Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА
В СУЧАСНОМУ
ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
VI Міжнародної
науково-практичної конференції

Київ, 28—29 грудня 2017 року

Київ
2018

УДК 51(082)
М34

Матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2017 р. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 382 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VI Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 29—30 декабря 2017 г. — Киев: КПИ им. Игоря Сикорского, 2018. — 382 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Sixth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2017. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018. 382 pp.

ISBN 978-617-7021-61-1

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7021-61-1

II

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

OPTIMIZATION OF CONTROL OF KNOWLEDGE AND SKILLS OF STUDENTS OF TECHNICAL SPECIALTIES AT THE STUDY OF THE "HIGHER MATHEMATICS" COURSE

T. A. Shtefan, T. I. Slyusarova
Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhy, Ukraine
tayana2000@rambler.ru, slyus7641@ukrpost.ua

In technical universities of Ukraine, there is a tendency to reduce the role of fundamental courses in higher mathematics in the preparation of engineering personnel (https://abiturients.info/uk/vuzy/distanciyne-navchannya-u-vnz-ukrayini). Constant reduction of the study time allocated for classroom classes does not allow for large-scale control works.

In this regard, the assistances of the Department of Higher Mathematics ZNTU developed test control work, for which sufficient 20–30 minutes of training time (Полякова & Слюсарова, 2017). Each test work contains material from one section of the course "Higher Mathematics", studied by students of technical specialties of ZNTU during the first semester: "Linear algebra", "Vector algebra", "Analytic geometry", "Mathematical analyses: the theory of boundaries, numerical functions" (http://www.zntu.edu.ua/kafedra-vishchoyi-matematiki).

We have developed a methodology for regular monitoring of students' knowledge and skills in studying the course "Higher Mathematics", which allows you to simultaneously control the assimilation of material and save the training time of practical exercises. When checking test examinations, the instructor uses a convenient table of correct answers. The test is offered to students at the beginning of the lesson, following the last practical occupation of each of the topics of the course. It is assumed that this student has completed his individual homework on the topic studied.

For example, we give the fifteenth variant of the test topic «Vector algebra» (Полякова & Слюсарова, 2017):

Task 1. Find the vector $\overline{MN}$, which is given points M and N by its coordinates.

Points M and N	Answers			
	A	B	C	D
$M(-4;\ 6;\ 3)$, $N(0;\ 1;\ 9)$	$(4;-5;\ 6)$	$(-4;\ 5;-6)$	$(-4;\ 7;\ 12)$	$(-4;-5;-6)$

Task 2. Determine at which values β the vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$ are collinear.

Vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a} = -5\overline{i} + 10\overline{j} + \beta \cdot \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$	$\beta = -5$	$\beta = 10$	$\beta = -10$	$\beta = 5$

Task 3. Determine at which values of α vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$ are perpendicular.

Vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a}=(8;\ 5;\ -1)$, $\overline{b}=(\alpha;\ -3;\ 1)$	$\alpha=-2$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=0$

Task 4. Find the vector $\overline{a}$ ort.

Vector $\overline{a}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a}=\left(4;-3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{2}{3};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$	$\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$	$\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$	$\left(\frac{2}{3};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

Task 5. Find the projection of a vector $\overline{m}$ into a vector $\overline{a}$ if $\overline{m}=2\cdot\overline{c}+\overline{b}$.

Vectors $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a}=(0;\ -6;\ 0)$, $\overline{b}=(-1;\ 3;\ -1)$, $\overline{c}=(1;\ -3;\ 1)$	6	-6	-3	3

Task 6. Calculate the vector product $\overline{a}\times\overline{b}$.

Vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a}=-\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{k}$	$(-1;8;-2)$	$(-1;-8;2)$	$(1;8;2)$	$(-1;8;2)$

Task 7. Calculate the mixed product of vectors $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Vectors $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$	Answers			
	A	B	C	D
$\overline{a}=(3;2;0)$, $\overline{b}=(1;-1;2)$, $\overline{c}=(4;-2;5)$	-1	1	3	2

After solving all the tasks of the control work (at the end of the work), a table with the answers is recorded.

An example of a table with responses:

Variant	Tasks & Answers					
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
15	B	D	A	A	B	C

If the following answers (A, B, C, D) do not have the correct answer, then the letter E is placed in the corresponding cell.

Following proposed scheme of conducting and testing of test work leads to a qualitative check of knowledge and skills of students, while saving the time of classroom classes.

Reference

Полякова, Т. Г., & Слюсарова, Т. І. (2017). *Завдання для проведення контрольних робіт з вищої математики (тести) за темами «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія», «Математичний аналіз: теорія границь, диференціальне числення функцій»*. (Т. 1). Запоріжжя: ЗНТУ.

ТЕОРЕМА БИРКГОФА — ТАРСКОГО
В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л. Г. Авраменко
Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина
yuragoco@gmail.com

Рассмотрено схему рассмотрения и доказательство одной из теорем о неподвижной точке — теоремы Бирхгофа — Тарского.

Ключевые слова: полная структура, изотонное отображение, неподвижная точка.

По требованию IT специальностей в первом семестре ВТУЗов часто читаются разделы дискретной математики либо в виде отдельного курса, либо в виде отдельных лекций в рамках общего курса. В них понятия множества, отношения (порядка и эквивалентности), отображения являются центральными. В связи с этим целесообразно рассмотреть следующие вопросы.

Определение 1. Пусть множество A частично упорядочено и $E \subset A$. Элемент $b \in A$, обладающий тем свойством, что для любого $a \in E$ $a \leq b$, называется *мажорантой* или *верхней границей* множества E, а само множество — *ограниченным сверху*. Всякий элемент $b \in A$, такой, что $b \leq a$ для любого $a \in E$, называется *минорантой* или *нижней границей* множества E, а множество — *ограниченным снизу*. Множество E называется *ограниченным*, если оно ограниченно сверху и снизу.

Определение 2. Пусть множество A частично упорядочено и $E \subset A$. *Наибольшим* элементом подмножества E множества A называется такой элемент $a \in E$, что для всех $x \in E$ $a \geq x$. Соответственно *наименьшим* элементом подмножества E называется такой элемент $b \in E$, что $\forall x \in E$ $b \leq x$. Наименьшая верхняя граница непустого множества $E \subset A$ называется его *верхней гранью* или *супремумом* и обозначается $\sup E$. Наибольшая нижняя граница непустого множества $E \subset A$ называется его *нижней гранью* или *инфимумом* и обозначается $\inf E$.

Определение 3. Частично упорядоченное множество A называется *полной структурой*, если всякое его непустое подмножество имеет инфимум и супремум.

Определение 4. Пусть A и B — частично упорядоченные множества. Отображение $F : A \to B$ называется *изотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из отношения $x_1 \leq x_2$, следует отношение $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Теорема Биркгофа — Тарского (Birkhoff, Tarski**).** *Для всякого изотонного отображения F полной структуры A в себя найдется, по меньшей мере, один такой элемент $a \in A$, что $F(a) = a$ (a называется неподвижной точкой F).*

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{x \in A \mid x \le F(x)\}$. Множество E не пусто. Действительно, обозначив через $v = \inf A$ получаем $v \le F(v)$, т. е. $v \in E$.

Теперь обозначим через $a = \sup E$. Покажем, что a является неподвижной точкой отображения F. Для всех $x \in E$ из неравенства $x \le a$ следует неравенство $F(x) \le F(a)$. В силу определения множества E для всех $x \in E$ $x \le F(x) \le F(a)$. Таким образом, $F(a)$ является верхней границей множества E и

$$a \le F(a).$$

Вновь воспользуемся изотонностью отображения F. Из неравенства $a \le F(a)$ следует неравенство $F(a) \le F(F(a))$. То есть $F(a) \in E$. Но $a = \sup E$, а значит

$$F(a) \le a.$$

Из двух противоположных нестрогих неравенств вытекает равенство $F(a) = a$. Что и требовалось доказать.

Весь материал может быть изложен за 45 мин. Вместе с тем, идеи, заключенные в доказательстве, часто используются в дальнейшем (например, в принадлежащем Коши доказательстве теоремы Больцано — Коши о нулях непрерывной функции). Являясь самой поздней из теорем о неподвижной точке, теорема Биркгофа — Тарского может оказаться первой фундаментальной теоремой о свойствах отображений в курсе высшей математики.

Список литературы

Tarski, A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application. *Pacific J. Math.*, *5*(2), 285–309.

ГЛИБИНА ЗАСВОЄННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ПЕРШОГО КУРСУ ТЕХНІЧНОГО ВИШУ: ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКЛАДАННЯ РОЗДІЛІВ, ПІДХОДИ ДО КОНТРОЛЮ

О. І. Баліна[1], І. С. Безклубенко[1], Ю. П. Буценко[2]

[1]*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна*

[2]*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

elena.i.balina@gmail.com

У доповіді розглядаються питання про послідовність викладання розділів курсу вищої математики лектором-математиком у технічному виші з набуттям досвіду та, відповідно, глибини осмислення задач цього курсу та можливостей їх вирішення.

Ключові слова: математика, розв'язування задач, формулювання теорем, першокурсники, студенти, університетські стандарти, вивчення теорії, модульні контрольні, екзаменаційні білети.

Серед проблем, з якими на разі доводиться стикатися під час викладання курсу математики у технічному виші, ледь не основною є низький рівень засвоєння першокурсниками елементарної математики. При цьому, у багатьох випадках, абсолютно катастрофічним є рівень володіння її теоретичними аспектами — знання означень, точних формулювань теорем (не кажучи вже про їх доведення). Як результат маємо нігілістичне ставлення студентів до вивчення теорії і курсу вищої математики.

Викладачі математики, визначаючи індивідуальну ситуацію з вивченням курсу тим чи іншим студентом, зазвичай фіксують один з наступних рівнів:

— знання означень об'єктів вивчення;

— знання формул, що підлягають використанню;

— знання алгоритмів, які використовуються для розв'язування конкретних класів задач;

— вміння визначати тип задачі, що пропонується для розв'язування;

— знання формулювань теорем;

— розуміння умов, за яких ці теореми справедливі та областей можливого використання;

— уміння доводити теореми, усвідомлення того, наскільки необхідна та яким чином досягається логічна обґрунтованість математичних тверджень.

На жаль, у переважній більшості випадків, студенти зосереджують свою увагу на знайомстві (зазвичай поверхневому) з алгоритмами розв'язання типових задач. Зрозуміло, що з точки зору належного засвоєння курсу, така ситуація є неприйнятною, тим більше, що наступним кроком виявляється використання спеціалізованих програм для розв'язання цих задач! Недостатня пильність викладача може призвести до того, що студент навіть не «проходить по дотичній» до програмного матеріалу, а просто таки «пролітає» над ним.

Методи активізації вивчення студентами теоретичного матеріалу добре відомі — це опитування на лекціях та практичних заняттях, математичні диктанти, колоквіуми та інше. Безперечно корисними є контроль ведення студентами конспектів лекцій та надання їм можливості доступу до цих конспектів, підготовлених викладачем у паперовій чи електронній формі. Але слід з прикрістю констатувати, що наразі ці традиційні методи стрімко втрачають свою ефективність. Студенти просто не розуміють, що від них вимагають, виявляються не в змозі протягом кількох днів (максимум — двох-трьох тижнів), відмовитись від звичок, які роками складались у школі та міцно зафіксувалися за час підготовки до ЗНО. У цій ситуації, як нам здається, необхідний пошук шляхів «пом'якшення» для студентів переходу від шкільних стереотипів до університетських стандартів, не відступаючи при цьому від останніх. Звісно, ідеальним виходом була б зміна парадигми шкільної освіти для школярів, орієнтованих на продовження навчання в університетах, або, принаймні, процедури їх вступу до університетів, але наразі це не видається реальним.

Принципову важливість, на наш погляд, має послідовна демонстрація викладачами вищої школи студентам обов'язковості та важливості володіння елементарною математикою у школі та в університеті, принциповості в обох випадках одних і тих самих елементів. З цієї точки зору, домінуюча практика починати вивчення вищої математики (як у випадку об'єднаного курсу, так і у випадку виділеного курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії) з розділу «Матриці, визначники системи лінійних алгебраїчних рівнянь» здається нам сумнівною. Справа в тому, цей розділ (важливість якого не підлягає сумніву, як і перспективи його використання в подальших частинах курсу) фактично «стартує з нуля», не використовуючи майже нічого зі шкільної математики. Це створює оманливе враження у першокурсників щодо зв'язку між вивченням математики у школі та виші. На наш погляд, починаючи курс вивчення, наприклад, з аналітичної геометрії (що розуміється, наразі, як результат запровадження та систематичного використання методу координат у геометричних задачах). В той же час, вивчення математичного аналізу, як нам здається, слід розпочинати у «м'якій» формі: від прогресій до послідовностей та їх границь, від інтуїтивно зрозумілого поняття неперервності функції до поняття її границі (саме так, проте з обов'язковим поверненням до формального означення неперервності).

Що ж стосується контролю засвоєння студентами матеріалу, то всім викладачам математики, які працюють з першокурсниками добре відомі проблеми зі знанням точних означень та формулювань теорем. У зв'язку з цим, теоретичні питання в модульних контрольних роботах та навіть екзаменаційних білетах виявляються практично позбавленими сенсу — переважна більшість студентів або не відповідає на них взагалі, або ж дає вкрай уривчасті (і часто помилкові відповіді). Автори пропонують перейти до наступної структури питань у модульних контрольних та екзаменаційних білетах:

1) формулювання та доведення теорем (формул);

2) комбіновані теоретично-практичні завдання (наприклад, сформулювати означення границі послідовності та знайти границю даної послідовності);

3) традиційні практичні завдання.

При цьому мається на увазі, що

— завдання першого типу дозволяють виділити прошарок студентів, які претендують на найвищі оцінки («відмінно» та «дуже добре»);

— завдання другого типу необхідні для виділення тих студентів, які претендують на оцінку «добре»;

— завдання третього типу призначені в першу чергу для студентів, рівень знань яких визначається як «задовільний» або «достатній».

Разом з тим, на первинному (адаптаційному) рівні вивчення математики у вищому учбовому закладі безумовно є сенс обмежити контрольні завдання лише другим та третім типами, причому диференціюючи рівень технічної складності задач (простіші — для другого типу, складніші — для третього). Такий підхід дозволить стимулювати вивчення студентами теорії принаймні на «стартовому» рівні, не обмежуючись механічним використанням завчених «правил» (алгоритмів) та спростить наступний перехід до поглибленого засвоєння теоретичного матеріалу.

Список літератури

Balyna, O., Bezklubenko, I., & Butsenko, Yu. (2017). Additional parameters are in informative providing of educational process. In *Fourth international Scientific-practical conference “Management of development of technologies”*, Kyiv, 19–20 May (с. 15—16). Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури.

Бордовський, Т. А., Нестеров, А. А. & Трапицын, С. Ю. (2011). Управление качеством образовательного процесса. Санкт-Петербург. Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена.

Островська, О. В., & Юрик, І. І. (2014). Про методику втузівського курсу математики. У *Матеріалах III Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ* (с. 201—202). Київ: КПІ.

МЕТОДОЛОГІЯ ВИКЛАДАННЯ В КПІ НА ПОЧАТКУ XX СТ. МЕТОД К. К. СИМІНСЬКОГО

Л. С. Баштова,
Державний політехнічний музей
при КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
lyudm.bash@ukr.net

Ключові слова: КПІ, методологія викладання, К. К. Симінський, організація контролю знань.

Кінець дев'ятнадцятого початок двадцятого століття ознаменувався стрімким розвитком національної науки та промисловості, що стало потужним поштовхом до відкриття нових вищих навчальних закладів (ВНЗ), зокрема й Київського політехнічного інституту (КПІ). Як методична так і навчальна, і наукова роботи у сфері професійної освіти України протягом другої половини XIX — першої половини XX ст. перебували у стані безперервного реформування та пошуків шляхів удосконалення. Зокрема, методична робота була спрямована на апробацію та вдосконалення методів теоретичного та практичного навчання, контроль та підвищення професійного рівня викладачів та якості знань учнів та студентів. Найбільшого поширення в системі освіти Київської політехніки в перші десятиліття XX ст. набув метод викладання Костянтина Костянтиновича Симінського (1879—1932).

К. К. Симінський — випускник КПІ 1907 р. (кафедра мостобудування, яку очолював Є. О. Патон), професор (1914), академік ВУАН (1926), віце-президент ВУАН (1931—1932). У 1907—1932 рр. працював викладачем КПІ. В 1920—1921 рр. — декан інженерно-будівельного факультету КПІ, в 1914—1932 рр. — завідував кафедрою опору матеріалів. В 1924—1926 рр. він проректор з навчальної частині КПІ. Поряд з педагогічною і науковою діяльністю проводив велику організаторську роботу. Брав активну участь у реорганізації вищої школи, загальній реформі Київського політехнічного інституту (1920), був членом Державного науково-методичного комітету УСРР (Москаленко, 1998, с. 121—122). Провадив педагогічну і методичну роботу також в Київському університеті (1918—1919), в Інституті народного господарства (1922—1923), у Художньому інституті (1927), в Одеському політехнічному інституті (1918—1919).

Розроблена ним методологія викладання предметів у вищих навчальних закладах широко застосовувалась у 20-х, 30-х роках XX ст., період розбудови Радянської вищої школи, мала своє продовження і удосконалення згідно вимог часу у другій половині XX ст. Ця методика була представлена автором у звіті про роботу КПІ за двадцять п'ять років існування. Її застосовували у своїй роботі найкращі викладачі київської політехніки того часу, зокрема, й перші викладачі математики КПІ В. П. Єрмаков і Б. Я. Букреєв (ДАМК, ф. 18, оп. 2, спр. 30, арк. 54, 55).

На сьогоднішній день метод викладання предметів К. К. Симінського мало досліджений істориками-науковцями хоча зафіксований у працях автора, зокрема, «На новых путях в высшей технической школе. Этюды по методологии и реорганизации», та має відгомін в організації сучасних освітніх процесів, як практично апробований та удосконалений згідно з сучасними вимогами розвитку технічної школи.

Як відомо, методологія організації освіти є одним з чинників, що впливає на хід і результат навчально-виховного процесу в будь-якому навчальному закладі. Спочатку метод навчання сприймався спрощено і означав спосіб викладу. З розвитком освітньої практики та педагогічної науки відношення до даної категорії змінилося, на неї стали покладати великі надії. Однак, незважаючи на діалектичну сутність цієї категорії, вона змінюється і переосмислюється набагато повільніше, ніж інші педагогічні поняття. Через це більшість методів, використаних у навчальній роботі магістрами та професорами ще середньовічних університетів, і сьогодні входять в методичний арсенал вишів (Пионова, 2002, с. 76).

Ці факти переконують в тому що будь яка методологія навчання не має терміну давності й варта дослідження.

Методика викладання — це оптимальне поєднання освітянських методів, прийомів і засобів навчання, які застосовуються для організації навчання. Правильно обрані методи здатні плідно впливати процес навчання, помилки або неуважність викладача до даного питання знижують ефективність навчання та професійну підготовку студентів. Саме тому методи навчання були й залишаються головною складовою педагогіки вищої школи.

Поняття «метод» вказує на існування певного способу досягнення будь-якої мети в навчально-виховному процесі, і на досягнення цієї мети в процесі й результаті певним чином організованої, впорядкованої педагогічної діяльності.

На початку XX ст. велика увага приділялась методології викладання у вишах. У Харківському технологічного інституту цю роботу активно проводив професор Я. В. Столяров. Він талановитий науковець, спеціаліст в галузі прикладної механіки и залізобетонних конструкцій, член науко-методологічного комітету Наркомпросу УРСР, автор праці «Организация учебно-методологической работы в институтах». У своїх працях він аналізував та пропагував методику К. К. Симінського, як перевірену та апробовану в стінах КПІ. Нові методи і організаційні форми навчання і виховання майбутніх спеціалістів, вважав Я. В. Столяров, вивільняли зміст вищої школи від чистого академізму і поєднували міцними зв'язками з господарським життям країни, готувати фахівців здатних працювати в дусі тих нових перспектив, які стояли перед країною в усіх галузях її культурно-господарського будівництва (Столяров, 1924, с. 88).

Як відомо, у старій педагогічній школі кінця XIX початку XX ст. переважав лекційний метод. Тепер йому на зміну мали прийти нові методи. Студенти також виступали проти лекційної системи і критикували реферативну систему, наполягали на нових методах, якими на їх думку були бесіди, лабораторні роботи тощо. Спочатку (10—20-ті рр. XX ст.), лекційний метод поволі замінюється лабораторним та лабораторно-дослідним і екскурсійним (Волобуєв, 1924, с. 229). А впродовж 1923—1924 навчального року у вишах відбувався активний перехід від лекційного методу до лабораторного під час вивчення майже всіх дисциплін.

У звіті Житомирського інституту народної освіти за 1923—1924 навчальний рік у пункті про методи роботи писалося, що «серед наукових робітників панує думка, що необхідно й доцільно відмовитися від традиційно-лекційного викладання і перейти до нових методів. Після довгих обговорень було прийнято рішення відмовитися від рефератів, оскільки вони не можуть бути основним методом відпрацювання навчального матеріалу» (Бюлетені та звіти…). При ВНЗ, було створено цілу низку нових навчально-допоміжних установ, у яких проводилася робота з використанням активних методів навчання: кабінети, лабораторії, майстерні, бібліотеки тощо (А. С., 1924, с. 224). Це давало змогу організовувати практичні роботи майже з усіх дисциплін. Відповідно до домінуючого методу навчання проводився і облік роботи студентів, це здійснювалося шляхом підготовки доповідей та активної участі в семінарських заняттях (А. Б., 1924, с. 228).

Київський політехнічний інститут не стояв осторонь цього процесу адже завжди вирізнявся прогресивністю поглядів свого професорсько-педагогічного колективу, а матеріальна база яка, вишу забезпечувала освітянський процес, постійно вдосконалювалась. Зокрема задля ґрунтовного вивчення математичних дисциплін створились математичні кабінети, які були укомплектовані колекціями математичних моделей. У ті часи великої популярності набув метод викладання К. К. Симінського. Його поширення надавало можливість студентам більш поглиблено та якісно здобувати знання та практичні навички. Цей метод пропонував перехід від лекційного викладення матеріалу до лекцій-бесід, дискусій із залученням студентів до самостійної роботи під керівництвом та за рекомендаціями викладача. Для більш якісного засвоєння матеріалу проводилися колоквіуми, заняття в лабораторіях та аудиторіях музею. Після цього аналізувалася робота студентів, та в заключній лекції професора систематизувався матеріал. При такому методі відбувалось ґрунтовне засвоєння пройденого матеріалу. Усе викладене оформлювалось конспектом, студент також виконував самостійну роботу. Після засвоєння певної частини матеріалу організовувалася тематична екскурсія. Історичний досвід довів що методика розроблена К. К. Симінським є універсальною, адже її застосовували для викладання різних галузей знань.

Розглянемо детально схему методу К. К. Симінського.

1. Розпочинається курс лекціями-бесідами. У перших же лекціях професор робить вступ до науки, з’ясовуючи її завдання обсяг та значення, проводить розподіл науки на відділи (теми), дає вказівки щодо літератури та інших засобів і джерел вивчення курсу, або теми.

2. Далі викладач знайомить з Виставкою навчально-допоміжних приладів і обов’язковою літературою. Потім встановлюється система навчання як, головна складова дослідження, мета яку потрібно досягти і які результати отримати. На цю частину витрачається 1—3 лекції, в залежності від дисципліни й складу аудиторії.

Наступним етапом засвоєння матеріалу є самостійне читання рекомендованих підручників, чи аналіз, можливо в більшому обсязі, зазначеного індивідуально переліку літератури.

Далі колоквіум груповий або індивідуальний.

Залежно від матеріалу професор дає рекомендації щодо вивчення дисципліни: розпочинає, наприклад, перегляд експериментального матеріалу, який на ній базується, або проробляє зразкові вправи.

Основою для цього вступу професора може бути лабораторна праця або якийсь інший матеріал. Мета — показати як саме треба працювати щодо наукового підходу, техніки виконання й продуктивності праці, а також оцінювання результатів. Ці лекції демонстративні та з дискусіями.

3. Потім студентам знову пропонується самостійна підготовка. А далі, після колоквіуму, їм дається напівсамостійна, під загальним керівництвом професора, праця або в лабораторії, або в аудиторії музею.

У першому випадку праця ця полягає у вивченні та засвоєнні техніки проведення експериментів, а також в отриманні фактичного матеріалу при самостійному проведенні експериментів на готових, налагоджених приладах.

У разі ж праці в музеї — вона полягає в розв'язанні завдань чи в розборі прикладів, які поглиблюють самостійно засвоєну студентами теорію. Як під час праці, так і по закінченні ставиться ціла низка питань, які допомагають сконцентрувати увагу, розвинути спостережливість і направити її на ті процеси в роботі з вивчення дисципліни, що безумовно варті уваги. Потім проходять творчі дискусії.

4. Далі ще більш самостійна праця студентів. Призначається вона знову для попереднього засвоєння певної частини матеріалу, або певної теми. При цьому немає потреби всім студентам загадувати вивчення матеріалу по одному й том ж підручникові, навпаки доцільніше загадувати з декількох ліпших, а деяким студентам навіть із класичних джерел.

У цей період студенти демонструють зразки своєї праці по вивченню дисципліни, розв'язують запропоновані вчителем завдання, розповідають як вони собі уявляють дисципліну, обговорюють, і задають запитання, які постали у них під час читання літератури з предмету.

Роль викладача — керувати цими виступами, поглиблювати сумніви, утягувати в дискусію всю групу, розвивати фантазію, допитливість. На базі з'ясованої різниці в підходах різних авторів до вирішення одних і тих-же питань, установлюється, зрештою, яке вирішення найкраще, яке занотувати в конспекті.

При цьому те, про що дискутувалося, засвоюється дуже ґрунтовно, решта — значною мірою уваги.

5. Після такої праці буде доцільною лекція вчителя або кого-небудь із студентів з попередньою підготовленого під керівництвом викладача, яка б дала узагальнення всьому. У цій лекції треба систематизувати всі знання за темою, зазначити максимальні досягнення науки в цій галузі, визначити головні показники, які дають якісну характеристику дисципліни, дати зразок викладу. Лекція повинна бути змістовною, глибокою та доступною для засвоєння.

6. Таким чином, це буде перший відділ курсу. Він закінчується оформленням усього простудійованого конспектом та виконанням самостійної індивідуальної праці у такій формі, яка застосовується на практиці, наприклад, у формі пояснювальної записки, обрахунку, рисунку або формального звіту про лабораторне дослідження.

Усі роботи студентської групи виставляються в музеї, на виставці й обговорюються. Найбільш цікаві з них вивчають детально студентським загалом.

По закінченні певної теми організовується екскурсія на фабрику, будівництво або інше виробниче місце. Результатом вивчення теми для кожного студента завершується оцінюванням — яке є в більшості випадків формальним заліком, що робиться індивідуально підписуванням викладачем студентського журналу, та конспекту, на підставі виконаної студентом роботи, або на підставі колоквіуму.

7. За цим зразком провадиться виклад кожного наступної теми дисципліни, що вивчається. При цьому кожний студент веде журнал робот і одержує періодичні заліки по закінченні тем курсу.

8. Увесь курс закінчується загальною заключною лекцією викладача, у якій відзначаються всі досягнення науки в опанованій дисципліні (Київський політехнічний…, 1924, с. 162—163).

Обов'язковим компонентом навчального процесу та одним з головних критеріїв його успішності є контроль знань студентів. У цій сфері вищої технічної школи на початку 20-х рр. методичної роботи майже не проводилося. Технічні ВНЗ переважно використовували дореволюційні методи й форми контролю знань. З огляду на це, головною формою контролю знань залишались екзамени й заліки, які студенти складали під час сесій.

Однак, уже на цьому етапі відмічалися недоліки екзаменів, де оцінка носила випадковий характер (*Київський політехнічний*…, 1924, с. 41). Як альтернативу Я. Столяров у 1925 р. пропонував запровадити поточний контроль, який повинен проходити невід'ємно від навчального процесу, на відміну від екзаменів, які можуть знаходитися на великій відстані в часі від теоретичних занять (Столяров, 1925, с. 29).

Досить докладно професор К. Симінський розкрив методи поточного контролю, які застосовувались 1926 р. в Київському політехнічному інституті. Так, самостійне розв'язання задач, технічних розрахунків зараховувалися на основі активності студента під час розв'язування задач і аналізу питань; лабораторні роботи — на основі складеного студентом лабораторного робочого журналу, опитування про устрій обладнання й апаратури, які використовував студент; лекції — на основі колоквіумів (індивідуальна бесіда зі студентом), де викладач виявляв цілісність і повноту засвоєння теорії, сформованість логіки, мислення, суджень і термінологічного апарату дисципліни. Підсумковий залік курсу проводився по триместрах у комісіях викладачів на основі сукупності даних про студента стосовно всіх видів його роботи (Симинский, 1926, с. 126—127).

Отже, основним принципом запровадження поточного обліку в КПІ було оцінювання індивідуальних здобутків кожного окремого студента.

Установлено, що впродовж 10—30-х років XX ст. у діяльності вищих навчальних закладів використовувалися такі активні методи підготовки студентів, як: лабораторний, семінарський, дослідний, екскурсійний, метод спостережень та ін. Використання активних методів навчання у вищих навчальних закладах давало можливість готувати фахівців, які добре орієнтувалися в навколишньому середовищі, мали певний практичний досвід, та могли вміло застосовувати набуті знання в своїй подальшій роботі.

Поступове вдосконалення навчально-методичного забезпечення ВНЗ; підвищення їх наукового потенціалу сприяло індустріалізації України в 20-х роках та її перетворенню в промислово-розвинену державу з високим кадровим потенціалом у другій половині XX ст. Можна з впевненістю сказати що сучасні методики викладання базуються на методологіях освітян минулого, хоча удосконалені, трансформовані, інноваційні та прив'язані до потреб сучасної освіти, науки та техніки.

Список літератури

А. Б. (1924). З життя Чернігівського Інституту Народньої Освіти в 1923—24 році. *Путь просвещения*, (8), 225—228.

А. С. (1924). Кам'янець-Подільський Інститут Народньої Освіти. *Путь просвещения*, (8), 223—225.

Бюлетені та звіти Житомирського інституту народної освіти і листування з ним про складання учбових програм та перевод студентів. Звіт про роботу Житомирських трьохрічних Вищих українських педагогічних курсів за 1923/24 навчальний рік, 48 арк., арк. 39 зв. (ф. 166, оп. 4, спр. 629). Центральний державний архів вищих органів влади та управління України.

Волобуєв, П. (1924). Педагогічні курси Харківщини. *Путь просвещения*, (8), 228—231.

Київський політехнічний і Київський сільськогосподарський інститут: XXV років. 1898—1923: Ювілейний збірник. (1924). Київ: Держ. Трест «Київ друк».

Москаленко, Ю. Н. (Ред.). (1998). *Хто є хто: Довідник. Професори Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Київ: Освіта.

Пионова, Р. С. (2002). Педагогика высшей школы: Учебное пособие. Минск.: Университетское.

Симинский, К. (1926). *На новых путях в высшей технической школе: Этюды по методологии и реорганизации.* Киев: Друкарня К. П. І.

Столяров, Я. (1924). На путях к советскому ВУЗу. *Путь просвещения*, (10), 81—102.

Столяров, Я. В. (1925). *Организация учебно-методологической работы в інститутах*. Харьков: Государственное издательство Украины.

Столяров, Яков Васильевич (б. д.). В *Википедия*, Взято из https://ru.wikipedia.org/wiki/Столяров,_Яков_Васильевич.

ПРО ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ЗГОРТКИ ФУНКЦІЙ

О. М. Бердник, І. А. Юрчук
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
o_berdnyk@ukr.net , iyurch@ukr.net

Одним із складних для розуміння студентів технічних спеціальностей понять є «згортка функцій». З метою кращого засвоєння відповідного матеріалу під час вивчення «Математичного аналізу» або «Вищої математики» на практичних заняттях доцільно розглядати прикладні задачі, що безпосередньо пов'язані з професійною діяльністю майбутніх фахівців.

У даній роботі авторами запропоновано до розгляду вибірку задач математичної фізики, цифрової обробки сигналів, теорії систем автоматичного керування та багатокритеріальної оптимізації, що розкривають прикладні аспекти «згортки».

Ключові слова: згортка, перетворення Фур'є, обробка сигналів, розрахунок динамічної системи, багатокритеріальна оптимізація.

Викладання математичних курсів для студентів сучасного технічного університету має бути максимально орієнтоване на практичну діяльність майбутнього фахівця. Без сумніву, вивчення формально визначеної термінології та строгих логічних доведень є фундаментом для власне інженерної підготовки. Проте з метою мотивації навчальної діяльності студентів, підвищення їх інтересу до вивчення курсів «Математичного аналізу» або «Вищої математики» доцільно при подачі матеріалу розглядати задачі прикладного характеру.

Зокрема, обчислюючи перетворення Фур'є згортки $f_1 * f_2$ двох функцій, варто зауважити, що дана процедура переводить операцію згортки е простішу операцію — множення функцій (Колмогоров & Фомин, 1976, с. 433):

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2], \tag{1}$$

де

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx .$$

Даний факт має важливе значення при вирішенні ряду прикладних задачах. Розглянемо деякі з них.

1. *Задача Коші для рівняння теплопровідності*:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (-\infty;\infty), t \in [0;\infty). \tag{2}$$

Фізичний зміст задачі полягає у знаходженні температури $u(x,t)$ нескінченного теплопровідного стрижня в будь-який момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент $t = 0$ його температура в кожній точці x становила $u_0(x)$.

Якщо шукати розв'язок задачі (2) у класі функцій $u(x,t)$, що задовольняють наступні умови:

1) функції $u(x,t)$, $u'_x(x,t)\, u''_{xx}(x,t)$ абсолютно інтегровні на всій осі x для довільного фіксованого $t \geq 0$;

2) функція $u'_t(x,t)$ має на кожному скінченному проміжку $0 \leq t \leq T$ інтегровну, незалежну від параметра t мажоранту $f(x)$: $\left|u'_t(x,t)\right| \leq f(x)$, причому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$, то, виконавши в рівнянні (2) перетворення Фур'є за x, одержимо справа

$$F[u''_{xx}(x,t)] = -\lambda^2 v(\lambda,t),\ v(\lambda,t) = F[u(x,t)],$$

а зліва

$$F[u'_t(x,t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u'_t(x,t)e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx = v'_t(\lambda,t).$$

Отже, перетворення Фур'є дозволило звести рівняння (2) до звичайного диференціального рівняння:

$$v'_t(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t),$$

причому його розв'язок має перетворюватися при $t = 0$ у функцію:

$$v_0(\lambda) = F[u_0(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{3}$$

Шуканим розв'язком, очевидно, буде $v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t}v_0(\lambda)$. Ураховуючи (3) та те, що $e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]$ (Колмогоров & Фомин, 1976, с. 427), одержуємо згідно з (1):

$$v(\lambda,t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right].$$

Звідси маємо розв'язок рівняння теплопровідності (2) — інтеграл Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}u_0(x-\xi)d\xi.$$

2. *Задача про лінійну фільтрацію сигналів* є математична модель перетворення згортки.

Відомо, що сигнал $x(t)$ та його амплітудний спектр $X(f)$, що виражає інтенсивність вихідного сигналу на частоті f, є дві різні форми представлення однієї і тієї ж ситуації: у часовій області — функцією $x(t)$, а в частотній — $X(f)$. Іншими словами, сигнал можна розглядати як пару функцій $x(t) \leftrightarrow X(f)$, пов'язаних перетворенням Фур'є (Дробик та ін., 2008, с. 24):

$$X(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-2\pi ift}dt \text{ та } x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{+2\pi ift}df.$$

Нехай лінійний фільтр характеризується імпульсною реакцією $h(t)$ — відгуком фільтра на імпульсний вплив $\delta(t)$. Імпульсна реакція пов'язана перетворенням Фур'є з комплексним коефіцієнтом передачі фільтра $H(f)$.

Якщо на вході фільтра $h(t)\leftrightarrow H(f)$ діє сигнал $x(t)\leftrightarrow X(f)$, тоді відгук фільтра $y(t)\leftrightarrow Y(f)$ може бути знайдений в часовій області як згортка

$$y(t)=(x*h)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(u)h(t-u)du$$

або в частотній — як добуток $Y(f)=H(f)\cdot X(f)$.

3. *Задачу багатокритеріальної оптимізації* регулювання напруги в електричних мережах, що містять трансформатор з безконтактним пристроєм регулювання під навантаженням (РПН), можна записати у вигляді (Зінзура, 2012, с. 351):

$$\begin{cases} \quad Q_1(K)=\left|\Delta U_1(K)\right|\to\min; \\ \quad Q_2(K)=U_2(K)\to\min; \\ K\in\Omega; \end{cases} \tag{4}$$

де $Q(K)=\left\{Q_1(K),Q_2(K),Q_3(K)\right\}$ — вектор критеріїв керування;

$K=\left\{k_a,k_b,k_c\right\}$ — вектор коефіцієнтів трансформації силового трансформатора у фазах A,B,C (вектор управління);

$\Delta U_1(K)$ — різниця значень модуля напруги прямої послідовності та номінальної напруги (пропорційний відхиленню напруги);

$U_2(K)$ — напруга зворотної послідовності;

$\Omega=\left\{k\in R^3\,\middle|\,k_{i\,\min}\le k_i\le k_{i\,\max},\ i=a,b,c\right\}$ — область допустимих значень вектора коефіцієнтів трансформації трансформатора, яка визначається глибиною регулювання коефіцієнта трансформації (допустимий простір керування);

$k_{i\,\min},k_{i\,\max},\ i=a,b,c$ — відповідно мінімальне та максимальне значення коефіцієнту трансформації трансформатора для кожної з фаз.

Застосувавши до (4) метод лінійного згортання, що полягає в заміні локальних критеріїв одним загальним критерієм K, (Черноруцкий, 2005, с. 51), одержимо:

$$\begin{cases} \quad F_1(K)=\sum_{i=1}^{m}a_iQ(K)\to\min; \\ K\in\Omega; \end{cases}$$

де $F_1(K)$ — скалярний критерій, що є лінійною комбінацією критеріїв;

a_i — вагові коефіцієнти (показники відносної значимості окремих критеріїв);

m — кількість критеріїв.

4. З*адача аналізу систем автоматизованого керування* базується на методі перетворення Лапласа — інтегрального перетворення, що зв'язує функцію $X(p)$ комплексної змінної («зображення») з функцією $x(t)$ дійсної змінної («оригіналом»). Алгоритм розрахунку перехідного процесу динамічної системи даним методом детально розкрито в Никулин (2004, с. 405). Причому однією з особливостей перетворення Лапласа, які зумовили його широке поширення в наукових та інженерних розрахунках, є те, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають простіші співвідношення над їх зображеннями. Так, згортка двох функцій зводиться у просторі зображень до операції множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними (Никулин, 2004, с. 409).

Наприклад, необхідно обчислити перехідну та вагову характеристики динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням:

$$10\frac{dy}{dt} + y = 5\frac{dx}{dt}, x(0) = y(0) = 0..$$

Розв'язок. Знаходимо пряме перетворення Лапласа:

$$Y\left(p\right)\left(10p+1\right) = 5pX\left(p\right),$$

$$W\left(p\right) = \frac{Y\left(p\right)}{X\left(p\right)} = \frac{5p}{10p+1}.$$

Для ступінчастого збурення $x(t) = 1\left(t\right)$:

$$Y\left(p\right) = W\left(p\right)X\left(p\right) = \frac{5p}{10p+1}\frac{1}{p} = \frac{0,5}{p+0,1}.$$

Звідки перехідна (часова) характеристика матиме вигляд:

$$y\left(t\right) = h\left(t\right) = 0,5e^{-0,1t},$$

Із попереднього рівняння імпульсна характеристика визначатиметься:

$$g\left(t\right) = \frac{dh\left(t\right)}{dt} = \left(0,5e^{-0,1t}\right)' = -0,05e^{-0,1t}.$$

Список літератури

Колмогоров, А. Н., & Фомин, С. В. (1976). *Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник* (4-е изд.). Москва: Наука.

Дробик, О. В., Кідалов, В. В., Коваль, В. В., Костік, Б. Я., Лазебний, В. С., Розорінов, Г. М., & Сукач, Г. О. (2008). *Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник*. Київ: Наукова думка.

Зінзура, В. В. (2012). Методи розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації регулювання напруги в електричних мережах. *Техніка в сільському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація, 25, ч. I,* 350—360.

Черноруцкий, И. Г. (2005). *Методы принятия решений*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.

Никулин, Е. А. (2004). *Основы теории управления. Частотные методы анализа и синтеза систем: Учебное пособие.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.

СУЧАСНІ АСПЕКТИ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ВІЙСЬКОВИХ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

О. В. Білаш, Н. М. Гузик, Х. І. Ліщинська, О. С. Петрученко
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна
oksana.bilash@gmail.com, hryntsiv@ukr.net,
k_lishch@meta.ua, voksanietko@gmail.com

У роботі проаналізовано сучасні проблемні аспекти методики викладання математики курсантам військових вищих навчальних закладів та наведено приклад організації навчальної роботи в мікрогрупах під час проведення практичних занять.

Ключові слова: методика викладання, компетентнісний підхід, інтенсифікація, групові форми організації навчальної діяльності.

Військова освіта — це основа формування сильної армії та освічених військових фахівців. Отримання якісної військової освіти є актуальною проблемою у зв’язку з гібридною війною, що відбувається на сході України, та потребою у швидкому відновленні та розбудові обороноздатності держави. Розвиток сучасної військової освіти відбувається в напрямі компетентнісного підходу, сутність якого полягає у спрямованості освітнього процесу на формування та розвиток ключових і предметних компетенцій особистості. Як наслідок такого процесу формується загальна компетентність. Компетентнісний підхід в освіті пов’язаний з особистісно-орієнтованим і діяльнісним підходами до навчання. Він стосується особистості курсанта й може бути реалізованим і перевіреним тільки у процесі виконання ним певного комплексу дій. Такий підхід є достатньо ефективним, адже в його основі є виявлення особливостей особистості і навчання курсанта за напрямком, який оптимально йому підходить.

Метою сучасного етапу розвитку військової освіти є «…нарощування її інноваційного потенціалу, інтеграція в європейський і світовий військово-освітній і правовий простір, підготовка військових фахівців з високим рівнем професіоналізму, компетентності, інтелектуального розвитку, загальної та військово-професійної культури, здатних з високою ефективністю виконувати поставлені завдання щодо національної безпеки та оборони Вітчизни, до самонавчання, розвитку власної творчої індивідуальності, невтомного, наполегливого самостійного засвоєння нових знань протягом життя, їх примноження, орієнтації в широких потоках різноманітної інформації, прийняття оптимальних рішень у нестандартних умовах» (Науменко & Приходько, 2009).

Удосконалення змісту вищої математичної освіти пов’язане з вимогами, що висуває до математичних знань військових спеціалістів практика: теорія стрільби, знання з топографії, теорія коливань різних елементів інженерних механізмів та споруд спеціального призначення тощо.

Сучасні проблемні аспекти методики викладання математики курсантам військових вищих навчальних закладів можна класифікувати за наступними напрямами:

— забезпечення фундаментальності математичної освіти в військових вищих навчальних закладах;

— посилення професійної спрямованості викладання вищої математики через змістовний компонент (математичне моделювання професійних завдань, створення «банку завдань» міжпредметного характеру); через методичний компонент (контекстне та проблемне навчання, самостійна дослідницька діяльність, поєднання колективних та індивідуальних форм навчання);

— оптимальне поєднання фундаментальності та професійної спрямованості знань здобутих з курсу вищої математики у військових вищих навчальних закладах;

— організація різних видів самостійної роботи, розвиток пізнавальної самостійності;

— інтенсифікація навчального процесу з математики;

— формування математичної культури курсантів;

— удосконалення змісту курсу вищої математики;

— комп'ютеризація навчання математики.

Одним зі шляхів підвищення ефективності навчання є впровадження у процес професійної підготовки групових форм організації навчальної діяльності, які сприяють соціально-психологічній адаптації курсантів, а тому позитивно впливають на формування особистості майбутнього фахівця. При груповій роботі посилюється активність, мотивація та зацікавленість, спостерігається підвищення рівня знань, розвиваються особисті якості курсанта, комунікативні навички та вміння працювати в команді.

Наведемо приклад організації навчальної роботи в мікрогрупах під час проведення практичного заняття з теми «Обернена матриця».

Мета заняття: навчитись знаходити обернені матриці другого та вищих порядків, застосовувати отримані знання до розв'язування конкретних практичних задач. При цьому курсанти повинні навчитись планувати послідовність виконання завдання, формулювати пізнавально-проблемні запитання, висловлювати припущення, висувати гіпотези, знаходити оптимальний варіант розв'язування задачі, отримувати розв'язки, записувати остаточний результат та інтерпретувати його. Важливим є навчитись зосереджувати увагу на одному та розподіляти її між різними об'єктами навчальної діяльності та працювати самостійно.

На етапі актуалізації опорних знань викладач разом з курсантами нагадує теоретичні викладки, що стосуються знаходження визначників другого та вищих порядків, транспонованих матриць, мінорів та алгебраїчних доповнень та записує формулу для знаходження оберненої матриці.

Етап засвоєння нових понять можна організувати таким чином: розв'язки типових завдань трьох рівнів складності (знаходження обернених матриць другого, третього та четвертого порядків) пропонуються у вигляді роздаткового матеріалу або висвітлюються на екран. При цьому курсанти самостійно їх вивчають і, за потреби, для уточнення деяких моментів, задають викладачеві запитання.

На етапі формування вмінь та навичок група (30 курсантів) поділяється на шість підгруп залежно від рівня засвоєння попереднього матеріалу. Кожній підгрупі необхідно знайти обернену матрицю відповідно другого, третього та четвертого порядків залежно від рівня її знань. Завдання підгруп однотипні та відрізняються один від одного лише числовими даними. Вони підготовлені викладачем заздалегідь у вигляді роздаткового матеріалу. Викладач консультує курсантів, координує та скеровує роботу підгруп, за потреби надає допомогу та оцінює роботу кожного. Курсанти в підгрупах намагається успішно виконати завдання, набути необхідні навички застосування теоретичного матеріалу до розв'язування задач відповідно до своїх здібностей.

Здобуті на цьому етапі знання використовуються для розв'язання конкретної задачі військового спрямування.

Задача. Передаючи закодоване повідомлення, розвідка надіслала текст:

$$\begin{pmatrix} -118 & -148 & -201 & -114 & -154 & -172 & -286 & -118 & -148 \\ 17 & 35 & 36 & 31 & 38 & 43 & 51 & 17 & 35 \\ 140 & 151 & 225 & 115 & 166 & 179 & 319 & 140 & 151 \end{pmatrix}.$$

Розкодувати повідомлення, якщо відомо, що матриця кодування $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь. При кодування кожній літері української абетки ставиться у відповідність число, яке дорівнює її порядковому номеру: А — 1, Б — 2, В — 3, … , Ь — 31, Ю — 32, Я — 33, пропуск — 34. Далі отриману послідовність чисел розбивають на вектори розміром 3×1 і складають матрицю, стовпцями якої вони є. Для матриці кодування використовують довільні цілі числа, вимагаючи лише, щоб вона була невиродженою. Добуток матриці кодування та отриманої матриці — текст повідомлення. Для розкодування потрібно матрицю декодування (обернена до матриці кодування) помножити на матрицю, задану в умові задачі. Повідомлення, що передала розвідка:

СЛАВА УКРАЇНІ ГЕРОЯМ СЛАВА.

Результативність заняття полягає у розвитку вмінь самостійної роботи, формування таких властивостей особистостей, як відповідальність, самооцінка, вміння керувати та підкорятися, міжособистісної комунікації.

Таким чином, використання в навчальній роботі запропонованої методики навчання забезпечує високу якість засвоєння навчального матеріалу, сприяє розвиткові логічного мислення, творчих здібностей та активному мотивованому процесу засвоєння знань.

Список літератури

Науменко, М. І., & Приходько, Ю. І. (2009). Управління якістю військової освіти: теорія, методологія, практика. *Наука і оборона*, (1), 40—50.

ПРО ПОСЛІДОВНІСТЬ ФІБОНАЧЧІ ТА ІНШІ ЗВОРОТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

В. О. Білий, О. Г. Білий

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
valeri_y@ukr.net, belyi.oleksandr@gmail.com

Розглянуто приклади зворотних послідовностей різних порядків, отримано формули загальних членів, суми та частинні суми деяких з них.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, зворотна послідовність, золотий переріз, характеристичне рівняння, твірна функція.

Італійський математик середньовіччя Леонардо Пізанський (1170—1250), пізніше широко відомий як Фібоначчі, мабуть, і гадки не мав, що його доволі проста задача про розмноження пар кроликів за певних умов, приведе до низки досліджень та обговорень, які не вщухають і до наших. Причина такої популярності полягає в тому, що числова послідовність, за допомогою якої розв'язується задача про кроликів, дуже тісно пов'язана з фундаментальним числом в математиці, і не тільки в ній, а саме з числом $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, яке називають *золотим перерізом*. Подальші дослідження, серйозні і спекулятивні, показали зв'язок та різного роду інтерпретації послідовності чисел Фібоначчі: в геометрії — золотий переріз, прямокутники Фібоначчі, спіраль Архімеда, множини відповідних кіл; у живій та неживій природі — формування крони дерев, форма пелюсток деяких квітів, розташування насіння в соняшнику, геометрія деяких органів тіла людини, молюсків, візерунки на зрізах каміння; в архітектурі, мистецтві, фінансовій сфері; у фізиці та астрономії — розподіл планет нашої Сонячної системи, формування рукавів спіральних галактик тощо.

За означенням: $\left\{f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність Фібоначчі, якщо

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = f_1 + f_0, \dots\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},$$

— рекурентне співвідношення, яке показує, що ця послідовність є зворотною послідовністю другого порядку. Маємо

$$\left\{f_n\right\} = \left\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots\right\}.$$

Ясно, що ця послідовність не являється арифметичною або геометричною прогресією. Перше питання при дослідження цієї послідовності — як знайти її загальний член f_n? Нагадаємо коротко лише кілька основних широко відомих методів його обчислення.

1. Знаходження f_n — як суми двох геометричних прогресій. Нехай

$$f_n = u_1 q^n + v_1 p^n,\ n = 0,1,2,\dots,$$

де q, p — знаменники прогресії.

Тоді, із рекурентного співвідношення, маємо:

$$u_1 q^{n+1} + v_1 p^{n+1} = u_1 q^n + v_1 p^n + u_1 q^{n-1} + v_1 p^{n-1},$$

або

$$\begin{cases} u_1 q^{n-1}(q^2 - q - 1) + v_1 p^{n-1}(p^2 - p - 1) = 0 \\ u_1 + v_1 = 0,\ u_1 q + v_1 p = 1 - \text{початкові умови.} \end{cases}$$

Неважко показати, що необхідні та достатні умови виконання цієї системи є наступні:

(1) p та q — це різні корені рівняння $x^2 - x - 1 = 0$,

(2) $\begin{cases} u_1 + v_1 = 0 \\ u_1 q + v_1 p = 1. \end{cases}$

Тобто:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ p = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ v_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Отже, ми отримали формулу Жака Біне:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right),$$

де $n = 0,1,2,\ldots,\ \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

2. Комбінаторний метод. Розглянемо трикутних Паскаля в зображеній на рисунку системі координат. Тут точки у вузлах прямокутної сітки зображають $C_x^y = C_n^k,\ n,k = 0,1,2,\ldots$

Зауважимо, що

$f_0 = 0$,

$f_1 = 1$,

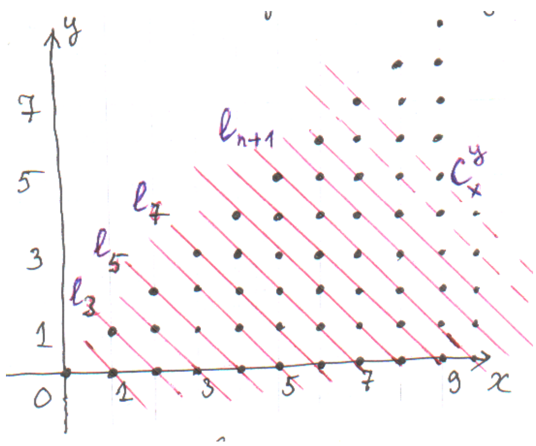
$f_2 = C_1^0 = 1$,

$f_3 = C_2^0 + C_1^1 = 2$,

$f_4 = C_3^0 + C_2^1 = 3$,

$f_5 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 5$,

….



Тут лінія l_{n+1} — лінія підсумовування для f_{n+1} з відповідними значеннями C_x^y, а саме:

$$f_{n+1} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{[n/2]} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k,$$

— формула загального члена через біноміальні коефіцієнти, $\left[n\right]$ — ціла частина n.

3. Метод характеристик. $\left\{f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ — зворотна послідовність другого порядку з рекурентним співвідношенням

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1},$$

якому відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Корені цього рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} f_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ f_0 = 0; \quad f_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Зрозуміло, що

$$f_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right], \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

— золотий переріз. Крім того, формула Біне має аналітичне продовження:

$$f_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^z - \frac{\cos\pi z}{\varphi^z}\right), f_{z+1} = f_z + f_{z-1}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

4. Метод твірної функції. Можна показати, що функція

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(x_1 - x)(x - x_2)} = \left|\begin{gathered} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \\ x_1x_2 = -1 \end{gathered}\right| =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} - \frac{1}{x_2\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{x}{x_1} + \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \ldots\right) - \frac{1}{x_2}\left(1 + \frac{x}{x_2} + \left(\frac{x}{x_2}\right)^2 + \ldots\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right)x + \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_2^3}\right)x^2 + \ldots\right) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

де $\left\{f_n\right\}$ — послідовність Фібоначчі, $\begin{cases} \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1 \\ \left|\frac{x}{x_2}\right| < 1 \end{cases}$, тобто $\left|x\right| < \left|x_1\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $g(x)$ —твірна функція. Коефіцієнти її розкладу в ряд Маклорена і є шукані числа Фібоначчі.

5. Матричний метод. Розглянемо матрицю

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи тотожності для чисел Фібоначчі:

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n-1},\; f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1},$$

отримаємо

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Справді:

$$F_2 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^2 + f_1^2 & f_2 f_1 + f_1 f_0 \\ f_1 f_2 + f_0 f_1 & f_1^2 + f_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно:

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix},\;\; n = 1,2,...$$

Маємо наслідок:

$$\det F_n = \left(-1\right)^n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2.$$

Справедлива також формула континуант:

$$f_{n+1} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & ... & 0 \\ i & 1 & i & ... & 0 \\ 0 & i & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

де $i^2 = -1$, $n \geq 2$.

Розглянемо тепер приклади інших зворотних послідовностей.

Приклад 1. $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty} : x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+1} = x_n + x_{n-1},\; n = 1,2,....$

Маємо послідовність $\left\{x_n\right\} = \left\{1,3,4,7,11,18,...\right\}$.

Як і раніше: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.

C_1 та C_2 знайдімо із системи:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 = 1 \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ C_2 = 1 - C_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Тобто маємо

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \varphi^{n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}.$$

Приклад 2. Нехай $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ — зворотна послідовність другого порядку. Тоді рекурентна формула в загальному випадку має вид: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$. Нехай $\alpha = -\frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{3}, x_0 = 0, x_1 = 2$, тоді $x_{n+1} = -\frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$.

Так само як у прикладі 1 знаходимо, що

$$x_n = \frac{12}{7}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Приклад 3. $\alpha = 4, \beta = -4, x_0 = 1, x_1 = 4$, $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ — корені рівні (кратні), тому $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$.

Після знаходження сталих, дістаємо

$$x_n = 2^n + n2^n = (1+n)2^n.$$

Приклад 4. $\alpha = 2, \beta = -2, x_0 = 1, x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \tfrac{1}{2}.$$

$$x_n = \tfrac{1}{2}\left((1+i)^n + (1-i)^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Приклад 5. Розгляньмо зворотні послідовності третього порядку $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ з рекурентним співвідношенням

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n + \gamma x_{n-1}.$$

Якщо $\alpha = \beta = \gamma = 1, x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1$, то послідовність $\left\{x_n\right\}$ називають послідовністю чисел Трибоначчі:

$$\left\{x_n\right\} = \left\{0,0,1,1,2,4,7,13,24,44,\ldots\right\}$$

Характеристичне рівняння послідовності

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

яке має один дійсний корінь

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$$

і пару комплексно спряжених.

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$$

Формула Біне:

$$x_n = \left[\frac{3c}{c^2 - 2c + 4}\left(\frac{1}{3}\left(a + b + 1\right)\right)^n\right],$$

де $a = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}, b = \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}, c = \sqrt[3]{586 + 102\sqrt{33}}$.

Приклад 6. $\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = -6, x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1$, тобто

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 5x_n - 6x_{n-1}.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Його корені:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$$

Тому

$$x_n = C_1 + C_2(-2)^n + C_3 3^n,\ x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1,$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\tfrac{1}{6}, C_2 = \tfrac{1}{15}, C_3 = \tfrac{1}{10},$$

$$x_n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n,$$

$$\left\{x_n\right\} = \left\{0, 0, 1, 2, 9, 22, \ldots\right\}.$$

Приклад 7. Розглянемо послідовність $x_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. $\left\{x_n\right\} = \left\{0, 1, 5, 14, 30, 55, \ldots\right\}$. Знайдімо x_n як загальний член зворотної послідовності четвертого порядку. Визначимо рекурентне співвідношення для x_{n+4}. Маємо:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1)^2 = x_n + n^2 + 2n + 1, \\ x_{n+2} = x_{n+1} + (n+2)^2 = x_n + n^2 + 4n + 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2n + 3, \\ x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2n + 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 2, \\ x_{n+4} = 3x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} + 2. \end{cases}$$

Віднімемо кожне друге рівняння від першого, маємо:

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4 = 0.$$

Воно має один кратний корінь $\lambda_{1,2,3,4} = 1$, тому:

$$x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^3,$$

де

$$\begin{cases} C_1 = x_0 = 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1, \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5, \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \frac{1}{6}, \\ C_3 = \frac{1}{2}, \\ C_4 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отже,

$$x_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Знайдемо тепер частинні суми та границі частинних сум деяких розглянутих нами послідовностей.

Приклад 8. Знайдімо $\sigma_n = f_0 + f_1 + ... + f_n$, де $\{f_n\}$ — послідовність Фібоначчі.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q^n - p^n\right),$$

тобто

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} p^k\right) =$$

$$= \left| S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \begin{matrix} q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, & pq = -1 \\ & 1 - q = p \\ p = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}, & 1 - p = q \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-q^{n+1}}{p} - \frac{1-p^{n+1}}{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q^{n+2} - p^{n+2} - (q-p)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q^{n+2} - p^{n+2} - \sqrt{5}\right),$$

тобто

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2}\right) - 1.$$

Приклад 9. $x_n = (n+1)2^n$, $\{x_n\} = \{1,4,12,32,...\}$.

$$\begin{cases} \sigma_n = 1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + (n+1)\cdot 2^n, \\ 2\sigma_n = \qquad 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 4\cdot 2^4 + ... + (n+1)\cdot 2^{n+1} \end{cases}$$

Віднімемо, одержимо:

$$-\sigma_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n - (n+1)\cdot 2^{n+1} =$$

$$= \tfrac{2^{n+1}-1}{2-1} - (n+1)\cdot 2^{n+1}, \text{ тобто } \sigma_n = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = n2^{n+1} + 1.$$

Приклад 10. $\{x_n\} = \{1,1,0,-2,-4,-4,0,8,...\}$, $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$,

$$x_n = \tfrac{1}{2}\left((1+i)^n + (1-i)^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\tfrac{n\pi}{4}.$$

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left((1+i)^n + (1-i)^n\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-(1+i)^{n+1}}{1-(1+i)} + \tfrac{1-(1-i)^{n+1}}{1-(1-i)}\right) =$$

$$= \tfrac{(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}}{2i} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\left(\frac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2i}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Приклад 11. На завершення, розглянемо послідовність, пов'язану з послідовністю Фібоначчі, а саме:

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = ab, x_3 = ab^2, ..., x_n = x_{n-1}\cdot x_{n-2},\ n \ge 2,$$

де $a \ne 0, b \ne 0$ і a та b не рівні одночасно 1.

Ця послідовність не є зворотною, маємо:

$$\{x_n\} = \{a, b, ab, ab^2, a^2b^3, a^3b^5, a^5b^8, ...\} = \{a, b, ab, a^{f_2}b^{f_3}, a^{f_3}b^{f_4}, a^{f_4}b^{f_5}, a^{f_5}b^{f_6}, ...\},$$

де $\{f_n\}$ — послідовність Фібоначчі.

Тоді

$$x_n = a^{f_{n-1}}b^{f_n} = a^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}\right)} b^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n}\right)} = \left|\varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| =$$

$$= a^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)} b^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}$$

Список літератури

Воробьев, Н. Н. (1978). *Числа Фибоначчи*. Популярные лекции по математике. (Вып. 6). Москва: Наука.

Гельфанд, С. И., & Гервер, М. Л., Кириллов, А. А., Константинов, Н. Н., Кушниренко, А. Г. (1965). *Задачи по элементарной математике: Последовательности. Комбинаторика. Пределы*. Библиотечка физико-математической школы. Математика. Москва: Наука.

Маркушевич, А. И. (1950). *Возвратные последовательности*. Популярные лекции по математике. (Вып. 1). Москва: Наука.

Числа Фибоначчи (б. д.). В *Википедия*. Взято из https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Фиббоначчи

ХУДОЖНЄ МОДЕЛЮВАННЯ В АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

І. П. Блажієвська[1], О. Ю. Свяженіна[2]

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

[2]Середня загальноосвітня школа № 54, Київ, Україна

packsenarrion@rambler.ru, olga.svyazhenina@gmail.com

Робота є своєрідним звітом про експериментальне викладення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» у виші. На лекційних заняттях було активовано пізнавальну здатність студентів за допомогою наступних засобів: цікаві факти з історії, моделювання та візуалізація цих фактів з використанням графіків та оптичних властивостей стандартних кривих і поверхонь, посилання на сучасні технології, що спираються на відповідні алгоритми. Унаслідок цих зусиль, з ініціативи студентів, створено математичний вернісаж — авторські малюнки та програми-генератори аналітичних картин, побудовано 3D краєвиди фортечної архітектури України.

Ключові слова: параметрично задані криві, полярна система координат, криві та поверхні другого порядку, рекурсивні співвідношення, афінні перетворення.

> Ідеал, якого прагнемо, є об'єднанням усіх наших відомостей про фізичний світ у єдину науку, положення якої можуть бути виражені в термінах геометричних або квазігеометричних концепцій.
>
> *А. С. Еддінгтон*

Стандартний курс «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів технічних спеціальностей розрахований на 18 лекцій, з яких 4—6 занять відводиться для вивчення аналітичної геометрії на площині та у просторі. Без відхилень від стандарту, студентам 1-го курсу спеціальності «Інженерія програмного забезпечення», ФІОТ, КПІ ім. Ігоря Сікорського було запропоновано побачити прекрасні застосування абстрактної теорії на практиці. У силу вподобань лектора до відкритих питань у створенні інноваційних технологій, демонстрація прийшлась на художні застосування математики у графіці (плакатній та вітражній), паперовій скульптурі, створенні елементів інтер'єру та екстер'єру з симетріями та елементами самоподібності (декор, дизайн, архітектура, містобудівництво), а також в анімації та ігро-індустрії. Алгоритм зацікавлення виглядав так:

— інструменти (необхідні означення, теореми, властивості математичних об'єктів);

— цікава задача з минулого та способи її розв'язання з використанням інструментарію;

— додаткові сучасні інструменти (зв'язки з іншими науками, деякі застосування);

— конфліктні питання: чи можна покращити попереднє рішення і яким чином? яка проблема вирішується новим рішенням?

Наведемо статистичні дані. Зі 120 студентів потоку, більше половини взяли участь у вирішенні конфліктних питань (які носили необов'язковий, «бонусний» характер). Цей факт є цікавим з точки зору психології, бо йде всупереч сучасному держстандарту, де система працює на безініціативного «середняка», що оцінюється тестами, безособистісними рейтингами та цифрами. Тим не менш, талановитій молоді хочеться творчо проявити себе та свою індивідуальність, і основне — знайти практичне застосування тим абстрактним фактам, що викладаються у виші. Варто зауважити, що перший курс — найбільш сприятливий час для зацікавлення молоді науками та мотивації до самостійних досліджень.

У рамках вивчення теми «Криві на площині» викладачем було розказано про криві, задані явно, неявно та параметрично. Подано означення та властивості класичних кривих у полярних координатах. Історіє з минулого стала розповідь про «квітник-розарій» Г. Гранді та про полярний опис рослинного світу К. Хабеніхтом, зокрема, показано хризантему, листок клену та їх аналітичні записи (рис. 2).

Бонусне завдання було таким:

— створити математичну картину/анімацію з використанням плоских кривих (вклад аналітики $\geq 25\%$);

— можливе вільне використання графічних редакторів;

— додати математичний опис до картини.

Рекомендаціями викладача були:

— застосування полярних кривих (квітчане поле, симетричні та обмежені об'єкти);

— застосування гіпоциклоїд та кривих другого порядку (ефект зоряного неба, орбіти планет);

— ознайомлення з простим для програмування поняттям фракталів (об'єкти, що містять самоподібніть);

— натхнення від кераміки М. Врубеля, архітектури А. Гауді, картин М. Ешера, Г. Клімта, А. Мухи, О. Фішингера, паперових вітражів Є. Стендлі та фрактальних скульптур Т. Беддарда.

Одержано, зокрема, такий творчий відгук деяких студентів потоку ІП-І, ФІОТ, на бонусне завдання:

рис.1 — А. М. Кондаурова, ІТ-74 (картина);

рис. 2. — К. І. Ленська, ІП-72 (скрін-шорт програми-генератора);

рис. 3. — М. А. Журба, ІТ-74 (картина);

рис. 4. — А. С. Корсун, ІП-74 (картина).

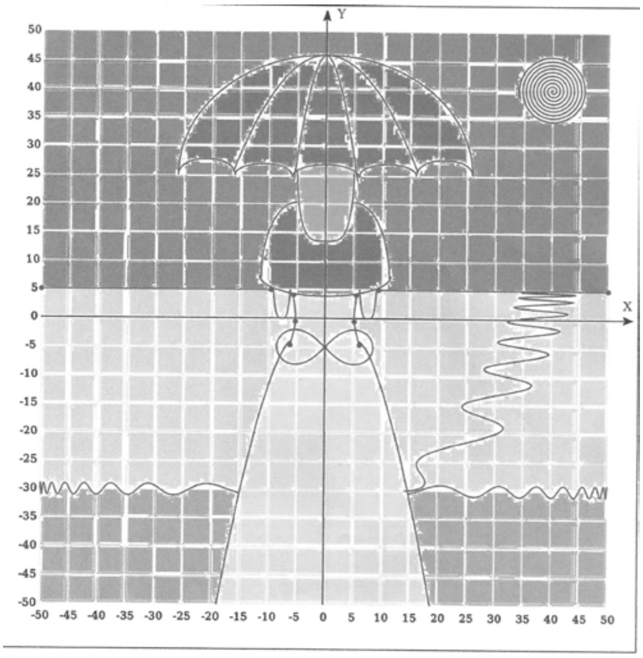


Рис 1.

Рис. 2

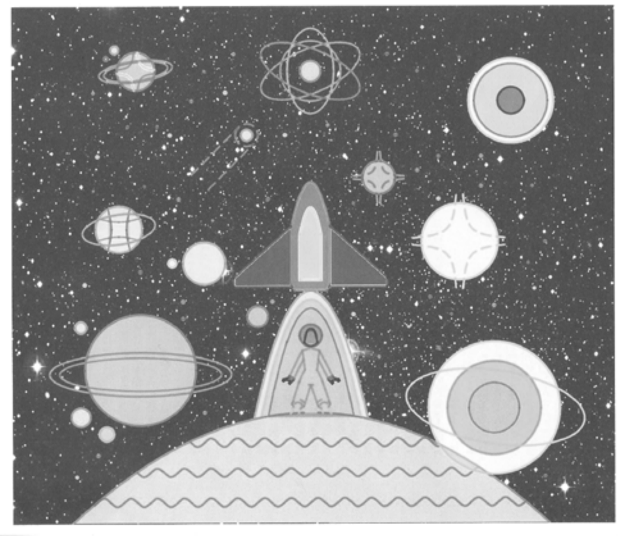


Рис. 3

Рис. 4

Варто додати, що студенти відновили картин за їх проекціями на одну з площин декартової сітки у просторі за умов, що всі об'єкти дотикаються та є поверхнями обертання. Цікавими були авторські набори ялинкових прикрас, новорічні краєвиди, серія робіт з фортечної архітектури України, створені класичними поверхнями обертання. Зокрема, студентські романтичні ідеї самоокупності замків України з використанням оптичних властивостей параболічних та гіперболічних дзеркал, розміщених на дахах, стінах та ровах могли б і справді поліпшити їх фінансування.

Такі діти створюють історію. Важливо, щоб вони її знали, а викладачі не придушували ініціативу та не вирівнювати нестандартне мислення.

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Н. В. Бондаренко

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

natvbond@gmail.com

Розглянуто деякі приклади застосування лінійної алгебри, які можна використовувати при викладанні вищої математики у технічному університеті.

Ключові слова: лінійна алгебра, Netflix prize, розпізнавання облич, алгоритм PageRank, головні осі інерції.

Сто років назад один із засновників та перший президент математичної асоціації Америки E. R. Hedrick написав статтю (Hedrick, 1917) про важливість математики та про проблеми викладання математики в університетах, які залишаються актуальними по цей день. Ось один з фрагментів цієї статті:

«Shall we not ask if our own collegiate and graduate courses in mathematics demonstrate to students the real significance of the theory they cover? Have we denatured each subject until insight is eliminated and only formalism and logical tricks remain? So long as this blight remains, we must expect and we shall deserve public disdain and sincere doubt of our value to humanity».

Дивлячись на ці питання через століття розвитку університетської освіти, можна сказати, що в сучасних курсах вищої математики «insight is eliminated and only formalism and logical tricks remain». Програми з вищої математики майже не містять прикладів реальних застосувань побудованих математичних теорій. У результаті студенти не бачать зв'язку між математикою та реальним світом і не можуть оцінити важливість вивчення математики.

Ми розглянемо кілька прикладів застосування лінійної алгебри, які дозволяють урізноманітнити викладання вищої математики та можуть зацікавити студентів.

1. Алгоритм рекомендації фільмів компанії Netflix. Американська компанія Netflix є одним з найбільших у світі постачальником фільмів та серіалів на основі потокової мультимедії. У 2006 році Netflix оголосила конкурс на більш точний алгоритм для передбачення оцінки, яку глядач поставить фільму, щоб замінити свій власний алгоритм Cinematch для рекомендації фільмів. Головний приз складав $1,000,000, для отримання якого потрібно було покращити алгоритм Cinematch на 10% середньо квадратичного відхилення. Для цього Netflix надавала базу даних оцінок глядачів за 2000—2005 роки, яка нараховувала близько 100 мільйонів рейтингів для 17770 фільмів від 480189 глядачів. Потрібно було зробити прогноз для 2817131 заданих пар глядач-фільм. Цей прогноз порівнювали зі справжніми оцінками глядачів, які знало тільки журі конкурсу.

Після кількох років напружених змагань, в 2009 році головний приз отримала команда «BellKor's Pragmatic Chaos», якій вдалося покращити алгоритм на 10,06%. Алгоритм цієї команди оснований на факторизації матриць, а саме, на модифікації сингулярного розкладу (SVD), який частково вивчається в курсах лінійної алгебри у зв'язку із власними числами та діагоналізацією матриць. Опишемо дуже спрощену ідею цього підходу. З бази даних Netflix утворюється матриця рейтингів A. Сингулярний розклад дозволяє розкласти матрицю A у добуток трьох матриць $A = USV^T$, де матриці U та V є ортогональними, а S — діагональна матриця, на діагоналі якої стоять невід'ємні дійсні числа у спадному порядку. Для кожного глядача c та кожного фільму m можна побудувати вектори

$$p_c = U_c \sqrt{S^T}$$

та

$$q_m = \sqrt{S} V_m^T .$$

Тоді прогнозований рейтинг, який глядач c поставить фільму m, обчислюється на основі значення скалярного добутку $\left(p_c, q_m\right)$. Більше деталей можна знайти в (Koren, 2009; Koren, Bell, Volinsky, 2009).

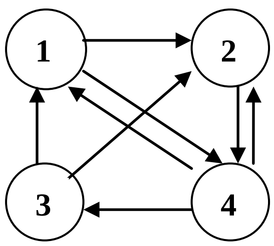
2. Розпізнавання облич. За останні роки технології розпізнавання обличчя нарешті почали приходити у маси. Наприклад, остання версія айфона, iPhone X, використовує технологію Face ID для розблокування телефону. А компанія Facebook нещодавно оголосила про впровадження нового інструменту на основі розпізнавання обличчя, який буде сповіщати людину, якщо вона розпізналася на деякій фотографії (і є частиною аудиторії для повідомлення з цією фотографією). За останні тридцять років було розроблено багато методів для розпізнавання обличчя: метод головних компонент (PCA), лінійний дискримінантний аналіз (LDA), аналіз незалежних компонент (ICA) та багато інших. Більшість цих методів спирається на лінійну алгебру.

Опишемо суть *методу головних компонент* у розпізнаванні облич, вперше запропонованого в Turk та Pentland (1991). Нехай ми маємо набір з 500 підготовлених зображень розміром 1024×1024 пікселів. Кожне зображення задає матрицю розміром 1024 на 1024, у якій коефіцієнти відображають градацію сірого кольору в пікселів. Ці матриці розглядають як вектори розмірності $2^{20} = 1048576$, послідовно з'єднуючи рядки матриці. Таким чином, кожне зображення задає точку в 2^{20}-вимірному просторі. Якщо порівнювати зображення попіксельно, то потрібно працювати в цьому просторі, що є складно з обчислювальної точки зору. Але далеко не всі пікселі несуть важливу інформацію. Метод головних компонент дозволяє перейти до простору значно меншої розмірності і при цьому не втратити суттєвої інформації.

Для цього обчислюють середнє зображення, як середнє арифметичне з 500 підготовлених зображень, та будують матрицю A розміром 500×1048576, у якій i-й стовпець є відхиленням i-го зображення від середнього. Нормовані власні вектори коваріційної матриці AA^T є векторами розмірності 1048576, і їх можна інтерпретувати як деякі спеціальні зображення облич, які називаються *власними обличчями* (eigenfaces). Ці власні обличчя представляють ті схожі риси, які є у деяких облич, та найбільші відмінності з іншими обличчями. Кожне обличчя подається як лінійна комбінація власних облич. Якщо потрібно розпізнати деяке обличчя, то його проектують на простір, породжений власними обличчями (face space), і порівнюють відстань до інших облич. (При цьому замість стандартної евклідової відстані, можуть використовувати інші, наприклад, відстань Махаланобіса). При цьому виникає наступна проблема. Матриця AA^T є симетричною квадратною матрицею порядку 1048576, і обчислити її власні вектори складно. Замість цього розглядають матрицю $A^T A$, яка має порядок 500, і використовують її власні вектори. Це можна зробити, оскільки якщо v є власним вектором матриці $A^T A$, то Av є власним вектором матриці AA^T.

3. Алгоритм PageRank для Google. Усі ми користуємося пошуковою системою Google.

Центральне місце в її роботі займає алгоритм PageRank. Результатом роботи алгоритму PageRank є деякий показник «важливості» сторінки PR, який обчислюється шляхом аналізу вхідних посилань. Щоб зрозуміти базові принципи роботи цього алгоритму розглянемо систему, що містить чотири веб-сторінки P_1, P_2, P_3, P_4 занумеровані на рисинку як 1, 2, 3, 4.



Малюємо стрілку від i до j, якщо веб-сторінка P_i посилається на веб-сторінку P_j. Маємо граф з чотирма вершинами. PageRank працює наступним чином. Припустимо, що на сторінці P_j розміщено k_j посилань. Якщо одне з цих посилань веде на сторінку P_i, то P_j передає $1/k_j$ своєї «важливості» сторінці P_i. Рівень «важливості» x_i (тобто PR) сторінки P_i це сума всіх таких значень з усіма вхідними посиланнями.

У нашій моделі веб-сторінка P_1 має два вихідні ребра, тому вона буде передавати $\dfrac{1}{2}$ своєї «важливості» кожній із двох веб-сторінок. Веб-сторінка P_2 має одне вихідне ребро, тому вона передає всю свою «важливість» веб-сторінці P_4. Аналогічні міркування для веб-сторінок P_3 та P_4.

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 — рівні «важливості» кожної з чотирьох сторінок ($x_i \geq 0$). У нашому випадку маємо систему лінійних рівнянь $\vec{x} = A\vec{x}$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A є стохастичною матрицею, у якій усі стовпці містять невід'ємні дійсні числа, сума яких у кожному стовпчику рівна одиниці. Нормований власний вектор матриці A із власним числом 1 має вигляд $\vec{x} = (0{,}19; 0{,}29; 0{,}13; 0{,}39)^{\mathrm{T}}$. Звідси маємо, що $x_4 > x_2 > x_1 > x_3$. Тобто найпопулярнішою є сторінка під номером P_4, і веб-сторінки розмістяться в порядку P_4, P_2, P_1, P_3.

4. Застосування лінійної алгебри в 3D-графіці. Тривимірна (3D) комп'ютерна графіка, яка перетворює об'єкти в тривимірному просторі, використовується в комп'ютерних іграх, мультфільмах, рекламі, кіно. У полігональній комп'ютерній графіці всі об'ємні фігури представляються як набір поверхонь, мінімальну з яких називають *полігоном*. За полігон зазвичай вибирають трикутник. У роботі візуальних перетворень у полігональній 3D-графіці важливу роль відіграють матриці: матриця повороту, матриця паралельного переносу, матриця масштабування.

Розглянемо перетворення фігури у просторі $\mathbb{R}^3$. Вибирається прямокутна Декартова система координат $Oxyz$. Будь-який полігон можна представити як набір з координат його вершин. Координати вершин $(x; y; z)$ можна розглядати як вектор з координатами $(x; y; z)$. Тому, щоб повернути полігон на кут φ навколо осей Ox, Oy, Oz, потрібно відповідні матриці повороту помножити на вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $(x'; y'; z')$ — це нові координати вектора після повороту. Поворот можна здійснювати навколо векторів за допомогою певним чином вибраних матриць. Зробивши такі перетворення з усіма вершинами полігону, отримаємо новий полігон, а перетворивши всі полігони, отримаємо нову фігуру, повернуту відносно початкової.

Щоб збільшити чи зменшити полігон на λ_1 по x та λ_2 по y, λ_3 по z множать матрицю масштабування на вектор $(x; y; z)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Паралельний перенос полігону відбувається таким чином:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix},$$

де вектор $(x;y;z)$ ототожнюється з вектором $(x;y;z;1)$.

5. Знаходження головних осей інерції твердого тіла. Апарат лінійної алгебри широко застосовується також у фізиці. Проілюструємо використання власних чисел та власних векторів для знаходження головних осей інерції твердого тіла.

Для довільного твердого тіла V можна побудувати матрицю інерції I розміром 3×3 (матриця тензора інерції, див. Виттенбург (1980))

$$I = (I_{ij})_{3\times 3}, I_{ij} = I_{ji}..$$

Це симетрична матриця, яка визначає розподіл маси тіла відносно осей прямокутної декартової системи координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ із центром у точці O. Елементи I_{ii}, що стоять на діагоналі, називаються *моментами інерції тіла* і визначаються як

$$I_{ii} = \int\limits_V (r^2 - x_i^2)\rho(\vec{r})dV,$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Елементи I_{ij} поза діагоналлю називаються *добутками інерції* і визначаються як

$$I_{ij} = -\int\limits_V x_i x_j \rho(\vec{r})dV,$$

де $\rho(\vec{r})$ — щільність об'єкта в точці $\vec{r}$ простору $\mathbb{R}^3$.

Оскільки матриця I — симетрична, то власні вектори матриці I ортогональні і визначають напрямки, які називаються *головними осями інерції тіла* V (відносно точки O). Власні числа матриці I визначають головні моменти інерції тіла (відносно точки O). Головні осі інерції — це осі, відносно яких тіло вільно обертається за відсутності будь-яких зовнішніх сил чи обертальних моментів (осі вільного обертання тіла).

Список літератури

Hedrick, E. R. (1917). The significance of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 24*(9), 401–406.

Koren, Y. (2009). The BellKor Solution to the Netflix Grand Prize. *Netflix prize documentation, 81,* 1–10.

Koren, Y., Bell, R., & Volinsky, C. (2009). Matrix factorization techniques for recommender systems. *Computer*, *42*(8), 30–37.

Turk, M., & Pentland, A. (1991). Eigenfaces for recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience, 3*(1), 71–86.

Виттенбург, Й. (1980). *Динамика систем твердых тел*. Москва: Мир.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ

Л. Д. Величко[1], Б. І. Сокіл[1], Н. М. Гузик[1], М. Б. Сокіл[2]

[1]Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна

[2]Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

hryntsiv@ukr.net

У доповіді викладено основні аспекти застосування методу інтенсифікації в пізнавальній діяльності, що використовуються при проведенні практичних занять.

Ключові слова: метод інтенсифікації, самопідготовка, самооцінка.

Зміни, які сьогодні відбуваються в українському суспільстві, впливають і на систему освіти. Основна мета сучасних вищих навчальних закладів — забезпечення виробничої сфери високоякісними спеціалістами, які б:

а) досягли належного рівня знань, фахівцями;

б) творчо підходили до здійснення своїх обов’язків і науково обґрунтовували шляхи вирішення проблем, які пред’являє життя.

Досягнення цієї мети не можливе без висококваліфікованих викладачів.

Однак на сьогодні все менше й менше випускників вишів, з високим рівнем знань і вмінь, зацікавлені у викладацькій та науковій роботі. Це означає, що, у першу чергу, потрібно вирішити проблему підготовки викладачів, які б уміли якісно навчити студента, володіли методикою навчання, могли доступно й наочно пояснити предмет, заохочували пізнання проблемних питань студентами.

Інформаційний вибух і сучасні темпи приросту наукової інформації, яку необхідно встигнути передати студентам у процесі навчання й одночасно часова обмеженість аудиторних видів занять через збільшення годин, що виділяються на самостійну роботу студентів у зв’язку з переходом до європейської системи освіти, спонукають викладачів та науковців шукати оптимальний вихід з даної ситуації за рахунок удосконалення педагогічних прийомів. Основними з таких прийомів є інтенсифікація навчання. Під інтенсифікацією навчання слід розуміти передавання студентам більшого обсягу навчальної інформації при незмінній тривалості навчання без зниження вимог до якості знань. Підвищення темпів навчання може бути досягнуто шляхом удосконалення змісту навчального матеріалу та методів навчання.

У Національній академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного розроблена методика навчання курсантів та відповідне матеріальне забезпечення, що використовується для таких курсів як вища математика, теоретична механіка, термодинаміка, прикладна механіка. Розробляючи ці методики, керувались такими основними положеннями:

— курсанти, які починають вивчати новий предмет мають різний рівень підготовки;

— вони не звикли витрачати багато часу на освоєння нового матеріалу;

— не вміють здійснювати самоконтроль;

— мають завищену самооцінку їх рівня.

Відповідно до цієї методикою кожна тема практичного заняття має бути висвітлена в 4—5 задачах. Ці задачі охоплюють весь матеріал, необхідний для засвоєння курсантом. Крім того, для кожної теми розроблено декілька варіантів «Завдань для проведення практичного заняття», «Завдань для проведення контрольної роботи». Вони містять однотипні завдання, для розв'язання яких використовується той самий метод, проте відрізняються один від одного, наприклад, числовими даними. До всіх завдань, уміщених у цих варіантах, подано відповіді. Також до кожної теми пропонуються «Завдання для самостійної роботи» із приведеними відповідями.

Практичне заняття пропонується проводити в такій послідовності:

— викладач пояснює основні моменти нової теми та розв'язує найпростішу задачу з цієї теми;

— курсанти самостійно розв'язують першу (найпростішу) задачу з отриманих «Завдань для проведення практичного заняття», використовуючи законспектоване розв'язання задачі викладачем на дошці; викладач у цей час контролює хід розв'язання та відповідає на конкретні питання кожного курсанта;

— викладач пояснює метод розв'зання наступної задачі. Він не розв'язує її повністю, але наголошує на нових моментах у цих задачах;

— курсанти самостійно розв'язують усі задачі з «Завдань для проведення практичного заняття», маючи можливість перевірити правильність розв'язання за наведеними відповідями;

— викладач контролює розв'язування задач кожним курсантом та дає відповіді на його питання.

Курсант перевіряє повне засвоєння теми, яка розглядалась на практичному занятті, виконуючи вправи із «Завдань для самостійної роботи». Якщо виникають питання до цих задач, викладач на консультації зможе чітко пояснити незрозумілі місця та розставити відповідні акценти.

Запропонований метод проведення практичних занять дає можливість викладачу приділяти більше уваги кожному курсанту, оскільки рівень підготовки та індивідуальні особливості в кожного з них є різні, то й питання, які виникають у них під час розв'язування задач відрізняються. Контролюючи хід розв'язання завдань, викладач має можливість відповідати на питання кожного курсанта й допомогти йому подолати свої перешкоди. Крім того, після завершення практичного заняття викладач може реально оцінити рівень засвоєння теми конкретним курсантом.

Для курсантів запропонований метод насправді є *методом інтенсифікації* (від *фр.* intensification — напружено роблю), що передбачає досягнення в навчанні бажаних результатів за рахунок якісних чинників, тобто за рахунок напруження розумових можливостей особистості. Кожний курсант змушений розв'язувати свій варіант задач із «Завдань для проведення практичного заняття» і цей варіант точно не буде розв'язаний на дошці. Від викладача він може отримати допомогу у вигляді відповіді на конкретне питання, що виникло під час розв’язування задачі. Звичайно ж, він може звернутись за консультацією до іншого курсанта, оскільки варіанти задач є однотипними, одночасно кожен курсант може самостійно оцінити свій рівень знань, отриманих на практичному занятті.

Запропонований метод навчання на практичному занятті стимулює активне самостійне навчання курсантів, дає їм змогу встановити зв’язок між рівнем засвоєння теми та вмінням використати це знання для розв’язання конкретних практичних задач. Цей метод забезпечує індивідуалізацію та диференціацію навчання студентів.

На основі запропонованої методики побудовані навчальні посібники «Методика розв’язування та збірник задач з математичного аналізу» (Величко, Сокіл & Хитряк, 2013), «Методика розв’язування та збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії» (Величко, 2017), «Методика розв’язування та збірник задач з диференціальних рівнянь» (Величко, 2013а) та «Методика розв’язування та збірник задач з теорії ймовірностей» (Величко, 2013б), які використовуються для проведенні практичних занять з вищої математики для курсантів Національної академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.

Список літератури

Величко, Л. Д. (2013а). *Методика розв’язування та збірник завдань з диференціальних рівнянь: Навчальний посібник.* Львів: АСВ.

Величко, Л. Д. (2013б). *Методика розв’язування та збірник завдань з теорії ймовірності: Навчально-методичний посібник.* Львів: АСВ.

Величко, Л. Д. (2017). *Методика розв’язування та збірник завдань з лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник.* (2-ге вид. без змін). Львів: НАСВ.

Величко, Л. Д., Сокіл, М. Б., & Хитряк, О. І. (2013). *Методика розв’язування та збірник завдань з математичного аналізу: Навчально-методичний посібник.* Львів: АСВ.

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

О. В. Вишенська, Ю. А. Мейш

Національний транспортний університет, Київ, Україна

juliameish@gmail.com

Розглянуто один із можливих варіантів, який можна використати для початкового ознайомлення з поняттям функціональної залежності. Наведено деякі характерні неточності в означеннях функції та невдалі приклади, що, нажаль, не рідко трапляються в підручниках та методичних посібниках з математики. Наведено кілька прикладів неточного, або й помилкового трактування поняття функціональної залежності. Наведено також деякі ілюстративні приклади на матеріалі геометрії та фізики, котрі можна використовувати для початкового ознайомлення з поняттям функції.

Ключові слова: функція, функціональна залежність, рівняння, числові величини, параметр, фундаментальні математичні поняття.

Математичні поняття стосуються ідеальних об’єктів. Щоб правильно усвідомити їхній зміст, слід мати до дрібниць точне означення й чималу низку ілюстративних прикладів. Окрім того, корисно використовувати різні модифікації означення (Вишенський, Дороговцев, Єжов, Скороход & Ядренко, 1972).

Нажаль, у багатьох підручниках, посібниках і збірниках задач поняття функціональної залежності та функції трактується неакуратно, або й зовсім помилково та ілюструється помилковими прикладами. Наведемо кілька таких означень. Підручники не називаємо, бо схожі похибки трапляються ледь не в усіх.

«Якщо кожному значенню x за яким-небудь правилом поставимо у відповідність одне цілком певне значення іншої величини y, то кажуть, що ця величина y є функцією величини x, або що величини x і y пов’язані між собою функціональною залежністю».

Прикра неточність. Не слід говорити, що дві величини пов’язані функціональною залежністю. Відношення функціональної залежності не симетричне. Слід сказати, що величина y функціонально залежить від величини x.

Інший автор. Хай маємо «декілька змінних величин, пов’язаних одна з одною так, що зміна одних величин впливає на значення інших. Тоді кажуть, що між цими величинами існує функціональна залежність».

Сказане неправда вже для двох змінних. Наприклад, хай змінні x і y пов’язані рівністю $x^2 + y^2 = 1$. Якщо $x = 1$, то $y = 0$. Якщо ж $x = \frac{1}{2}$, то $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ або ж $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Зміна значення x впливає на значення y. Проте ні y від x, ні x від y не залежить функціонально.

Автори досить вільно й некоректно поводяться із залежностями між величинами, котрі не є функціональними. Наприклад, у деяких задачниках щодо рівнянь кола $x^2 + y^2 = 1$ можна знайти такі завдання:

1) побудувати графік функції $y^2 = 1 - x^2$;

2) побудувати графік функції $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (не зрозуміло, що означають знаки «$\pm$» перед радикалом);

3) подати в явному вигляді функцію, котру неявно задано рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

На це запитання автор відповідає так: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Оскільки в запитанні йдеться про одну функцію, то виходить, що формула $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ також визначає одну функцію. Крім того, слід зазначити, що в підручнику ще дуже далеко до поняття неперервності, а тому на запитання задачі відповідь має бути: таких функцій є безліч. При цьому навести принаймні дві-три не неперервні на відрізку $[-1; 1]$ функції.

У багатьох авторів без усякого означення з'являється поняття багатозначної функції (Мышкис, 1969). Найчастіше воно виникає, коли автори говорять про обернені функції. Замість того, щоб сказати, що обернена функція не завжди існує в усій області означення початкової функції, вони кажуть, що обернена функція завжди існує, але іноді вона неоднозначна. Термін «неоднозначна функція» беззмістовний. Якщо його узаконити, то все, що пов'язане з означенням функції втрачає сенс. Будь-яка залежність однієї величини від другої буде функціональною, а отже, кожна із двох залежних величин буде функцією іншої. А що далі? Що ми з цими «функціями» будемо робити? Вони не вписуються у зміст аналізу. Адже їх не можна диференціювати, інтегрувати та ін. Крім того, варто зауважити, що різні «неоднозначності», на кшталт багатозначних функцій, знаків «$\pm$» у формулах, які допускають різні прочитання, і т. п. не відповідають стилю ні сучасної математичної мови, ні змістові.

Помилки, викликані довільним трактуванням поняття функції, трапляються і в авторитетних збірниках задач (Берман, 1985; Бараненков, Демидович & Ефименко, 1959).

Ось приклад такого завдання. Побудувати графіки функцій, заданих параметрично:

$$x = 10\cos t, \qquad y = \sin t;$$

$$x = 10\cos^3 t, \quad y = \sin^3 t;$$

$$x = a(\cos t + t\sin t), \qquad y = a(\sin t - t\cos t);$$

$$x = a(2\cos t - \cos 2t), \qquad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

Звісно правильно, що автори ознайомлюють студентів з параметричними рівняннями відомих ліній (еліпс, астроїда, розгортка кола, кардіоїда). Але ж жодна з цих ліній не є графіком функції y від x. Узагалі, у застосуваннях математики параметричні рівняння майже ніколи не визначають функції, а задають просто якісь лінії, зокрема траєкторії руху.

Завдання було б сформульовано коректно, якби в ньому не йшлося про функціональну залежність. Слід було сказати так: побудувати лінію за її параметричними рівняннями. Або: побудувати графік залежності між величинами x та y, котрі задано параметрично.

Пропонуємо один з можливих варіантів, який можна використати для початкового ознайомлення з поняттям функції.

1. *Поняття величини.* Серед якостей предметів та характеристик процесів трапляються такі, що їх можна вимірювати числами. Такі якості, властивості, характеристики називають величинами. Величина — те, що можна виміряти числом. Приклади: довжина, площа, об'єм, маса, швидкість, прискорення, опір провідника, сила струму і т.п. Проте, є якості, які не належать до величин. Наприклад, колір, вміння плавати, смак та ін.

Переважна більшість величин змінні, цебто такі, що впродовж процесу, за одну грань якого вони відповідають, ці величини змінюють свої значення. Незмінні величини називають *сталими*.

Приклад. Основними фізичними характеристиками газу є об'єм, тиск і температура. Якщо певну порцію газу закупорити в посудині, то перша з-поміж трьох величин буде стала, а решта дві, кажучи загалом, змінні.

2. *Залежності між величинами.* Дві величини, пов'язані з тим самим явищем, процесом, або предметом, рідко поводять себе незалежно одна від одної. Частіше буває так, що значення однієї з них впливають на значення другої, тією чи іншою мірою обумовлюють їх. Значення другої величини в цьому разі впливатимуть на значення першої, але міра цього впливу може бути суттєво іншою.

Приклад. Уявіть собі, що на фіксованому відрізку a як на основі ми будуємо всілякі трикутники з кутом φ при основі. Вивчимо залежності між такими двома величинами: іншим кутом при основі γ та бічною стороною x, що прилягає до цього кута. Сторона x визначається кутом γ однозначно. Якщо ми обираємо певне значення для γ, то для x не буде жодної свободи вибору. Значення γ «зобов'язує» сторону x набувати цілком певного значення. Це випливає з ознаки рівності трикутників за стороною (a) та двома кутами (φ і γ). Набувши певного значення, величина γ відразу «наказує» величині x, якого значення має набути вона. Цей вид залежності однієї величини від іншої називають *функціональним*. Отже, x залежить функціонально від γ. Кажуть ще так: x є функція від γ.

Натомість γ від x залежить не функціонально. Для обраного значення x може існувати два різні кути γ. Отже, x впливає на γ не в наказовій формі. У γ лишаються (взагалі кажучи) варіанти для вибору значення. Таку залежність однієї величини від іншої назвімо *рамковою*.

Отже, якщо величина x однозначно диктує величині y її значення, то кажемо, що y залежить від x *функціонально*.

Якщо ж величина x вказує кілька (можливо й безліч) значень, із яких y може вибирати одне, то казатимемо, що залежність y від x *рамкова*.

Залежності між величинами здебільшого задають рівняннями. Рівняння вимагає, щоб ці величини, змінюючись набували тільки таких значень, за яких рівність неодмінно виконується. Фізичні формули є такими рівняннями. Вони виражають залежності між фундаментальними величинами і називаються фізичними законами.

3. *Які рівняння виражають функціональні залежності?*

Хай дано рівняння

$$F(x;\, y) = 0\,.$$

Змінна y буде функцією змінної x, якщо за будь-якого значення x рівняння щодо невідомого y або зовсім не має розв'язків, або ж тільки один розв'язок. Змінна y рамково залежить від змінної x, якщо хоча б для одного значення x дане рівняння щодо невідомого y має два, або більше розв'язків. Помінявши в цих двох умовах місцями x і y, отримаємо критерії функціональної, чи рамкової залежності x від y.

Якщо залежності x від y і y від x, що їх визначає рівняння $F(x;\, y) = 0$, обидві функціональні, тобто, x є функція y, а y — функція x, то кажуть, що ці дві функції взаємно обернені (обернені одна до одної).

Список літератури

Бараненков, Г. С., Демидович, Б. П., & Ефименко В. А. (1959). *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов.* Б. П. Демидович (Ред.). Москва: Физматгиз.

Берман, Г. Н. (1985). *Сборник задач по курсу математического анализа.* Москва: Наука.

Вишенський, В. А., Дороговцев, А. Я., Єжов, І. І., Скороход, А. В., & Ядренко, М. Й. (1972). *Вибрані питання елементарної математики: Посібник для вступників та слухачів підготовчих курсів* (2-ге вид.). Київ: Вища школа.

Мышкис, А. Д. (1969). *Лекции по высшей математике.* Москва: Наука.

ПРО ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З КУСКОВО-ЗАДАНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
victor144169@gmail.com

Розглянуто приклади розв'язання задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь з кусково-заданими коефіцієнтами.

Ключові слова: кусково-задана функція, лінійне диференціальне рівняння, задача Коші, WolframAlpha.

Функції, які мають різні аналітичні вирази для кожної підмножини множини означення називають також кусково-заданими функціями (piecewise-defined function, piecewise function або hybrid function).

Такі функції можна записати за допомогою конструкції

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x), x<x_1 \\ f_1(x), x_1<x<x_2 \\ \ldots \\ f_n(x), x_n<x, \end{cases}$$

де деякі нерівності можуть бути й нестрогими.

Якщо функції $f_{i-1}(x), i=\overline{1,n},$ мають спільні властивості, наприклад, сталі, лінійні, неперервні, гладкі, монотонні тощо, то функцію $f(x)$ називають відповідно кусково-сталою, кусково-лінійною, кусково-неперервною, кусково-гладкою, кусково-монотонною тощо.

Традиційно в курсі вищої математики лінійні диференціальні рівняння з кусково-заданою правою частиною розглядають не в розділі «Диференціальні рівняння», а в розділі «Операційне числення».

Справді, використання операційного числення до розв'язання задачі Коші для таких рівнянь вирішую проблему згладжування розв'язків у точках перемикання аналітичних виразів (Мартиненко, 1990).

Але такі диференціальні рівняння можна розв'язувати і класичними методами (Nagle, Saff & Snider, 2012, p. 53, 188; Borrelli & Coleman, 2004, p. 63).

Під *узагальненим розв'язком* задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

і початковими умовами

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^k, k=\overline{0,n-1},$$

з кусково-заданими коефіцієнтами чи правою частиною з точками перемикання $x_1,\ldots,x_m$ розумітимемо кусково-задану функцію

$$y(x)=\begin{cases} y_0(x), x_0 \le x < x_1, \\ y_1(x), x_1 \le x < x_2, \\ \dots \\ y_m(x), x_m < x < x_{m+1} = +\infty, \end{cases}$$

таку, що:

1) функція $y_0(x)$ є розв'язком диференціального рівняння для $x \in (x_0;x_1)$ і справджує початкові умови в точці $x = x_0$;

2) функція $y_j(x), j=\overline{1,m},$ є розв'язком диференціального рівняння для $(x_j;x_{j+1})$ і справджує умови спряження в точках $x = x_j$:

$$y_j^{(k)}(x_j) = \lim_{x\to x_j-0} y_{j-1}^{(k)}(x), k=\overline{0,n-1}.$$

Отже, функція $y(x)$ є $(n-1)$-разів диференційовною.

Приклад 1. Знайдімо узагальнений розв'язок задачі Коші:

$$y'' + p(x)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

де

$$p(x)=\begin{cases} -k^2, & 0 \le x < \tau, \\ k^2, & \tau \le x. \end{cases}$$

Крок 1. На проміжку $x \in [0;\tau)$ розв'язуємо задачу Коші:

$$y'' - k^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Скориставшись для розв'язання задачі базою даних і набором математичних пакетів WolframAlpha (www.wolframalpha.com), маємо

$$y = y_0 = \frac{\operatorname{sh} kx}{k}, x \in [0;\tau).$$

$$y(\tau) = \lim_{x\to\tau-0}\frac{\operatorname{sh} kx}{k} = \frac{\operatorname{sh} k\tau}{k}, \ \ y'(\tau) = \lim_{x\to\tau-0}\operatorname{ch} kx = \operatorname{ch} k\tau.$$

Крок 2. На проміжку $[\tau;+\infty)$ розв'язуємо задачу Коші:

$$y'' + k^2 y = 0, \ \ y(\tau) = \frac{\operatorname{sh} k\tau}{k}, y'(\tau) = \operatorname{ch} k\tau.$$

Маємо (www.wolframalpha.com):

$$y = y_1(x) = \frac{\operatorname{sh} k\tau \cos k(x-\tau) + \operatorname{ch} k\tau \sin k(x-\tau)}{k}, x \in [\tau;+\infty).$$

Отже, дістаємо кусково-заданий розв'язок задачі Коші:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} kx}{k}, & 0 \le x < \tau, \\ \dfrac{\operatorname{sh} k\tau \cos k(x-\tau) + \operatorname{ch} k\tau \sin k(x-\tau)}{k}, & \tau \le x. \end{cases}$$

Ця функція є неперервною в точці $x = \tau$ як і її похідна

$$y' = \begin{cases} \operatorname{ch} kx, & 0 \le x < \tau, \\ \operatorname{ch} k\tau \cos k(x-\tau) - \operatorname{sh} k\tau \sin k(x-\tau), & \tau \le x. \end{cases}$$

Приклад 2. Знайдімо узагальнений розв'язок задачі Коші:

$$y'' - ky' = f(x), y(0) = y'(0) = 0,$$

де

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \le x < \tau, \\ b, & \tau \le x. \end{cases}$$

Крок 1. На проміжку $x \in [0;\tau)$ розв'язуємо задачу Коші:

$$y'' - ky' = a, y(0) = y'(0) = 0.$$

Маємо (www.wolframalpha.com):

$$y = y_0(x) = \frac{a}{k^2}(e^{kx} - kx - 1) = \frac{a}{k^2}(e^{kx} - 1) - \frac{a}{k}x.$$

$$y(\tau) = \lim_{x \to \tau - 0} \frac{a}{k^2}(e^{kx} - kx - 1) = \frac{a}{k^2}(e^{k\tau} - k\tau - 1);$$

$$y'(\tau) = \lim_{x \to \tau - 0} \frac{a}{k^2}(ke^{kx} - k) = \frac{a}{k}(e^{k\tau} - 1).$$

Крок 2. На проміжку $[\tau; +\infty)$ розв'язуємо задачу Коші:

$$y'' - ky' = b,\ y(\tau) = \frac{a}{k^2}(e^{k\tau} - k\tau - 1), y'(\tau) = \frac{a}{k}(e^{k\tau} - 1).$$

Маємо (www.wolframalpha.com):

$$y = y_1(x) = \frac{a}{k^2}(e^{kx} - e^{k(x-\tau)}) + \frac{b}{k^2}(e^{k(x-\tau)} - 1) - \frac{a\tau + b(x-\tau)}{k}.$$

Отже, дістаємо кусково-заданий розв'язок задачі Коші:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{k^2}(e^{kx} - 1) - \frac{a}{k}x, & 0 \le x < \tau, \\ \frac{a}{k^2}(e^{kx} - e^{k(x-\tau)}) + \frac{b}{k^2}(e^{k(x-\tau)} - 1) - \frac{a\tau + b(x-\tau)}{k}, & \tau \le x. \end{cases}$$

Список літератури

Borrelli, R. L., & Coleman, C. S. (2004). *Differential equations: A modeling perspective* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of differential equation* (8th ed.). Pearson Education.

Мартиненко, В. С. (1990). *Операционное исчисление: Учебное пособие* (4-е. изд.). Киев: Вища школа.

ЕЛЕМЕНТИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Я. В. Гончаренко, О. С. Сушко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

yan_a@ukr.net, teacher_math@i.ua

У доповіді будуть представлені основні результати дослідження питань особливостей та досвіду викладання елементів актуарної математики студентам математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Ключові слова: актуарні розрахунки, студенти математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Фінансова стійкість страховиків безпосередньо залежить від діяльності страхових актуаріїв, оскільки правильний розрахунок страхових тарифів та формування на їх основі страхових резервів забезпечують платоспроможність страхових установ. Таким чином, вивчення елементів актуарної математики є одним з важливих напрямків підготовки майбутніх фінансових аналітиків та актуаріїв.

У Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова здійснюється підготовка фахівців освітнього рівня «магістр» зі спеціальності 111 Математика за спеціалізацією «Фінансова математика». Навчання елементів актуарної математики студентів указаної спеціальності здійснюється поетапно: перший етап — на освітньому рівні «бакалавр» — як змістовий модуль навчальної дисципліни «Фінансова та актуарна математика»; другий етап — на освітньому рівні «магістр» — як варіативна навчальна професійно орієнтована дисципліна.

Метою та основними завданнями вивчення елементів актуарних розрахунків на освітньому рівні «бакалавр» є ознайомлення студентів з основними принципами побудови сучасних аналітичних моделей страхової діяльності, моделями страхування життя; отримання практичних навичок ведення основних страхових розрахунків, а саме, розгляд таких основних питань: оцінювання сучасної вартості довічної, тимчасової довічної та відстроченої довічної рент, актуарне накопичення; страхування життя (характеристики тривалості життя, функція виживання, аналітичні закони смертності, залишковий час життя, округлений час життя).

Здобуті в результаті навчання студентами знання є базою для подальшого більш поглибленого вивчення питань, пов'язаних із функціонуванням ринку страхових та банківських послуг, державного бюджету, фінансового аналізу діяльності страхових компаній.

Результатом навчання змістового модуля має стати опанування студентами знаннями та вміннями виконувати такі завдання: здійснювати фінансово-економічні розрахунки; вільно оперувати основними видами розрахунків, пов'язаних з наданням страхових послуг, для різних типів вхідних даних та різних постановок задач; робити обґрунтовані висновки із проведених розрахунків, які будуть сприяти прийняттю оптимальних рішень щодо збільшення ефективності роботи різних страхових установ; оцінювати ефективність здійснення страхування.

Вивчення окремого курсу «Елементи актуарної математики» в магістратурі забезпечить майбутнім спеціалістам знання в галузі розробки науково обґрунтованих методів розрахунку тарифних ставок по довгостроковому страхуванню життя, розрахунків, пов'язаних з утворенням резервів страхових внесків, визначенням розмірів страхових сум та виплат за різноманітними видами страхування, вміння проводити аналіз ризиків у страхуванні.

Такий курс поділяється на два основні модулі: страхування життя та страхування ризиків.

Основною метою першого модуля дисципліни є розгляд основних математичних моделей та методів, необхідних для визначення характеристик тривалості життя, разових та періодичних нетто-премій, страхових надбавок і резервів для різних видів страхування та пенсійних схем.

У другому модулі передбачається вивчення таких основних питань, як поняття ризику у страхуванні; методи оцінки ризику у страхуванні; класифікація ризиків; моделі управління ризиком за допомогою перестрахування; основні терміни перестрахування та їх ризики; модель страхових ринків: типи споживачів на страховому ринку; споживачі з високими й низькими ризиками; криві споживчої байдужності при аналізі рівноваги на страхових ринках.

Після вивчення курсу «Елементи актуарної математики» студент повинен: знати основні методи ймовірнісного моделювання грошових потоків і актуарних розрахунків; уміти застосовувати аналітичні методи для розв'язування економічних та актуарних задач; мати уявлення про основні схеми та поняття в страхуванні; будувати найпростіші моделі страхових операцій; уміти застосовувати вивчені методи для моделювання реальних процесів у страхуванні; здійснювати актуарні розрахунки вартостей страхових тарифів, пенсійних внесків, пенсійних і страхових резервів, ризиків у страхуванні; застосовувати відповідне програмне забезпечення при розв'язанні практичних проблем фінансового аналізу страхових операцій; володіти навичками застосування сучасного математичного інструментарію для розв'язання фінансово-економічних задач та методикою побудови, аналізу, застосування і інтерпретації отриманих результатів страхових угод.

Зміст курсу актурної математики представлено в ряді монографій, підручників та навчальних посібників, серед яких стали класичними роботи Гербер (1995), Бауерс та Гербер (2001). Та на сьогодні існує певна (власне, не дуже велика) кількість україно- та російськомовних підручників та навчальних посібників з актуарної математики, орієнтованих на студентів математичних спеціальностей, зокрема таких авторів як Антонюк, Малик та Ясинський (2011), Бондарев та Жмихова (2010), І. Васильченко та З. Васильченко (2012), Григорків, Ярошенко та Нікіфоров (2011), Зубченко (2016), Ковтун, Денисенко та Кабанов (2008), А. Фалин та Г. Фалин (2015) та ін.

Проаналізувавши зазначену літературу з точки зору доступності використання в навчанні студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, можна стверджувати наступне, що частина підручників та навчальних посібників у повному обсязі доступні тільки для студентів, що мають ґрунтовні знання (в обсязі класичних університетських курсів) з математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, математичного програмування, а частина з них доступні для студентів, що володіють базовими знаннями, уміннями та навичками з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичного програмування

Ураховуючи проведений аналіз та досвід викладання, можна зробити висновок: серед наявних підручників та навчальних посібників з актуарної математики практично неможливо вибрати такий, щоб задовольняв всі умови та вимоги до навчання студентів спеціальності 111 «Математика» педагогічних університетів. Отже, на сьогодні задача добору та структуризації змісту навчання актуарної математики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, добір ефективних методів, форм та засобів навчання є надзвичайно актуальною, оскільки знання основ страхування має важливе значення для обґрунтованого вибору ділового партнера, підвищення власної фінансової стійкості страхової установи, розробки програм зниження ризику підприємницької діяльності.

Список літератури

Антонюк, С. В., Малик, І. В. & Ясинський, В. К. (2011). *Математичні моделі страхової математики: Навчальний посібник*. Чернівці: Рута.

Бауэрс, Н. & Гербер, Х. (2001). *Актуарная математика*. Москва: Янус-К.

Бондарев, Б. В. & Жмыхова Т. В. (2010). *Математическая теория страхования.* Донецк: Юго-Восток.

Васильченко, І. П. & Васильченко З. М. (2012). *Фінансова математика: Навчальний посібник* (2-ге вид. допов.). Київ: Кондор.

Гербер, Х. (1995). *Математика страхования жизни.* Москва: Мир.

Григорків, В. С., Ярошенко, О. І. & Нікіфоров, П. О. (2011). *Фінансова математика: підручник.* Чернівці: Рута.

Зубченко, В. П. (2016). *Математичні основи страхування життя.* Київ: ВПЦ «Київський університет».

Ковтун, І. О., Денисенко, М. П. & Кабанов, В. Г. (2008). *Основи актуарних розрахунків: Навчальний посібник.* Київ: Професіонал.

Фалин, А. Г. & Фалин, Г. И.(2015). *Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев*. Москва: МГУ.

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОФЕСІЙНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Н. С. Грудкіна[1], В. О. Паламарчук[1], О. Г. Ровенська[1], О. О. Чумак[2]

[1]*Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна*

[2]*Донбаська національна академія будівництва і архітектури, Краматорськ, Україна*

dgma.vm@ukr.net

Наведено приклади практичної реалізації професійної спрямованості навчання дисципліни «Вища математика», що викладається студентам технічних спеціальностей, відповідно до вимог наукових шкіл академії.

Ключові слова: професійна спрямованість, годограф, зведений тиск.

З огляду на необхідність опанування нових ресурсоощадних технологій машинобудування формування в майбутніх інженерів навичок та вмінь дослідника під час побудови та розв'язання сучасних прикладних задач відповідної спеціалізації у процесі навчання математичних дисциплін стає першочерговою задачею. Ці положення необхідно враховувати під час визначення змісту навчання вищої математики, враховувати не тільки знання та вміння, які є важливими для розуміння студентами безпосередньо зазначеної теми, але й такі, які є важливими у подальшому для вивчення профільних дисциплін (Прокопенко, 2009).

Метою статті є висвітлення шляхів практичної реалізації професійної спрямованості навчання дисципліни «Вища математика», що викладається студентам технічних спеціальностей.

Відповідно до наукового напряму «Розвиток ресурсоощадних процесів ОМТ» наукової школи ДДМА під час викладання тем «Векторна алгебра» та «Дослідження функції декількох змінних на екстремум» у групах технічного спрямування використовується пакет прикладних задач на побудову годографа швидкостей та обчислення зведеного тиску у вигляді деякої аналітичної функції та її подальше дослідження на оптимальне (мінімальне) значення. Набуті знання та навички розв'язання задач даного типу необхідні студентам в подальшому при розробленні курсових та дипломних проектів (Aliiev, Aliieva, Grudkina & Zhbankov, 2011).

У якості демонстрації використання необхідних знань студентами старших курсів та магістрів за спеціалізацією «Комп'ютерне проектування процесів пластичного деформування» наведемо прикладну задачу.

Побудуємо математичну модель процесу комбінованого радіально-зворотного видавлювання деталі типу «стакан з фланцем» з утворенням дефекту у вигляді утягнення (рис. 1) методом верхньої оцінки (Aliiev et al., 2011). Довжини границь контакту між кінематичними елементами і з інструментом визначають з розрахункової схеми, використовуючи горизонтальні та вертикальні складові швидкостей зсуву кінематичних елементів відносно один одного й поверхні інструменту. Визначення цих даних задачі потребує знань основних формул векторної алгебри та поняття паралельності прямих.

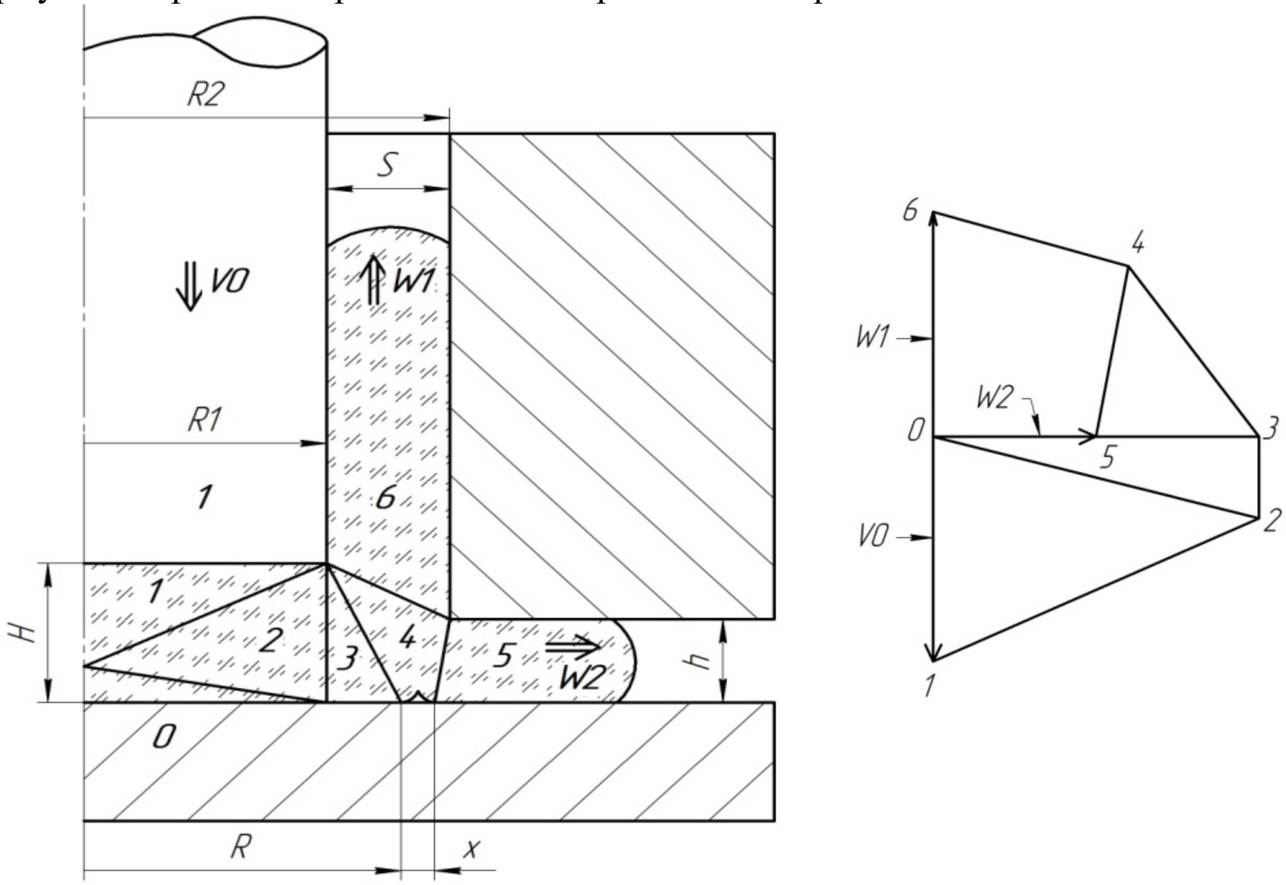


Рис. 1. Схема процесу і годограф радіально-зворотного видавлювання

Використовуючи попередні обчислення складових рівняння енергетичного балансу, отримали наступний вираз зведеного тиску:

$$\overline{p} = \frac{1}{2R_1V_0}\left(\begin{array}{c} \dfrac{R_1^2+\left(\dfrac{3}{4}H\right)^2}{H}V_0+\dfrac{H}{4}V_0+\left|\dfrac{W_1-\dfrac{R_1TV_0}{H}}{T(R-R_1)-H}\right|\left(\left(R-R_1\right)^2+H^2\right)+ \\ +\dfrac{x_4-W_2}{(R_2-x-R)}\left(\left(R_2-x-R\right)^2+h^2\right)+ \\ +\dfrac{x_4}{S}\left(\left(H-h\right)^2+S^2\right)+2\mu_S W_1\left(H-h+l_{k2}\right)+ \\ +2\mu_S(x_3\left(R-R_1\right)+W_2\left(R_2-R-x+2l_{k1}\right)+\left(V_0+W_1\right)\left(\Delta H_{\text{ход}}+l_{k2}\right)) \end{array}\right) \qquad (1)$$

У результаті можна представити отриманий вираз $\overline{p}=\overline{p}(x,R)$ у вигляді функції двох змінних, це надає можливість використовувати алгоритм дослідження для реально наявного втягнення на основі знань студентів з теми «Дослідження функції декількох змінних на екстремум». Продиференціюємо отриманий вище вираз за змінними R, x та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2V_0R_1}\left(-2\mu_S W_2-(x_4-W_2)\left(1-\dfrac{h^2}{\left(R_2-R-x\right)^2}\right)\right)=0,\\
\dfrac{1}{2V_0R_1}\left(\begin{array}{l}
-(x_4)'_R\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{h^2+(R_2-R-x)^2}{R_2-R-x}-\\
-\dfrac{H^2+(R-R_1)^2}{R-R_1}+\dfrac{(H-h)^2+s^2}{s}\end{array}\right)-\\
-(x_4-W_2)\left(1-\dfrac{h^2}{\left(R_2-R-x\right)^2}\right)+\\
+(x_4-x_3)\cdot\left(\dfrac{H^2}{(R-R_1)^2}-1\right)+\\
+2\mu_S(-W_2+x_3)
\end{array}\right)=0
\end{array}\right.$$

Ураховуючи рівняння (1) та завдяки рівності $x=R_2-R-h$, розв’язання системи рівнянь зводиться до розв’язання другого рівняння системи з урахуванням наведених вище перетворень:

$$\left(\frac{H^2}{(R-R_1)^2}-1\right)\left(H+R-R_1\right)\left(3H+2R-2R_1\right)+$$
$$+H\left(3h+\frac{(H-h)^2}{s}-\frac{H^2}{R-R_1}\right)+2\mu_S\left(H+R-R_1\right)^2=0.$$

Можлива побудова розв’язку даного рівняння у вигляді деякої поверхні $H^*(h,R_1,R_2,\mu_S)$, що дозволяє визначити критичне значення величини, що відповідає початку утворення утягнення при різних співвідношеннях геометричних параметрів процесу та надає геометричну інтерпретацію отриманого розв’язку для подальшого аналізу. На прикладі даної задачі дослідницького характеру продемонстровано необхідність розширення наповнення існуючого курсу вищої математики пакетами прикладних задач на побудову годографа швидкостей та обчислення зведеного тиску процесів холодного деформування. Набуті знання та навички розв’язання даного типу задач необхідні студентам в подальшому при розробці курсових та дипломних проектів. Упровадження прикладних задач відповідно до вимог наукових шкіл академії в навчальний процес потребує відповідних методичних розробок.

Список літератури

Aliiev, I., Aliieva, L., Grudkina, N. & Zhbankov, I. (2011). Prediction of the variation of the form in the processes of extrusion. *Metallurgical and Mining Industry: scientific and technical journal, 3*(7), 17–22.

Прокопенко, Н. А. (2009). Цілі та зміст навчання векторної алгебри у системі інженерної освіти. *Дидактика математики: Проблеми і дослідження, 32,* 95—100.

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КОРРЕКТНОСТИ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ СРЕДСТВАМИ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ

К. Р. Дзигора, Т. В. Нестеренко

Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса, Винница, Украина

dzihora.k@donnu.edu.ua, nesterenko.t@donnu.edu.ua

В работе рассмотрены проблемы, возникающие при расчетах алгебраических выражений в специализированных программных пакетах.

Ключевые слова: Maple, Wolfram Mathematica, символьные вычисления, кубическое уравнение.

Объем данных, с которым приходится работать как в области академических исследований, так и на практике, на сегодняшний день таков, что о «ручном» счете, казалось бы, можно окончательно забыть. Наличие специализированных математических программных пакетов, таких как Maple, Matlab, Wolfram Mathematica (таки и их бесплатных аналогов типа Axiom и Reduce) позволяет эффективно решать не только численные, но и аналитические задачи. Имеет место тенденция смешения классических математических курсов с обучением использованию упомянутых программных комплексов, например (Klima, Sigmon & Stitzinger, 1999; Articolo, 2009; Эдвардс & Пенни, 2008).

При этом, все же, полностью полагаться лишь на возможности компьютерной математики было бы опрометчиво. Так, в силу своей архитектуры и ограниченности возможностей компьютера (Cheney & Kincaid, 2008), численные вычисления, казалось бы, простых примеров могут приводить к некорректным, и на первый взгляд, даже парадоксальным результатам. Вопрос погрешности округления в вещественных числах, который влияет на точность вычислений, уже исследовался авторами (Ветров, Дзигора & Нестеренко, 2017).

Целью же данной работы является демонстрация «опасностей» более высокого порядка, а именно теоретической некорректности некоторых результатов именно аналитических компьютерных вычислений, на примере наиболее популярных систем компьютерной алгебры — Maple и Wolfram Mathematica. Остановимся лишь на одном тривиальном примере.

Рассмотрим следующее кубическое уравнение

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 4 = 0 \tag{1}$$

Код решения уравнения (1) в системе Maple может быть следующим

[> solve(x^3-7*x^2+11*x-4=0,x);

В результате получим

$$\frac{\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}{6}+\frac{32}{3\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}+\frac{7}{3},$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}{12}-\frac{16}{3\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}+\frac{7}{3}+\\
&+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}{6}-\frac{32}{3\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}\right),
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}{12}-\frac{16}{3\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}+\frac{7}{3}-\\
&-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}{6}-\frac{32}{3\left(404+12I\sqrt{687}\right)^{(1/3)}}\right).
\end{aligned}
$$

Это решение в символьном виде в соответствии с формулой Кардано. Приведем (2) к числовому виду.

[> evalf(solve(x^3-7*x^2+11*x-4=0,x));

Получим три корня

$$
\begin{gathered}
4.9354332-0.2\cdot 10^{-9}I,\\
0.52711660905-0.7660254040\cdot 10^{-9}I,\\
1.537401578+0.9660254040\cdot 10^{-9}I
\end{gathered} \tag{3}
$$

Видно, что все три корня уравнения являются комплексными, причем среди них нет пары комплексно сопряженных корней, что, очевидно, является некорректным с математической точки зрения (согласно теории кубическое уравнение (1) должно иметь не менее одного действительного корня, а комплексные корни, если они и присутствуют, должны быть комплексно сопряженными).

При этом, рассмотрев подробнее структуру корней уравнения, убеждаемся, что мнимая часть всех трех корней входит с порядком 10^{-9}. Это позволяет говорить о машинном эпсилоне и о том, что комплексную часть корней уравнения можно просто-напросто отбросить. Что бы убедиться в корректности данного утверждения, Maple решим указанное уравнение с вещественными коэффициентами.

Код будет следующим

[> evalf(solve(x^3-7.*x^2+11.*x-4.=0.,x));

$$
\begin{gathered}
0.527166091004744,\\
1.53740157702523,\\
4.93543233197003
\end{gathered} \tag{4}
$$

Три действительных корня (4), отличающихся от действительной части рассмотренных ранее (3) на уровне точности, принятом по умолчанию для системы Maple. Отметим, что точность вычислений в Maple может регулироваться для данного примера как минимум двумя способами: с помощью параметров функции evalf() и с помощью явного задания значения константы Digits.

Теперь попробуем решить тоже уравнение с помощью Wolfram Mathematica.

Solve[x^3 - 7 x^2 + 11 x - 4 == 0, x]

$$x \to \frac{1}{3}(7 + \frac{16}{(\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3}} + (\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3})$$

$$x \to \frac{7}{3} - \frac{8(1 + i\sqrt{3})}{3(\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3}} - \frac{1}{6}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})((\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3}$$

$$x \to \frac{7}{3} - \frac{8(1 + i\sqrt{3})}{3(\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3}} - \frac{1}{6}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})((\frac{1}{2}(101 + 3i\sqrt{687}))^{1/3}$$

Как видно и в Wolfram Mathematica символьное решение не дает верного результата.

Но если явно указать вещественные коэффициенты, то получим закономерно верный результат.

Solve[x^3 – 7. x^2 + 11. x – 4. == 0, x]

$$\{\{x \ \to \ 0.527166\}, \{x \ \to \ 1.5374\}, \{x \ \to \ 4.93543\}\}$$

Описанная проблема не является критической для данного примера, поскольку (3) и (4) сравнимы, и мы понимаем, почему так произошло. Однако это не отменяет того факта, что во время выполнения символьных вычислений на примерах, сложнее описанного, мот получиться результаты, не являющимися адекватными с математической точки зрения.

Таким образом, важно отметить, что при решении задач с помощью специальных программных пакетов необходимо перепроверять результаты и их согласованность с математическими законами. Умение проверять полученные результаты на корректность может выработаться лишь при серьезной академической подготовке и достаточной практике именно аналитических построений, как то говорится, на бумаге. Без этого адекватность проводимых исследований с помощью современных программных средств всегда будет оставаться под сомнением.

Список літератури

Articolo, G. A. (2009). *Partial differential equations and boundary value problems with Maple* (2 ed.). Academic Press.

Cheney, W., & Kincaid, D. (2008). *Numerical mathematics and computing* (6 ed.). Belmont: Thomson Brooks/Cole.

Klima, R. E., Sigmon, N., & Stitzinger, E. (1999). *Applications of abstract algebra with Maple* (Vol. 34). CRC Press.

Ветров, О. С., Дзигора, К. Р., & Нестеренко, Т. В. (2017). Некоторые методологические аспекты оценки корректности компьютерных вычислений в прикладных задачах. У *Збірнику матеріалів I Всеукраїнської інтернет-конференції «Теоретико-практичні проблеми використання математичних методів та комп'ютерно-орієнтованих технологій в освіті та науц»*, Киев, 19 мая (с. 160–163). Киев: Киев ун-т. им. Б. Гринченка.

Эдвардс, Ч. Г., & Пенни, Д. Э. (2008). *Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB* (3-е изд.). Издательский дом «Вильямс».

ПРОБЛЕМИ З ВИКЛАДАННЯМ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ В УМОВАХ БЕЗСИСТЕМНОГО РЕФОРМУВАННЯ ДЕРЖАВИ

В. В. Довгай

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valerdov@gmail.com

У роботі оцінюється якість підготовки з елементарної математики випускників середньої школи після багаторічного реформування не тільки її, а й всієї держави. Указується на зв'язок виявлених проблем із труднощами при підготовці фахівців у сучасному технічному університеті.

Ключові слова: елементарна математика, безсистемність реформ, олігархічна держава, занепад машинобудування, проблеми математичної освіти.

Уже чверть століття тривають реформи в Україні, яким не видно кінця, та немає від них бажаного ефекту, зокрема і в освіті. Тут вона почалась однією з перших, без належного фінансування, а отже мала поверховий, формальний та імітаційний характер. Зайву плутанину внесла дванадцятибальна система оцінювання в середній школі, сумнівною є користь від заміни десятирічки на одинадцятирічку чи навіть дванадцятирічку, неякісні підручники — перелік можна довго продовжувати з точки зору викладача математики. Може все це і сприяло величезному прориву в гуманітарній складовій середньої, а далі й вищої освіти, але загальний рівень знань учнів з елементарної математики погіршувався з кожним роком і нехай би вже стабілізувався на поточному рівні. Звичайно, є елітні ліцеї та гімназії, які дають знання елементарної математики високого рівня, але їх жалюгідно мало, випускників цих навчальних закладів бракує для багатьох факультетів чи інститутів сучасного технічного університету, завданням яких є підготовка висококваліфікованих фахівців для галузей, що повинні бути в основі економіки сучасної високорозвиненої держави, а не сировинного придатку для інших держав. Таке становище в середній освіті веде до погіршення умов та якості викладання не тільки математики, але й багатьох інших предметів навчального плану, що використовують математичний апарат. Багато з нас вимушені паралельно з викладом матеріалу своїх робочих програм заповнювати для значної кількості своїх студентів такі суттєві прогалини у знаннях з елементарної математики, як дії з раціональними числами, поняття функції, основні елементарні функції, тощо. Як без цих знань можна було пройти зовнішнє незалежне оцінювання — залишається загадкою. Зрозуміло, що в Міністерстві освіти і науки України багато інших питань крім стану з викладанням елементарної математики, але ж саме це важливо не тільки для сучасного технічного університету, а й для загальної культури сучасної людини, бо саме при якісному викладанні даної дисципліни учень має чи не найбільшу можливість навчитись логічному мисленню. Відсутність останнього аж занадто явно демонструє багато народних обранців, що створюють для нас доволі суперечливі, неякісні, неоднозначні, а часто і просто шкідливі закони.

Такою ж імітаційною без чіткого плану та необхідного фінансування виявилась і реформа вищої освіти. Та й де ж взятись такому плану й не тільки йому? Може хтось з нас за чверть століття хоч раз на виборах крім пустопорожніх гасел та обіцянок від кандидатів на високі посади чув чи бачив план, що стосувався б реформування всієї економіки? Мається на увазі справжній план реформування в інтересах усього народу, розроблений визнаними, авторитетними та компетентними професіоналами, у якому поставлена кінцева мета, визначені етапи її досягнення з конкретними датами, указаними матеріальними ресурсами, відповідальними за виконання та санкціями за невиконання. Чули лише, що прийде ефективний власник і зробить нас щасливими, що треба роздати землю, приватизувати підприємства і ще багато чого. Але все це при недолугому законодавстві, без чіткого плану та необхідних реформ, що були б зрозумілими народу і підтримувалися б більшістю. Тому реформи (у тому числі й освіти) відбувались безсистемно та хаотично і при очевидній наявності корисливих інтересів окремих груп спритних приватизаторів. Безсистемність, а отже й хаотичність процесу реформування нашої держави підтверджується відомим закликом одного з перших її прем'єр-міністрів — скажіть, мовляв, яку країну будувати і я її побудую. Мабуть ніхто з тогочасних можновладців не був зацікавлений у тому, щоб будувати сучасну, демократичну, заможну, високорозвинену державу з високотехнологічним виробництвом, якісною освітою і гідним рівнем життя. Тому прем'єр-міністр відповіді не дочекався та будував те, що йому видавалось на той час найкращим і досяг певних позитивних успіхів у розвитку економіки. Але відсутність плану досягнення шляхетної мети зіграла злий жарт і тепер уже багатьом стало очевидним те, що в підсумку маємо досить непривабливу олігархічну державу. У ній з десяток родин під час приватизації майже задарма придбали у власність великі та важливі для всієї країни державні підприємства, неймовірно розбагатіли та вирішили поєднати своє багатство із владою для ще більшого свого збагачення. Це не могло не привести державу до такого рівня корупції, що визнається одним з найвищих у світі. Паралізувавши діяльність антимонопольного комітету, олігархи монополізували найважливіші галузі — від засобів масової інформації до найбільших підприємств, у тому числі енергетичних. Не варто й сподіватись, що олігарх-монополіст сприятиме створенню сучасних виробничих потужностей з новітніми технологіями, де будуть потрібними висококваліфіковані фахівці, яких поки що здатні підготувати наші кращі технічні університети. Для чого йому цей клопіт, коли він може, користуючись державними важелями, створити для себе режим найбільшого сприяння в усіх тих напрямках, що ведуть до найвищого особистого прибутку і не сумісні з прогресивним розвитком власної країни.

Одним з багатьох негативних наслідків функціонування олігархічної держави є занепад розвитку високотехнологічного машинобудування, де можна було б створити значну кількість робочих місць для виробництва якісного вітчизняного обладнання для різних галузей економіки і тим самим зупинити прогресуючий потік населення за кордон у пошуках кращої долі. Для цього, звичайно, треба було б вкласти велику частину прибутку олігархів для створення відповідного сучасного виробництва, не розтринькуючи його на численні власні яхти, літаки, палаци та інші подібні забаганки. Але ж значно вигіднішим виявилось встановлення для населення захмарних цін на свою монопольну продукцію в умовах відсутності ринку, чи заміна добитого у процесі експлуатації свого (часто ще радянського) виробничого обладнання на іноземне, що стимулює тим самим створення нових робочих місць за кордоном, на яких будуть працювати наші, зайві тут робітники. Занепад машинобудівної галузі особливо відчувається викладачами математики на відповідних факультетах сучасного технічного університету. Там з року в рік зменшується як контингент першокурсників, так і якість їх знань з елементарної математики, що є основою для успішного засвоєння наступних розділів математики, необхідних у підготовці висококваліфікованого фахівця. Звісно ж, невелика кількість з цих першокурсників має досить пристойні шкільні знання і до того ж намагається успішно засвоювати нові. Наявність їх, на щастя, не дозволяє викладачу математики критично понижувати якість аудиторних занять, що є суттєвим для успішного функціонування програм подвійного диплому. Ці програми діють на основі угод, укладених з провідними західноєвропейськими навчальними закладами та дозволяють нашим кращим студентам по закінченню навчання одержувати два дипломи — вітчизняного та відповідного закордонного зразків. Знайомлячись із оцінками, виставленими закордонними колегами нашим випускникам, маємо велике моральне задоволення від того, що майже всі вони найвищі, а отже ми можемо готувати висококваліфікованих фахівців для машинобудівної галузі на рівні європейських стандартів. Справа лише за одним — створювати для них робочі місця, без цього ніяка реформа вищої освіти, та ще й без належного фінансування, не допоможе. Гостро стоїть проблема введення окремих компенсаційних курсів для ліквідації згаданих раніше прогалин у знаннях з елементарної математики для студентів з низьким там рівнем підготовки. Факультетам відома ця проблема, на деяких з них раніше були такі курси, отже, не з їхньої ініціативи під час реформування вищої освіти ці курси зникли з навчальних планів, знову ж таки, чи не через брак фінансування. До речі, порахуємо зміну в доларах місячного доходу після сплати податків у доцента сучасного технічного університету найвищої категорії з усіма надбавками від вересня 2013 р. до вересня 2017 р. Він зменшився десь у 1,8 рази, але на це ніхто з нас і не подумає скаржитись, розуміючи, у якому становищі опинилася держава. Навпаки, коли дізнаєшся, що порядку мільйона гривень у місяць одержують окремі наші високопосадовці, що очолюють державні компанії, інші — кількамільйонні гривневі премії за виконання своїх службових обов'язків у деяких міністерствах, то вся наша викладацька спільнота відчуває неабияку гордість за наявність власної гідності. Щоб покращити якість навчального процесу, майже кожен викладач математики, сумлінно виконуючи свої обов'язки, створює власне методичне забезпечення для своїх дисциплін і свого факультету чи інституту, бо в інших підрозділах відповідні навчальні та робочі програми будуть відмінними (інколи суттєво) як по обсягу, так і по змісту необхідного математичного апарату внаслідок особливостей потреб різних підрозділів та якості підготовки випускників середньої школи з елементарної математики. Ця важлива та кропітка робота, якщо результати її публікуються в електронному чи друкованому вигляді та мають гриф, починаючи від грифу вченої ради факультету, має обов'язково достойно враховуватись при оцінці рейтингу науково-педагогічного працівника. Великою помилкою буде запровадження необґрунтованої пропозиції щодо врахування такої роботи лише за умови, коли вона відзначена грифом рівня не нижчим, ніж всього університету. Малопродуктивною, але від цього не менш трудомісткою є, може й необхідна, щорічна зміна робочих програм для математичних модулів. Інколи вона зводиться лише до модифікації оформлення таких програм, але в більшості випадків стосується зміни загальної кількості годин, аудиторних годин, контрольних заходів та індивідуальної роботи студентів і вимагає (через об'єктивні причини затягування процесу узгодження) значних ресурсів робочого часу переважно саме тоді, коли його й так обмаль, тобто в кінці навчального року, перед самою відпусткою. Така робота теж заслуговує достойної оцінки в рейтингу науково-педагогічного працівника. Кожен з нас є справжнім патріотом своєї держави і тому вносить свою частку у важливу справу патріотичного виховання майбутніх спеціалістів, вказуючи їм на внесок наших вітчизняних вчених у ту галузь науки, якої стосується тема навчального плану. У першу чергу саме від нас студенти мають можливість довідатись про такі постаті, як М. Є. Ващенко-Захарченко, В. М. Глушков, М. П. Кравчук, М. В. Остроградський, А. В. Скороход і багато-багато інших, що є зірками на небосхилі світової науки і про яких, на жаль, навряд чи почуєш за допомогою монополізованих олігархами засобів масової інформації.

Слід відзначити наявність і позитивних тенденцій усупереч непослідовному, безсистемному процесу реформування нашої держави. Багаторічний розвиток олігархічно-монополістичної держави з непривабливими атрибутами у вигляді корупції, непотизму, недолугої кадрової політики, загрозливого масштабу тіньової економіки, еміграції, злиднів більшості населення на фоні нечуваного збагачення невеличкої купки олігархів уже досяг свого апогею. Уже й самій владі стало ясно, що далі — шлях до руїни, тому вимушено, у тому числі і під тиском наших партнерів із дружніх країн, створюються нові інституції для боротьби з корупцією, за допомогою яких під слідством опиняються особи, які раніше вважались недоторканими. У цьому бачимо лише початок процесу демонтажу олігархічної держави, після успішного завершення якого відкриється шлях до створення держави сучасної, з високими соціальними стандартами для всього народу, з потужним машинобудівним комплексом як однієї з основ економічної могутності і для якого виникне необхідність підготовки значно більшої кількості, ніж тепер, висококваліфікованих фахівців. В очікуванні цього викладачам математики слід утримувати на високому рівні всі складові навчального процесу, шануючи таким чином багатьох своїх учителів, які колись робили те саме і для нас.

ПРО СТРУКТУРУ І ЗМІСТ ІНТЕГРОВАНОГО КУРСУ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ СТУДЕНТІВ НЕМАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВНЗ

С. В. Драганюк, В. В. Карапетров, А. А. Манолі

Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Запропоновано систему тем, що складають зміст інтегрованого курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів нематематичних спеціальностей ВНЗ.

Ключові слова: лінійна алгебра, аналітична геометрія, інтегрований курс, лінійний векторний простір, лінійне відображення.

Інтегрований курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії входить до навчальних планів студентів фізичних, прикладних та певних інформатичних спеціальностей вже більш ніж 30 років. Згідно загальної ідеї фундаторів такого курсу (які, на зараз, здається, вже забуті), його алгебраїчну складову повинні утворювати ті алгебраїчні поняття, які дозволяють означити та всебічно дослідити поняття про лінійний векторний простір, про лінійні відображення таких просторів. Одразу виникає питання, лінійний векторний простір… над яким полем? Над довільним полем? Чи тільки над полем дійсних чисел, чи ще й над полем комплексних чисел? З точки зору можливостей практичних застосувань у фізиці, прикладній математиці та інших науках, найбільш актуальним представляються дослідження лінійних векторних просторів над полем дійсних чисел. Тоді як, певні спеціальні розділи цих наук вимагають знайомства і з лінійними векторними просторами над полем комплексних чисел. З точки зору напрямків досліджень сучасної алгебри, найбільш цікавими представляються, мабуть, лінійні векторні простори над скінченними полями. Як бути з вимірністю лінійного векторного простору? Обмежитися розгляданням лише лінійних векторних просторів скінченної вимірності чи брати до уваги ще й нескінченно вимірні?

Як бути зі змістом алгебраїчної частини курсу, яка передує поняття про лінійний векторний простір? Здається, ця частина повинна містити поняття про множину, елементи теорії множин, поняття про натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні й комплексні числа, про властивості вищевказаних числових систем, теорію матриць, теорію визначників, елементами яких є елементи різних числових систем, а, може, і не тільки числових систем, теорію систем лінійних рівнянь, коефіцієнти яких є представниками різних числових систем, поняття про групу, елементи теорії груп, поняття про поле, елементи теорії полів. Матеріалу настільки багато, що розгубитися в доцільній послідовності його викладання може не лише викладач-початківець. Та й чи можна побудувати таку доцільну послідовність, наприклад, у випадку, коли на весь курс, разом з аналітичною геометрією, виділяються лише 64 години лекційних і 64 години практичних занять першого і другого семестрів навчання?

Курс аналітичної геометрії передбачає проведення міркувань у межах тривимірного евклідового простору, тобто, у межах аксіоматичної теорії, підкореній до певної аксіоматики евклідового простору. Теоретично, існує безліч різних аксіоматик евклідової геометрії. Практично, найбільш вживаними є лише скінченна кількість з них.

Ідеям вищеназваного інтегрованого курсу найбільшою мірою відповідає аксіоматика Г. Вейля (Атанасян & Базылев, 1986). (Здається, сам інтегрований курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії виник тоді, коли в основу курсів геометрії середньої школи була спроба покласти ідеї Г. Вейля.) Але зараз переважна більшість аксіоматик, покладених в основу шкільних курсів геометрії є схожими на аксіоматику Погорелова (1995). Отже, надалі під тривимірним евклідовим простором розуміти аксіоматичну теорію, підкорену саме аксіоматиці О. В. Погорелова евклідової геометрії.

Під геометричною фігурою евклідового простору розуміють довільну його підмножину.

Аксіоматична теорія евклідової геометрії є тією аксіоматичною теорією, що в найточнішому степені відповідає властивостям просторових форм безпосередньо оточуючого людину середовища. Отже, одночасно з обґрунтуванням положень евклідової геометрії ми, як правило, отримуємо певні знання і з так званої «фізичної» геометрії (реальної геометрії навколишнього середовища).

Аналітична геометрія для дослідження геометричних фігур евклідового простору застосовує спеціальний метод — метод координат (у курсі геометрії середньої школи ті ж самі геометричні фігури головним чином вивчаються іншими, так званими, елементарними методами).

Застосування методу координат починається із запровадження в евклідовому просторі системи координат. А найпростішими серед систем координат є так звані афінні системи координат (прямокутні декартові системи координат є їх окремими випадками). Формули переходу від однієї афінної системи координат до іншої (формули, за якими координати точки відносно нової системи координат виражаються через координати цієї точки відносно попередньої системи координат) мають вигляд трьох лінійних функцій від трьох змінних.

У стандартному курсі аналітичної геометрії досліджуються не будь-які фігури евклідового простору, а лише такі, які відносно обраної афінної системи координат задаються аналітичними умовами, що мають вид рівнянь і нерівностей першого і другого степеня відносно трьох змінних, систем або сукупностей таких рівнянь і нерівностей. При зміні афінної системи координат тип подібних аналітичних умов не змінюється. Саме це дозволяє ті висновки щодо їх дослідження, які не залежать від вибору афінної системи координат, інтерпретувати як певні відомості про відповідні геометричні фігури.

У межах аналітичної геометрії розглядають лінійні відображення евклідового простору в себе й лінійні перетворення цього простору, які називають афінними перетвореннями (Моденов, 1967). Одночасно розглядають тривимірний лінійний векторний простір, асоційований до даного евклідового простору, визначають, яким чином лінійні відображення евклідового простору породжують лінійні відображення асоційованого лінійного векторного простору, і навпаки. У основу класифікації лінійних відображень евклідового простору покладено класифікацію лінійних відображень асоційованого лінійного векторного простору за характером їх власних значень і власних векторів.

Саме така структура курсу аналітичної геометрії робить його ідейно близьким до курсу лінійної алгебри. Але все це не забезпечує автоматично органічного поєднання цих курсів у межах спільного навчального предмету.

Автори пропонують доцільну зі своєї точки зору послідовність розглядання необхідних тем у межах відповідного інтегрованого курсу. При цьому пропонуються суттєві обмеження щодо «алгебраїчної» частини курсу.

1. Елементи теорії множин. Відношення. Відношення еквівалентності. Фактор-множина.

2. Множина натуральних чисел та її основні властивості.

3. Відображення множин. Потужність множини. Фактор-відображення.

4. Множина цілих чисел. Звичайні дроби. Множина раціональних чисел. Поняття про множину дійсних чисел.

5. Матриці та визначники.

6. Системи лінійних рівнянь.

7. Поняття про напрямлений відрізок евклідового простору, про рівні напрямлені відрізки, про зв'язний вектор, ковзний вектор та вільний вектор на площині та у просторі.

8. Додавання, віднімання векторів, множення вектора на число, лінійна залежність та лінійна незалежність векторів, їх геометричний зміст, скалярний добуток векторів, векторний і мішаний добутки векторів, їх алгебраїчні та геометричні властивості.

9. Поняття про групу, підгрупу. Приклади.

10. Поняття про поле, підполе. Приклади.

11. Поняття про лінійний векторний простір над полем всіх дійсних чисел. Вимірність лінійного векторного простору. Приклади.

12. Лінійні відображення та лінійні перетворення лінійних векторних просторів. Власні вектори та власні значення.

13. Афінна та прямокутна декартова системи координат на площині та у просторі.

14. Прямі та площини тривимірного евклідового простору.

15. Криві другого порядку, поверхні другого порядку тривимірного евклідового простору.

16. Лінійні відображення евклідового простору. Лінійні відображення фігур евклідового простору.

Список літератури

Атанасян, Л. С. & Базылев, В. Т. (1986). *Геометрия: Учебное пособие.* (Ч. 1). Москва: Просвещение.

Моденов, П. С. (1967). *Аналитическая геометрия.* Москва: МГУ.

Погорелов, А. В.(1995). *Геометрия*: *Учебник* (5-е изд.). Москва: Просвещение.

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ, ПАНОВЕ, ЩО ТАКЕ «ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ»?

В. В. Дрозд

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Доповідь присвячена питанню змісту та структури такої важливої складової самостійної роботи студентів спеціальності «Математика» як домашнє завдання.

Ключові слова: самостійна робота студентів, домашнє завдання, типова розрахункова робота.

«Ще б пак, — скажете ви, — хто ж не знає, що таке домашнє завдання?» Хто не вчився в школі? Усі вчилися. Хто не знає, що таке домашнє завдання? Усі знають. На жаль. Найгнітючиші спогади про шкільне дитинство — це підйом о шостій годині, мокра вермішель з мокрою сосискою на сніданок і, звичайно, домашні завдання. Які кожного дня висіли над головою як дамоклів меч. І все, все юнацьке життя — коту під хвіст. Через що? А саме через домашні завдання. «Семене, виходь на вулицю». «Не можу». «А чому?» «Я роблю домашні завдання». Потім мати цього Семена всім родичам буде до самої смерті розповідати: «Мій хлопчик у дитинстві був таким старанним. Йому друзі з вулиці весь час гукають: Семене, виходь. А він: ні, не можу, я роблю домашні завдання». До-маш-нє зав-дан-ня! Це якесь прокляття. Прокляття всього дитинства. Та й юності. Прокляття, якщо це завдання робити. Та ще й кожен день. А якщо не робити… Тоді треба на перерві встигнути прочитати параграф підручника з історії, або списати задачки з математики в сусіда-відмінника. Ну і якось там… Може не спитають, може пронесе.

І повірте, ці спогади про дитинство, про шкільне життя, про шкільні звички закарбовані в нашій пам'яті сильніше, ніж спогади про армію в чоловіків чи спогади про перші пологи в жінок. Не вірите? Я доведу вам це за хвилину. Уявіть собі, що на початку місяця вам треба з'ясувати, яким днем тижня буде 16-те число. Як ви будете рахувати дні? Подумки? По календарю? Ні, по щоденнику. По шкільному щоденнику. Чи не так?

Коротше кажучи, якщо б я був психологом, я б уважав, що феномен «шкільне домашнє завдання» має сакраментальне, магічне, а іноді й фатальне значення для формування особистості юної особи. Щоправда, ті ж психологи встановили, що коли ми щось згадуємо, ми згадуємо не саму подію, а наші останні спогади про неї. І так щоразу. Що ж там залишається після сорока тисяч згадувань? Хто зна, можливо, усе не так вже й погано?

Як би там не було, але рано чи пізно закінчуються «школьные годы чудесные». І починається доросле життя. Для багатьох — це студентське життя. З тими ж самими домашніми завданнями. Що поробиш — нікуди від них не втечеш. Стривайте. Може в цьому новому житті, де явно більше свободи, самостійності та відповідальності, може тут і домашні завдання задають якось інакше, якось «по-дорослому», без фанатизму? Нумо розбиратися.

Не торкатимемося гуманітарних дисциплін. Сконцентруємось на викладанні математики. Регулярно заходячи в ту чи іншу аудиторію Київського політеху, я бачу на дошці якісь математичні формули і, як правило, у правому верхньому кутку цифри на кшталт: 3546—3556. Очевидно, що ці цифри означають номери задач з якогось збірника, які викладач запропонував студентам як домашнє завдання. Представники прогресивних методів викладання заволають: «Це вчорашній день! Домашні завдання треба надсилати студентам через інтернет в електронному вигляді. І самі лекції треба надсилати в електронному вигляді. І практичні заняття треба надсилати…». Ну і так далі.

Але справа не в тому, у якій формі задавати домашнє завдання. Справа в тому, який його зміст, яка його структура, яка його мета. А може, навіть, у тому, чи треба воно взагалі — це сакраментальне домашнє завдання. Усі ми чули про визначних педагогів, які так чудово викладають свій предмет, що слухачам не потрібні ніякі домашні завдання. Але подібних талантів — одиниці. А викладачів треба багато. І вони такі, які є. Як казав товариш Сталін: «Нет у меня для вас других писателей».

Отже виходить, що домашнє завдання — це життєва необхідність. «Знання закріплюються вправами — ця істина незаперечна» (Шегда & Кулініч, 2014). І тут ми повертаємось «до наших баранів». Так що ж таке «домашнє завдання»? Як правило, це 7—8 прикладів з парними номерами. Чому з парними? Тому що приклади з непарними номерами було розв'язано на практичному занятті. Далі цю «самостійну роботу обов'язково треба оцінювати» (Петропавловська, 2015). Інакше який у ній сенс? Але як оцінювати? Якщо ретельно перевіряти так звану «наявність відсутності» розв'язків, 90% студентів будуть їх просто списувати. І знову губиться будь-який сенс цього заходу. Якщо ж оцінювати кожного студента, чи сам він зробив запропоновані приклади, то на це піде якраз ціле практичне заняття. Ви скажете, існують різні тести, короткочасні контрольні роботи тощо. Але тести виявляють знання студента, а не наявність списування. Таку наявність може виявити тільки тест, створений спеціально для даного домашнього завдання. Сподіваюсь, збірники таких завдань з тестами до кожного з них колись стануть реальністю. До речі, над цим варто подумати.

А поки повернімось на нашу грішну землю. Як бачимо, каменем спотикання є той факт, що традиційне домашнє завдання містить однакові приклади для всіх студентів. Дехто, правда, скаже, що саме в цьому й полягає торжество справедливості. Мовляв, це несправедливо, якщо студенти на контрольній чи на екзамені одержують білети з різними прикладами. Приклади повинні бути в усіх однакові. Крапка! Я б погодився з цим, якщо б ми мали справу не з реальними студентами, а зі «сферичними кіньми у вакуумі». Або кожен студент від канікул до канікул сидів би в одиночній камері. Оскільки це неможливо, нам треба кардинально поміняти наші погляди на структуру домашнього завдання. До речі, з такої ж причини абсолютно неможливо провести більш-менш об'єктивний експеримент у медицині. Медики кажуть: «Щоб стверджувати, що кава корисніше за чай, треба сотню близнюків розлучити після народження, кожну половину помістити в окремий концтабір, одній половині все життя давати тільки каву, а іншій — тільки чай». Але це просто неможливо.

Нам не першій рік наголошують, що «у зв’язку з реформуванням вузівського освітнього процесу… виникає ряд проблем, зокрема це змістовна проблема». (Клімова, Сапронова, 2015). І проблема змісту домашніх завдань — не в останню чергу. З усього, що сказаного вище, випливає, що принаймні частина домашнього завдання повинна складатися з індивідуальних вправ. «Навіщо ж ломитися у відчинені двері? — спитаєте ви, — саме з таких вправ і складається типова розрахункова робота (ТР)». Дійсно, це так. Але більшість викладачів чомусь не сприймають ТР як складову домашнього завдання. Традиційне домашнє завдання виконується перед черговим практичним заняттям. Як кажуть, тут і зараз. А ТР захищається в кінці семестру або перед черговою атестацією. Виходить, що ТР — це завдання, відкладене в часі. Це завдання на весь семестр, або його половину.

З методичної точки зору раціональніше було б, щоб відповідний розділ з ТР був саме частиною домашнього завдання. Але наші збірники завдань для ТР традиційно містять один чи два приклади з кожної теми. А треба разів у п’ять більше. І над цим треба працювати. Це повинні бути завдання індивідуальні, однорідні за складністю та типові. Тобто виконуватись за принципом: «Эй, посмотри на меня. Делай как я. Делай как я!» А це означає, що ця частина домашнього завдання повинна бути обов’язковою до виконання. І не на 60%, як пишеться в деяких документах, а на всі сто.

Що ж стосується іншої частини домашнього завдання, вона повинна складатися із двох-трьох завдань середньої та підвищеної складності. Це повинні бути цікаві, нестандартні, іноді навіть курйозні завдання. Особливо, якщо мова йде про викладання на спеціальності «Математика». І звісно, ці завдання не повинні бути обов’язковими до виконання. По-науковому це звучить так: «коли виникає мова про самодіяльність, то постає питання про співвідношення продуктивної (творчої) та репродуктивної (нетворчої) людської діяльності». (Домбровський, 2014). Наведемо декілька прикладів нестандартних завдань.

До теми «Сума прогресії». Попелюшка несе бабусі пиріжки. Вона повинна пройти через n мостів. На кожному мосту вартовий відбирає в неї половину пиріжків та віддає назад один. Скільки пиріжків треба винести з дому, щоб бабусі принести два пиріжка?

До теми «Довжина кривої». Мотузку рівномірно натягнули на циліндр, зробивши чотири оберти. Довжина кола основи циліндра — 4 см, висота циліндра — 12 см. Без допомоги вищої математики знайдіть довжину мотузки.

До теми «Десяткові числа». Візьміть будь-яке трицифрове число, цифри якого йдуть у порядку зменшення. Поміняйте в ньому порядок цифр на обернений. Відніміть від першого числа друге. До одержаного числа додайте число, яке складається з тих самих цифр, але записаних в оберненому порядку. І ви одержите число 1089. Чому?

До теми «Ділення цілих чисел з остачею». Пірати вирішили поділити награбоване золото порівну. Коли капітан спробував це зробити, 3 монети виявились зайвими. Кожен з піратів уважав, що має право на додаткову монету. Через це почалась стрілянина і Чорний Пес одержав кулю в лоба. Після цього капітан знову спробував поділити золото порівну, але тепер залишилось 5 зайвих монет. Знову почалась стрілянина і було вбито Біллі Бонса. Тепер, коли піратів залишилось 11 разом з капітаном, нова спроба поділити золото порівну нарешті з успіхом закінчилась. Скільки всього було монет, якщо їх кількість менша за тисячу?

До теми «Перетворення площини». Візьміть дві однакові монети, покладіть їх на стіл так, щоб вони дотикались одна одної і їх герби були напрямлені в один бік. Притисніть ліву монету до столу та прокрутіть праву навколо неї, поки вона не опиниться зліва від своєї сусідки. Куди буде напрямлений герб цієї монети? І чому?

Або відоме «математичне» доведення існування Бога. Якщо будь-яке число поділити на нуль, вийде нескінченність. Отже, будь-яке число є добуток нескінченності на нуль. Тобто будь-який об’єкт створений з нічого надприродною силою. Таким чином, Бог існує. Чи згодні ви з цим доведенням?

Як показує останній приклад, при вивченні математики «певне місце займають і гумористичні моменти». (Вірченко, 2013). Побільше б таких завдань і таких моментів. «Пожирней и погуще», як казав один персонаж з фільму «Дівчата». Коротше кажучи, є над чим працювати.

Список літератури

Вірченко, Н. О. (2013). Гумор як засіб для кращого розуміння математики. У *Матеріалах Другої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 20—21 грудня (с. 152). Київ: КПІ.

Домбровський, М. А. (2014). Якість самостійної роботи студентів при вивченні математичних дисциплін в сучасних умовах освіти. У *Матеріалах Третьої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 25—26 грудня (с. 344—346). Київ: КПІ.

Клімова, Т. І., & Сапронова, Т. М. (2015). РГР як вид індивідуального завдання для ефективної самостійної роботи з вищої математики. У *Матеріалах Четвертої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 24—25 грудня (с. 174—176). Київ: КПІ.

Петропавловська, Г. О. (2015). Активізація навчального процесу й організація самостійної роботи під час вивчення математичного аналізу іноземними студентами ОМА. У *Матеріалах Четвертої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 24—25 грудня (с. 197—200). Київ: КПІ.

Шегда, Л. М., Кулініч, Г. М. (2014). Значимість самостійної роботи студентів при вивченні вищої математики. У *Матеріалах Третьої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 25—26 грудня (с. 216—219). Київ: КПІ.

СУЧАСНІ ВИМОГИ ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У ВНЗ

П. В. Задерей, О. Б. Нестеренко
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна
zadereypv@ukr.net, nesterenkoolha@gmail.com

У доповіді розглянуто актуальні питання математичної підготовки студентів технічних ВНЗ.

Ключові слова: інженерна освіта, підготовка інженерних кадрів, математична освіта інженерів.

Основним завданням технічного університету тепер є підготовка висококваліфікованого інженера, конкурентоспроможного на вітчизняному та міжнародному ринках праці.

В останні роки набула широкої популярності книга «Переосмысливание инженерного образования. Подход CDIO», у якій інженерна освіта ставиться в контекст інженерної діяльності, що включає планування, проектування, виробництво і застосування (Conceiving, Designing, Implementing and Operating — CDIO), тобто повний життєвий цикл інженерних процесів, продуктів і систем. Концепція CDIO Initiative спрямована на вирішення уявного протиріччя і встановлення консенсусу між теорією і практикою в інженерній освіті. Основою модернізації інженерної освіти відповідно до концепції CDIO є підготовка випускників до комплексної інженерної діяльності (Кроули, Малмквист, Остлунд, Бродер & Эдстрем, 2015).

Феномен глобалізації та інтенсивний інноваційний розвиток як окремо взятої області діяльності людини, так і окремих країн, висувають вимоги до інтенсивного підвищення якості інженерної освіти. При цьому немає єдиної думки у означенні терміну «якість освіти», оскільки особливістю освіти є те, що її якість не можна повністю оцінити безпосередньо у процесі навчання. Набуті знання проявляються лише згодом, у практичній діяльності фахівця.

Відмінною рисою технічних університетів повинно бути раціональне поєднання університетського рівня навчання з передовими досягненнями традиційної інженерної освіти. Таке поєднання може бути реалізовано лише шляхом пріоритетного посилення циклу загальнонаукових дисциплін і, у першу чергу, математичної підготовки студентів (Морозова, 1996).

Немає особливої потреби доводити, що в технічному ВНЗ математика є базовою навчальною дисципліною, яка визначає успіхи студентів при засвоєнні інших природничо-наукових і фахових дисциплін. Ефективність використання природних ресурсів, створення інноваційної економіки й сучасних технологій залежать від рівня математичної науки, математичної освіти і від ефективного використання сучасних математичних методів.

Високі вимоги до підготовки інженерних кадрів викликають необхідність абсолютно нових підходів до математичної освіти майбутніх інженерів. Ступінь розвитку будь-якої науки визначається тим, наскільки в них використовується математика. Це стосується всіх галузей знань, без винятку. Тому математика викладається на перших курсах технічних ВНЗ, інакше немає сенсу рухатися далі, на наступні етапи навчання. Можливо, не всі розділи математики використовуються в подальшому у практичній діяльності інженера, проте тільки розрахунок може показати правоту або помилковість запланованих дій.

У технічних ВНЗ необхідний взаємозв'язок загальноосвітньої і професійної підготовки. Тобто навчання математиці повинно мати професійну спрямованість. А для цього необхідними є професійно-орієнтовані приклади і завдання, щоб такі абстрактні математичні поняття як, наприклад, «дивергенція», «градієнт», «циркуляція векторного поля», «потік векторного поля» набували професійного змісту.

Практика показує, що завдання типу «розв'язати рівняння» або «обчислити інтеграл» викликають у студентів менші труднощі, ніж ті, де потрібно, спочатку скласти рівняння або записати інтеграл. А завдання, де потрібно пояснити або проаналізувати отриманий результат, заганяють студента у глухий кут.

Порівняльний аналіз викладання математики для інженерів в Україні та Європі свідчить, що в європейській освіті акцент зроблений на практичному застосуванні математики, а в Україні пріоритет відданий теоретичним аспектам і доведенням теорем, які студенти намагаються просто запам'ятати, щоб викласти на іспитах, не усвідомлюючи їх. Низька навчальна мотивація студентів пов'язана з недооцінкою значущості математичної освіти.

Студенти мають добре засвоїти суть математичних понять, розуміти означення та властивості основних математичних об'єктів, як, наприклад, похідна, інтеграл, диференціальне рівняння та інші, знати способи їх обчислення, сильні і слабкі сторони кожного з методів розв'язання.

Інженерам потрібна така математика, яка буде використовуватись у їх професії, тому на заняттях слід демонструвати студентам приклади застосування математики при вирішенні конкретних сучасних проблем. Розв'язання такої прикладної задачі має, за можливості, супроводжуватися презентацією, яка б дозволила студенту побачити або уявити статичну й динамічну візуалізацію математичної моделі і процес обчислення. У такому випадку, у студентів не буде втрачатися інтерес до вивчення математики.

Важливо знайти оптимальне співвідношення фундаментальності і професійної спрямованості навчання математики. А, щоб показати студенту роль математики в майбутній професійній діяльності, викладач повинен бути добре обізнаним у відповідній інженерній тематиці.

Прогрес можливий тільки на основі нових знань. У математичній науці сформувалися нові ідеї, теорії і цілі напрямки, отримали розвиток нові математичні методи, вона збагатилася визначними результатами. Центральним об'єктом стало поняття математичної моделі, яке й зародилося власне з розвитком математики. Математична наука перетворилася на потужний інструментарій аналізу і прогнозування технічних і технологічних процесів, природних явищ, громадських ситуацій. А в поєднанні з колосальними можливостями комп'ютерних технологій вона пробудила новий напрямок наукового пізнання — математичне моделювання та математичний експеримент. Тому сьогодні не можна готувати фахівців завтрашнього дня, не включаючи до навчальних програм базової математичної підготовки розроблені в останні десятиліття нові розділи математики (Герасимчук, 2013).

Список літератури

Морозова, В. Д. (1996). *Введение в анализ,* выпуск I. Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Кроули, Э., Малмквист, Й., Остлунд, С., Бродер, Д., & Эдстрем, К. (2015). *Переосмысливание инженерного образования. Подход CDIO*. Москва: Издательский дом Высшей школы экономики.

Герасимчук, В. С. (2013). *Математическая подготовка инженера: Пути совершенствования*. Київ: КПІ. Взято из: http://kpi.ua/print/11021.

ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ НОРМАЛЬНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ФІ-ЦИРКУЛЯНТНОЮ МАТРИЦЕЮ КОЕФІЦІЄНТІВ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Нормальні лінійні системи

$$y' = A(x)y \tag{1}$$

з матрицею їх коефіцієнтів у разі сталих її власних векторів інтегруються у квадратурах узагальненою підстановкою Ейлера (Калайда, 2014)

$$y = \alpha e^{\int \lambda(x)dx}, \alpha = const \tag{2}$$

До таких класів систем (1) належать, як відомо, системи зі сталими коефіцієнтами (Ляшко, Боярчук, Гай & Калайда, 1987), а також, як встановлено в Калайда (2014), системи зі змінними коефіцієнтами з циркулянтною матрицею $A(x)$. Виявляється, що це стосується і систем з фі-циркулянтною матрицею. При цьому, як і в попередньому випадку, підстановка (2) в (1) приводить до алгебричної спектральної задачі для матриці $A(x)$

$$A(x)\alpha = \lambda(x)\alpha. \tag{3}$$

Звідси й випливає, що саме в разі сталих власних векторів α матриці $A(x)$ чинна підстановка (2). При цьому побудова загального розв'язку

$$y(x) = U(x)C, \forall C,$$

де $U(x)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи (1) здійснюється за тими ж правилами (випадки простих та кратних власних чисел-функцій $\lambda_j(x)$ матриці коефіцієнтів), що й у разі сталих коефіцієнтів системи. Проілюструємо це на прикладі системи двох рівнянь з фі-циркулянтною матрицею коефіцієнтів

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y.$$

Маємо:

$$\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi, \alpha_1 = (1\ i)^T = const, \alpha_2 = (1 - i)^T = const,$$

а отже,

$$y(x) = \left(\alpha_1 e^{\int \lambda_1(x)dx}\ \alpha_2 e^{\int \lambda_2(x)dx}\right) C, \forall C = (C_1\ C_2)^T.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2014). Про дослідження на стійкість одного класу нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь. У *Матеріалах XV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 1, с. 132). Київ: КПІ.

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1987). Математический анализ. (Ч. 3). Киев: Головное изд-во Издательского объединения «Вища школа».

ПРО МЕТОД ЛАГРАНЖА ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ НА ЕКСТРЕМУМ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Як відомо, дослідження інтегральних функціоналів

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{1}$$

здійснюється на множині допустимих функцій методом Ейлера, а також більш близьким до диференціального числення функцій методом Лагранжа (Калайда, 1999). Суть останнього, відомо, полягає у тому, що допустимі функції (варіації функцій)

$$x \mapsto y(x) = y_0(x) + \alpha\eta(x),\ \forall\eta, \tag{2}$$

де $y = y_0(x)$ — екстремаль функціонала, α — числовий параметр, $z = \eta(x)$ — довільна функція довільного знаку, тобто $\alpha\eta(x)$ — є відхилення допустимих функцій від шуканої екстремалі функціоналу (1). Щоб ще більше наблизити метод Лагранжа до диференціального числення функцій, доцільно у (2) вважати функції η знакосталими, так що відхилення допустимих функцій від екстремалі здійснюватимуться за рахунок параметра α. Інакше кажучи, замість допустимих функцій (2) покладати допустимі функції виду

$$x \mapsto y(x) = y_0(x) + \alpha\eta^2(x),\ \forall\eta,\ \eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{3}$$

Виявляється, що такий підхід не змінює рівняння Ейлера — Лагранжа. Справді, на множині допустимих функцій (3) маємо функцію параметра α :

$$\alpha \mapsto \Phi(\alpha) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \alpha\eta^2(x), y_0' + \alpha 2\eta(x)\eta'(x))dx.$$

Отже, у разі екстремуму функціоналу (1) маємо

$$J(y_0) = \Phi(0) \Rightarrow \Phi'(0) = \int_a^b (F_y'(\cdot)\eta^2(x) + F_{y'}'(\cdot)2\eta(x)\eta'(x))dx = 0\,,$$

звідки після інтегрування частинами другого доданку дістаємо рівність

$$\Phi'(0) = F_{y'}'(x, y_0(x), y_0'(x))\eta^2(x)\Big|_a^b + \int_a^b (F_y'(\cdot) - \frac{d}{dx}F_{y'}'(\cdot))\eta^2(x)dx = 0,$$

з якої випливає те саме рівняння Ейлера — Лагранжа (згідно з основною лемою, яка, до речі, тут безпосередньо випливає з першої теореми про середнє в інтегральному численні) та, відповідно, ті самі можливі додаткові умови в межових точках.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (1999). *Варіаційне числення: Навчальний посібник.* Київ: Видавничий центр «Київський університет».

ПРО ПЕРШУ ТЕОРЕМУ ПРО СЕРЕДНЄ В ІНТЕГРАЛЬНОМУ ЧИСЛЕННІ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Перша теорема про середнє в інтегральному численні доводиться однаково в усіх випадках. А ось формулюється, а потім знову доводиться так само, чомусь окремо для одновимірних, двовимірних та тривимірних інтегралів (у цьому легко переконатись з будь-яких посібників з математичного аналізу, наприклад, Ляшко, Боярчук, Гай та Калайда (1983; 1985)). Це, на нашу думку, зайва трата навчального часу. Чому цього не можна зробити один раз для інтегралів будь-якої вимірності для довільних областей хоча б для неперервних підінтегральних функцій. Адже метод доведення теореми один і той самий. Наведемо тут формулювання та доведення такої загальної теореми.

Теорема. *Для неперервних функцій (одна з них невід'ємна) f, g справедлива рівність*

$$\int\limits_{\Omega} f(P)g(P)d\omega_p = f(c)\int\limits_{\Omega} g(P)d\omega_p,\ c \in \Omega, \tag{1}$$

якщо точки (області інтегрування) максимального M та мінімального m значення функції f можна з'єднати неперервною кривою L, належною області Ω.

Доведення традиційне: з нерівностей, припускаючи невід'ємність функції g,

$$mJ(g) \le J(fg) \le MJ(g)$$

з огляду на неперервність функції f на лінії L існує середня точка c на цій лінії, а отже, в області інтегрування, що справджується рівність (1).

Зауважмо, що з рівності

$$J(fg) = 0$$

та рівності (1) при довільній функції g випливає рівність

$$f(P) \equiv 0$$

(основна лема варіаційного числення).

Список літератури

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1983). Математический анализ. (Ч. 1). Киев: Головное издательство издательского объеди-нения «Вища школа».

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1985). Математический анализ. (Ч. 2). Киев: Головное издательство издательского объединения «Вища школа».

ДО РОЗКЛАДЕННЯ ПРАВИЛЬНОГО ДРОБУ ПРИ КРАТНИХ КОРЕНЯХ ЗНАМЕННИКА

О. О. Кільчинський, І. А. Рудоміно-Дусятська, В. Є. Сновида
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна
aa.kil@i.ua, irinard@i.ua, eviktoriya@bigmir.net

Розкладення правильного дробу на елементарні складові зазвичай проводять визначенням невідомих коефіцієнтів розкладення з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (Дубовик & Юрик, 1993; Ильин & Позняк, 1982). У випадку кратних коренів знаменника відповідно до кратностей потрібна кількість невідомих і рівнянь зростає. Нами пропонується методика, за якою розкладення правильного нескоротного дробу зводиться до знаходження відрізків рядів Тейлора. Розглянемо два типи таких дробів, методику проілюструємо на прикладах.

І тип (коренями знаменника є тільки дійсні числа x_j, $j = \overline{1;s}$).

Розклад функції

$$f(x) = \frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{k_j}}$$

шукаємо у вигляді:

$$f(x) = \frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{k_j}} =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(x - x_j)^{k_j}} \left[g_j(x_j) + \frac{g_j'(x_j)}{1!}(x - x_1) + \cdots + \frac{g_j^{(k_j - 1)}(x_j)}{(k_j - 1)!}(x - x_j)^{k_j - 1} \right], \quad (1)$$

де $p(x)$ — відомий многочлен l-го степеня ($l < \sum_{j=1}^{s} k_j$, $l \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$), а функції $g_j(x)$ визначаються за рівностями:

$$g_j(x) = f(x)(x - x_j)^{k_j} \quad (j = \overline{1;s}). \quad (2)$$

Пропоновану методику проілюструємо на прикладах.

Приклад 1. Розкласти на елементарні дроби функцію

$$f(x) = \frac{3x^4 - x^3 - 32x^2 + 55x + 35}{(x + 1)^3 (x - 3)^2}. \quad (3)$$

Покладаємо

$$p(x) = 3x^4 - x^3 - 32x^2 + 55x + 35,\ x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ k_1 = 3,\ k_2 = 2. \quad (4)$$

За формулою (1) розклад функції $f(x)$ шукаємо у вигляді

$$f(x) = g_1(x_1)(x - x_1)^{-3} + \frac{g_1'(x_1)}{1!}(x - x_1)^{-2} + \frac{g_1''(x_1)}{2!}(x - x_1)^{-1} + \\ + g_2(x_2)(x - x_2)^{-2} + \frac{g_2'(x_2)}{1!}(x - x_2)^{-1}, \qquad (5)$$

де за формулами (2)—(4) матимемо:

$$g_1(x) = p(x)(x - x_2)^{-2}, \quad g_2(x) = p(x)(x - x_1)^{-3} . \qquad (6)$$

Виходячи зі співвідношень (6), подамо похідні функцій $g_1(x),\ g_2(x)$ у вигляді:

$$g_1'(x) = p'(x)(x - x_2)^{-2} - 2p(x)(x - x_2)^{-3},$$
$$g_2'(x) = p'(x)(x - x_1)^{-3} - 3p(x)(x - x_1)^{-4}, \qquad (7)$$
$$g_1''(x) = p''(x)(x - x_2)^{-2} - 4p'(x)(x - x_2)^{-3} + 6p(x)(x - x_2).^{-4}$$

$$p'(x) = 12x^3 - 3x^2 - 64x + 55,\ p''(x) = 36x^2 - 6x - 64 . \qquad (8)$$

За формулами (4) та (6)—(8) при $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ знайдемо:

$$p(x_1) = -48,\ p'(x_1) = 104,\ p''(x_1) = -22,\ g_1(x_1) = -3,\ g_1'(x_1) = 5,\ g_1''(x_1) = 4; \ (9)$$
$$p(x_2) = 128,\ p'(x_2) = 160,\ \ g_2(x_2) = 2,\ g_2'(x_2) = 1 .$$

Звідси за формулами (4), (5) та (9) отримаємо шукане розкладення:

$$f(x) = \frac{3x^4 - x^3 - 32x^2 + 55x + 35}{(x+1)^3(x-3)^2} =$$
$$= \frac{-3}{(x+1)^3} + \frac{5}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}. \ \blacksquare$$

II тип (коренями знаменника є дійсні числа $x_j,\ j = \overline{1;s}$ та пара комплексно спряжених коренів).

Розклад функції

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + bx + c)\prod_{j=1}^{s}(x - x_j)^{k_j}} \quad (b^2 - 4c < 0),$$

де $p(x)$ — відомий многочлен l-го степеня ($l < \sum_{j=1}^{s} k_j,\ l \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{N}$) шукаємо у вигляді:

$$f(x)=\frac{p(x)}{(x^2+bx+c)\prod_{j=1}^{s}(x-x_j)k_j}=\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}+$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(x-x_j)^{k_j}}\left[g_j(x_j)+\frac{g_j'(x_j)}{1!}(x-x_1)+\cdots+\frac{g_j^{(k_j-1)}(x_j)}{(k_j-1)!}(x-x_j)^{k_j-1}\right]; \tag{10}$$

функції $g_j(x)$ знаходимо за рівностями:

$$g_j(x)=f(x)(x-x_j)^{k_j}\quad (j=\overline{1;s}); \tag{11}$$

невідомі M і N знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2. Розкласти на елементарні дроби функцію

$$f(x)=\frac{8x^3+42x^2+38x+44}{(x+1)^3(x^2+4x+13)}. \tag{12}$$

Покладаємо

$$p(x)=8x^3+42x^2+38x+44,\ x_1=-1,\ k_1=3,\ b=4,\ c=13. \tag{13}$$

За формулою (10) розклад функції $f(x)$ шукатимемо у вигляді

$$f(x)=\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}+g(x_1)(x-x_1)^{-3}+\frac{g'(x_1)}{1!}(x-x_1)^{-2}+\frac{g''(x_1)}{2!}(x-x_1)^{-1}, \tag{14}$$

де за формулами (11)— (13) матимемо:

$$g(x)=p(x)(x^2+ax+b)^{-1}. \tag{15}$$

За співвідношенням (15) похідні функції $g(x)$ подамо у вигляді:

$$g_1'(x)=p'(x)(x^2+ax+b)^{-1}-p(x)(2x+a)(x^2+ax+b)^{-2},$$
$$g''(x)=p''(x)(x^2+ax+b)^{-1}-2p'(x)(2x+a)(x^2+ax+b)^{-2}- \tag{16}$$
$$-2p(x)\left[(x^2+ax+b)^{-2}-(2x+a)^2(x^2+ax+b)^{-3}\right].$$

Тут

$$p'(x)=24x^2+84x+38,\ p''(x)=48x+84.. \tag{17}$$

За формулами (13) та (15)—(17) при $x_1=-1,\ b=4,\ c=13$ знайдемо:

$$p(x_1)=40,\ p'(x_1)=-22,\ p''(x_1)=36,\ g(x_1)=4,\ g'(x_1)=-3,\ g_1''(x_1)=4. \quad (18).$$

Зі співвідношення (14) за формулами (12),(13) та (18) матимемо:

$$\frac{8x^3+42x^2+38x+44}{(x+1)^3(x^2+4x+13)}=\frac{Mx+N}{x^2+4x+13}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}. \tag{19}$$

Звідси, позбуваючись знаменника, отримаємо тотожну рівність двох многочленів:

$$8x^3+42x^2+38x+44=$$
$$=(Mx+N)(x+1)^3+\Big[2(x+1)^2-3(x+1)+4\Big](x^2+4x+13). \qquad (20)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах, зі співвідношення (20) отримаємо два рівняння для знаходження коефіцієнтів M і N:

$$x^0\Big|\ 44=N+39 \Rightarrow N=5,$$
$$x^4\Big|\ 0=M+2 \Rightarrow M=-2.$$

Підставивши значення M і N у формулу (19), матимемо шукане розкладення:

$$\frac{8x^3+42x^2+38x+44}{(x+1)^3(x^2+4x+13)}=\frac{5-2x}{x^2+4x+13}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}.\blacksquare.$$

Список літератури

Дубовик, В. П., & Юрик, І. І. (1993). *Вища математика*: *Підручник*. Київ: Вища школа.

Ильин, В. А., & Позняк, Э. Г. (1982). *Основы математического анализа*. (Ч. 1). Москва: Наука.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

А. З. Мохонько[1], Л. С. Васіна[2], В. Д. Мохонько[2]

[1]*Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна*

[2]*Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна*

ludavhome@gmail.com

Розглянуто приклади побудови емпіричних функцій задач електротехніки для самостійної роботи студентів коледжів.

Ключові слова: інтегровані практичні роботи, метод найменших квадратів, лінеаризація, задачі електротехніки, комп'ютерна реалізація.

Фахова підготовка спеціалістів, зокрема, електротехнічних спеціальностей, передбачає вміння моделювати експерименти, проводити комп'ютерне моделювання, переносити найбільш досконалий варіант у практичну площину, отримувати, обробляти та аналізувати експериментальні дані. І якщо комп'ютерне моделювання це область роботи викладачів комп'ютерних спеціальностей, то ознайомлення з методами й технологіями обробки експериментальних даних — завдання викладача математики. Одним із шляхів ефективної реалізації цього завдання, на нашу думку, є розробка інтегрованих практичних робіт для самостійної роботи студентів з вищої математики та спецдисциплін такої структури:

→ *математика* (основні теоретичні відомості);

→ *електротехніка* (прикладні задачі);

→ *комп'ютерна реалізація* (методика розв'язування з використанням Mathcad).

Наведемо фрагмент практичної самостійної роботи з Вищої математики, яка виконується студентами після вивчення диференціального числення функції багатьох змінних.

Тема роботи: Побудова емпіричних формул найпростіших нелінійних залежностей. Перетворення для лінеаризації даних.

Основні теоретичні відомості. Експериментальні дані, як правило, одержують у вигляді сукупності точок $(x_1;y_1),(x_2;y_2),...(x_n;y_n)$, абсциси яких $x_i, i=1...n$ різні. Графічна побудова нелінійної залежності не дає точної відповіді на питання, який аналітичний вираз має функція, тобто, чи буде залежність степеневою, дробово-раціональною, логарифмічною тощо. Існують аналітичні критерії існування певної залежності. Вибираємо дві надійні експериментальні точки і обчислюємо для них середні арифметичні, середні геометричні та середні гармонічні значення:

$$\overline{x_{S1}}=\frac{x_1+x_n}{2},\ \overline{x_{S2}}=\sqrt{x_1x_n},\ \overline{x_{S3}}=\frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}.$$

Якщо значення $\overline{x_S}$ є в експериментальній таблиці, то y_S^* — відповідне йому значення з даної таблиці. Якщо $\overline{x_S}$ в таблиці немає, то y_S^* знаходимо за допомогою лінійної інтерполяції:

$$y_S^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(\overline{x_S} - x_i),$$

де $x_1 < \overline{x}_S < x_{i+1}$.

Для кожної емпіричної формули визначаємо відхилення ε. Формула, для якої

$$\varepsilon = \min\left|\overline{y_S} - y_S^*\right|$$

і є найбільш придатною для апроксимації заданих табличних даних. Коли обрано криву, необхідно знайти таке перетворення змінних, яке дасть можливість отримати лінійну залежність

$$Y = AX + B$$

у новій системі координат XOY. Тоді точки з координатами $\left(X_i;Y_i\right)$ лежатимуть у цій системі координат на прямій. Для лінеаризації даних робимо заміну змінних (основні прийоми — логарифмування і знаходження оберненої величини).

Наприклад,

$$y = ax^b \Rightarrow Y = \ln y,\ A = b,\ \ X = \ln x,\ B = a;$$

$$y = \frac{1}{ax + b} \Rightarrow Y = 1 \,/\, y,\ A = a,\ \ X = x,\ B = b;$$

Отже, для побудови емпіричної формули для однієї з нелінійних залежностей необхідно:

$\rightarrow$за вихідною таблицею даних $\left(x_i;y_i\right)$ побудувавши нову таблицю $\left(X_i;Y_i\right)$, використавши відповідні формули заміни змінних;

$\rightarrow$за новою таблицею даних $\left(X_i;Y_i\right)$ методом найменших квадратів знайти параметри A та B лінійної функції $Y = AX + B$;

$\rightarrow$за відповідними формулами знайти коефіцієнти *a* і *b* нелінійної залежності.

Прикладні задачі. Нелінійні електричні кола аналізують, як правило, наближеними методами, оскільки аналітичний розв'язок практичних задач вдається знайти досить рідко. Нелінійні характеристики, переважно характеристики нелінійних компонентів кола, задаються експериментально отриманими табличними або графічними моделями. Досліджуючи поведінку нелінійного кола, інженер повинен уміти їх апроксимувати. Для спрощення аналізу до апроксимації вдаються і тоді, коли відомо аналітичний вираз характеристик нелінійних компонентів. Деколи, у якості апроксимуючої використовують аналітичну модель характеристики нелінійного елемента з коефіцієнтами, значення яких визначають за результатами експериментальних вимірювань.

Такого роду задачі зустрічаються, наприклад, при визначенні амплітуд стаціонарних коливань методом коливальних характеристик, коли для опису нелінійних властивостей активних елементів використовують коливальну характеристику $I(U)$, яку одержують експериментально або розраховують за апроксимацією вольт-амперної характеристики нелінійного елемента.

Задача 1. Методом лінеаризації визначити оптимальні параметри експоненціальної кривої вигляду $y = ae^{bx}$, яка наближає експериментальні дані (до таких задач приводить, наприклад, визначення в області малих навантажень залежності опору терморезистора від температури, яка описується виразом $R(T) = Ae^{\frac{B}{T}}$, де A та B — сталі, які залежать від фізичних властивостей матеріалу й геометрії провідникового елемента терморезистора):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	12,2	7,4	4,1	3,7	2,9

Лінеаризована форма:

$$y = ae^{bx} \Rightarrow Y = \ln y,\ A = b,\ \ X = x,\ B = \ln a.$$

У результаті одержимо лінійне співвідношення між новими змінними $Y = AX + B$.

Вихідні точки $(x_i;y_i)$, $i = 1...5$ на площині xOy перетворились в точки $(X_i;Y_i) = (x_i;\ln y_i)$ площини XOY. Розв'язуючи отриману нормальну систему

$$\begin{cases} 55A + 15B = 21{,}2941 \\ 15A + 5B = 8{,}2869 \end{cases}$$

знаходимо $A = -0{,}357$, $B = 2{,}727$.

Отже, $Y = -0{,}357X + 2{,}727$. Обчислюємо $a = e^B = e^{2{,}727} = 15{,}287$, $b = A = -0{,}357$ і ці значення підставляємо у формулу $y = ae^{bx}$. Отже, експоненціальна емпірична функція

$$y = 15{,}287e^{-0{,}357x}.$$

Методика розв'язування з використанням Mathcad. Використаємо апроксимуючу функцію **expfit(vx,vy,vg)** пакету MathCad, яка визначає вектор, що містить коефіцієнти рівняння експоненціальної регресії $ae^{bx} + c$. Ця функція апроксимує дані векторів **vx,vy.** Необхідно задати: **vx** — вектор значень дійсних даних x, які повинні представлятись у порядку зростання; **vy** — вектор значень дійсних даних y (вектори **vx, vy** повинні містити однакову кількість елементів); **vg** — вектор початкових значень параметрів a, b, c в показниковому рівнянні, який є необхідним для ініціалізації.

Послідовність дій:

$\mapsto$ уводимо вектори вихідних даних **vx**, **vy** [кнопка відображення панелі інструментів **Matrix** (Матриці)];

$\mapsto$ уводимо вектор **vg** початкових наближень шуканих параметрів a, b, c [кнопка відображення панелі інструментів **Matrix** (Матриці)].

$\mapsto$ уводимо вектор коефіцієнтів **P** [для виклику **expfit** необхідно в рядку меню обрати **Insert**(Вставити), **f(x)**(Функція), у категорії функцій **Regression and Smoothing** знайти **expfit** і ввести аргументи **vx**, **vy**, **vg**];

$\mapsto$ після вводу **P** і знака **< = >** з панелі **Evalution** (Обчислення) на екрані з'являється вектор-стовпчик коефіцієнтів P_0, P_1, P_2;

$\mapsto$ визначаємо шукані параметри a, b, c апроксимуючої функції $f(x) = ae^{bx} + c$

[$a = P_0 = 20,767,\ \ b = P_1 = -0,743,\ c = P_2 = 2,385$,

отже, шукана експоненціальна функція має вигляд

$$f(x) = 20,767e^{-0,743x} + 2,385];$$

$\mapsto$ будуємо графік отриманої емпіричної функції і заданих точок .

Результати обчислень і графічне представлення вихідних точок і апроксимуючої функції

$$f(x) = 20,767e^{-0,743x} + 2,385$$

подано на рис.1, а поруч на рис. 2 для порівняння побудовано графік експоненціальної емпіричної функції

$$y = 15,287 \cdot e^{-0,357x} \quad (R(x)),$$

знайденої аналітично:

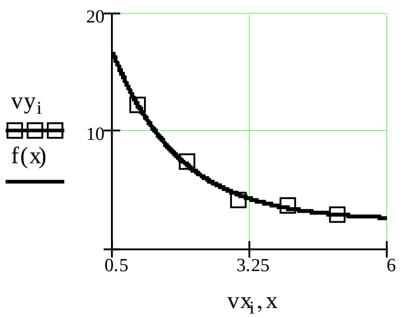


Рис. 1

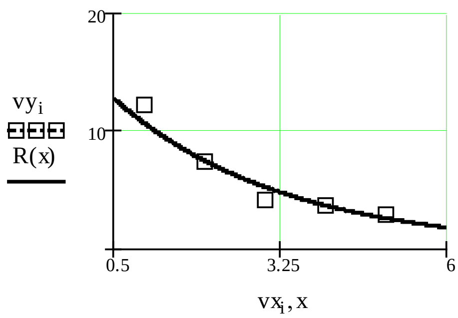


Рис.2

Розглянемо задачу про апроксимацію експериментальних даних кубічним поліномом (наприклад, апроксимація N-подібної статичної вольт-амперної характеристики тунельного діода).

Задача 2. Апроксимувати дані вимірювань, які являють собою залежність струму I (мА) від напруги U (В) за допомогою кубічного полінома (рис. 3).

$$I(U) = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3.$$

Використаємо апроксимуючу функцію **linfit**(**vx,vy,F**) пакету MathCad, яка визначає вектор, що містить коефіцієнти рівняння регресії, які використовують для створення лінійної комбінації функцій в **F** і які найкраще апроксимують дані **vx,vy.**

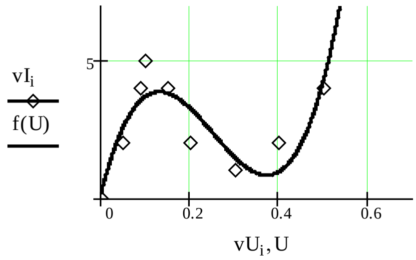


Рис. 3

Задача 3. Обрати вигляд емпіричної формули, яка найкраще наближає дану табличну залежність, лінеаризувати її та методом найменших квадратів визначити оптимальні параметри (використання функції нелінійної апроксимації Mathcad **genfit**(**vx,vy,vg,F**).

Робота за даною методикою дозволяє виробити у студентів вміння застосовувати відповідний фізико-математичний апарат до розв'язування професійних задач, що є однією із ключових компетенцій, яких має набути спеціаліст-електротехнік.

Список літератури

Анго, А. (1967). *Математика для электро- и радиоинженеров*. Москва: Наука.

Ляшенко, М. Я., & Головань, М. С. (1996). *Чисельні методи*. Київ: Либідь.

Плис, А. И., & Сливина, Н. А. (1999). *Mathcad: Математический практикум для экономистов и инженеров.* Москва: Финансы и статистика.

ДЕЩО ПРО МЕТОДИКУ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н. М. Панасюк
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
nanipa03010@gmail.com

Розглянуто деякі нові підходи, зокрема з використанням інтерактивного навчання в методиці викладання вищої математики в сучасних технічних університетах.
Ключові слова: вища математика, методика викладання.

У наш час, у зв'язку із стрімким розвитком науки і наукомістких технологій, постає гостра потреба в інженерах нової формації, з високим рівнем професійної підготовки, креативним мисленням і творчою душею. Основу формування спеціаліста творчого пошуку закладає висока математична культура, яка включає в себе, зокрема, нестандартне мислення, пошук нових ідей і нестандартних підходів. Останніми роками різко знизився рівень математичної підготовки випускників шкіл. До того ж першокурсниками стають також випускники технікумів і колежів, колишніх ПТУ, у яких зміна назви не призвела до підвищення рівня математичної підготовки. До того ж ці студенти ще мають скорочений термін навчання, тому перед викладачами постає складна задача — сформувати висококваліфікованого спеціаліста на крихкому фундаменті, підсилити який лягає саме на плечі викладачів фундаментальних дисциплін, передусім математики. Отже, перед викладачем постає дуже важка задача: навчити, образно кажучи, дитину, яка ще не тримає голівку, ходити і при тому за короткий, фізично не виправданий термін. Тому основним підходом є безпосереднє спілкування, що вимагає від викладача не тільки високого професійного рівня і методичної підготовки, а й сили духу, артистизму, гумору, нарешті, уміння заволодіти аудиторією і викликати бажання не тільки відвідувати заняття, що в більшості своїй випускники середніх спеціальних закладів не звикли робити, але й до регулярної роботи, в тому числі самостійної. Що ж робити?

Треба підняти рівень підготовки з елементарної математики, вивчаючи вищу, бо в часі ми обмежені. Деякі мої думки стосовно цього питання я вже наводила у своїх роботах. Зараз хочеться звернутись до інших моментів, а саме, власне зміни ставлення таких студентів до навчання, що відкриває перспективи в подальшому.

Треба стимулювати студентів до творчості. Створити умови, які, із психологічної точки зору, спровокують вихід із, якщо можна так сказати, законсервованого стану — «я нічого не можу і не хочу, все одно не зрозумію, якось складу» (у розумінні екзамен). У цьому, мене здається, важливу роль відіграє інтерактивне навчання. Термін *інтерактивний* походить від англійських «interact» та «act», відповідно *взаємний* і *діяти*. Тобто це процес взаємодії, діалогу як з людиною так і з комп'ютером. Останній, поки що, відкладемо в наших роздумах, бо зазначу, опосередковано до цього питання я вже зверталась, наприклад, у роботі (Панасюк, 2016). Таке навчання відбувається в постійній співпраці та активній взаємодії студентів і викладача, студентів між собою. У цьому процесі генеруються ідеї, краще засвоюється нова, у поєднанні зі старою інформація, ґрунтовніше запам'ятовується матеріал. До речі про останнє — у сьогоднішній час у студентства, та й у переважної більшості школярів, просто катастрофічний стан зі знанням формул, термінів, основних понять формулювань і бажанням це змінити. Навіть підводиться теоретичне обґрунтування, мовляв усе є в гаджетах. Навіть чула якось виступ бізнесмена, щоправда не дуже грамотного, проте з великим гонором, у якому він пропонував революційний підхід в освіті, основна ідея якого полягав в тому, що нічого вчити взагалі не треба, усе можна знайти в Інтернеті. Стоп, панове бізнесмени, не добивайте освіту, будь ласка, вона і так настраждалась! Так повернімося до сприйняття і запам'ятовування матеріалу. Не можна застосовувати, а також шукати те, чого не знаю, тобто те не знаю що. Можна забути через деякий час, наприклад формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток, але ти знаєш, що вони є, їх структуру і де їх знайти, оскільки оперував ними. Проте на це потрібен зайвий час і якщо формули використовуються в курсі, то їх треба знати. Крім того, я звертаю увагу студентів на те, що за властивістю пам'яті на другий день втрачається половина нової отриманої інформації і просто молю, прийшовши додому закріпити те, що почули і зрозуміли, попрацювати з задачами хоч трохи, аби закріпити матеріал.

Важливою в навчанні є мовленнєва діяльність, що реалізується при опитуванні. При цьому студент краще запам'ятовує матеріал, систематизує його. Інших же студентів треба заохочувати до рецензування відповіді, привертаючи їх увагу до неї, при необхідності вступати в дискусії. Таким чином відбувається активізація пізнавальної діяльності студентів, мотивація до навчання.

Одним з методів інтерактивного навчання є так званий *мозковий штурм* (brainstorming — злива ідей, генерування ідей, висування творчих ідей у процесі вирішення тієї чи іншої проблеми, що стимулюють творче мислення). Автор креативної техніки, яка отримала назву мозковий штурм, Алекс Осборн (1888 —1966). Основа методу полягає в тому, що формуються групи по 6—10 чоловік у які входить голова групи — обізнаний з технікою застосування методу, а також 1—2 людини, що зовсім не обізнані з проблемою. На другому етапі відбувається висування навіть найбезглуздіших ідей, які забороняється критикувати аби не вбити ентузіазм, особливо в неосвічених, причому допускається уточнення та комбінування ідей. Далі всі висунуті ідеї оцінюються, більшість з них відкидається, а ті, що є правильними відповідно до вибраних критеріїв — упроваджуються. Ефективність методу зменшується, якщо в групі є сильна, домінуюча особистість і якщо недостатньо кваліфіковані учасники або їх дуже багато. Ця методика споріднена з методикою *генерації ідей*, у якій відокремлюється процес створення ідеї від її оцінки, що дозволяє ефективніше генерувати нове на першому етапі, концентруючись на оригінальності і лише потім — упровадженні. Тобто основною метою є стимулювання творчості і пошуку ідей, що є мотивацією до розвитку.

А тепер стосовно навчального процесу. У сучасній педагогіці існує багато інтерактивних підходів. Одним з них є так звані *творчі завдання* до яких належить робота в малих групах. У наших умовах це розбиття студентів на групи по 3—4 студенти, у реальності це так як вони сидять в аудиторії, але в окремих випадках можна когось пересадити. Спочатку я викликаю одного із студентів до дошки для обговорення нової теми і пропоную розв'язати задачу до того ж з метою раціонального використання аудиторного часу та засвоєння основних моментів, краще одного з сильних студентів. У подальшому, коли основні моменти розглянуті, пропоную групам, яким заздалегідь роздала завдання за темою заняття колективно працювати над завданнями і слідкую, щоб не виникало ситуації, що сильніший працює, а інші чекають, та також стимулюю до праці. У цей час на дошці завершується розв'язування першої задачі, яку ми обговорюємо. Потім дізнаюсь яка група (бригада) виконала своє завдання та викликаю записати на дошці. Тепер знову працюють усі разом. До того ж вони знають, що викликати можу не лідера групи і тому стараються бути в курсі. Крім того, заохочую до змагальності між групами. Також умовами задач з розв'язками, що не були розглянуті в аудиторії, пропоную обмінятися і підготувати від групи рецензію, яку обговоримо наступним разом. Таким чином можна, по-перше, збільшити кількість задач, розглянутих в аудиторії, а по-друге, підвищувати активність студентів. Звісно такі підходи збільшують навантаження на викладача і добре, якщо йому не потрібно при цьому бігати по аудиторії у верхньому одязі. Не в будь-якій аудиторії працюють такі підходи — студенти все ж повинні мати достатню базову підготовку, але елементи наведеного вище хоча б дискретно, мені здається, добре було б застосовувати в навчальному процесі. Узагалі викладач повинен бути гнучким у своїй роботі і це стосується не тільки вибору методів викладання, а й підходів до стилю проведення занять залежно від інтегральної оцінки усередненого характеру групи. Одним підходить лише сухий академічний підхід, іншим образне, з елементами гумору й артистизму, подання матеріалу. Математика розвиває логічне мислення, формує здатність інтегрально і, одночасно з тим, критично оцінювати те, що відбувається з тобою як елементом навколишнього, зокрема викладацько-студентського середовища, твого майбуття в ньому, уміння отримати, увібрати в себе все, що доносять до тебе, на що звертають увагу і пропонують у перспективі. У кожного з таких студентів, наділеного до того ж працелюбством, є перспектива з маленького паростка вирости в могутнє дерево, з сильним корінням знань і потужним гіллям. Здатним приносити суспільству високоякісні плоди. Це важлива задача, яку, на жаль, не кожен ставить перед собою. Таке студентське «якось буде», або хочу одразу все мати треба побороти нам, викладачам і вихователям водночас. Духовність і порядність притаманні лише розвиненій, високоінтелектуальній, працелюбній особистості і тільки така людина може бути спеціалістом високого ґатунку.

Список літератури

Панасюк, Н. М. (2016). Інформаційні технології в курсі вищої математики технічного університету. У *Трудах VII Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»* (с. 168). Кам'янець-Подільський: КПНУ.

ПОГЛИБЛЕННЯ ЗНАНЬ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ГРАНИЦІ»

Н. М. Панасюк

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

nanipa03010@gmail.com

Розглянуті питання підвищення підготовки з елементарної математики студентів першокурсників технічних університетів одночасно з вивченням теми «Границі» курсу вищої математики.

Ключові слова: елементарна математика, вища математика, границі.

Як відзначалося вже неодноразово, низький рівень знань з елементарної математики сьогоднішніх першокурсників є великим гальмом в засвоєнні курсу вищої математики технічного університету, що є базою подальшого формування так потрібного нашій країні спеціаліста високого ґатунку. Найгострішою є проблема з випускниками коледжів і технікумів, які стають нашими студентами. Тому перед викладачем університету постає важлива задача поєднання викладання курсу вищої математики з елементарною. Цього питання я вже торкалась в роботі Панасюк (2016) на прикладі деяких розділів програмного матеріалу першого семестру. Звернімося тепер до теми «Границі» розділу курсу «Вступ до математичного аналізу». Наведу деякі задачі цього розділу, де, на мою думку, можна з найкращим результатом поглибити знання з елементарної на практичних заняттях з вищої математики.

Обчислюючи границі на початку теми, ми стикаємося з проблемами використання формул скороченого множення, тотожних алгебраїчних перетворень, зокрема розкладання на множники, винесення спільного множника за дужки, піднесення до степеня з цілими і дробовими показниками.

Так, при розкритті невизначеностей типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, на мою думку, більше уваги треба приділяти ірраціональним виразам, оскільки, як показує досвід проведених практичних занять, винесення та внесення під знак кореня, визначення старшого степеню підкореневого доданку викликає, на жаль, труднощі. Такими прикладами можуть бути:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^{12}+3x^{0}-1}{5x^{2}+4x^{11}-3x^{10}+2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x+x^{4}}{5x^{4}+4x^{3}-6},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^{4}+3x^{3}}+\sqrt[4]{x^{3}+2x^{4}}}{\sqrt[4]{x^{8}+2x^{6}}+\sqrt[3]{3x^{6}+x^{3}}}.$$

Зазвичай попередньо обговорюємо правила, наприклад, дії над степенями та інші при потребі. Саме обговорюємо, бо найкращим варіантом є знання студента групи, відповідь якого ми, за необхідності, лише коригуємо. Потім розглядаємо відповідні приклади з елементарної алгебри і тільки після цього переходимо до обчислення границь. Безумовно процес повинен коригуватися в залежності від складу групи. При наявності сильніших студентів потрібно давати їм додаткові завдання і стимулювати їх до самостійної роботи, а розв'язані ними задачі потім винести на дошку з поясненнями. Так і кількість розглянутих прикладів збільшиться і «герої» в аудиторії з'являться, буде на кого рівнятись.

Перейдімо до розкриття невизначеності типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, що дозволяє поглибити знання з визначення кореня многочлена, розкладання на множники, ділення многочленів. Знову розглядаємо відповідні завдання з елементарної математики і переходимо до границь. Наприклад, для обчислення границі

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$$

нам потрібно по-перше, пояснити, що якщо знаменник дорівнює нулю, то $x=1$ є його коренем, отже знаменник розкладається на множники одним з яких є $(x-1)$, а потім треба знайти інший множник наступними способами:

1) діленням тричлена знаменника на двочлен $(x-1)$, при цьому можемо після завершення обчислень в цьому прикладі навести задачі на ділення многочленів інших типів;

2) безпосередньо розв'язуємо квадратне рівняння при цьому звертаємо увагу на те, що коефіцієнт при старшому степені тричлена не дорівнює одиниці і як це треба враховувати в розкладенні, бо саме тут виникають помилки;

3) за Вієтом, при цьому задача спрощується, оскільки один корінь вже відомий. Отже на одному такому прикладі ми повторили, а часом і вивчили багато важливого матеріалу. Залишилось лише закріпити відповідними прикладами. Ще один приклад в якому ми вчимося позбуватися ірраціональності і закріплюємо винесення спільного множника за дужки та скорочення виразів:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2+x^4}.$$

Перші завдання не повинні бути громіздкими, інакше ми одразу залякаємо і знищимо надію у власні сили студента, можливість осягнути і зрозуміти. Для закріплення матеріалу розглянемо

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

а також

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}.$$

В останньому вони повинні побачити, при наявності ірраціональностей, квадрат різниці в чисельнику, а в знаменнику різницю кубів, яку ще розкласти і потім зробити скорочення виразу. Переходячи до розкриття невизначеностей типу $(\infty - \infty)$ ми вже маємо апарат застосування спряжених виразів і використовуємо його, обчислюючи границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

При цьому ми закріплюємо як матеріал елементарної математики, так і повторюємо обчислення границь типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

У задачах на застосування І чудової границі проблемними є тригонометричні вирази. Навіть з функціями $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ вони плутаються, не кажучи вже про застосування формул пониження степеню, перетворень суми в добуток і навпаки, формул зведення тощо. Тут можна підібрати багато прикладів, зокрема з Ясинський (2005). Наведемо завдання, у яких студент стикається з оберненими тригонометричними функціями, а також з методом заміни змінної і заміною еквівалентними нескінченно малими при обчисленні границь:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} \text{ або } \lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$$

Тепер до ІІ чудової границі. Тут, знов таки, відпрацювання алгебраїчних перетворень, зокрема виділення першим доданком одиниці, перенесення чисельника у знаменник, тобто обернена операція до ділення на дріб і, урешті, повторення властивостей логарифмічних функцій у відповідних прикладах, а також теореми, уже вищої математики, про обчислення границь неперервних, зокрема елементарних, функцій. Наприклад:

$$\lim_{x\to\infty}(x+6)(\ln(2x+6)-\ln(2x+1))$$

Додаючи ще задачі для самостійної роботи Берман (1985) та Ясинський (2005) по всіх моментах, які вище обговорювалися, з наростаючим ускладненням і внесенням нового, ураховуючи специфіку контингенту, ми, на мою думку, досягнемо взаємного успіху.

Список літератури

Берман, Г. Н. (1985). *Сборник задач по курсу математического анализа*. Москва: Наука.

Панасюк, Н. М. (2016). Про роль математики в розвинені творчого мислення майбутнього спеціаліста. У *Матеріалах IV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 24—25 грудня 2015 року* (с. 195). Київ: КПІ.

Ясинський, В. В. (2005). *Математика*: *Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ»*. Київ: КПІ.

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ МАТЕМАТИКІВ: КОМПЕТЕНТНІСНИЙ ПІДХІД

О. А. Поплавська, Н. М. Самарук
Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна
helen.poplavskaya@gmail.com, samaruk_nm@ukr.net

У статті розглянуто питання формування професійної компетентності майбутніх математиків, визначено компоненту структуру, подано видову класифікацію компетенцій, якими має володіти майбутній математик.

Ключові слова: майбутні математики, професійна компетентність, компетенції, компонентний склад, класифікація компетенцій.

Нині сучасний світ, наповнений IT технологіями, не може обійтись без таких факторів як аналіз, прогнозування, математичні алгоритми. Так, згідно даних сайту *careercast.com*, що вже 28 років поспіль проводить дослідження рейтингу топ-професій, які є необхідними або будуть користуватися попитом на ринку праці в найближчі десятиліття спеціальність «Математика» увійшла в десятку професій, які будуть актуальні в найближчі роки. Фахівці цієї галузі використовують математичні теорії для розв'язання економічних, наукових, інженерних, фізичних, а також бізнес-проблем. Сучасний ринок праці потребує математиків, здатних працювати в умовах швидкого розвитку інформаційного суспільства, швидко адаптуватися до постійних мінливих ситуації. Отже, постає проблема підготовки математиків нового покоління, які мають фундаментальну математичну освіту й володіють глибокими знаннями та практичними навичками. У зв'язку з цим нагальною потребою є розробка нової системи підготовки бакалаврів спеціальності 111 «Математика». Одним із сучасних шляхів модернізації вищої освіти є перехід від системи функціональної підготовки до компетентнісного розвитку особистості. Компетентнісний підхід орієнтується на сучасний ринок праці, використання таких технологій та знань, що задовольняли б потреби інформаційного суспільства. Усе це вимагає спеціального наукового дослідження.

Аналіз досліджень і публікацій. Основи теорії компетентнісного підходу досліджували як вітчизняні, так і зарубіжні науковці: Ю. Бабанський, В. Байденко, В. Беспалько, І. Зимняя, Н. Кузьміна, А. Маркова, О. Пометун, О. Овчарук, В. Сластьонін, Л. Романишина, А Хуторськой та ін. Аналіз науково-педагогічної літератури показав, що більшість дисертаційних робіт присвячена розгляду загальних аспектів математичної підготовки студентів педагогічних ВНЗ (В. Бевз, Г. Бевз, М. Бурда, О. Дубинчук, А. Кузьмінський, Ю. Мальований, О. Матяш, В. Монахов, А. Мордковича, В. Моторіна, Г. Михалін, О. Скафа, З. Слєпкань, Н. Тарасенкова, О. Чашечнікова, В. Швець та ін.). Проте, малодослідженою залишається проблема визначення змісту та розробки структури, професійної компетентності майбутніх математиків.

Метою статті є виявлення поняття «професійна компетентність майбутнього математика», визначення її компонентної структури, класифікації професійних компетентностей майбутніх математиків.

Відповідно до «Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012—2021 роки» одним із ключових напрямків розвитку освіти, що забезпечує підвищення якості освіти та її інтеграцію у світовий освітній простір є «модернізація структури, змісту й організації освіти на засадах компетентнісного підходу, переорієнтації змісту освіти на цілі сталого розвитку» (Указ президента України, 2013, с. 5). Згідно з принципами Болонського процесу замість парадигми освіти ЗУН (знання, уміння, навички), яка реалізується у традиційній системі навчання та орієнтована на засвоєння студентами предметних, рознесених по багатьох навчальних дисциплінах знань, умінь та навичок, пропонується використовувати принципово нову парадигму вищої освіти CBE (Competence-based education), засновану на формуванні у студентів певних компетенцій та діагностуванні рівня компетентностей фахівців-випускників вищих навчальних закладів як результату вищої освіти (Tate, 1995). У теорії компетентнісного підходу виділяються дві базові категорії: компетенція і компетентність.

На думку вітчизняних та іноземних науковців, компетентність — це інтегрована особистісно-діяльнісна категорія, яка формується під час навчання в результаті поєднання початкового особистого досвіду, знань, способів діяльності, вмінь, навичок, особистісних цінностей та здатності їх застосування в процесі продуктивної діяльності стосовно кола предметів та процесів певної галузі людської діяльності (Адам, 2005). У контексті нашого дослідження актуальним є розгляд ще одного базового поняття компетентнісного підходу — «компетенції». У великому тлумачному словнику сучасної української мови знаходимо таке тлумачення терміна «компетенція»: добра обізнаність у чому-небудь; коло повноважень якої-небудь організації, установи чи особи (Бусел, 2001, с. 445). Отже, під компетенцією розуміють деяку відчужену, наперед задану вимогу до освітньої підготовки бакалавра, а під компетентністю — вже сформовану його особистісну якість (характеристику).

Відповідно до цілей статті розглянемо трактування в науково-педагогічній літературі поняття «математична компетентність». Мета математичної підготовки студентів полягає у формуванні математичної компетентності випускника як професійної якості, тобто в пошуку правильного балансу між практичним застосуванням математичних теорій і глибоким розумінням математичного апарату (Грицюк & Беспарточна, 2016, с. 440). Дослідник С. Раков уважає, що математична компетентність — це здатність застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і методи математичного аналізу та моделювання, уміння будувати математичні моделі, досліджувати їх методами математики, давати практичне пояснення отриманим результатам, оцінювати похибки обчислень (Раков, 2005, с. 5). Підтримуючи думку авторів, професійну компетентність майбутнього математика розуміємо як *якість особистості, що виявляється у здатності розв'язувати професійні завдання на підставі володіння математи-*

чним апаратом, фундаментальними і практико-орієнтованими математичними методами та технологіями.

Повноцінний розгляд поняття «компетентність» неможливий без визначення її **компонентного складу**. Наприклад, дослідниця М. Марко, розглядаючи математичну компетентність як інтегровану характеристику особистості, зазначає, що вона включає наступні компоненти (Марко, 2014). Мотиваційний компонент представляє собою мотивації навчально-пізнавальної діяльності студентів, інтерес до майбутньої професійної діяльності; самооцінка професійної підготовки. Когнітивний компонент — це сукупність спеціальних (предметних) знань, а також ціннісних орієнтацій. Операційно-діяльнісний — сукупність умінь, необхідних для досягнення якості та високих результатів професійної діяльності. Цей компонент відображає ступінь практичної готовності майбутнього фахівця до застосування математики в професійній діяльності (Марко, 2014). Ці компоненти, перебуваючи у взаємозв'язку і взаємозалежності, зумовлюють цілісність структури математичної компетентності та визначають її зміст. На основі аналізу наукових праць ми виділяємо наступні ***компоненти*** професійної компетентності майбутніх математиків: *когнітивній* компонент (знання в галузі математичних наук), *операційно-технологічний* (професійні уміння у прикладній сфері та професійні математичні навички), *особистісний* (мотиваційно-ціннісну орієнтацію до реалізації математичних знань у будь-якій сфері, особистісні, навички спілкування, соціальна взаємодія та співпраця, що дають додаткові конкурентні переваги).

Розглянемо професійну компетентність випускника математичного фаху в іншій площині з точки зору **видової класифікації компетентностей**. У процесі розробки освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів зі спеціальності 111 «Математика» ми враховували той перелік результатів навчання — компетенцій, які студент-випускник повинен продемонструвати після успішного освоєння освітньої програми (знання, уміння, навички, здатності виконувати тощо) (Захарченко та ін., 2014). Увесь спектр професійних компетенцій, якими має володіти майбутній математик поділяємо на окремі групи за певною характерною ознакою — види професійної компетентності (Самарук & Поплавська, 2017). За основу класифікації було використано основні підходи до побудови освітніх програм, запропоновані у проекті Тюнінг, та таксонометрію Блума щодо формулювання результатів навчання (Захарченко та ін., 2014). На нашу думку, професійна компетентність майбутнього математика є інтегративною сукупністю наступних видів компетентностей, що співвіднесені з виділеними компонентами. Авторську розробку компонент, видів та компетентностей та відповідного їм переліку компетенцій наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Структура професійної компетентності майбутнього математика

Компо-нент	Компетентність	Компетенції
Когнітивний	*Аналітично-дослідницька* — здатність і готовність застосовувати основні поняття та методи математичних дисциплін для аналізу, дослідження та розв'язання професійних задач, що виникають при проведенні наукових та прикладних досліджень	– уміння використовувати фундаментальні знання із професійно орієнтованих дисциплін у майбутній професійній діяльності; – уміння здійснювати доведення, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, формулювати результати, бачити наслідки цих результатів; – володіння основними та спеціальними математичними методами при аналізі й дослідженні проблем як фундаментальної математики, так і професійної сфери; – уміння аналізувати широкий спектр професійних задач, обирати оптимальні способи їх розв'язання, знаходити розв'язки і аналізувати результати за допомогою основних методів математики; – володіння навичками самостійної науково-дослідної роботи.
	Системна — здатність системного розуміння явищ і процесів, що передбачають поєднання знань, розуміння й умінь сприйняття цілого на основі його частин або елементів, уміння оцінювати роль окремих компонентів у системі.	– володіння системними та узагальненими знаннями, отриманими шляхом міждисциплінарної інтеграції математичних, економічних та спеціальних дисциплін; – володіння системним баченням правильної побудови математичної моделі, вибору оптимальних методів, грамотного використання інформаційних технологій; – уміння узагальнювати та систематизувати результати математичних досліджень у професійній галузі.
Операційно-технологічний	*Технологічна* – здатність і готовність до втілення поставленої мети за відомими методами, алгоритмами, способами.	– володіння навичками математичного та алгоритмічного моделювання при аналізі управлінських задач у науково-технічній сфері, в економіці, бізнесі та гуманітарних галузях; – уміння на практиці застосовувати математичні методи оптимізації, теорії ймовірності, математичної статистики, варіаційного числення, математичної економіки, актуарно-фінансового аналізу; – уміння коректно використовувати сучасні спеціалізовані математичні програмні комплекси для моделювання різноманітних процесів; – володіння методами математичного моделювання глобальних проблем на основі глибоких знань фундаментальних фізико-математичних дисциплін.

Компонент	Компетентність	Компетенції
	Прогностична – здатність і готовність до прогнозування в професійній діяльності на основі здійсненого математичного аналізу процесів.	– володіння знаннями про закономірності випадкових явищ, сучасні методи обробки статистичної інформації та принципи прогнозування; – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів, прогнозувати наслідки експериментальних досліджень та моделей; – уміння здійснювати контроль і прогнозування кількісних та якісних показників модельованих об'єктів та технологічних процесів, зокрема, за умов невизначеності.
	Технічна — здатність та готовність використовувати сучасний комп'ютерний інструментарій, технічні засоби у професійній діяльності.	– уміння застосовувати електронні бібліотеки, математичні пакети прикладних програм, мережеві технології в професійній діяльності; – знання та вміння застосовувати сучасні операційні середовища, парадигми та мови програмування; – знання, розуміння та вміння використовувати сучасні технології розробки програмного забезпечення; – уміння проектувати моделі баз даних, запити до них та використовувати різноманітні системи керування базами даних, застосовувати методи та інструментальні засоби для проектування веб-застосувань.
	Інформаційна — здатність та готовність здійснювати збір, аналіз і систематизацію інформації на основі різних методів, способів і засобів її отримання, зберігання та переробки для вирішення завдань в галузі професійної діяльності.	– уміння здійснювати пошук, відбір, аналіз, узагальнення і систематизацію наукової та професійно значимої математичної інформації; – володіння навичками інтерпретації та представлення складної комплексної інформації у стислій формі з використанням математичної термінології та символіки; – уміння використовувати підходящі засоби (таблиці, графіки, презентації, діаграми, карти) для комплексного розуміння та подання математичної інформації.
Особистісний	*Організаційно-управлінська* — здатність самостійно планувати та проектувати професійну діяльність із врахуванням специфіки предметної сфери в різноманітних галузях.	– уміння організувати та аналізувати власну діяльність (складати і контролювати план роботи, визначати необхідні ресурси, виявляти та виправляти помилки, оцінювати результати власної роботи), володіння навичками планування часу, прийомами саморегуляції і самоорганізації з метою формування, розвитку і вдосконалення професійної діяльності; – володіння навичками розробки, складання, оформлення всіх видів нормативної документації для організації професійної діяльності з урахуванням вимог чинних стандартів; – уміння самостійно математично коректно ставити природничо-наукові, інженерні та соціально-економічні задачі та організувати їх розв'язок силами колективу.

Компо-нент	Компетентність	Компетенції
	Соціально-особистісна — здатність та готовність до саморозвитку, саморегуляції, самоствердження та соціальної взаємодії і міжособистісних комунікацій у контексті професійної діяльності.	– уміння розвиватися відповідно до своїх потреб, готовність виявити максимум своїх можливостей, відповідати за свої вчинки, ставитись відповідально до роботи, що виконується, здатність до адаптації до нових ситуацій; – уміння будувати соціальні відносини в колективі на основі загально прийнятих моральних та правових норм, підтримувати атмосферу співпраці та взаємодопомоги; – володіння навичками комунікації в усній і письмових формах державною та принаймні однією іноземною мовами для вирішення завдань міжособистісної і міжкультурної взаємодії; – володіння базовим загальнокультурним рівнем (знання основ філософії, економіки, логіки, історії, етики та естетики, екології та безпеки життєдіяльності), що сприяє розвитку та соціалізації особистості, спрямовує її до етичних цінностей.

Висновки. Отже, на основі аналізу літературних джерел визначено професійну компетентність майбутнього математика, уточнену структуру професійної компетентності, яка передбачає сукупність певних компонент, виділено компетенції майбутнього математика, що розподілені за видами та компонентами професійної компетентності.

До перспективних напрямів досліджень у даній сфері відносимо розробку показників та засоби оцінювання професійної компетентності фахівця математичного профілю, розроблених на основі висвітлених компонент та складових професійної компетентності.

Список літератури

Tate, W. (1995). *Developing corporate competence.* Gower Publishing.

Адам, С. (2005). Использование результатов обучения (Using Learning Outcomes UK Bologna Seminar). У В. И. Байденко (Ред.), *Болонский процесс: середина пути* (с. 110—151). Москва: Исслед. центр проблем качества подгот. специалистов.

Бусел, В. Т. (2001). *Великий тлумачний словник сучасної української мови.* Київ: ВТФ «Перун».

Грицюк, О. С., & Беспарточна, О. І. (2016). Структура математичної підготовки студентів інженерних спеціальностей в аспекті професійної спрямованості навчання. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах,* (51), 436—443. Узято з http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pfto_2016_51_60.

Захарченко, В. М., Луговий, В. І., Рашкевич, Ю. М., & Таланова, Ж. В. (2014). *Розроблення освітніх програм: Методичні рекомендації.* В. Г. Кремень (Ред.). Київ: ДП «НВЦ «Пріоритети».

Марко, М. (2014). Теоретичні засади формування математичної компетентності майбутніх учителів початкових класів у контексті реформування освіти. *Молодь і ринок,* (11), 152—156. Узято з http://nbuv.gov.ua/UJRN/Mir_2014_11_34

Раков, С. А. (2005). *Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ*: Монографія. Харків: Факт.

Самарук, Н., & Поплавська, О. (2017). Професійна компетентність майбутнього математика та її складові. *Педагогічний дискурс*, (22), 146—152. Узято з URL: http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/5646

Указ президента України «*Про Національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року*». № 344/2013 від 25 червня 2013 року. Узято з http://www.president.gov.ua/documents/15828.html

ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ НАВЧАННЯ ШЛЯХОМ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

І. В. Рассоха[1], Л. М. Блажко[1], Т. О. Карпалюк[2]

[1]*Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна*

[2]*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

innaolha@gmail.com

Розглянуто проблеми мотивації студентів при вивченні вищої математики у ВНЗ. Показано шляхи її підвищення за рахунок використання прикладних задач, пов'язаних з проблемами даного регіону.

Ключові слова: мотивація навчання, вища математика, прикладні задачі.

Завданням вищої освіти є підготовка фахівця, який досконало володіє різними способами розв'язання проблем у межах здобутої професії, що ґрунтуються на одержаних теоретичних знаннях і практичних навичках. Як зазначає Гилюн (2012), їх формування значною мірою залежить від мотивації студентів, яка є психологічною основою повноцінної навчально-професійної діяльності та підвищує активність студента, що спрямована на оволодіння способами застосування теоретичних навичок до практичних задач.

Так Дусавицький (2012) указує, що навчальна діяльність студентів у ВНЗ можлива, якщо в її основі лежать мотиви, які відповідають прямим продуктам цієї діяльності — теоретичним знанням. Такими мотивами є теоретичні за змістом, навчально-професійні інтереси.

В останні роки посилилось розуміння психологами та педагогами ролі позитивного ставлення до навчання у забезпеченні успішного оволодіння знаннями та уміннями. Так в роботі Помиткіної (2013) виявлено, що висока позитивна мотивованість може відігравати роль компенсуючого фактору у випадку недостатніх навчальних здібностей, але у зворотному напрямку цей фактор не спрацьовує. Високий рівень навчальних здібностей не може компенсувати відсутність навчального мотиву, не може привести до значних успіхів у навчанні.

Одним з напрямків підвищення мотивації навчання під час вивчення певної теми чи розділу є розв'язання прикладних задач та проблем. Серед таких задач окреме місце займають ті, що вирішують конкретні питання, зокрема, пов'язані з певним регіоном, у якому проживають або навчаються студенти.

Як відомо, у математичній моделі всі взаємозв'язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш якісний і надійний прогноз. Окреме місце серед математичних моделей в економіці займають лінійні моделі. Тому саме під час вивчення лінійної алгебри можна найбільш ефективно використовувати прикладні задачі для підвищення мотивації.

Розглянемо використання прикладних задач на заняттях з вищої математики під час вивчення теми «Матриці» для студентів економічних спеціальностей, що навчаються в полтавському регіоні. При цьому можна розглядати задачі, що пов'язані з вирішенням проблем конкретних підприємств регіону. Наведемо формулювання таких задач. Оскільки на сьогоднішній день одну з головних ролей у соціально-економічному розвитку України відіграє стан промислового комплексу та особливо стан машинобудівного комплексу, то актуальними є задачі, пов'язані саме з такими підприємствами. Наприклад, розглянемо ПАТ «Полтавський автоагрегатний завод» («ПААЗ») — українське машинобудівне підприємство з виробництва складної гальмівної апаратури для великовантажних автомобілів. Можна розв'язати ряд наступних задач.

Задача 1. При виготовленні деталей чотирьох видів у механоскладальному цеху №1 «ПААЗ» витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються наступною таблицею (в умовних одиницях)

Таблиця 1

Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду			
	1	2	3	4
Матеріали, кг	1	3	2,5	2
Робоча сила, шт	2	2	3	1
Електроенергія, кВт	2	3,5	3	2,5

Обчислити загальну потребу в матеріалах, робочій силі та електроенергії для виготовлення заданої кількості , деталей кожного виду.

Введемо наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2,5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3,5 & 3 & 2,5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y \end{pmatrix},$$

де A — матриця норм витрат, X — матриця кількості виробів, Y — матриця потреби в ресурсах. Задаючи кількість виробів, можна знайти потребу в ресурсах з наступного рівняння

$$Y = AX.$$

Задача 2. Основне виробництво ПАТ «Полтавський автоагрегатний завод» складається із трьох цехів: двох механоскладальних та одного ливарного, кожен з яких виробляє один вид продукції. Прямі витрати одиниць i-го цеха, що використовуються (проміжний продукт) для випуску одиниці виробу продукції j -го цеха, а також кількість одиниць продукції i-го цеха, призначених до реалізації (кінцевий продукт), задані у табл. 2.

Таблиця 2

Продукція цехів	Прямі витрати, тис.грн			Кінцевий продукт, тис грн
	1	2	3	
1	0	0,3	0	860
2	0,15	0	0,25	420
3	0,1	0,25	0,2	320

Визначити:

1) коефіцієнти повних витрат;

2) план (валовий випуск) кожного цеха;

3) виробничу програму цехів;

4) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розгляньмо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0 \\ 0,15 & 0 & 0,25 \\ 0,1 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 860 \\ 420 \\ 320 \end{pmatrix},$$

де A — матриця витратних коефіцієнтів, X — виробнича програма, Y — матриця валового випуску. Виробничі зв'язки задовольняють умовам

$$Y = BX,$$

де $B = A - E$.

Коефіцієнти повних витрат є елементами матриці B^{-1}, план валового випуску — елементами матриці X. Виробнича програма — матриця з елементами

$$x_{ij} = a_{ij}x_j,$$

де a_{ij} — елементи матриці A, x_j — елементи матриці X. Коефіцієнти непрямих витрат — елементи матриці C, яку можна знайти з рівняння

$$C = B^{-1} - A.$$

Задача 3. У таблиці 3 для ПАТ «ПААЗ» задані витратні норми двох видів сировини та палива на виробництво одиниці продукції механоскладального цеху № 1, трудомісткість у людино-годинах на одиницю продукції, вартість одиниці відповідної сировини та вартість однієї робочої людино-години.

Таблиця 3

Показники	Норми витр цехів		
	1	2	3
Сировина a)	0,2	0,4	0,3
Сировина b)	0,1	0,15	0,2
Паливо	0,22	0,18	0,28
Трудомісткість	2	4	3

Необхідно знайти:

1) сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програми виробництва;

2) коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеха.

Розгляньмо наступну матрицю:

$$D = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,22 & 0,18 & 0,28 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Сумарні витрати сировини знаходимо з рівності

$$DX,$$

де X — матриця плану валового випуску, знайдена в попередній задачі.

Коефіцієнти прямих витрат є елементами матриці

$$M = DB^{-1},$$

де B^{-1} — матриця коефіцієнтів повних витрат, знайдена в попередній задачі.

Отже, підсумовуючи вище сказане, можна зробити висновок, що для підвищення ефективності сприйняття теоретичного матеріалу та посилення мотивації до вивчення вищої математики у студентів корисно використовувати не просто прикладні задачі, пов'язані зі спеціальністю, на якій навчаються студенти, а наповнювати їх конкретними статистичними даними, узятими з підприємств певного регіону.

Список літератури

Гилюн, О. В. (2012) Освітні мотивації студентської молоді. *Грані: наук.-теорет. і громад.-політ. альманах*, (1(81)), 102—104.

Дусавицкий, А. К. (2012) *Развитие личности в студенческом коллективе в зависимости от сформированности учебно-профессиональных интересов: Учебно-методическое пособие.* Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина.

Помиткіна, Л. В. (2013) *Психологія прийняття особистістю стратегічних життєвих рішень: Монографія.* Київ: Кафедра.

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

В. К. Репета[1], Л. А. Репета[2]

[1]Національний авіаційний університет, Київ, Україна

[2]Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

repetavk@gmail.com, repetala@bigmir.net

Розглядаються проблеми викладання теорії границь студентам технічних спеціальностей, пов’язані із загальним рівнем підготовки до сприйняття матеріалу, формуванням навичок і вмінь для розв’язання задач.

Ключові слова: функція, границя функції, нескінченно малі, еквівалентні нескінченно малі, правило Лопіталя.

Важливу роль у математичній підготовці фахівців різних напрямів, зокрема і інженерного профілю відіграє теорія границь. Часто в багатьох наукових чи технічних розрахунках, під час математичного моделювання різноманітних процесів доводиться оперувати із приростами змінних величин, обчислювати чи використовувати границі відношення нескінченно малих величин, або границі сум нескінченно малих. У курсі вищої математики з елементами теорії границь студенти вперше знайомляться в першому семестрі під час вивчення модуля «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної». У подальшому границі використовуються під час вивчення інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, теорії числових та функціональних рядів, функції комплексної змінної тощо.

На вивчення теорії границь відводиться обмежена кількість лекційних та практичних годин, здебільшого по 8—10 годин на лекції і стільки ж — на практику. Традиційно матеріал викладають у такій послідовності: 1) границя послідовності; 2) означення границі функції в точці, її геометричний зміст, односторонні границі, границя функції при прямуванні аргументу до нескінченності, нескінченно малі та нескінченно великі величини, основні теореми про границі; 3) обчислення границь, перша і друга важливі границі, застосування еквівалентностей для обчислення границь; 4) неперервність функції; 5) використання похідних для обчислення границь функцій певного вигляду — правила Лопіталя (Денисюк & Репета, 2017; Ординська & Репета, 2015).

Зауважимо, що незважаючи на те, що студенти знайомі з елементами теорії границь ще зі школи, відведеного часу на вивчення теоретичного матеріалу та вироблення практичних навичок у потрібному обсязі явно недостатньо.

Значний обсяг теоретичного матеріалу й обмежена кількість відведених для нього аудиторних годин вимагають від студентів наполегливої самостійної роботи. Для цього важливо запропонувати список літератури й навчальних посібників, враховуючи рівень їх початкової підготовки (Дем’яненко, Дем’яненко & Потапенко, 2016). Тільки так можна досягнути певного позитивного результату.

Зазначимо деякі проблемні моменти та типові помилки, які щороку тією чи іншою мірою кожен викладач спостерігає під час вивчення студентами теорії границь. Акценти, зроблені на таких проблемах можуть суттєво допомогти під час вивчення даної теми.

1. Понятійний апарат теорії границь для переважної більшості студентів є надзвичайно складним. Рідко зустрічається студент, який чітко може дати строге математичне означення границі послідовності чи границі функції в точці. І це не дивно, адже розуміння означення границі вимагає від студента глибокого логічного мислення та належної математичної підготовки. Тому запровадження поняття границі доцільно розпочинати на інтуїтивному рівні з розгляду «очевидних» прикладів. Зокрема, запропонувати студентам визначити, куди прямують значення виразів

$$\frac{n+1}{n}, \text{ коли } n \to \infty; \ 2x+3, \text{ коли } x \to 1; \ \frac{x^2+2x}{x}, \text{ коли } x \to 0 \text{ тощо.}$$

Але навіть після таких завдань формулювання означень мовою «$\varepsilon - \delta$» викликає в першокурсників величезні психологічні труднощі у сприйнятті матеріалу.

2. Важливо донести до студентів, що обчислення кожної границі слід розпочинати з аналізу самої функції, границю якої потрібно знайти, звертаючи увагу на аргумент функції і значення, до якого він прямує. Тобто необхідно встановити має чи не має при такому значенні аргумента ця функція невизначеність. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 визначена й неперервна в околі цієї точки, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right).$$

Якщо ж у точці x_0 є невизначеність, то далі потрібно розкрити цю невизначеність, тобто позбутися її, використовуючи належні рівносильні перетворення або ж застосувавши відповідні теореми чи правила.

3. Ігнорування студентами значення, до якого прямує аргумент, доволі часто призводить до плутанини з вибором алгоритму обчислення границі вигляду

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

з невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$ з алгоритмом обчислення границі

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)},$$

де значення поліномів $P_n(x), P_m(x)$ степенів n та m відповідно прямують до нескінченності, використовуючи ділення чисельника $P_n(x)$ та знаменника $P_m(x)$ дробу

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

на x^k, де $k = \max(n, m)$. Таку ж помилку часто роблять під час обчислення інших границь, наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{P_n(x)} - \sqrt{Q_n(x)}\right)$$

з невизначеністю $\left[\infty - \infty\right]$, порушуючи еквівалентність перетворень.

4. Використання штучних прийомів. Під час обчислення границь доволі часто корисно виконати такі дії: відняти від певного виразу та додати до нього один і той же вираз; помножити та поділити вираз на той самий відмінний від нуля вираз (часто цей вираз є спряженим до певного множника).

Зокрема, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = c, \lim_{x\to x_0} h(x) = 0,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-c+c-g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-c}{h(x)} + \lim_{x\to x_0}\frac{c-g(x)}{h(x)}.$$

Наприклад,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\left(3x-2\right)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^2-1} - \lim_{x\to 1}\frac{3\left(x-1\right)}{x^2-1}.$$

Звичайно, питання про найоптимальніший спосіб обчислення границі не обговорюємо.

5. Використання заміни для обчислення границь. Інколи під час обчислення границь для полегшення перетворень зручно спочатку виконати відповідну заміну, зокрема у прикладах на використання першої важливої границі, якщо $x \to x_0$, де x_0 — відмінне від нуля число, можна зробити заміну (хоча це робити не обов'язково) $x - x_0 = t$, тоді $t \to 0$.

Трапляються випадки, коли можна замінити певний вираз новою змінною, внаслідок чого обчислення границі суттєво спрощується, наприклад:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-12}{\sqrt[6]{x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}\sqrt[6]{x} = t, \\ t \to 2\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 2}\frac{t^2+t^3-12}{t-2} = .$$

$$= \lim_{t\to 2}\left(t^2+3t+6\right) = 16$$

6. Використання еквівалентностей для обчислення границь. Потужним апаратом для обчислення границь функцій є застосування еквівалентностей. Слід зазначити, що студенти досить рідко самостійно користуються таким підходом. Трапляються випадки, коли вони просто не розуміють, який вираз і як замінити еквівалентним. Наприклад, знаючи, що при $x \to 0$ функція $\sin x \sim x$, для багатьох є проблемою відшукання границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x-1\right)\sin\frac{\pi}{2x+1}.$$

Студентам важливо пояснити, що запис $\sin x \sim x$, коли $x \to 0$, по суті означає, що $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, коли $\alpha(x) \to 0$. У нашому випадку

$$\alpha(x) = \frac{\pi}{2x+1} \to 0\text{, коли } x \to \infty .$$

Нерідко студенти використовують заміну функції на їхній погляд еквівалентну, проте припускаються помилки, не враховуючи, куди прямує аргумент цієї функції, наприклад, помилково вважають, що

$$\cancel{\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\pi}\frac{x}{x}} = 1 .$$

7. Використання обмеженості функції. Під час обчислення границь студенти забувають властивості нескінченно малих функцій, зокрема, не всі пам’ятають, що добуток обмеженої та нескінченно малої функцій є функція нескінченно мала. Цю властивість можна проілюструвати на такому прикладі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(2+\cos x\right)\cdot\frac{1}{x^2} = 0,$$

як добуток обмеженої функції $2+\cos x$: $-1 \le 2+\cos x \le 3$ та нескінченно малої, коли $x \to \infty$ функції $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 .$$

8. Помилки під час обчислення границь за правилом Лопіталя. Найбільш типова помилка — це обчислення границі за хибною формулою

$$\cancel{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'} .$$

Інколи студенти від границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ з невизначеністю $\left[0\cdot\infty\right]$ переходять до обчислення границі

$$\cancel{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)'\left(g(x)\right)'} .$$

Сам перехід від добутку двох функцій до частки теж викликає певні труднощі. Перше питання — яку функцію зручніше залишити в чисельнику? Друге — як правильно записати знаменник?

Важливо показати студентам як можна спростити обчислення границі за правилом Лопіталя. До того, як безпосередньо перейти до границі відношення похідних доцільно проаналізувати можливість заміни функцій $f(x)$ і $g(x)$ на еквівалентні функції. Наприклад, границю

$$\lim_{x\to 0+0} \arcsin x \ln\Big(\sin^2\Big(3x\Big) + \operatorname{arctg} x\Big)$$

доцільно звести спочатку до рівносильного вигляду

$$\lim_{x\to 0+0} x \ln\Big(9x^2 + x\Big),$$

а після цього вже можна провести обчислення за правилом Лопіталя.

Висновки. 1. Різнорівневі шкільні програми з алгебри та геометрії погіршують стартові можливості студентів для успішного навчання у виші, зокрема на технічних спеціальностях. Багато фактів, штучних прийомів і технічних дій, з якими зустрічалися в процесі шкільного навчання випускники фіз-мат. класів і ліцеїв є новими для випускників звичайних або гуманітарних класів, які бажають одержати інженерну освіту.

2. Типові помилки, які роблять студенти обчислюючи границі, указують на необхідність звертати більше уваги на розвиток студентами вміння аналізувати задачі перед їх розв’язанням. Формальні, алгоритмічні підходи до розв’язування задач, пов’язаних зі знаходженням границь без аналізування умов часто призводять до хибних результатів.

Список літератури

Дем’яненко, В. В., Дем’яненко, О. О., & Потапенко, С. Д. (2016). Про деякі особливості вивчення математичних дисциплін у технічному та економічному університетах. *У Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука,* Київ, 19—20 травня (Т. 3, с. 218—222). Київ: КПІ.

Денисюк, В. П., & Репета, В. К. (2017). *Вища математика: Підручник*. (Ч. 1). Київ: НАУ.

Ординська, З. П., & Репета, Л. А. (2015). *Математика для економістів: Навчальний посібник*. Київ: КПІ.

ПРО ДЕЯКІ АСПЕКТИ МОТИВАЦІЇ В КУРСІ «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

О. Б. Чернобай
Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь, Україна
chernobai.olga@gmail.com

У доповіді розглядаються деякі аспекти мотивації викладання курсу «Вища та прикладна математика», зокрема важливість побудови математичної моделі.

Ключові слова: вища та прикладна математика, мотивація, математичні моделі, економічні задачі.

Для підготовки здобувачів вищої освіти першого бакалаврського рівня, денної та заочної форми навчання галузей знань:12 Інформаційні технології та 05 Соціальні та поведінкові науки, спеціальності: 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 051«Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» розроблено програму, та робочу програму курсу обов'язкової навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика».

Метою викладання даного курсу, як уже згадувалось у тезах доповіді Чернобай (2017) є:

— формування у студентів вказаних спеціальностей базових математичних знань для розв'язування завдань при вивченні спеціальних дисциплін та в їх майбутній професійній діяльності;

— розвиток знань, вмінь та навичок аналітичного мислення при дослідженні життєвих та економічних ситуацій;

— математичне формулювання та розв'язання задач управління, що виникають у процесі навчання або у практичній діяльності майбутнього спеціаліста

Для досягнення мети викладання згаданої навчальної дисципліни, про що вже говорилось у тезах доповідей Чернобай (2015, 2016) важливе місце займає мотивація до навчання. Приміром, для фахівців сфери фінансів стати членом Асоціації АССА означає придбати «кваліфікацію мрії». АССА (Асоціація дипломованих бухгалтерів) була створена у Великобританії в 1904 році. Це найбільша міжнародна професійна організація бухгалтерів вищої кваліфікації, що завоювала міцну репутацію в професійних колах.

Кваліфікація АССА покликана забезпечити своїх студентів професійними знаннями, уміннями та навичками у фінансовому та управлінському обліку, фінансовому менеджменті, аудиті й оподаткуванні, веденні бізнесу та ефективності діяльності. Отримання сертифікату АССА свідчить про наявність знань і навичок, необхідних для роботи в галузі виробництва, банківській сфері, сфері консалтингових послуг, а також у сфері оподаткування та права.

Одним із 14 АССА іспитів є іспит «Управління ефективністю». Цей іспит спрямований на розвиток знань та навичок у сфері застосування методів управління обліком щодо кількісної та якісної інформації, необхідної для планування, прийняття рішень, оцінки ефективності та контролю.

Приклади задач, які розв'язуються математичними методами і є частиною курсу підготовки до складання іспиту наведені нижче.

Задача 1. Компанія випускає два продукти у трьох підрозділах, детальні дані наведені нижче стосовно часу, що витрачається на одиницю продукції, необхідного в кожному відділі, наявні години в кожному відділі та прибуток на одиницю кожного продукту:

	Продукт X: годин на одиницю	Продукт Y: годин на одиницю	Наявні години
Відділ A	8	10	11000
Відділ B	4	10	9000
Відділ C	12	6	12000
Прибуток на од.	$ 4.00	$ 8.00	

Задача 2. Середні одиниці часу виробництва продукту X були зафіксовані наступним чином:

Номер одиниці продукції	Сукупний середній час виробництва продукції Yx
1	20 хвилин
2	17.2 хвилин
4	14.792 хвилин
8	12.72 хвилин

Необхідно розрахувати показник швидкості навчання.

Задача 3. Існує необмежений попит на продукт X, але попит на продукт Y обмежений до 600 одиниць на рік.

Необхідно: визначити, який оптимальний план виробництва.

Розв'язання таких задач зацікавить студентів більш ґрунтовно опанувати математичні методи.

Список літератури

Чернобай О.Б. (2015). Про деякі особливості викладання курсу «Вища та прикладна математика». У *Матеріалах Третьої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 25—26 грудня 2014 р.* (с. 211—213). Київ: КПІ.

Чернобай, О. Б. (2016). Мотивація у навчанні вищої математики студентів економічних спеціальностей. У *Збірнику тез Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 7—8 жовтня* (с. 125). Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова.

Чернобай, О. Б. (2017). Мотивація при викладанні курсу вища та прикладна математика. У *Матеріалах П'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 29—30 грудня 2016 р.* (с. 183—184). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Н. И. Широканова
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
shirokanova@gmail.com

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» традиционно является одним из основных курсов для студентов экономических специальностей университетов. Не исключением является и специальность «Мировая экономика» факультета международных отношений БГУ. Для этой специальности теория вероятностей и математическая статистика изучается на протяжении двух семестров.

Теория вероятностей — это раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства, операции над ними. Многие виды деятельности на финансовых рынках подпадают под действие законов теории вероятности, так как большинство событий, происходящих на рынке, подпадают под категорию случайных. Например, на рынке «Форекс» непрерывно заключается большое количество сделок и заключается много торговых операций. Некоторые из них приведут к убыткам, другие могут принести определённую прибыль. Точно предсказать последствия совершаемых операций невозможно, так как результат их зависим от множества непредсказуемых факторов. Вероятность в математике определяется как некоторый критерий того, произойдёт какое-то событие или нет, выраженный в числовой форме. Она может принимать значения от нуля (когда событие абсолютно невозможно) до единицы (когда оно обязательно наступит). Чаще всего степень вероятности отражают в процентах (от 0% до 100%). При проведении анализа и расчётов с применением теории вероятности используются знакомые математические действия — вероятности можно складывать и перемножать, только по особым правилам. Теория вероятности представляет собой мощнейший механизм прогнозирования рыночных взаимосвязей и отношений, управления вложенным капиталом для получения прибыли. Методы теории вероятностей широко используются в экономике, в теории надёжности, теории информации, теории массового обслуживания, в теории принятия решений, в физике, астрономии и других дисциплинах. Теория вероятности лежит в основе математической статистики, которая, в свою очередь, используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, контроле качества продукции и т. д.

Математическая статистика — это наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для осуществлени научно обоснованных прогнозов и практических рекомендаций. Можно сказать, что предметом курса теории вероятности и математической статистики является анализ случайных явлений как объективного феномена.

В экономике, технологии и других областях человеческой деятельности очень часто приходится иметь дело с событиями, которые невозможно точно предсказать. В связи с этим при изучении, например, экономических явлений, обычно используют их упрощённые формальные описания (экономические модели). Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных и финансовых рынках и многие другие. При построении модели выявляются существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывабтся детали, несущественные для решения поставленной задачи. По своему определению любая экономическая модель абстрактна и, следовательно, неполна, поскольку, выделяя наиболее существенные факторы, она абстрагируется от менее существенных, которые в совокупности могут определять не только отклонения в поведении объекта, но и само его поведения. Так, в простейшей модели спроса считается, что величина спроса на какой-лиюю товар определяется его ценой и доходом потребителя. На самом же деле на величину спроса оказывает также влияние ряд других факторов: вкусы и ожидания потребителей, цены на другие товары, воздействие рекламы, моды и т. д. Поэтому любое экономическое исследование всегда предполагает объединение теории (экономической модели) и практики (статистических данных). Основным элементом экономического исследования является исследование взаимосвязей экономических переменных. Изучение таких взаимосвязей осложнено тем, что они, особенно в макроэкономике, не являются строгими функциональными зависимостями.

Кроме того, всегда очень трудно выявить все основные факторы, ввлияющие на результативный признак (исследуемы показатель); часто воздействия являются случайными, то есть содержат случайную составляющую; экономисты, как правило, располагают ограниченным набором данных статистических наблюдений, которые, к тому же, содержат различного рода ошибки.

Использование методов теории вероятностей и математической статистики часто позволяет упростить построение математической модели экономической системы, выявить существенные для её описания факторы и оценить достоверность получаемых на основе модели прогнозных значений интересующего нас показателя.

Традиционные методы теории вероятностей и математической статистики — теория оценивания и проверки гипотез — лежат в основе эконометрики, которая устанавливает и исследует количестыенные закономерности и взаимосвязи в экономике. Эконометрика позволяет строить экономические модели и оценивать их параметры, проверять гипотезы о свойствах экономических показателей и формах их взаимосвязи, что служит основой дл экономического анализа и прогнозирования и создаёт возможность принятия обоснованных экономических решений.

Автором написано методическое пособие Кузьмин и Широканова (2009) по теории вероятностей для студентов экономических специальностей, которое используется им в работе.

Список литературы

Вагнер, Г. (1972). *Основы исследований операций*. (Т. 1—3). Москва: Мир.

Конюховский, П. В. (2000). *Математические методы исследования операций*. Санкт-Петербург: Питер.

Кузьмин, К. Г., & Широканова, Н. И. (2009). *Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методическое пособие*. Минск: БГУ.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ» СТУДЕНТАМИ ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

С. В. Шульга, З. П. Халецька, Л. В. Ізюмченко

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

steellrat@gmail.com, khaletskazoya@gmail.com, l.iziumch@gmail.com

У статті розглянуто використання програмного продукту, створеного на кафедрі фізики, для організації самостійної роботи студентів під час вивчення програмового матеріалу курсу «Чисельних методів», зокрема теми «Апроксимація функцій», що сприяє підвищенню якості засвоєння матеріалу студентами.

Ключові слова: апроксимація функцій, метод найменших квадратів, інтерполяція, кубічні сплайни.

Упровадження сучасних інноваційних технологій навчання у процесі підготовки висококваліфікованих фахівців з вищою освітою передбачає значне розширення та підвищення значущості пізнавальної діяльності в навчально-виховному процесі кожного студента, і зокрема індивідуальної його діяльності.

Під час виконання лабораторних робіт з фізики, індивідуальних завдань зі статистики, чисельних методів математики студенти стикаються з необхідністю обробляти значний обсяг експериментальних даних. Як відомо, задача наближення функцій полягає в заміні на множині X функціональної залежності $f\left(x\right)$, яка задана у вигляді таблиці, формули, графіка або в неявному вигляді, простішою функцією $\phi\left(x\right)$ на цій множині так, щоб відхилення її від функції $f\left(x\right)$ на заданій множині було мінімальним. Функція $\phi\left(x\right)$ у цьому випадку називається *апроксимуючою* функцією для $f\left(x\right)$. Якість апроксимації, тобто близькість функції $\phi\left(x\right)$ і $f\left(x\right)$, оцінюють по-різному, це залежить від метрики, яку розглядають у функціональних просторах. Відомим методом наближення функцій є метод найменших квадратів (МНК), який запропонували відомі математики К. Гаусс і А. Лежандр.

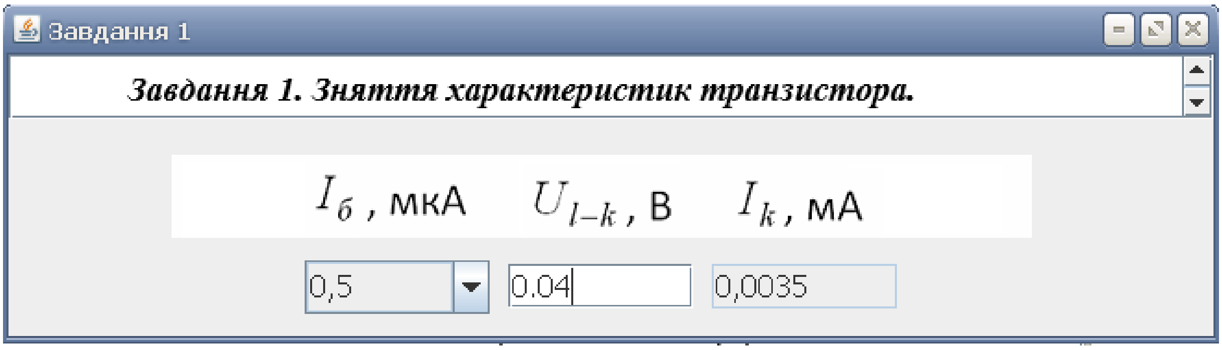
На лабораторних роботах з курсу «Чисельні методи» студенти розв’язують наступну **задачу**.

Нехай у результаті досліджень маємо таку таблицю деякої функціональної залежності:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Треба знайти аналітичний вигляд функції $\phi\left(x\right)$, яка добре відображала б цю таблицю дослідних даних. Емпіричні формули мають велике практичне значення, удало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, «згладжуючи» значення величини y, а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень x. Процес побудови емпіричних формул складається з 2-х етапів: установлення загального виду цієї формули і визначення найкращих її параметрів (Ізюмченко & Гаєвський, 2008).

Під час виконання віртуального фізичного експерименту із квантової фізики (Шульга & Величко, 2016), наприклад, зняття характеристик транзистора (струм у дротах бази, у першому стовпці, вибирається згідно варіанту з випадного меню, для прикладу, вибрано струм 0,5 мкА), при введенні напруги (0,04 В) між колектором і емітером отримуємо значення струму колектора:



Отримуємо функціональну залежність струму колектора від напруги між колектором і емітером:

x	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,4	0,6	1	1,4
y	0,0035	0,0043	0,0061	0,0066	0,0069	0,0078	0,0082	0,0089	0,0092

Завдання індивідуального домашнього завдання з курсу «Чисельних методів»: побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для даної функції; використовуючи обчислювальні можливості електронних таблиць Excel, побудувати поліноми другого, третього, вищих степенів, що наближають дану функцію, зробити висновки щодо ефективності інтерполювання даної функції поліномами; підібрати найпростіші функції (квадратичну, дробово-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну); встановивши вигляд емпіричної формули, знайти її параметри, використовуючи МНК; зробити висновки щодо ефективності розв’язання задачі.

Перед студентом стоїть завдання використати перевірку аналітичних критеріїв існування певної залежності: на заданому відрізку зміни незалежної змінної x вибираємо дві точки, досить надійні і розміщені якомога далі одна від одної, наприклад, точки x_1, x_9; потім обчислюємо значення, яке є середнім арифметичним, середнім геометричним та середнім гармонічним значень x_1, x_9; маючи значення y_1 і y_9, аналогічно обчислюємо і відповідні значення залежної змінної y. Далі, користуючись даною таблицею значень $\left(x_i; y_i\right)$, для значень $x_{\text{ариф}}$, $x_{\text{геом}}$, $x_{\text{гарм}}$ знаходимо відповідні їм значення функції; якщо їх немає в таблиці, обчислюємо їх за допомогою лінійної інтерполяції або використовуючи кубічні сплайни. Починаємо порівнювати між собою з одного боку $y_{\text{арифм}}$,

$y_{\text{геом}}$, $y_{\text{гарм}}$ та $y\left(x_{\text{арифм}}\right)$, $y\left(x_{\text{геом}}\right)$, $y\left(x_{\text{гарм}}\right)$ з іншого. У даній задачі отримаємо, що середньому геометричному незалежної змінної найкраще відповідає середнє арифметичне залежної змінної (найменша різниця), а тому залежність є логарифмічною, тобто має вигляд

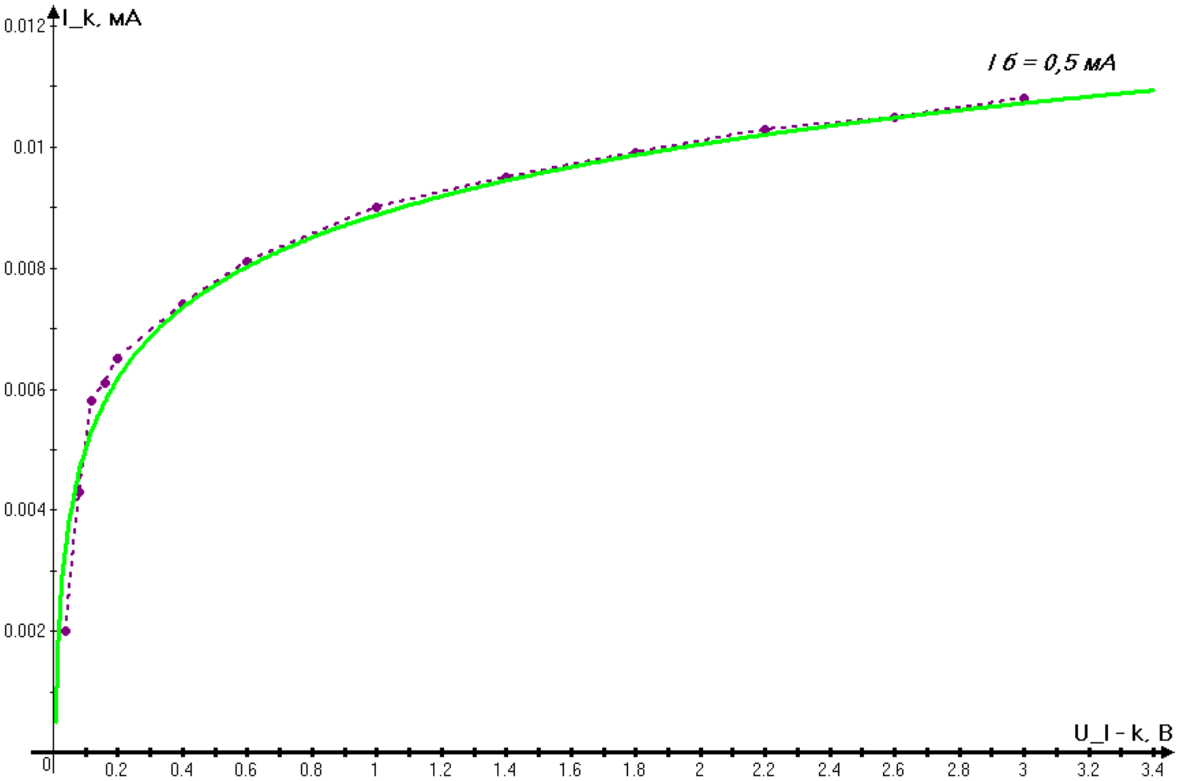
$$y = a \ln x + b.$$

Застосувавши МНК для нових змінних $X = \ln x$ і $Y = y$, знаходимо коефіцієнти a і b, остаточна відповідь виглядає:

$$y = 0{,}00153 \cdot \ln x + 0{,}00889.$$

Студент має зробити висновок щодо ефективності розв'язання задачі.

На рисунку наведені графіки даного в умові віртуального експерименту (пунктирна лінія) і отриманої апроксимуючої функції.



Індивідуальне домашнє завдання є, на наш погляд, одночасно і формою самостійної діяльності студента у процесі вивчення фізико-математичних дисциплін, і формою контролю за нею. Робота над ІДЗ ефективна за умови їхнього захисту. Мета захисту ІДЗ — переконатися в самостійності виконання завдання, а також допомогти студентам розібратися в питаннях, які залишилися нез'ясованими.

Список літератури

Ізюмченко, Л. В., & Гаєвський, М. В. (2008). *Методи обчислень: Навчальний посібник*. (Ч. 1. Чисельні методи алгебри). Кіровоград: КДПУ імені В. Винниченка.

Шульга, С. В., & Величко, С. П. (2016). Активізація самостійної роботи студентів у фізичному практикумі з атомної фізики. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти,* (9). (Ч. 2, с. 227—234). Кіровоград: РВВ КДПУ імені В. Винниченка.

АБ РЭАЛІЗАЦЫІ НАВУКОВА-ДАСЛЕДЧАГА ПРЫНЦЫПУ ПРЫ ВЫКЛАДАННІ ВЫШЭЙШАЙ МАТЭМАТЫКІ ПРЫ ПАДРЫХТОЎЦЫ ПА ЭКАНАМІЧНЫХ СПЕЦЫЯЛЬНАСЦЯХ

У. А. Шылінец
Міжнародны ўніверсітэт «МІТСО», Мінск, Рэспубліка Беларусь,
v.shilinec@mitso.by

Адным з важнейшых сродкаў павышэння якасці падрыхтоўкі спецыялістаў з універсітэцкай адукацыяй з’яўляецца рэалізацыя навукова-даследчага прынцыпу адукацыі.

Калі мы вядзем размову пра змест матэматычнай падрыхтоўкі спецыялістаў, мы звычайна маем на ўвазе пэўную суму матэматычных фактаў, паняццяў, азначэнняў, формул, а таксама і пэўную суму навыкаў, у тым ліку навыкаў у рашэнні задач і прыкладаў амаль стандартных тыпаў.

Аднак неабходна падкрэсліць, што нельга зводзіць усю праблему матэматычнай адукацыі ва ўніверсітэце да перадачы студэнтам толькі пэўнай сумы ведаў і навыкаў.

Другая задача, якая стаіць перад выкладчыкамі і якая з’яўляецца больш важнай, чым першая, — гэта задача матэматычнага развіцця студэнтаў, якую можна рашыць толькі шляхам уключэння студэнтаў у навукова-даследчую дзейнасць.

Неабходна, каб вучэбны працэс насіў вучэбна-даследчы характар і быў натуральнай асновай далейшай навукова-даследчай работы студэнтаў.

Бяспрэчна, лекцыя займае асаблівае месца ў навучальным працэсе: яна іграе ў ім асноватворчую ролю, накіроўвае яго, вызначае яго змест і ўзровень. Лекцыю неабходна чытаць так, каб у студэнтаў стваралася адчуванне дачынення да вялікай навукі. Аб’ём інфармацыі і яе структура, падыходы выкладчыка да выкладання вучэбнага матэрыялу павінны накіроўваць студэнтаў на атрыманне інфармацыі ў працэсе даследавання, дапамагчы ім адчуць радасць «адкрыцця» гэтай інфармацыі.

Для рэалізацыі адзначанага вышэй падыходу да вучэбнага працэсу неабходным з’яўляецца стварэнне вучэбных дапаможнікаў новага тыпу. Структура і змест такой вучэбнай літаратуры павінны дазволіць здзейсніць навукова-даследчы прынцып адукацыі, змяніць падыходы да кантролю і ацэнкі ведаў студэнтаў.

Пры доказе тэарэм, прадугледжаных праграмай, нярэдка патрабуемы вынік можна атрымаць шляхам аслаблення накладваемых умоў, часта можна абагульніць даказаную тэарэму, атрымаць новы доказ вядомых фактаў. Падобная праца з’яўляецца даследчай, і яе выкананне будзе спрыяць станаўленню будучага творчага спецыяліста.

Развіццю самастойнасці, выхаванню творчых адносін да вывучаемай студэнтамі вучэбнай дысцыпліны «Вышэйшая матэматыка» спрыяюць і задачы, рашэнне якіх патрабуе спалучэння метадаў з розных раздзелаў вышэйшай матэматыкі, задачы, у якіх студэнту для іх рашэння трэба самастойна падабраць адпаведны метад сярод некалькіх, вывучаемых ім раней.

Вельмі карыснымі з'яўляюцца задачы з недэтэрмінаванымі адказамі, у якіх студэнту самому прапануецца высвятліць і даказаць, якое сцвярджэнне на самой справе з'яўляецца справядлівым. Рашэнне такіх задач можа стаць пробай самастойнай навукова-даследчай дзейнасці.

Навукова-даследчая накіраванасць вучэбнага працэсу дапаможа прыцягнуць да творчых даследаванняў большую колькасць студэнтаў, стварыць магчымасці студэнту, пачынаючы з першага курса, зразумець неабходнасць развіцця навыкаў даследчага характару.

Адным з важнейшых сродкаў рэалізацыі навукова-даследчага прынцыпу ў сістэме матэматычнай падрыхтоўкі будучых спецыялістаў эканамічных спецыяльнасцей з'яўляецца, на наш погляд, удзел студэнтаў у працы студэнцкіх навукова-даследчых аб'яднаннях (СНДА), тэматыка якіх адлюстроўвае тэматыку навуковых інтарэсаў кафедры.

На кафедры інфармацыйных тэхналогій і вышэйшай матэматыкі Міжнароднага ўніверсітэта «МІТСО» другі год дзейнічае СНДА (студэнцкі навуковы гурток) «Матэматыка ў эканоміцы».

Матэматычная падрыхтоўка студэнтаў эканамічнага профілю павінна разглядацца як найважнейшы складнік у сістэме базавай падрыхтоўкі сучаснага спецыяліста ў дадзенай галіне, першачарговай задачай якой становіцца якасная падрыхтоўка студэнтаў, арыентаваная на развіццё ўмення самастойна здабываць і прымяняць веды ў прафесійнай практычнай дзейнасці.

Мэты арганізацыі дзейнасці адзначанага вышэй студэнцкага навуковага гуртка наступныя:

— садзейнічаць развіццю і фарміраванню ведаў, уменняў і навыкаў здольных студэнтаў;

— паказаць будучаму спецыялісту эканамічнага профілю, што матэматычныя веды — гэта апарат, які дапамагае мадэляваць эканамічныя задачы і вырашаць пабудаваную матэматычную мадэль, а таксама аналізаваць атрыманае рашэнне.

Пры гэтым рашаюцца наступныя задачы:

— дапамагчы студэнту-эканамісту авалодаць асновамі эканоміка-матэматычнага мадэлявання, якія даюць уяўленне аб эканоміка-матэматычным мадэляванні, яго мове і сімволіцы, метадах, алгарытме, перыядах развіцця эканоміка-матэматычнага мадэлявання;

— навучыць студэнтаў будаваць мадэлі рэальных эканамічных працэсаў, даследаваць гэтыя працэсы па дадзеных мадэлях, канструяваць прыкладання мадэляў;

— азнаёміць студэнтаў з роляй эканоміка-матэматычнага мадэлявання ў сучаснай эканоміцы.

План студэнцкага навуковага гуртка прадугледжвае выступленні студэнтаў з дакладамі па пытаннях выкарыстання матэматыкі пры вырашэнні прафесійна-арыентаваных задач.

Члены СНДА «Матэматыка ў эканоміцы» прынялі ўдзел у наступных навукова-практычных канферэнцыях:

— IV Міжнароднай навукова-практычнай канферэнцыі «Актуальныя праблемы прафесійнай адукацыі ў Рэспубліцы Беларусь і за мяжой» (Віцебскі філіял Міжнароднага ўніверсітэта «МІТСО», 16 снежня 2016 г.);

— IX Міжнароднай навукова-практычнай інтэрнэт-канферэнцыі «Інавацыйныя тэхналогіі навучання фізіка-матэматычным і прафесійна-тэхнічным дысцыплінам» (г. Мазыр, Мазырскі педагагічны ўніверсітэт імя І. П. Шамякіна, 21—24 сакавіка 2017 г.);

— Міжнароднай студэнцкай навукова-практычнай канферэнцыі «Фізіка-матэматычныя навукі і інфарматыка, методыка выкладання» (Мінск, БДПУ, 19 красавіка 2017 г.);

— XXI Міжнароднай навуковай канферэнцыі студэнтаў, магістрантаў і аспірантаў «Сучаснае грамадства, прафсаюзы і праблемы моладзі» (Гомельскі філіял «МІТСО», 4—5 мая 2017 г.);

— XXIV Міжнароднай студэнцкай навукова-практычнай канферэнцыі «Ад ідэі — да інавацыі» (г. Мазыр, Мазырскі педагагічны ўніверсітэт імя І. П. Шамякіна, 27 красавіка 2017 года);

— Першай унутрывузаўскай студэнцкай навукова-практычнай канферэнцыі «Актуальныя праблемы моладзевай навукі» (г. Мінск, Міжнародны ўніверсітэт «МІТСО», 16 мая 2017 г.);

— Міжнароднай навукова-практычнай канферэнцыі студэнтаў, аспірантаў і маладых навукоўцаў «XI Машэраўскія чытанні» (г. Віцебск, Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт імя П. М. Машэрава, 18 кастрычніка 2017 г.).

Члены СНДА «Матэматыка ў эканоміцы» (студэнты 2 курса факультэта МЭА і М) Фядаровіч А. М. Н. і Фядаровіч А. К. прымалі ўдзел у Рэспубліканскім конкурсе навуковых работ студэнтаў. Іх навуковая праца «Развіццё матэматычных здольнасцей старшакласнікаў з дапамогай факультатыўных заняткаў» атрымала трэцюю катэгорыю.

Акрамя ўдзелу студэнтаў у працы студэнцкіх навукова-даследчых аб’яднанняў, навукова-даследчая праца студэнтаў, якая ўключаецца ў навучальны працэс, можа ажыццяўляецца таксама ў наступных формах:

— выкананне заданняў, у час кіруемай самастойнай працы студэнтаў па вучэбнай дысцыпліне;

— выкананне курсавых і дыпломных прац, якія змяшчаюць элементы навуковых даследаванняў;

— выкананне заданняў навукова-даследчага характару ў час практык;

— удзел студэнтаў у працы спецсемінараў.

ЗГОРТКА ФУНКЦІЙ ЯК ІНТЕГРАЛ ВІД ПАРАМЕТРА

І. А. Юрчук, О. М. Бердник
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
iyurch@ukr.net, o_berdnyk@ukr.net

При дослідженні багатьох класів реальних процесів зручною математичною моделлю є згортка функцій як лінійний оператор, який зберігає зсуви. Навчаючись на технічних спеціальностях, більшість студентів уперше знайомляться з цим поняттям на старших курсах і переважно в контексті розв’язання прикладних задач свого профілю. Проте, даний матеріал може бути викладений строго математично в загальному курсі «Математичного аналізу» або «Вищої математики».

У даній роботі авторами запропоновано схему вивчення матеріалу, що стосується згорток функцій, для студентів технічних спеціальностей, наприклад, у тематичних модулях «Операційне числення» дисципліни «Вища математика» або «Інтеграли, що не є інтегралами Рімана» дисципліни «Математичний аналіз».

Ключові слова: згортка, оператор, властивості згортки.

Поняття згортки є базовим при розв’язанні багатьох прикладних задач, що пов’язані зі спектральним аналізом сигналів (Афонский & Дьяконов, 2009), оптичними ефектами (Кеч & Теодореску, 1978, с. 434), обробкою цифрових зображень (Фисенко & Фисенко, 2008, с. 73), розпізнаванням образів (Serra, 1982, p. 280), машинним навчанням, наприклад, у згорткових нейронних мережах (Masakazu, Mori, Mitari & Kaneda, 2003).

Такі прикладні застосування оперують частинними випадками згорток. Для прикладу, у побудові згорткових нейронних мереж, згортка є функцією, яка залежить від дискретної змінної ($t \in \mathbb{Z}$). Саме тому, володіння строгим математичним означенням, яке згодом легко адаптувати до прикладної задачі, є важливим етапом при створенні адекватної математичної моделі того чи іншого процесу.

Авторами запропоновано модель вивчення поняття згортки для студентів технічних спеціальностей у тематичних модулях «Операційне числення» дисципліни «Вища математика» або «Інтеграли, що не є інтегралами Рімана» дисципліни «Математичний аналіз», яка є підпунктом лекцій «Основні властивості зображень» та «Важливі приклади інтегралів, що залежать від параметра», відповідно.

Фізичні міркування, що призводять до появи поняття згортки. Багато систем живої і неживої природи здійснюють свої функції, відповідаючи сигналом $\tilde{f}$ на дію f. Тобто, кожна така система є деяким оператором A, який перетворює вхідний сигнал f у сигнал $\tilde{f} = Af$ на виході.

Нехай A — це деякий пристрій. Тоді для нього виникають дві різні задачі: передбачити реакцію $\tilde{f}$ пристрою на довільний вхідний сигнал f або, знаючи сигнал $\tilde{f}$ на виході пристрою, визначити вхідний сигнал f. Для опису $\tilde{f}$, що є відгуком «пристрою» A на вхідний сигнал f, достатньо знати відгук E пристрою A на імпульсну дію δ і використати формулу

$$\tilde{f}(t) = \int\limits_R f(\tau)E(t-\tau)d\tau,$$

її доведення можна знайти в (Зорич, 2002, с. 530).

Означення. *Згорткою* функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ і $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ називається функція $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, яка визначається співвідношенням

$$(f*g)(x) = \int\limits_R f(y)g(x-y)dy. \tag{1}$$

Інтеграл у формулі (1) можна розглядати як кратний, що означений на $\mathbb{R}^n$, а змінні x та y як вектори з цього простору.

Основні властивості згортки:

1) (симетричність) *Якщо існує* $f*g$*, то й існує* $g*f$ *і має місце рівність* $f*g=g*f$.

2) (асоціативність) $(f*g)*s = g*(f*s)$;

3) (інваріантність відносно зсуву) *Нехай* $\mathrm{T}_{x_0}(f(x)) = f(x-x_0)$ *— оператор зсуву. Якщо існує* $f*g$*, то* $\mathrm{T}_{x_0}(f*g) = \mathrm{T}_{x_0}(f)*g = f*\mathrm{T}_{x_0}(g)$;

4) (періодичність) *Якщо існує* $f*g$ *і одна з функцій* f, g *є періодичною з періодом* T*, то* $f*g$ *є* T*-періодичною*;

5) (диференціювання) *Нехай* C^m- *клас функцій, що мають* m *неперервних похідних, а* C_0^m *— підклас функцій, для яких множина* E *така, що для довільного* $t\in E$ *справедливо* $f(t)>0$*, є компактом. Якщо* f *— локально інтегровна і* $g\in C_0^m$*, то* $f*g\in C^m$ *і* $\mathrm{d}^k(f*g) = f*(\mathrm{d}^k(g))$.

Доведення. 1. Запровадимо нову зміну z за формулою $z=x-y$. Тоді, $y=x-z$, $dy=-dz$ і

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)(-dz) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z)dz = (g*f)(x).$$

2. Кудрявцев (1981, с.408).

3. За умовою існує

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Тоді

$$\mathrm{T}_{x_0}(f*g)=(f*g)(x-x_0)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g((x-x_0)-y)dy=$$
$$=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-x_0-y)dy=\int_{\mathbb{R}} f(y)g((x-y)-x_0)dy= \ ,$$
$$=f*\mathrm{T}_{x_0}(g)=\mathrm{T}_{x_0}(f)*g.$$
де остання рівність випливає із властивості 1.

4. Необмежуючи загальності припустимо, що $f(t+T)=f(t)$. Тоді, використовуючи рівність (1), заміну змінної $z=x+T-y$ та властивість 1, можемо записати
$$(f*g)(x+T)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x+T-y)dy=\int_{\mathbb{R}} f(x+T-z)g(z)dz=$$
$$=\int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz=(f*g)(x).$$

У курсі математичного аналізу, доведення властивості 5, можна запропонувати студентам для самостійного опрацювання, оскільки вони вже мають навики диференціювання інтегралів, що залежать від параметра.■

Достатні умови існування згортки (основні випадки):

а) аункції $|f|^2$ і $|g|^2$ інтегровні на $\mathbb{R}$;

б) їдна з функцій $|f|$, $|g|$ інтегровна на $\mathbb{R}$, а інша обмежена на $\mathbb{R}$.

Доведімо випадок б). Нехай $|f|$ є інтегровна на $\mathbb{R}$, а $|g|\le M$ на $\mathbb{R}$, покажемо, що інтеграл (1) існує, а саме
$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|dy\le\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|dy\le$$
$$\le\int_{\mathbb{R}} |f(y)|Mdy=M\int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy<+\infty.$$

Приклад: Якщо
$$\delta_\alpha(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}, & t\in[0;\alpha]\\ 0, & t\notin[0;\alpha]\end{cases}$$
і f — локально інтегровна функція, то
$$f*\delta_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ \delta_\alpha(x-y)dy=\frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(y)dy.$$
А це означає, що в точці неперервності функції f згортка $f*\delta_\alpha$ є диференційовною функцією.

Список літератури

Афонский, А. А., & Дьяконов, В. П. (2009). *Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики*. Москва: СОЛОН-Пресс.

Зорич, В. А. (2002). *Математический анализ*. (Ч. 2). Москва: МЦНМО.

Кеч, В., & Теодореску, П. (1978). *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Москва:Мир

Кудрявцев, Л. Д. (1981). *Курс математического анализа*. (Ч. 2.). Москва: Высшая школа.

Фисенко, В. Т., & Фисенко, Т. Ю. (2008). *Компьютерная обработка и распознавание изображений*. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО.

Masakazu, M., Mori, K., Mitari, Y., & Kaneda, Y. (2003). Subject independent facial expression recognition with robust face detection using a convolutional neural network. *Neural Networks, 16*(5), 555–559.

Serra, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology*. London: Academic Press.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Goy T. *Some combinatorial identities for Narayana's cows sequence* ... 5
Kovalchuk V. V. *Lyapunov's stability theory for a triple inverted pendulum with a follower forces* ... 8
Semeniv O. *Geomagnetic activity prediction with deep statistical learning* ... 11
Voloshyna V. *With independent symbols of W-representation* ... 16
Блажієвська І. П., Моклячук О. М., Рибак О. В. *Казки своїми руками: Інтелектуальне мистецтво* ... 18
Бугрим О. В., Тимченко С. Е., Шелест Л. И. *О решении задач ползучести и релаксации стареющего тела (полимеров)* ... 22
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. *Моніторинг стану об'єктів критичної інфраструктури за допомогою нейронних мереж* ... 27
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. *Вплив імпульсних завад на реальну надійність електронної апаратури* ... 29
Голінко І. М., Галицька І. Є. *Динамічна модель мікроклімату для промислового приміщення, що кондиціонуються* ... 32
Горалік Є. Т., Лупіна Т. О. *Про рух стрижня під дією поперечної сили, прикладеної до його кінця* ... 36
Горленко С. В. *Про аналітичність функцій із прямолінійними множинами моногенності* ... 41
Дикач Ю. *Дослідження змін кліматичних факторів за даними метеостанції «Київ»* ... 43
Донецький С. В. *Приховані атрактори в системі генератор — п'єзокерамічний випромінювач* ... 46
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Гаєвський М. В., Запорожчук Т. С. *Прогнозування ціни на нафту засобами ARIMA-моделей* ... 49
Іваненко Т. В. *Застосування границь у задачах з фінансової математики* ... 52
Кузьменко Б. В. *Дослідження теплового самозаймання пиловугільних сумішей та його математичної моделі* ... 56
Кучкін В. М., Кравцов О. В. *Теоретичне дослідження можливості керування станами деяких металевих антиферомагнетиків* ... 60
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Звінська Т. С. *Двовимірна мішана задача в технологіях поліграфічного виробництва* ... 64
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Петров М. О. *Дослідження колірних профілів друкарських машин цифрового друку* ... 68
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р. *Формування відбитка у плоскому офсетному друці* ... 72
Лапач С. М. *Розширення сфери застосування теорії планування експерименту* ... 76
Листопадова В. В., Хоменко М. В. *Моделі з невизначеними даними в екології* ... 81

Мейш В. Ф., Бєлов Є. Д. *До постановки та чисельного розв'язку динамічних задач теорії оболонок у вигляді еліптичного параболоїду* 85
Мейш В. Ф., Мейш Ю. А. *Динамическом взаимодействии сферической оболочки с двухслойной грунтовой средой* 89
Міцюхін А. І., Віхляеў В. А. *Апісанне выявы сегментацыі* 94
Ногін М. В. *До розрахунку гідродинамічних характеристик тонкого крила в нестаціонарному режимі* 98
Полетаев Г. С. *Свойство решений уравнений родственных краевому условию задачи Римана с взаимно обратными рациональными коэффициентами* 102
Поліщук Н. В., Бур Л. С. *Дослідження ефективності роботи деякої системи масового обслуговування* 105
Поліщук О. Д. *Складні мережі, ієрархії та міжсистемні взаємодії* 109
Потемкина С. Н., Розанов А. В. *Применение теоремы Гаусса к расчету электростатического поля в диэлектрике* 113
Пушак А. С., Пушак Я. С., Пирч Н. М. *Математична подель поглинання світла домішковими центрами* 116
Радченко С. Г. *Концепция корректности при использовании экспериментально-статистических методов исследования* 120
Рожок Л. С. *Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів* 120
Савва В. А. *Расчет эффективности и кинетики флуоресценции сред, легированных редкоземельными элементами* 129
Сіренко В. О. *Узагальнення класичних сценаріїв переходу до хаосу в неідеальних динамічних системах* 134
Сокульська Н. Б., Сокульський В. М. *Методи математичної статистики як ефективні засоби обробки та аналізу даних експериментальних досліджень при вивченні дисципліни «Методика наукових досліджень, Патентознавство»* 138
Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С. *Способи покращання збіжності чисельних методів при розв'язанні крайових задач теорії оболонок* 142
Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. *Концепція квазіпохідних у нестандартних задачахтеплопровідності* 146
Фрей М. М. *Про віківське числення та його зв'язок зі стохастичним диференціюванням в аналізі білого шуму Леві* 150
Чепок О. Л. *Застосування інверсії до побудови взаємного базису для довільного базису множини векторів евклідової площини* 157
Шаповалова Н. В., Криворучко О. І. *Імітаційне моделювання як один із сучасних інструментів для дослідження різноманітних галузей людської діяльності* 160
Шаповалова Н. В., Слободенюк І. І. *Геометрія в мистецтві створення орнаментів* 164
Штефан Д. И., Штефан Т. А. *Применение математических методов в задачах биологического содержания* 170
Янчук П. С. *Ряди Фур'є за системою квазіспектральних поліномів* 174

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Shtefan T. A., Slyusarova T. I. *Optimization of control of knowledge and skills of students of technical specialties at the study of the "Higher mathematics" course*........181
Авраменко Л. Г. *Теорема Биркгофа — Тарского в курсе высшей математики* 184
Баліна О. І., Безклубенко І. С., Буценко Ю. П. *Глибина засвоєння курсу математики студентами першого курсу технічного вишу: послідовність викладання розділів, підходи до контролю* 186
Баштова Л. С. *Методологія викладання в КПІ на початку XX ст. Метод К. К. Симінського* 189
Бердник О. М., Юрчук І. А. *Про прикладні аспекти згортки функцій* 195
Білаш О. В., Гузик Н. М., Ліщинська Х. І., Петрученко О. С. *Сучасні аспекти методики викладання вищої математики студентам військових вищих навчальних закладів* 199
Білий В. О., Білий О. Г. *Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності* 202
Блажієвська І. П., Свяженіна О. Ю. *Художнє моделювання в аналітичній геометрії*..........210
Бондаренко Н. В. *Деякі застосування лінійної алгебри* 213
Величко Л. Д., Сокіл Б. І., Гузик Н. М., Сокіл М. Б. *Застосування методу інтенсифікації на практичних заняттях* 218
Вишенська О. В., Мейш Ю. А. *Деякі питання формування поняття функціональної залежності* 221
Гайдей В. О., Федорова Л. Б. *Про лінійні диференціальні рівняння з кусково-заданими коефіцієнтами* 225
Гончаренко Я. В., Сушко О. С. *Елементи актуарної математики в системі підготовки студентів математичних спеціальностей*..........228
Грудкіна Н. С., Паламарчук В. О., Ровенська О. Г., Чумак О. О. *Прикладні аспекти реалізації професійної спрямованості під час викладання математичних дисциплін*..........231
Дзигора К. Р., Нестеренко Т. В. *Отдельные вопросы корректности символьных вычислений средствами специализированных программных пакетов* 234
Довгай В. В. *Проблеми з викладанням математики в сучасному технічному університеті в умовах безсистемного реформування держави*..........238
Драганюк С. В., Карапетров В. В., Манолі А. А. *Про структуру і зміст інтегрованого курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів нематематичних спеціальностей ВНЗ* 242
Дрозд В. В. *Чи знаєте ви, панове, що таке «домашнє завдання»?* 245
Задерей П. В., Нестеренко О. Б. *Сучасні вимоги до математичної освіти у ВНЗ* 249
Калайда О. Ф. *Інтегрування лінійних однорідних нормальних систем диференціальних рівнянь з фі-циркулянтною матрицею коефіцієнтів* 252
Калайда О. Ф. *Про метод Лагранжа дослідження інтегральних функціоналів на екстремум* 253
Калайда О. Ф. *Про першу теорему про середнє в інтегральному численні*..........254
Кільчинський О. О., Рудоміно-Дусятська І. А., Сновида В. Є. *До розкладення правильного дробу при кратних коренях знаменника*..........255

Мохонько А. З., Васіна Л. С., Мохонько В. Д. *Метод найменших квадратів у задачах електротехніки* 259
Панасюк Н. М. *Дещо про методику викладання вищої математики* 264
Панасюк Н. М. *Поглиблення знань з елементарної математики під час вивчення теми «Границі»* 267
Поплавська О. А., Самарук Н. М. *Підготовка майбутніх математиків: компетентнісний підхід* 270
Рассоха І. В., Блажко Л. М., Карпалюк Т. О. *Підвищення мотивації навчання шляхом використання прикладних задач* 277
Репета В. К., Репета Л. А. *Деякі методичні аспекти викладання теорії границь у курсі вищої математики для студентів технічних спеціальностей* 281
Чернобай О. Б. *Про деякі аспекти мотивації в курсі «Вища та прикладна математика»* 286
Широканова Н. И. *Применение теории вероятностей и математической статистики в экономике* 288
Шульга С. В., Халецька З. П., Ізюмченко Л. В. *Методичні особливості вивчення теми «Апроксимація функцій» студентами фізичних спеціальностей* 291
Шылінец У. А. *Аб рэалізацыі навукова-даследчага прынцыпу пры выкладанні вышэйшай матэматыкі пры падрыхтоўцы па эканамічных спецыяльнасцях* 294
Юрчук І. А., Бердник О. М. *Згортка функцій як інтеграл від параметра* 297

Секція 3. Історія точних наук

Бондар В. В. *Розвиток знань про число е* 303
Волков А. В. *З історії диференціального та інтегрального числення* 307
Гайдей В. О., Міхно О. П. *До 110-річчя від дня народження Михайла Гельфанда (1907—1991), українського математика-методиста* 311
Гайдей В. О., Міхно О. П. *До 165-річчя від дня народження С. І. Шохор-Троцького (1853—1923), математика-методиста* 317
Грегуль Ю. О., Тимошенко О. А. *Криптографія — наука про захист інформаціїї* ... 321
Игнатович В. Н. *О некорректности доказательств теоремы Гиббса об энтропии смеси идеальных газов* 325
Філоненко Н. В. *Видатні математики і прості числа* 332
Хорошун В. В. *З історії відкриття поліномів класу Семпсона* 335

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. *Переваги застосування тестування для контролю знань з вищої математики студентів технічних спеціальностей* 339
Буряк Д. В., Крапива Н. В., Крапива І. В. *Вплив інформаційного суспільства на розроблення навчальної літератури для сучасного технічного університету* 342
Волков А. В. *Застосування пакету комп'ютерної математики Maple для створення демонстраційних матеріалів для лекцій з вищої математики* 346
Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Круглова Н. В., Шурубура К. І. *Система моделювання та аналізу результатів тестування* 350
Диховичний О. О., Круглова Н. В., Ординська З. П. *Моделювання прогнозів результатів ЗНО з математики* 352
Жданова Ю. Д., Спасітєлєва С. О., Шевченко С. М. *Автоматизація процесу генерування завдань як інноваційний підхід організації самостійної роботи студентів* 355
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. *Практико-орієнтована стратегія сучасної університетської освіти* 359
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. *Гуманітарна складова підготовки майбутніх фахівців у системі вищої технічної освіти* 362
Коновенко Н. Г., Федченко Ю. С., Худенко Н. П. *Методологічні особливості дистанційного модулю в курсі «Вища математика» ОНАХТ* 366
Омелян О. М., Ічанська Н. В. *Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі викладання математики* 370
Орловський І. В., Тимошенко О. А. *Аналіз якості нових методів контролю знань з вищої математики в технічному університеті* 374