовування, татуїровка). Пов'язаний з поверхнею, яку він прикрашає й візуально організовує, орнамент, як правило, виявляє або акцентує архітектоніку предмету, на який він нанесений. Він або оперує абстрактними формами, або стилізує реальні мотиви, часто схематизувавши їх до невпізнання. Г. Вейль назвав орнаментальне мистецтво «найдавнішим видом вищої математики, що виражений у неявній формі» (Вейль, 1968, с. 46).

Тепер наше буття прикрашають як рослинні, так і сюжетні орнаменти вишивки. Та найдавнішими орнаментами, створеними людством, є геометричні, які своїм корінням сягають доби первісності. Перші орнаменти були далекими від тих, що ми звикли бачити, і мали вигляд поодиноких знаків, графем, піктог-

рам. До часу, коли ці знаки стали утворювати складні ритмічно повторювані узори, орнаменти пройшли різні етапи розвитку й перетворень.

Геометричний орнамент — візерунок чи узор, утворений з ритмічно поєднаних геометричних елементів, стилізованих рослинним або тваринним мотивом (рис. 1). У такому орнаменті відображається складна система символіки навколишнього світу, магічно-захисна функція людини. Це цілісна енергетична система.

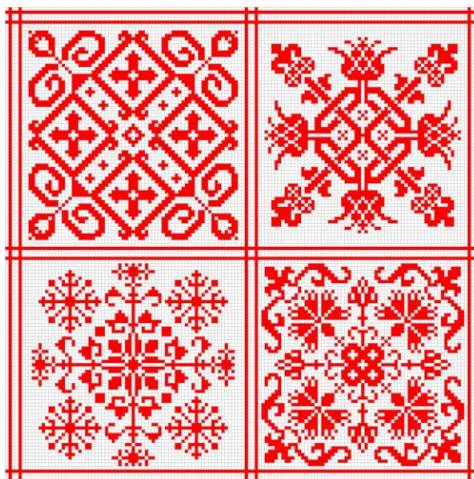


Рис. 1. Геометричний орнамент

Геометричні орнаменти виникли на основі графічних символів, що мали практичне значення в житті людей: вони передавали релігійне світосприйняття та використовувались задля магічного впливу на умови свого існування та на світ загалом. Також у своїх малюнках людина фіксувала й передавала різну інформацію майбутнім поколінням. Велика кількість елементів та сюжетів орнаменту являли собою обереги, що призначені були захищати їх носія від темних сил; багато символів здатні стерти тонку грань між темним світом (Навь) та світлим (Правь); деякі являли собою пряме звернення до богів або до тих чи інших сил природи.

З часом первинний, магічний зміст графічних зображень було втрачено і малюнки стали сприймати, у першу чергу, з естетичної точки зору, як прикрасу. Та в наш час, хоча він і досить матеріалізований, усе більше людей цікавиться давніми духовними символами та їх значенням. Стосується це і знаків, з яких складаються геометричні орнаменти слов'янської вишивки.

Геометричні побудови, сполучення та закономірні криві використовуються з давнини до сьогодні в орнаменті. Застосувавши ритмічний повтор (лінійний і центричний), дзеркальну симетрію (дзеркальну симетрію і / або поворот), накладання декількох елементів (створення сітки) ми отримуємо надзвичайно красиві зображення. Саме такий метод називається *геометричною побудовою орнаменту*, який дає нам змогу подивитися на навколишній світ зовсім іншими очима. Геометричний орнамент формує лінійні, просторові композиційні системи. Саме геометричний орнамент дає можливість досягнути суті математичного, раціонального «пояснення» навколишнього світу. Створюючи різноманітні композиції, що складаються з центричних, квадратних, трикутних

сегментів, митець спирається на вихідні положення побудови геометричного орнаменту — математичний розрахунок.

Серед найпоширеніших мотивів геометричних орнаментів виділяють ромби, хрести різної конфігурації, овали, кола, зигзаги, трикутники, меандри, так звані «шеvronи», хвилясті лінії, розетки, квадрати. Крім того, існують різні комбіновані мотиви, утворені шляхом сполучення основних. З точки зору символіки, цю групу декоративних елементів (включаючи свастики, гілки та інші мотиви) виділяють як «космічний фон», оскільки вони, по суті, символізують діяльність природних сил та елементів (Керлот, 1994, с. 156). Традиційно ці графічні знаки об'єднують або як солярні (пов'язані із Сонцем) символи, або ж як символи бурі та неба. Насправді під час детального аналізу змісту окремих мотивів та їх комбінацій, виявляється, що зміст таких зображень може бути набагато ширшим, оскільки кожна історична доба здійснила на орнаментальне мистецтво власний вплив.

Усі символи геометричного орнаменту поєднуючись у складні і прості композиції створюють ексклюзивний у своїй чарівності ряд орнаментних композицій, які постають перед нами у вигляді класичної слов'янської вишивки (рис. 2). Основою для побудови орнаменту є геометричні побудови, а тематика може бути різною, як технічною, так і рослинною (Шаповалова, 2015, с. 84).

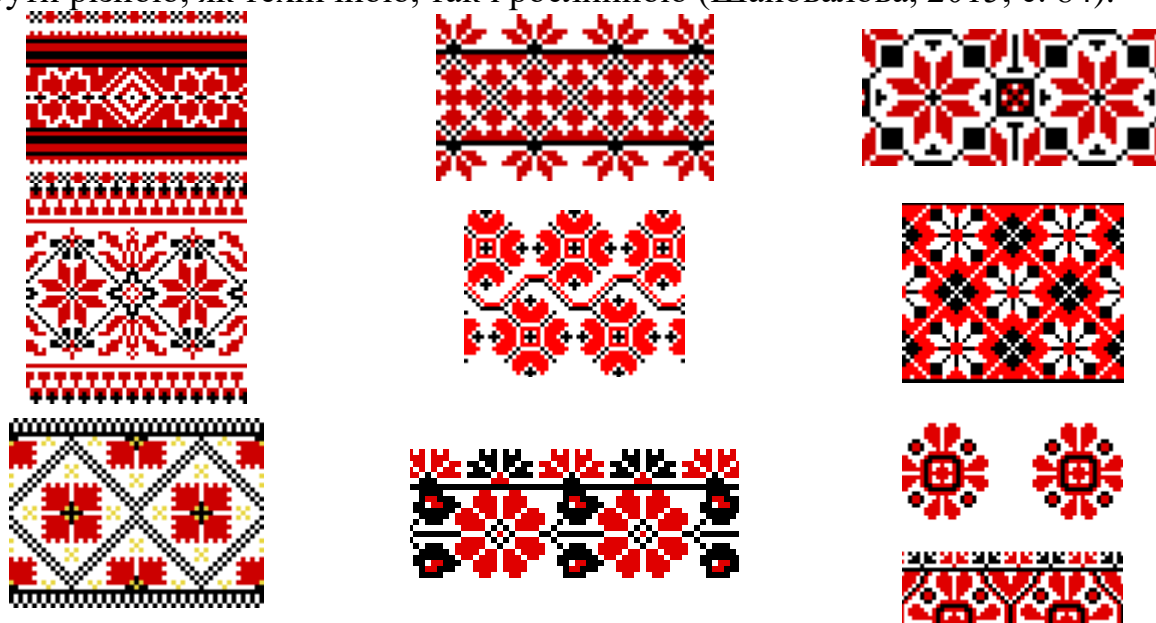


Рис. 2. Види орнаментів «Восьмикутна зірка»

Мотиви «ромб» (рис. 3), «ромб з гачками», «ромб з крапкою», «перехрещений ромб» надзвичайно поширені не лише в слов'янській орнаментиці. Ромбічний орнамент відомий, починаючи з неоліту, упродовж двох десятків тисяч років. А на даний час, за етнографічними даними, він у всій своїй багатоманітності зустрічається в усіх народів світу.



Рис. 3. Мотиви «ромб»

Походження цього мотиву різні дослідники пояснюють по-різному, але поки що продовжує домінувати точка зору, за якою цей знак відноситься до символів родючості, запліднення (Рыбаков, 1997, с. 114—126). Найчастіше мотив «ромб з крапками» трактують як засіяне поле (Gimbiitas, 1974, с. 205), а оскільки цей знак часто зустрічається на жіночих статуетках періоду енеоліту, його також вважають одним із символів запліднення.

Недаремно за етнографічними даними цей мотив часто зустрічається саме на весільному жіночому одязі та на одязі жінок, що перебували у шлюбі перший рік — запліднення, народження дітей, продовження роду вважалось основним наслідком шлюбу, і прохання про це фіксувалось на сорочці. «Перехрещений ромб» відносять до давніх знаків, що символізували землю як певну територію — поле, ділянку, власність. Тобто, він теж асоціювався з полем, землею, яка може дати врожай.

Надзвичайно поширеними в слов'янських вишивках є різного роду меандрові мотиви, які ще називають «килимовими», «ромбічними», а також різного роду «безконечники», що походять від них. *Безконечник* — це вид візерунка, схожого на спіраль. Ці орнаменти є дуже давніми — їх походження відносять ще до палеоліту, а відтак їхня символіка досить різнопланова та багатогранна. Найчастіше меандри та їх варіанти визначають як символ добробуту та ситості, що пов'язується з небесним благословенням або небесним даром, але при цьому виділяють різні варіанти походження цього зображення, що впливає і на його трактування (Рыбаков, 1997, с. 256). Крім того, дані мотиви могли означати нескінченність, вічний рух від життя до смерті, лабіринт, що пов'язує «цей» і «той» світи, мандри людської душі після смерті (Ліндсей, 1995, с. 27—29).

До солярних знаків — символічних зображень Сонця, а також вогню (невід'ємний сонячний атрибут) належать кола, хрести, модифікації хрестів, свастики, хрести в колі. Зокрема, хрест у колі може бути як знаком Сонця, так і знаком вогню (або блискавки — «вогню небесного»). Але сам по собі хрест ближчий до умовно-антропоморфних зображень і може бути знаком чоловічого начала (Голан, 1993, с. 108), а відтак наявність мотиву «хрест» у вишивках могла мати різну символіку: як бажання запліднення, так і апотропеїчну, тобто амулетну, оскільки вогонь і сонце, належачи до амбівалентних явищ, вважаються досить сильними оберегами. Із сонцем та вогнем у всіх індоєвропейців також чітко асоціюється свастика, тому цей мотив у вишивках може означати

як сонце (відповідно й небо як певний стратиграфічний рівень), так і чоловіче начало, мужність.

Схеми орнаментів розробляються на основі ряду *принципів побудови* (рис. 4), які дозволяють вибрати із сукупності наявних мотивів той, що дає найбільш виразний ефект. Гарний декоративний ефект дає принцип *повторення*, який часто зустрічається в бордюрах, стрічках, фризях та ін. Поперемінне повторення мотиву в протилежних напрямках дає принцип *інверсії*. Принцип *чергування* має місце в поперемінному вертикальному й горизонтальному розташуванні мотиву орнаменту. Принцип *симетрії* проявляється в розташуванні двох однакових мотивів по обидві сторони від осі. Вісь може бути як зображеною, так і уявною (Morant, 1970, с. 26).



Принцип повторення



Принцип інверсії



Принцип чергування



Принцип симетрії

Рис. 4. Принципи побудови орнаментів

На відміну від орнаментальних композицій, створених у ХХ столітті, історичний орнамент ніс у собі якщо не ідеї світобудови, то певну символіку. Так звана семантика геометричного орнаменту полягала в тому, яким чином художники розуміли сенс цієї символіки і який зміст вкладали в нього.

До визначальних формальних особливостей орнаменту належить декоративна стилізація, площинна, органічний зв'язок з поверхнею, що несе орнамент,

яку він завжди організовує, нерідко виявляючи при цьому конструктивну логіку предмету. Не всякий візерунок можна вважати орнаментом. Так, візерункова тканина з рапортом, що нескінченно повторюється, строго кажучи, не є орнаментальною (Шаповалова & Панченко, 2015, с. 83).

У цілому орнаментальні композиції із застосуванням геометричних орнаментів у вишивках на одязі несли важливу інформативну та символічно-знакову функцію, розповідаючи як про саму людину, так і про її життя. Особливо важливою роллю вишивок було заклинання на щасливу долю, довге життя, багатство, здоров'я та захист від нечистої сили. Геометричні орнаменти в цих композиціях через свою символіку відігравали важливу роль, визначаючи загальний зміст вишивки та зміст її окремих рівнів. Отже, геометричний орнамент це не лише частина народного мистецтва, а й цілий всесвіт математичної думки.

Список літератури

- Gimbiittas, M. (1974). *The gods and goddesses of Old Europe*. Los Angeles: University of California Press.
- Morant, H. de. (1970) *Histoire des arts décoratifs: des origines à nos jours*. Paris: Chêne.
- Вейль, Г. (1968) *Симметрия*. Москва: Наука.
- Голан, А. (1993) *Миф и символ*. Москва: Русслит.
- Керлот, Х. (1994). *Словарь символов*. Москва: REFL-book.
- Ліндсей, Д. (1995) *Коротка історія культури*. Київ: Мистецтво.
- Рыбаков, Б. А. (1997). *Язычество древних славян*. Москва: Русское слово.
- Шаповалова, Н. В., & Панченко, Л. Л. (2015). Орнаменти на площині. *Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць*, (1), 80—92. Узято з http://mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_10.pdf

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ БИОЛОГИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Д. И. Штефан¹, Т. А. Штефан²

¹Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

²Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина
dimka1105@rambler.ru, tayana2000@rambler.ru

Вступление. Математические методы применимы к самому широкому кругу вопросов — от физики элементарных частиц, гидродинамики и распространения звуковых волн; задач теории света, электричества и магнетизма до моральных проблем. Так, математические методы широко применяются в биологии и медицине (Бейли, 1970), например, для изучения колебаний численности популяций, генетическом анализе наследственности и многих других вопросов. Аналитическая форма получаемых решений позволяет выразить биологические закономерности в виде математических теорем (Spkurdyumov.ru, 2017). Примерами такого рода служат пороговая теорема в теории эпидемий и условия достижения равновесия в популяции.

Постановка задачи. В представленной работе приведены примеры применения математических методов, а именно элементов теории вероятности, при решении задач биологического содержания. Указанные задачи встречаются при изучении тем «Формула полной вероятности. Теорема Байеса» и «Схема Бернулли», а также в задачах на проверку статистических гипотез. Решение подобных задач приводит к восприятию высшей математики не только как абстрактной дисциплины, а пониманию ее необходимости при решении прикладных задач в смежных науках. Биологическая направленность выбрана нами как одна из наиболее интересных в комбинаторном смысле. Хотя решение таких задач и является типичным, биологические сведения, которые указаны в условии, вызывают интерес и желание углубиться в тему. Целью представленной работы является решение прикладных задач биологического содержания математическими методами.

Рассматриваемые ниже задачи решаются с помощью следующих известных формул:

1) формула полной вероятности и теорема Байеса

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(H_i) \cdot P(A/H_i); \quad (1)$$
$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)};$$

2) теорема Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np; \quad (2)$$

3) граничные теоремы Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x); \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad (3)$$

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt; \quad x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}.$$

Целью работы является показать применимость математических знаний в других областях науки, в данном случае — в биологии и медицине.

Основная часть. На основе статистики, найденной в открытых Интернет-ресурсах, авторами были составлены следующие задачи биологического содержания.

1. По статистике 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Преподаватели университета в составе 150 мужчин и 50 женщин проходят плановый медицинский осмотр. Наугад выбранный преподаватель оказался болен дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? При решении задачи используется формула полной вероятности и теорема Байеса (1).

2. В среднем дальтоники составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдется: 1) 4 дальтоника; 2) ни одного дальтоника не найдется. При решении задачи используется теорема Пуассона (2).

При более глубоком анализе задач 1 и 2 мы узнали, что цветовая слепота к красному цвету, X-сцепленный рецессивный ихтиоз, является наследственным заболеванием, передающимся X-сцепленно (Medn.ru, 2017).

3. В среднем левши составляют 10%. Найти вероятность того, что среди 200 студентов найдется: 1) 32 левши; 2) от 18 до 26 левшей. При решении задачи используются предельные теоремы Лапласа (3) и (4).

Генетические теории, связанные с существованием гена левого сдвига, то есть леворукости, детально описаны, например в (Levshei.net, 2017). К примеру, открытый учеными из Оксфордского университета ген LRRTM1 распределяет речь и эмоции между полушариями: у «правшей» левое полушарие контролирует речь, а правое — эмоции, у левшей же все наоборот.

При решении задач 4—7 используется формула полной вероятности и теорема Байеса (1).

4. Согласно результатам исследований Института здравоохранения Гарвардского университета (Encyclopedia Britannica, 2017) люди с группой крови А (II), В (III) и АВ (IV) имеют большую предрасположенность к сердечным заболеваниям, чем с группой крови О (I), рискующие на 14%: на 23% больше для группы крови АВ (IV), на 11% больше для группы крови В (III) и на 5% больше для А (II). На медосмотре присутствует 57 пациентов с группой О (I), 30 с А (II), 11 с В (III), 2 с АВ (IV). 1) Найти вероятность того, что наугад взятый пациент страдает сердечным заболеванием. 2) Пациент не имеет сердечного заболевания, найти вероятность того, что его группа крови не О (I).

5. Около 85% европейцев, 99% азиатов и 95% африканцев резус — положительные (Encyclopedia Britannica, 2017). Во французском легионе 1000 военнослужащих, из которых 653 европейца, 129 азиата и 218 африканцев. Найти вероятность того, что 1) наугад выбранный легионер является резус-положительным; 2) легионер оказался резус-отрицательным, к какой расе скорее всего он относится?

6. В банке 12 черных и 13 рыжих тараканов. Известно, что черный таракан не растворяется в серной кислоте с вероятностью 0,4, а рыжий — с вероятностью 0,42. Одного из тараканов поместили в стакан с серной кислотой. 1. Какова вероятность того, что таракан пережил это погружение? 2. Таракан пережил погружение, какого скорее всего он цвета?

7. В лаборатории биологического факультета содержится 20 крыс и 30 мышей. Известно, что крыса находит пищу в лабиринте за 1 минуту в 91% экспериментов, а мышь — в 76%. Во время лабораторного занятия студент помещает грызуна в лабиринт. 1. Найти вероятность того, что грызун найдет пищу за 1 минуту. 2. Грызун нашел пищу за 1 минуту, какова вероятность того, что это была крыса?

В задачах 4 и 5 используются две важнейшие классификации группы крови человека — это система АВ0 и резус-система. Задача 6 носит скорее юмористический характер и призвана разрядить серьезную в интеллектуальном смысле обстановку на занятиях. Задача 7 составлена на основе статистики, опубликованной американскими учеными, и содержит следующее утверждение: в среднем крысы «умнее» мышей.

Ответы к задачам: 1) 98,4%; 2) 9%; 13,5%; 3) 0,17%; 60,32%; 4) 17,17%; 40,82%; 5) 88,98%; с вероятностью 88,99% — европеец, 1,17% — азиат и 9,84% — африканец; 6) 40,96%; с вероятностью 50,78% — черного и 49,22% — рыжего цвета; 7) 82%; 44,39%.

Выводы. В работе представлены и решены семь задач раздела «Теория вероятности», в формулировке которых использовались биологические термины и факты. Факты, содержащиеся в условиях представленных задач, призваны заинтересовать студентов и привести к подробному изучению соответствующих тем. В свою очередь это приведет к значительному расширению кругозора и общей эрудиции будущего инженера, а также к осознанию межпредметных связей таких дисциплин как высшая математика и биология, в результате которых решение задач становится не только полезным, но и в интеллектуальном смысле приятным и познавательным. Заметим, что задачи имеют также и методическую ценность.

Список литературы

- Encyclopedia Britannica. (2017). *Rh blood group*. Взято из <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/500915/Rh-blood-group-system?anchor=ref284367>
- Levshei.net. (2017). *Левша. Генетические теории. Про левшей и правшей*. Взято из <http://www.levshei.net/6genet.html>

Medn.ru. (2017). *Правила наследования Менделя*. Взято из <http://www.medn.ru/statyi/Pravilanasledovaniyamende.html>

Spkurdyumov.ru. (2017). *Курс лекций: Математические модели в биологии*. Взято из <http://spkurdyumov.ru/education/kurs-lekcij-matematicheskie-modeli-v-biologii/2/>.

Бейли, Н. (1970). *Математика в биологии и медицине*. Москва: Мир.

РЯДИ ФУР'Є ЗА СИСТЕМОЮ КВАЗИСПЕКТРАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

П. С. Янчук

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука, Рівне, Україна*

janchukp@ukr.net

Застосовано новий метод до побудови поліноміальних наближень розв'язку крайової задачі для рівняння дифузії з неоднорідними крайовими умовами. Метод ґрунтується на застосуванні розв'язання в ряди Фур'є функцій за ортогональними квазі-спектральними поліномами, раніше запровадженими автором.

Ключові слова: квазіспектральні поліноми, поліноми Лежандра, ортогональні поліноми, ряди Фур'є, рівняння дифузії.

У ряді важливих часткових випадків спектр задачі Діріхле вдається побудувати явно. Якщо i натуральне число, то функція дійсної змінної x

$$u_i(x) = \sin i\pi \frac{(x+1)}{2} \quad (1)$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$u_i'' + \frac{i^2\pi^2}{4} u_i = 0$$

та крайові умови $u_i(\pm 1) = 0$. Отже, функції (1) є власними функціями задачі Діріхле для диференціального оператора

$$\frac{d^2}{dx^2}$$

на відрізку $[-1, 1]$, а λ_i відповідними власними значеннями.

Система базисних функцій (1) є ортогональною і повною в метриці $L_2[-1, 1]$. Таку систему легко поширити на випадок довільного паралелепіпеда у просторі m вимірів та оператора Лапласа.

Метод Фур'є для рівняння дифузії ґрунтується на використанні спектральних властивостей еліптичного оператора, який входить у його склад. У роботах самого Фур'є метод Фур'є був пов'язаний з відокремленням змінних у диференційному рівнянні. Цей метод є популярним і потужним методом упродовж століть. Але у практичних обчисленнях ряди Фур'є повільно збігаються. Коли, довільну $k = 1, 2, \dots$ разів диференційовну функцію $u = u(x), x \in [-1, 1]$ періодично продовжити на всю дійсну вісь $(-\infty, +\infty)$ з періодом 2, то взагалі кажучи дістанемо розривну функцію. Часткова сума n членів ряду Фур'є $s_n(u)$ для функції $u = u(x)$ у точках розриву має осциляції (явище Гіббса), а порядок швидкості збіжності відповідного ряду Фур'є, взагалі кажучи, є величиною порядку $O(n^{-r}), r \leq 1$ (Дзядик, 1977, 1988). Даний факт можна побачити на

прикладі збіжності ряду Фур'є функції $u(x) = x, x \in [-1, 1]$, поширеної на дійсну пряму періодично.

Для рядів Фур'є за системою квазіспектральних поліномів (Янчук, 1989) не є характерним явище Гіббса. Квазіспектральні поліноми застосовуються для апроксимації неперіодичних розв'язків крайових задач математичної фізики. Зокрема, вони використовуються до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь, систем звичайних нелінійних рівнянь та інших задач (Янчук, 1999, 2000, 2011, 2012а, 2012б). У роботі застосовано раніше вивчені властивості квазіспектральних поліномів та відповідних рядів Фур'є на прикладі розв'язування крайової задачі для рівняння дифузії. Автором уже розглядалося розв'язування рівняння дифузії у випадку однорідних крайових умов (Янчук, 1989).

Математична модель дифузії ґрунтується на початково-крайовій задачі для рівняння дифузії. Розглянемо початково-крайову задачу:

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), -1 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(+1, t) = \varphi_{+1}(t), u(-1, t) = \varphi_{-1}(t), 0 \leq t < +\infty, \quad (4)$$

де h — деяке, додатне число, $\varphi_{\pm 1} = \varphi_{\pm 1}(t), \psi = \psi(x)$ — відомі функції. Уважатимемо, що початкова умова та крайові умови (4) є такими, що задача (2) — (4) має єдиний розв'язок $u = u(x, y) \in C([-1, 1] \times [0, +\infty))$.

Через $L_2[-1, 1]$ позначаємо простір сумовних із квадратом функцій на відрізьку $[-1, 1]$. У гільбертовому просторі $L_2[-1, 1]$ ортонормований базис можна побудувати з ортонормованих поліномів Лежандра $\hat{P}_i(x)$ і розвинути довільну функцію $f \in L_2[-1, 1]$ у ряд Фур'є — Лежандра

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \hat{P}_i(x), f_i = \int_{-1}^1 f \hat{P}_i(x) dx.$$

Через M_l^p позначимо множину алгебраїчних поліномів вигляду

$$\sum_{i=l}^p c_i \hat{P}_i(x),$$

а через $\pi_l^p : L_2[-1, 1] \rightarrow M_l^p$ ортогональну проекцію, і зокрема

$$\pi_0^p f = \sum_{i=0}^p f_i \hat{P}_i(x)$$

— часткова сума ряду Фур'є — Лежандра, така що $\pi_0^p f \in M^p = M_0^p$.

У крайових задачах математичної фізики для подання часткових сум ряду Фур'є — Лежандра зручно використовувати замість поліномів Лежандра, квазі-спектральні поліноми.

Функції $u = u(x, t)$ у відповідному скінченний ряд Фур'є за квазіспектральними поліномами першого роду по змінній x :

$$\pi_0^{2n+1}u = \sum_{i=1}^{2n+2} u_i^\circ(t) K_i^\circ(x), u_i^\circ(t) = \int_{-1}^1 u(x, t) K_i^\circ(x) dx. \quad (5)$$

Звісно, при фіксованому t поліном $\pi_0^{2n+1}u$ (5) дає найкраще середньоквадратичне наближення для функції u в M^{2n+1} , тобто для фіксованого t

$$\|u - \pi_0^{2n+1}u\| = \min_{P \in M^{2n+1}} \|u - P\|_{L_2([-1,1])}.$$

Для швидкості збіжності найкращих наближень у просторі $L_2([-1,1])$ функцій $u \in W_2^k([-1,1])$, де $W_2^k([-1,1])$ соболевський простір, справедливі оцінки

$$\|u - \pi_0^{2n+1}u\| \leq \frac{c}{(2n+1)^k},$$

де через c позначаємо довільну константу, так що в різних формулах вона може мати інше значення.

Зважаючи на похибки апроксимації формул диференціювання рішення початково-крайової задачі, ми насправді не дістанемо найкращі наближення $\pi_0^{2n+1}u$ до функцій u , відповідно, у метриці простору $L_2([-1,1])$, але дістанемо близьке до найкращого наближення $\sigma_0^{2n+1}u$ (Янчук, 2011).

Це, означає, що для функцій $u \in W_2^k([-1,1])$ мають місце оцінки

$$\|u - \sigma_0^{2n+1}u\| \leq \frac{c}{(2n+1)^k}.$$

Справедливі формули

$$\begin{aligned} u_{N-i'}^\circ &= \kappa_{i'}^{-1} \Delta^{i'} u, u_{N-i'}^\circ = \int_{-1}^1 u(x, t) K_{N-i'}^\circ(x) dx, \Delta^{i'} u = \\ &= u(1, t) + (-1)^{i'+1} u(-1, t), i' = 0, 1, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\kappa_{i'} = \sqrt{(2n+2-i')(2n+3-i')}$, $N = 2n+2$.

При такому виборі коефіцієнтів $u_{N-i'}^\circ$, які ми називаємо *крайовими*, автоматично задовольнятимуться крайові умови (4) при $x = \pm 1$ в тому випадку,

коли ці функції є поліномами з M^{2n+1} , відповідно, і, звичайно наближено у випадку довільних функцій.

Між коефіцієнтами Фур'є функцій та їх похідних існує простий зв'язок для кожної із систем квазіспектральних поліномів (Янчук, 2011). Формули диференціювання других похідних u_{xx} функції $u = u(x)$ у спектральному просторі коефіцієнтів Фур'є мають вигляд

$$u_{xx,i}^{\circ} = -\lambda_i^{\circ} u_i^{\circ} + d_{\circ}^i \Delta^i u, \quad \Delta^i u = u(1) - (-1)^i u(-1), \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (7)$$

Переходимо до коефіцієнтів Фур'є першого роду за змінною x у рівнянні дифузії (2) при фіксованому x . Виконаємо диференціювання у спектральному просторі коефіцієнтів Фур'є і дістаємо алгебраїчні рівняння

$$(u_t)_i^{\circ}(t) = -\lambda_i^{\circ} u_i^{\circ}(t) + d_{\circ}^i \Delta_x^i u(t) + f_i^{\circ}(t), \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (8)$$

Це звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відомими функціями $\Delta_x^i u(t)$, $f_i^{\circ}(t)$ та невідомою $u_i^{\circ}(t)$. Звідси,

$$u_i^{\circ}(t) = \psi(x) e^{-\lambda_i^{\circ} t} + \int_0^t e^{-\lambda_i^{\circ}(t-\tau)} (d_{\circ}^i \Delta_x^i u(\tau) + f_i^{\circ}(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (9)$$

Зазначимо, що внутрішні коефіцієнти Фур'є $u_i^{\circ}(t)$ числом $2n$ та два крайові коефіцієнти Фур'є $\Delta_x^i u(t)$, або їм пропорційні $u_{N-i}^{\circ} = \kappa_i \Delta_x^i u$, подаються явними формулами (9) та (6).

Цей метод нескладно поширити на випадок крайової задачі дифузії в паралелепіпеді, тобто на тривимірний просторовий випадок.

Список літератури

- Дзядык, В. К. (1977). *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. Москва: Наука.
- Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Янчук, П. С. (1989). Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений. *Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов: сборник* (с. 112—121). Киев: Институт математики
- Янчук, П. С. (1999). Квазіспектральні многочлени та крайові задачі. *Волинський математичний вісник*, (6), 183—187.
- Янчук, П. С. (2000). Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1] \times [-1,1]$. *Волинський математичний вісник*, (7), 193—208.
- Янчук, П. С. (2011). Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами. *Волинський математичний вісник*, (8(17)), 213—239.
- Янчук, П. С. (2012а). Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона. *Волинський математичний вісник*, (9(18)), 189—207.
- Янчук, П. С. (2012б). Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 261—268.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

| | |
|--|----|
| Goy T. <i>Some combinatorial identities for Narayana's cows sequence</i> | 5 |
| Kovalchuk V. V. <i>Lyapunov's stability theory for a triple inverted pendulum with a follower forces</i> | 8 |
| Semeniv O. <i>Geomagnetic activity prediction with deep statistical learning</i> | 11 |
| Voloshyna V. <i>With independent symbols of W-representation</i> | 16 |
| Блажієвська І. П., Моклячук О. М., Рибак О. В. <i>Казки своїми руками: Інтелектуальне мистецтво</i> | 18 |
| Бугрим О. В., Тимченко С. Е., Шелест Л. И. <i>О решении задач ползучести и релаксации стареющего тела (полимеров)</i> | 22 |
| Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Моніторинг стану об'єктів критичної інфраструктури за допомогою нейронних мереж</i> | 27 |
| Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. <i>Вплив імпульсних завад на реальну надійність електронної апаратури</i> | 29 |
| Голінко І. М., Галицька І. Є. <i>Динамічна модель мікроклімату для промислового приміщення, що кондиціонуються</i> | 32 |
| Горалік Є. Т., Лупіна Т. О. <i>Про рух стрижня під дією поперечної сили, прикладеної до його кінця</i> | 36 |
| Горленко С. В. <i>Про аналітичність функцій із прямолінійними множинами моногенності</i> | 41 |
| Дикач Ю. <i>Дослідження змін кліматичних факторів за даними метеостанції «Київ»</i> | 43 |
| Донецький С. В. <i>Приховані аттрактори в системі генератор — п'єзокерамічний випромінювач</i> | 46 |
| Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Гаєвський М. В., Запорожчук Т. С. <i>Прогнозування ціни на нафту засобами ARIMA-моделей</i> | 49 |
| Іваненко Т. В. <i>Застосування границь у задачах з фінансової математики</i> | 52 |
| Кузьменко Б. В. <i>Дослідження теплового самозаймання пиловугільних сумішей та його математичної моделі</i> | 56 |
| Кучкін В. М., Кравцов О. В. <i>Теоретичне дослідження можливості керування станами деяких металевих антиферомагнетиків</i> | 60 |
| Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Звінська Т. С. <i>Двовимірна мішана задача в технологіях поліграфічного виробництва</i> | 64 |
| Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Петров М. О. <i>Дослідження колірних профілів друкарських машин цифрового друку</i> | 68 |
| Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р. <i>Формування відбитка у плоскому офсетному друці</i> | 72 |
| Лапач С. М. <i>Розширення сфери застосування теорії планування експерименту</i> | 76 |
| Листопадова В. В., Хоменко М. В. <i>Моделі з невизначеними даними в екології</i> | 81 |

| | |
|---|-----|
| Мейш В. Ф., Белов Є. Д. До постановки та чисельного розв'язку динамічних задач теорії оболонок у вигляді еліптичного параболоїду..... | 85 |
| Мейш В. Ф., Мейш Ю. А. Динамическом взаимодействии сферической оболочки с двухслойной грунтовой средой..... | 89 |
| Міцюхін А. І., Віхляєв В. А. Аписанне выявы сегментацыі..... | 94 |
| Ногін М. В. До розрахунку гідродинамічних характеристик тонкого крила в нестационарному режимі..... | 98 |
| Полетаев Г. С. Свойство решений уравнений родственных краевому условию задачи Римана с взаимно обратными рациональными коэффициентами..... | 102 |
| Поліщук Н. В., Бур Л. С. Дослідження ефективності роботи деякої системи масового обслуговування..... | 105 |
| Поліщук О. Д. Складні мережі, ієрархії та міжсистемні взаємодії..... | 109 |
| Потемкина С. Н., Розанов А. В. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатического поля в диэлектрике..... | 113 |
| Пушак А. С., Пушак Я. С., Пирч Н. М. Математична подель поглинання світла домішковими центрами..... | 116 |
| Радченко С. Г. Концепция корректности при использовании экспериментально-статистических методов исследования..... | 120 |
| Рожок Л. С. Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів..... | 120 |
| Савва В. А. Расчет эффективности и кинетики флуоресценции сред, легированных редкоземельными элементами..... | 129 |
| Сіренко В. О. Узагальнення класичних сценаріїв переходу до хаосу в неідеальних динамічних системах..... | 134 |
| Сокульська Н. Б., Сокульський В. М. Методи математичної статистики як ефективні засоби обробки та аналізу даних експериментальних досліджень при вивченні дисципліни «Методика наукових досліджень, Патентознавство»..... | 138 |
| Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С. Способи покращання збіжності чисельних методів при розв'язанні крайових задач теорії оболонок..... | 142 |
| Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Концепція квазіпохідних у нестандартних задачах теплопровідності..... | 146 |
| Фрей М. М. Про віківське числення та його зв'язок зі стохастичним диференціюванням в аналізі білого шуму Леві..... | 150 |
| Чепок О. Л. Застосування інверсії до побудови взаємного базису для довільного базису множини векторів евклідової площини..... | 157 |
| Шаповалова Н. В., Криворучко О. І. Імітаційне моделювання як один із сучасних інструментів для дослідження різноманітних галузей людської діяльності..... | 160 |
| Шаповалова Н. В., Слободенюк І. І. Геометрія в мистецтві створення орнаментів..... | 164 |
| Штефан Д. И., Штефан Т. А. Применение математических методов в задачах биологического содержания..... | 170 |
| Янчук П. С. Ряди Фур'є за системою квазіспектральних поліномів..... | 174 |

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

| | |
|---|-----|
| Shtefan T. A., Slyusarova T. I. <i>Optimization of control of knowledge and skills of students of technical specialties at the study of the “Higher mathematics” course</i> | 181 |
| Авраменко Л. Г. <i>Теорема Биркгофа — Тарского в курсе высшей математики</i> | 184 |
| Баліна О. І., Безклубенко І. С., Буценко Ю. П. <i>Глибина засвоєння курсу математики студентами першого курсу технічного вишу: послідовність викладання розділів, підходи до контролю</i> | 186 |
| Баштова Л. С. <i>Методологія викладання в КПІ на початку ХХ ст. Метод К. К. Симінського</i> | 189 |
| Бердник О. М., Юрчук І. А. <i>Про прикладні аспекти згортки функцій</i> | 195 |
| Білаш О. В., Гузик Н. М., Ліщинська Х. І., Петрученко О. С. <i>Сучасні аспекти методики викладання вищої математики студентам військових вищих навчальних закладів</i> | 199 |
| Білий В. О., Білий О. Г. <i>Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності</i> | 202 |
| Блажівська І. П., Свяженіна О. Ю. <i>Художнє моделювання в аналітичній геометрії</i> | 210 |
| Бондаренко Н. В. <i>Деякі застосування лінійної алгебри</i> | 213 |
| Величко Л. Д., Сокіл Б. І., Гузик Н. М., Сокіл М. Б. <i>Застосування методу інтенсифікації на практичних заняттях</i> | 218 |
| Вишенська О. В., Мейш Ю. А. <i>Деякі питання формування поняття функціональної залежності</i> | 221 |
| Гайдей В. О., Федорова Л. Б. <i>Про лінійні диференціальні рівняння з кусково-заданими коефіцієнтами</i> | 225 |
| Гончаренко Я. В., Сушко О. С. <i>Елементи актуарної математики в системі підготовки студентів математичних спеціальностей</i> | 228 |
| Грудкіна Н. С., Паламарчук В. О., Ровенська О. Г., Чумак О. О. <i>Прикладні аспекти реалізації професійної спрямованості під час викладання математичних дисциплін</i> | 231 |
| Дзигора К. Р., Нестеренко Т. В. <i>Отдельные вопросы корректности символьных вычислений средствами специализированных программных пакетов</i> | 234 |
| Довгай В. В. <i>Проблеми з викладанням математики в сучасному технічному університеті в умовах безсистемного реформування держави</i> | 238 |
| Драганюк С. В., Карапетров В. В., Манолі А. А. <i>Про структуру і зміст інтегрованого курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів нематематичних спеціальностей ВНЗ</i> | 242 |
| Дрозд В. В. <i>Чи знаєте ви, панове, що таке «домашнє завдання»?</i> | 245 |
| Задерей П. В., Нестеренко О. Б. <i>Сучасні вимоги до математичної освіти у ВНЗ</i> | 249 |
| Калайда О. Ф. <i>Інтегрування лінійних однорідних нормальних систем диференціальних рівнянь з фі-циркулянтною матрицею коефіцієнтів</i> | 252 |
| Калайда О. Ф. <i>Про метод Лагранжа дослідження інтегральних функціоналів на екстремум</i> | 253 |
| Калайда О. Ф. <i>Про першу теорему про середнє в інтегральному численні</i> | 254 |
| Кільчинський О. О., Рудоміно-Дусятська І. А., Сновида В. Є. <i>До розкладення правильного дробу при кратних коренях знаменника</i> | 255 |

| | |
|---|-----|
| Мохонько А. З., Васіна Л. С., Мохонько В. Д. <i>Метод найменших квадратів у задачах електротехніки</i> | 259 |
| Панасюк Н. М. <i>Дещо про методіку викладання вищої математики</i> | 264 |
| Панасюк Н. М. <i>Поглиблення знань з елементарної математики під час вивчення теми «Границі»</i> | 267 |
| Поплавська О. А., Самарук Н. М. <i>Підготовка майбутніх математиків: компетентнісний підхід</i> | 270 |
| Рассоха І. В., Блажко Л. М., Карпалюк Т. О. <i>Підвищення мотивації навчання шляхом використання прикладних задач</i> | 277 |
| Репета В. К., Репета Л. А. <i>Деякі методичні аспекти викладання теорії границь у курсі вищої математики для студентів технічних спеціальностей</i> | 281 |
| Чернобай О. Б. <i>Про деякі аспекти мотивації в курсі «Вища та прикладна математика»</i> | 286 |
| Широканова Н. И. <i>Применение теории вероятностей и математической статистики в экономике</i> | 288 |
| Шульга С. В., Халецька З. П., Ізюмченко Л. В. <i>Методичні особливості вивчення теми «Апроксимація функцій» студентами фізичних спеціальностей</i> | 291 |
| Шылінец У. А. <i>Аб рэалізацыі навукова-даследчага прынцыпу пры выкладанні вышэйшай матэматыкі пры падрыхтоўцы на эканамічных спецыяльнасцях</i> | 294 |
| Юрчук І. А., Бердник О. М. <i>Згортка функцій як інтеграл від параметра</i> | 297 |

Секція 3. Історія точних наук

| | |
|---|-----|
| Бондар В. В. <i>Розвиток знань про число e</i> | 303 |
| Волков А. В. <i>З історії диференціального та інтегрального числення</i> | 307 |
| Гайдей В. О., Міхно О. П. <i>До 110-річчя від дня народження Михайла Гельфанда (1907—1991), українського математика-методиста</i> | 311 |
| Гайдей В. О., Міхно О. П. <i>До 165-річчя від дня народження С. І. Шохор-Троцького (1853—1923), математика-методиста</i> | 317 |
| Грегуль Ю. О., Тимошенко О. А. <i>Криптографія — наука про захист інформації</i> ... | 321 |
| Игнатович В. Н. <i>О некорректности доказательств теоремы Гиббса об энтропии смеси идеальных газов</i> | 325 |
| Філоненко Н. В. <i>Видатні математики і прості числа</i> | 332 |
| Хорошун В. В. <i>З історії відкриття поліномів класу Семпсона</i> | 335 |

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

| | |
|---|-----|
| Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. <i>Переваги застосування тестування для контролю знань з вищої математики студентів технічних спеціальностей</i> | 339 |
| Буряк Д. В., Крапива Н. В., Крапива І. В. <i>Вплив інформаційного суспільства на розроблення навчальної літератури для сучасного технічного університету</i> | 342 |
| Волков А. В. <i>Застосування пакету комп'ютерної математики Maple для створення демонстраційних матеріалів для лекцій з вищої математики</i> | 346 |
| Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Круглова Н. В., Шурубуря К. І. <i>Система моделювання та аналізу результатів тестування</i> | 350 |
| Диховичний О. О., Круглова Н. В., Ординська З. П. <i>Моделювання прогнозів результатів ЗНО з математики</i> | 352 |
| Жданова Ю. Д., Спасітелєва С. О., Шевченко С. М. <i>Автоматизація процесу генерування завдань як інноваційний підхід організації самостійної роботи студентів</i> | 355 |
| Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Практико-орієнтована стратегія сучасної університетської освіти</i> | 359 |
| Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Гуманітарна складова підготовки майбутніх фахівців у системі вищої технічної освіти</i> | 362 |
| Коновенко Н. Г., Федченко Ю. С., Худенко Н. П. <i>Методологічні особливості дистанційного модулю в курсі «Вища математика» ОНАХТ</i> | 366 |
| Омелян О. М., Ічанська Н. В. <i>Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі викладання математики</i> | 370 |
| Орловський І. В., Тимошенко О. А. <i>Аналіз якості нових методів контролю знань з вищої математики в технічному університеті</i> | 374 |