

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
VI Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 28—29 грудня 2017 року

Київ
2018

УДК 51(082)
МЗ4

Матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2017 р. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 382 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы VI Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 29—30 декабря 2017 г. — Киев: КПИ им. Игоря Сикорского, 2018. — 382 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Sixth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2017. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018. 382 pp.

ISBN 978-617-7021-61-1

Оргкомітет VI Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Україна)
Проф. О. В. Іванов (Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Україна)
Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

Оргкомитет VI Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)
Проф. Н. А. Вирченко (Украина)
Проф. А. В. Иванов (Украина)
Доц. А. А. Дыховичный (Украина)
Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7021-61-1

©Автори
©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018



ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

РОЗВИТОК ЗНАНЬ ПРО ЧИСЛО e

В. В. Бондар

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Wheelet1228@gmail.com

Багато років тому числа увійшли в життя людей. Людина їх використовує не тільки при розрахунку та обчисленні, вона наділяє їх особливими властивостями, одним з яких і є число e . Воно характеризує час. Радіоактивність полонію-210 зменшується в e раз протягом життя одного атома, а раковина моллюска Nautilus — це графік степенів e , обернутий навколо осі.

Число e трапляється не тільки у природі. Банк, який пропонує 1% річних, за 100 років збільшить вклад майже в e раз.

Вперше число e з'явилося в математиці як дещо неважливе. Це сталося в 1618 році. У додатку до роботи Непера, присвячену логарифмам, була дана таблиця натуральних логарифмів різних чисел. Однак на той час ніхто не зрозумів, що це логарифми за основою e , так як до поняття логарифма того часу така річ як основа не входила. Це зараз ми називаємо логарифмом степенів, до якої треба піднести основу, щоб отримати шукане число. Таблиця була зроблена, скоріш за все, Отредом, хоча автор не був вказаний. Через декілька років, а саме в 1624 році, у математичній літературі знову з'являється число e . Брігз дав чисельне наближення до десяткового логарифму e , але саме число в роботі не згадав.

Наступна поява числа e знову сумнівна. У 1647 році Сен-Вінсент обчислив площу сектора гіперболи. Чи розумів він зв'язок з логарифмами, залишається тільки здогадуватися, але навіть якщо розумів, то навряд чи він міг прийти до самого числа e . Тільки до 1661 р Гюйгенс зрозумів зв'язок між рівнобічною гіперболою і логарифмами. Він довів, що площа під графіком рівнобічної гіперболи $xy = 1$ рівнобічної гіперболи на проміжку від 1 до e дорівнює 1. Це властивість робить e основою натуральних логарифмів, але це не розуміли математики того часу, однак вони повільно наближалися до цього розуміння.

Гюйгенс зробив наступний крок у 1661 році. Він визначив криву, яку назвав *логарифмічною*, що має рівняння $y = ka^x$. І знову з'являється десятковий логарифм e , який Гюйгенс знаходить з точністю до 17 десяткових цифр. Однак він виник у Гюйгенс як якась константа і не був пов'язаний з логарифмом числа (отже, знову підійшли впритул до e , але саме число e залишається невпізнаним).

У 1668 р Нікола Меркатор опублікував роботу «Logarithmotechnia», яка містить розвинення в ряд $\log(1 + x)$. У цій роботі Меркатор уперше використовує назву «натуральний логарифм» для логарифма за основою e .

Дивно, що число e в явному вигляді вперше виникає не у зв'язку з логарифмами, а в зв'язку з границею певної послідовності. У 1683 році Якоб Бернуллі намагається знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Він використовує біноміальну теорему для доказу того, що ця межа знаходиться між 2 та 3, і це ми можемо розглядати як перше наближення числа e . Хоча ми беремо це за означення e , це перший випадок, коли число визначається як границя.

Раніше згадувалося, що логарифми на початку їх вивчення ніяк не зв'язувалися з експонентами. Звичайно, з рівняння $x = a^t$ ми знаходимо, що $t = \log_a x$, але це набагато більш пізній спосіб сприйняття. Тут ми розуміємо під логарифмом функцію, тоді як спочатку логарифм розглядався тільки як число, яке допомагало в обчисленнях.

Можливо, Якоб Бернуллі першим зрозумів, що логарифмічна функція є оберненою до показникової. З іншого боку, першим, хто пов'язав логарифми і степені, міг бути Джеймс Грегорі, у 1684 р.

Відомо, що число e з'явилося в тому вигляді, як зараз, 1690 р. Лейбніц в листі до Гюйгенса використовував для нього позначення b . Нарешті у числа e з'явилося позначення (хоча воно відрізнялося від сучасного).

У 1697 році Йоганн Бернуллі починає вивчення показникової функції і публікує «Principia calculi exponentialum seu percurrentium». У цій роботі обчислюються суми різних експоненційних рядів, і отримані деякі результати їх почленного інтегрування.

Ейлер запровадив таку кількість нових математичних позначень, що не дивно, що позначення e також належить йому. Здається смішним твердження, що він використовував літеру e через те, що це перша буква його прізвища. Ймовірно, це навіть не тому, що e взято від слова «exponential», а просто це наступна голосна після a , а Ейлер вже використовував позначення a у своїй роботі. Незалежно від причини, позначення e вперше з'являється в листі від Ейлера Гольдбаху в 1731 році. Але Ейлер тільки в 1748 році в «Introductio in Analysin infinitorum» дав повне обґрунтування всім ідеям, пов'язаним з числом e . Він показав, що

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1)$$

Ейлер також знайшов перші 18 десяткових знаків числа e :

$$e = 2,718281828459045235\dots$$

правда, не пояснюючи, як він їх отримав. Схоже, що він вираховував це значення сам. Насправді, якщо взяти близько 20 членів ряду (1), то вийде точність, яку отримав Ейлер. Серед інших цікавих результатів у його роботі подано зв'язок між функціями синус та косинус і комплексною показниковою функцією, яку Ейлер вивів з формули Муавра.

Цікаво, що Ейлер знайшов навіть розкладання числа e в ланцюгові дроби, зокрема: і подав зразок такого розкладу:

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}$$

$$e-1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}$$

Ейлер не навів доведення, що ці дроби так само продовжуються, проте він знав, що якби таке доведення було, то воно доводило б ірраціональність e .

Справді, якби ланцюговий дріб для $\frac{e-1}{2}$ тривав так само, як у поданому зразку, 6,10,14,18,22,26, ... (кожен раз додаємо по 4), то він ніколи б не перервався, і $\frac{e-1}{2}$ (а значить, і e) не могло би бути раціональним. Очевидно, це перша спроба довести ірраціональність e .

Першим, хто обчислив досить велике число десяткових знаків числа e , був Шенкс в 1854 році. Глейшер показав, що перші 137 знаків, обчислені Шенксом, були правильними, однак далі знайшов помилку. Шенкс її виправив, і було отримано 205 десяткових знаків числа e . Насправді, потрібно близько 120 членів розвинення (1), щоб отримати 200 правильних знаків числа e .

У 1864 р Бенджамен Пірс стояв біля дошки, на якій було написано

$$i^{-i} = \sqrt{e^{\pi}}$$

В своїх лекціях він міг би сказати своїм студентам: «Джентльмени, ми не маємо ні найменшого уявлення, що б це значило, але ми можемо бути впевнені, що це означає щось дуже важливе».

Ірраціональність числа e довів Ерміт у 1873 році. До цих пір залишається відкритим питання, чи є число e^e алгебричним. Останній результат в цьому напрямку — це те, що принаймні одне з чисел e^e і e^{e^2} є трансцендентним.

Далі вираховували наступні десяткові знаки числа e . У 1884 році Бурман обчислив 346 знаків числа e , з яких перші 187 збіглися зі знаками Шенкса, але наступні розрізнялися.

У 1887 році Адамс обчислив 272 цифри десяткового логарифма e .

Це число може заворожувати своєю непокірністю. Йому вдавалось протягом століть тримати в полоні думки і почуття не тільки математиків і астрономів, але філософів і художників. Витрачались роки для того, щоб обрахувати декілька знаків після коми.

Список літератури

- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2018). *The number e* . Retrieved from <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html>.
- Козловский, Б. (2008). *10 чисел, на которых держится мир*. Взято из http://expert.ru/russian_reporter/2008/19/cisla/.

З ІСТОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

А. В. Волков

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

wolkowaw@gmail.com

Розглядаються основні етапи історії диференціального та інтегрального числення з періоду давнього Вавилону до кінця 19 сторіччя.

Ключові слова: історія, нескінченно малі, похідна, інтеграл.

Історію диференціального та інтегрального числення традиційно починають із праць Архімеда (III ст. до РХ). Однак насправді ця історія починається значно раніше. У давній Греції її треба починати хоча б з Демокрита (V ст. до РХ) з його ідеєю «геометричних атомів» — нескінченно малих величин. А в давньому Вавилоні (IV ст. до РХ) під час астрономічних обчислень фактично використовувався зв'язок між графіком та підграфіком, як між функцією та її інтегралом.

Можна виділити наступні етапи історії диференціального та інтегрального числення.

1. Піфагор Самоський (580—500 рр. до РХ) уважав, що все у світі є число, яке складається з одиниць. Однак уже його широковідома теорема привела до висновку, що діагональ квадрата несумірна з його стороною (тобто не є числом). Кризу намагався розв'язати Демокрит, запропонувавши поділити сторону квадрата на «геометричні атоми» — нескінченно малі відрізки. Поява апорій Зенона Елейського (біля 450 р. до РХ): а) Ахіллес, б) Стріла, в) Дихотомія, г) Стадіон, які виявили парадокси нескінченності, примусили давньогрецьких вчених уважати, що поняття нескінченності суперечливе і тому не існує. Греки відмовилися від розгляду нескінченності в математиці. Твори Демокрита не переписувалися (Стройк, 1964, ст.57).

2. Давній Вавилон (IV ст. до РХ) — зв'язок між графіком та підграфіком, як між функцією та її інтегралом (Ossendrijver, 2016).

3. Архімед (287—212 до РХ, Сіракузи) фактично застосував ідеї Демокрита до дослідження площ та об'ємів криволінійних об'єктів, однак потім намагався доводити отримані в такий спосіб твердження за правилами класичної давньогрецької математики, побудувавши фактично поняття верхнього та нижнього інтегралів Дарбу. Оскільки загальних методів інтегрування ще не з'явилося, це ускладнювало процес застосування нового методу.

4. У Західній Європі у XVII сторіччі ідея «геометричних атомів» — так званих «неподільних» — продовжила свій розвиток у працях Йоганнеса Кеплера (1571—1630), Бонавентури Кавальєрі (1598—1647), Еванджелісти Торрічеллі (1608—1647) та інших. Однак виявилось, що некоректний поділ фігури на неподільні приводить до неправильних висновків (парадокс Торрічеллі: висота ділить будь-який трикутник на рівні трикутники). А правила поділу побудувати не вдалося.

5. Джон Валліс (1616—1703) розвинув «метод неподільних» Кавальєрі, перенісши його з геометричної основи на алгебраїчну за допомогою поняття нескінченно малої величини. Інтегрування за Валлісом — це підсумовування нескінченно малих (позначення $\text{Omni } l$ — сума нескінченно малих l).

6. Праці Валліса справили велике враження на молодого Ньютона. У листах до Валліса Ньютон вперше сформулював принципи методу флюксій (диференціального числення) (1692), з дозволу Ньютона Валліс надрукував ці листи в перевиданні свого «Трактату з алгебри» (1693). Учитель Ньютона Ісаак Барроу (1630—1677) перший усвідомив, що задача про дотичні обернена до задачі про квадратури. Фактично йому належить пріоритет у відкритті формули, яку ми називаємо формулою Ньютона — Лейбніца. Ісаак Ньютон (1643—1727) — один із засновників сучасного числення нескінченно малих. Як фізик, він йшов від механічних уявлень. Змінна величина — «флюента», її швидкість — «флюксія», аналогом диференціала є «момент флюксії» — нескінченно мала величина. Однак недосконалі позначення не дозволяли вільно використовувати нове числення. Ідею про величину, яка коли треба — не нуль, а коли треба — нуль, була піддана критиці Джорджем Берклі у творі «The Analyst» 1734 року: «Коли природи зникають, ми повинні вважати, що їхні відношення, їхні вирази та все, що впливає з припущення їхнього існування — зникає разом з ними» (Berkeley, 1734, с. 20—21).

7. Німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716), як людина, яка була захоплена ідеєю універсальної мови, значно більше приділяв уваги зручним позначенням. Тому створена Лейбніцем теорія диференціалів отримала значно більш поширене використання і фактично, є основою сучасної теорії похідної та інтеграла. Лейбніцу належать терміни: диференціал, диференціальне числення, функція, змінна, стала, координати, абсциса, сучасні позначення диференціала, похідної, як відношення диференціалів, та інтеграла. Інтеграл він називав сумою, термін «інтеграл» належить Якобу Бернуллі (див., наприклад, Bernoulli, 1713, с. 304). Диференціал — нескінченно мала різниця двох нескінченно близьких значень змінної величини. Інтеграл — сума нескінченного числа диференціалів. На відміну від Ньютона, для якого моменти флюксій були результатом переходу до границі («першого або останнього відношень»), для Лейбніца його диференціали були актуальними нескінченно малими величинами, одночасно меншими за будь-яке додатне число та не рівними нулю. Основою такого погляду було поняття «монади» — нескінченно малого духовного атому, що містить увесь зміст людської особистості, яке було основним у філософії Лейбніца.

8. У 1696 році маркіз Гійом Франсуа Антуан де Лопіталь на основі листів послідовника Лейбніца Йоганна Бернуллі видав перший підручник з нового числення, в якому вперше нова дисципліна отримала назву «аналіз»: «Аналіз нескінченно малих» (L'Hôpital, 1696).

9. Наступне XVIII сторіччя було цілком сторіччям аналізу. Йоганн Бернуллі (1667—1748), Леонард Ейлер (1707—1783), Якоб Бернуллі (1654—1705), Жозеф

Луї Лагранж (1736—1813), П'єр Симон Лаплас (1749—1827), Лежандр, д'Аламбер, Клеро, Мопертюї, Монж, Карно, Ламберт, Даниїл Бернуллі та багато інших математиків так захопилися новим методом, який так легко дозволяв розв'язувати складні задачі давнини та формулювати й швидко розв'язувати нові, що про брак обґрунтування цього методу вони намагалися майже не думати.

10. Джон Ланден у праці «Міркування про різницевий аналіз. Нова гілка алгебраїчного мистецтва» (Англія, 1758 рік) запропонував не розглядати нескінченно малі величини, а отримувати похідні алгебраїчними методами (Landen, 1758).

11. Ідею Ландена розвинув французький математик Жозеф-Луї Лагранж (1736—1813). Він стверджував, що не може уявити, що відбувається, коли відношення приростів прямує до границі, тому взагалі відкинув поняття нескінченно малої та переходу до границі. Похідні він отримував, як коефіцієнти степеневого ряду, розклад в який відбувався, як у Ландена, алгебраїчними методами. Кожна наступна похідна (*la dérivée*) «походить, утворюється» (*dérive*) з попередньої, як коефіцієнт при першому степені приросту аргументу в розкладі її у степеневий ряд. Автор терміну та сучасного позначення похідних штрихами (Lagrange, 1806, с. 8—15).

12. Наступне XIX сторіччя в цілому було сторіччям геометрії, однак як раз в цю добу й було отримано нарешті повне обґрунтування диференціального та інтегрального числення. На початку сторіччя — Огюстеном Луї Коші (1789—1857), наприкінці — Карлом Теодором Вільгельмом Веєрштрассом (1815—1897).

13. Коші вважав, що нескінченно мала — змінна величина, яка прямує до нуля. Він писав, що «якщо значення, що послідовно надаються якій-небудь змінній, наближаються нескінченно до певного фіксованого значення в такий спосіб, що нарешті відрізняються від нього як завгодно мало, то це останнє називається *границею* всіх інших ... якщо послідовні числові значення певної змінної нескінченно зменшуються в такий спосіб, що нарешті будуть менше будь-якого наперед заданого числа, то в цьому випадку ця змінна називається *нескінченно малою*, або нескінченно малою величиною. Змінна такого роду має границею нуль.» (Cauchy, 1823, с. 1—4).

14. За основу диференціального та інтегрального числення Коші взяв сформульоване в такий спосіб поняття границі. Однак, як бачимо, поняття границі залишалося недостатньо формалізованим, щоб уникнути можливих непорозумінь. Цей недолік був наприкінці сторіччя виправлений Веєрштрассом, який у власних лекціях з математичного аналізу побудував фактично сучасне «епсілон-дельта» означення границі та вказав правила оперування з ним. Веєрштрасс не видав жодної книжки або статті, де роз'яснював би це означення границі, однак його слухачами були відомі в подальшому математики, тому ідеї Веєрштрасса швидко поширювалися. Наприклад, зміст лекцій Веєрштрасса став відомим з надрукованого у 1973 році конспекту його колишнього студента, відомого математика Г. А. Шварца.

15. Перший підручник, у якому використовувалася «епсілон-дельта» мова: «Лекції із загальної арифметики згідно з сучасною точкою зору» був виданий О. Штольцем у 1885 році.

16. У 1854 році Георг Фрідріх Бернгард Ріман (1826—1866) побудував сучасне означення інтеграла Рімана. Раніше аналогічне означення розглядав Коші, але тільки для випадку неперервних функцій.

Список літератури

- Berkeley, G. (1734). *The Analyst*. Retrieved from <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf>.
- Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola Gallice scripta De ludo pilae reticularis*. Retrieved from https://archive.org/details/bub_gb_kz9nvk99EWoC.
- Cauchy, A. L. (1823). *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*. Retrieved from https://books.google.cz/books/about/Résumé_des_leçons_sur_le_calcul_infin.html?id=uN5UAAAAYAAJ&redir_esc=y.
- Lagrange, J. L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*. Retrieved from <https://archive.org/stream/leonssurlecalcu01lagrgoog#page/n6/mode/2up>.
- Landen, J. (1758). *A discourse concerning the residual analysis: a new branch of the algebraic art, of very extensive use, both in pure mathematics and natural philosophy*. Retrieved from <http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3023828>.
- L'Hôpital, de, G. F. A. (1696). *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. Retrieved from <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k205444w>.
- Ossendrijver, M. (2016). Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph. *Science*, 351(6272), 482–484. doi: 10.1126/science.aad8085. Retrieved from https://www.academia.edu/21448627/2016_Ancient_Babylonian_astronomers_calculated_Jupiters_position_from_the_area_under_a_time-velocity_graph.
- Стройк, Д. Я. (1964). *Краткий курс истории математики*. Москва: Наука.

ДО 110-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ГЕЛЬФАНДА (1907—1991), УКРАЇНСЬКОГО МАТЕМАТИКА-МЕТОДИСТА

В. О. Гайдей^{1, 2}, О. П. Міхно²

¹Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Педагогічний музей України, Київ, Україна

victor144169@gmail.com

Подано відомості про життя і науково-методичну спадщину
М. Б. Гельфанда, українського математика-методиста.

Ключові слова: історія методики математики, УНДП.

На жаль, детальних відомостей про життєвий шлях М. Гельфанда до сьогодні немає. Відомо, що Михайло Борисович Гельфанд народився 11 травня 1907 р. Дуже стислі відомості про вченого подано у «Календарі знаменних і пам'ятних дат у галузі освіти і педагогічної науки на 2007 р.» у зв'язку зі 100-річчям від дня його народження: «100 років від дня народження Михайла Борисовича Гельфанда (1907—?), українського математика-методиста, кандидата педагогічних наук, завідувача сектора методики математики НДІ педагогіки УРСР, популяризатора передового досвіду вчителів математики шкіл України, автора праць з методики математики в середній школі» (Ніколюк & Моїсєєва, 2006, с. 53).



З інших джерел вдалося встановити, що Михайло Гельфанд закінчив аспірантуру та в 1937 році захистив дисертацію «Теорія і методика ірраціонального числа» в Українському науково-дослідному інституті педагогіки (УНДП). Відтоді життя вченого було пов'язане з цим інститутом, де він працював науковим співробітником, завідувачем відділу методики математики.

Автор понад 60 праць з методики викладання математики в середній школі. Аналіз його творчої спадщини свідчить, що вчений розробляв проблеми наближених обчислень і ірраціональних чисел, досліджував питання геометричних побудов за допомогою класичних інструментів, звертався до методики окремих тем алгебри та тригонометрії, елементів математичного аналізу.

М. Гельфанд був активним дописувачем журналів «Математика в школі», «Радянська школа», редактором збірника «Математика в школі». Про завдання збірника він доповідав на засіданні секції математиків пленарної сесії УНДПу у вересні 1949 р. (доповідь «Наші методичні збірники як один із заходів узагальнення кращого досвіду вчителів-математиків»).

М. Гельфанд систематично брав участь у різноманітних наукових заходах у різних містах України, виступаючи з ґрунтовними доповідями. Так, у січні 1948 р. в Києві відбулась наукова сесія УНДПу, присвячена 30-річчю Української РСР, де на засіданні секції фізико-математичних наук вчений виступив з доповіддю «Арифметика в старших класах середньої школи» (Гайдей & Міхно, 2016, с. 143).

У жовтні 1951 р. у Вінниці відбувся поширений пленум відділу методики математики УНДІПу, присвячений питанням викладання геометрії (планіметрії). Виступ М. Гельфанда стосувався методики викладання — «Зміст і завдання викладання геометрії» (Гайдей & Міхно, 2016, с. 156). У лютому-березні 1955 р. він виступив з доповіддю на розширеному засіданні вченої ради Науково-дослідного інституту педагогіки Української РСР, яке було присвячене політехнічному навчанню в середній школі. М. Б. Гельфанд спинився на проблемі політехнічного навчання у зв'язку з викладанням математики. Він наголошував, що необхідно далі удосконалювати програми з математики. Шкільний курс елементарної алгебри і особливо геометрії повинен враховувати сучасний рівень науки і ті освітньо-виховні завдання, що стоять перед школою. Здійснення політехнічного навчання на уроках математики вимагає широкого показу застосування цієї науки в житті, вивчення теоретичного курсу на матеріалі виробництва, виховання в учнів умінь складати і розв'язувати конкретні математичні задачі. У процесі викладання математики потрібно звернути увагу на прищеплення практичних навичок, привчити школярів широко користуватись лічильними і вимірними інструментами. У курсі геометрії особливе місце слід приділити конструктивним задачам, вимірним роботам на місцевості, завданням, пов'язаним з моделюванням і конструюванням (Гайдей & Міхно, 2016, с. 209—210).

У жовтні 1958 року в м. Чернігові на республіканській науково-практичній конференції вчителів математики й креслення, організованій Науково-дослідним інститутом педагогіки УРСР спільно з Чернігівським обласним відділом народної освіти та педагогічним інститутом, М. Гельфанд порушує питання здійснення зв'язку теорії і практики у вивченні математики. У своєму виступі вчений продемонстрував, як передові учителі формують в учнів розуміння загальних законів природи, що виражаються однотиповими математичними залежностями. Їх учні вміють вільно користуватися правилами усних, письмових, наближених обчислень, рахівницею, логарифмічною лінійкою, графіками, різними довідковими таблицями та вимірювальними приладами (Гайдей & Міхно, 2016, с. 228). Восени 1964 р. на виїзному засіданні відділів методики фізики і математики Науково-дослідного інституту педагогіки УРСР у м. Ялті М. Гельфанд у доповіді «Співвідношення конкретного і абстрактного» кандидат педагогічних наук М. Б. Гельфанд розкрив і конкретизував завдання вчителя математики з розвитку діалектико-матеріалістичного світогляду учнів. Учитель повинен не лише з'ясувати суть і особливості математики як науки, що відображує кількісні відношення предметів матеріального світу, але й довести, що для математичних співвідношень існують відповідні прообрази в предметах і явищах матеріального світу. На конкретних прикладах доповідач показав походження математичних понять, пов'язаних з практичною діяльністю людини (Гайдей & Міхно, 2016, с. 278).

До ювілею М. Б. Гельфанда було укладено вибрану бібліографію його праць та підготовано віртуальну виставку:

http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/110_rokiv_gelfand/

Вибрана бібліографія М. Б. Гельфанда

1. Гельфанд М. Б. Иррациональное число у Евклида. Математика и физика в школе. 1936. № 6. С. 26—35.
2. Кравчук, М. П., Гельфанд М., Вулах О. Наближені обчислення в середній школі. Комуністична освіта. 1936. № 9. С. 26—34.
3. Застосування різних способів розв'язування задач на побудову / М. Б. Гельфанд. Комуністична освіта. 1938. № 9. С. 113—123.
4. Гельфанд М. Б., Сергунова О. П. Як дати учням на базі наближених обчислень поняття про ірраціональне число та дії з ним. Комуністична освіта. 1938. № 1. С. 88—96.
5. Гельфанд М. Методика розв'язання задач на побудову в середній школі / УНДП; Під ред. О. М. Астряба та проф. О. С. Смогоржевського. Київ : Радянська школа, 1940. 194 с.
6. Гельфанд М. Б. Теорія і методика ірраціонального числа (3 матеріалів дисертації, написаної в 1937 р.). Наукові записки УНДП. 1940. Т. 2. — С. 127—178.
7. Гельфанд М. Б. Періодичні дроби / УНДП. Київ : Радянська освіта, 1941. 96 с.
8. Гельфанд М. Б. Повторення арифметики у зв'язку з проходженням нового матеріалу. Радянська школа. 1948. — № 2. С. 24—29.
9. Гельфанд М. Б. Перші уроки з алгебри. Математика в школі : Методичний збірник. 1949. Вип. 2.
10. Гельфанд М. Б. Графіки обернених тригонометричних функцій : Пояснення до таблиць. Київ : Радянська школа, 1950.
11. Гельфанд М. Б. Розділ 6. Десяткові дроби / Нариси методики викладання арифметики / Під ред. О. М. Астряба. Київ : Радянська школа, 1950. С. 138—158.
12. Гельфанд М. Б. Графічний метод вивчення тригонометричних функцій. Математика в школі : Збірник. 1951. Вип. 4. С. 89—111.
13. Гельфанд М. Б. Деякі зауваження до перших уроків алгебри. Алгебра : Збірник статей / Упорядники : В. А. Зморевич, М. Б. Гельфанд. Київ : Радянська школа, 1951. С. 114—126.
14. Зморевич В. А., Гельфанд М. Б. Про розв'язування алгебраїчних рівнянь у радикалах / Алгебра : Збірник статей. Київ : Радянська школа, 1951. С. 169—188.
15. Гельфанд М. Б. Сессия Украинского научно-исследовательского института педагогики. Математика в школе. 1951. № 1. С. 83—84.
16. Гельфанд М. Б. Теоретична підготовка учнів з арифметики / Викладання арифметики в семирічній школі : Збірник / За ред. О. М. Астряба. Київ : Радянська школа, 1951. С. 20—32.
17. Гельфанд М. Б., Астряб О. М. та ін. За високу успішність учнів за математики. Радянська школа. 1952. № 7. С. 21—29.
18. Гельфанд М. Б. Обобщение педагогического опыта (пленум по вопросам преподавания геометрии. Математика в школе. 1952. № 4. С. 85—87.
19. Гельфанд М. Б. Десяткові дроби / Нариси методики викладання арифметики / Під ред. О. М. Астряба. 2-ге вид. Київ : Радянська школа, 1953. С. 139—158.
20. Гельфанд М. Б. Основні вимоги до викладання геометрії / Викладання геометрії в середній школі. Планіметрія : Збірник / За ред. О. М. Астряба. Київ : Радянська школа, 1953. С. 4—15.
21. Гельфанд М. Б. Про деякі заходи до здійснення політехнічного навчання при викладанні планіметрії / Викладання геометрії в середній школі. Планіметрія : Збірник. Київ : Радянська школа, 1953. С. 186—194.
22. Гельфанд М. Б. Республиканские «Педагогические чтения» в УССР. Математика в школе. 1953. № 6. С. 79—80.
23. Гельфанд М. Б. Розв'язування практичних задач на уроках з планіметрії. Радянська школа, 1953. № 7. С. 26—31.

24. Гельфанд М. Б. Графіки при дослідженні тригонометричних функцій / Викладання математики в середній школі при політехнічному навчанні : Збірник / УНДП; За ред. О. М. Астряба. Київ : Радянська школа, 1954. С. 124—138.
25. Гельфанд М. Б. Деякі практичні застосування тригонометрії / Викладання математики в середній школі при політехнічному навчанні / УНДП. Київ : Радянська школа, 1954. 304 с. С. 234—265.
26. Дубинчук О. С., Нестеренко Т. Я., Гельфанд М. Б. Чергові завдання у викладанні математики в 5—10 класах середньої школи. Радянська школа. 1954. № 3. С. 44—50.
27. Гельфанд М. Б. Задачі на перерізки многогранників / Методика викладання стереометрії. Київ : Радянська школа, 1956. С. 195—224.
28. Гельфанд М. Б. Многогранники / Методика викладання стереометрії. Київ : Радянська школа, 1956. С. 80—90.
29. Гельфанд М. Б. О решении задач на построение сечений многогранников. Математика в школе. 1956. № 4. С. 42—47.
30. Гельфанд М. Б. Показникова і логарифмічна функція (Матеріали для вчителів) / УНДП. Київ, 1956. 36 с.
31. Гельфанд М. Б. Республиканские «Педагогические чтения» по вопросам политехнического обучения. Математика в школе. 1956. № 3. С. 83—85.
32. Салум М. П., Гельфанд М. Б. Уроки з арифметики в V класі. Київ : Радянська школа, 1956. 203 с.
33. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Про використання нового підручника з тригонометрії. Радянська школа. 1957. № 4.
34. Гельфанд М. Б. Радянський період розвитку методики математики / Наукова сесія, присвячена 40-річчю Великої Жовтневої соціалістичної революції : Збірник / УНДП. Київ : Радянська школа, 1957. С. 61—63.
35. Гельфанд М. Б. Республиканские «Педагогические чтения» на Украине, посвященные 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Математика в школе. 1957. № 6. С. 89—92.
36. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Уроки з тригонометрії в 9 класі. Київ : Радянська школа, 1957. 120 с.
37. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Опыт изложения теоремы сложения по новому учебнику тригонометрии. Математика в школе. 1958. № 4. С. 33—35.
38. Гельфанд М. Б. Обсуждение программы по математике. Математика в школе. 1959. № 2. С. 82—84.
39. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Уроки з тригонометрії в 10 класі. Київ : Радянська школа, 1959. 136 с.
40. Гельфанд М. Б. Вступ. Розділи 4 і 5 / Методика розв'язання задач на побудову / УНДП; Під ред. О. М. Астряба та проф. О. С. Смогоржевського. 2-ге вид. Київ : Радянська школа, 1960. 388 с.
41. Гельфанд М. Б., Нестеренко Т. Я. Шляхи піднесення рівня знань учнів з математики : Методичний лист; Ред. М. Б. Гельфанд. Київ : Радянська школа, 1961. 68 с.
42. Гельфанд М. Б. Елементи логіки в геометрії / Наукові записки НДП. 1962. Том 22. Фізико-математична серія. Вип. 4. С. 77—111.
43. Гельфанд М. Б. О связи преподавания математики с жизнью, трудовым и производственным обучением / Математика в школе. 1962. № 5. С. 82—83.
44. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Уроки алгебри в IX і X класах : Посібник для вчителів. Київ : Радянська школа, 1962. 199 с.
45. Гельфанд М. Б. Опыт изучения темы «Степенная функция» в IX классе. Математика в школе. 1963. № 5. С. 30—37.

46. Гельфанд М. Б. Основні питання викладання алгебри в IX—XI класах. НДП. Київ : Радянська школа, 1963. 208 с.
47. Гельфанд М. Б. Степень с целым показателем. Степенная функция с целым показателем : Программированное учебное пособие для средней школы / под ред. И. Ф. Тесленко. Киев : Радянська школа, 1964. 106 с.
48. Гельфанд М. Б. Степін з цілим показником. Степенева функція з цілим показником : програмований навчальний посібник для середньої школи / УНДП; за ред. І. Ф. Тесленка. Київ : Радянська школа, 1964. 106 с.
49. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Внеклассная работа по математике в восьмилетней школе. Москва : Просвещение, 1965. 208 с.
50. Гельфанд М. Б., Дубинчук О. С., Нестеренко Т. Я., Тесленко І. Ф. Наслідки експериментальної перевірки програмованих посібників з математики. Радянська школа. 1966. № 10. С. 22—30.
51. Гельфанд М. Б., Дубинчук О. С., Нестеренко Т. Я., Тесленко І. Ф. Безмашинное программированное обучение. Математика в школе. 1967. № 5. С. 68—70.
52. Гельфанд М. Б. Преобразование графиков при решении некоторых неравенств и уравнений. Математика в школе. 1969. № 2. С. 40.
53. Гельфанд М. Б., Шапіро І. Я. Про одну властивість показникової функції і її застосування для розв'язування практичних задач / Викладання математики в школі : Збірник. Київ : Радянська школа, 1969. Вип. 5. С. 120—133.
54. Гельфанд М. Б. Методичні розробки з алгебри. Для вчителів експерим. VI кл. На 1970/71 навч. рік / НДП. Київ, 1970. 89 с.
55. Гельфанд М. Б., Шейнцвит Р. П. Построение графиков функций, связанных с целой и дробной частью действительного переменного. / М. Б. Гельфанд, Р. П. Шейнцвит // Математика в школе. — 1970. — № 3. — С. 68—71.
56. Тесленко І. Ф., Гельфанд М. Б., Маєргойз Д. М., Скобелєв Г. М. Математика : Посібник для факультативних занять в 9 класі / За ред. В. Зморовича. Київ : Радянська школа, 1972. 192 с.
57. Гельфанд М. Б., Лоповок Л. М., Скобелєв Г. М., Тесленко І. Ф. Розв'язування геометричних задач у середній школі : Посібник / За ред. доц. Л. М. Лоповка. Київ : Радянська школа, 1972. 262 с.
58. Гельфанд М. Б. Професійна орієнтація в процесі вивчення основ наук : Математика / Система профорієнтаційної роботи / НДП. — Київ : Радянська школа, 1975. С. 51—60.
59. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Шейнцвіт Р. П. Розв'язування нерівностей. Київ : Вища школа, 1975. (Бібліотечка фізико-математичної школи).
60. Гельфанд М. Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу / НДП. Київ : Радянська школа, 1976. 143 с.
61. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. Київ : Вища школа, 1979. (Бібліотечка фізико-математичної школи). 120 с.
62. Гельфанд М. Б., Берман В. П. Упражнения межпредметного характера к теме «Производная». Математика в школе. 1979. № 2. С. 31—36.
63. Гельфанд М. Б., Берман В. П. Упражнения межпредметного характера к теме «Интеграл». Математика в школе. 1981. № 3. С. 18—22.
64. Гельфанд М. Б., Макуха А. С., Ушаков Р. П. Математика : Справочное пособие : Поступающим в вузы / Под общей ред. М. Б. Гельфанда. Киев : Вища школа, 1982. 464 с.

Редагування

65. Математика в школі : Методичний збірник. Вип. 2 / УНДП; Ред. М. Гельфанд. Київ : Радянська школа, 1948. 100 с.

66. Математика в школі : Методичний збірник. Вип. 3 / УНДП; Ред. М. Гельфанд. Київ : Радянська школа, 1949. 164 с.
67. Математика в школі : Методичний збірник. Вип. 4 / УНДП; За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1951.
68. Алгебра : Збірник статей / Упорядники : В. А. Зморевич, М. Б. Гельфанд. — Київ : Радянська школа, 1951. 368 с. (Питання методики викладання математики в школі).
69. Математика в школі : Методичний збірник. Вип. 6 / УНДП; За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1952. 136 с.
70. Математика в школі : Методичний збірник. Вип. 7 / УНДП; За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1952. 144 с.
71. Викладання геометрії в середній школі. Планіметрія : Збірник (за матеріалами розширеного пленуму відділу методи математики, що відбувся в жовтні 1951 р. у Вінниці) / УНДП; За ред. О. М. Астряба, М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1953. 220 с.
72. З досвіду викладання математики в середній школі / За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1954.
73. З досвіду запровадження політехнічного навчання при викладанні математики в середній школі : Педагогічні читання. Вип. I / НДП; За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1956.
74. З досвіду викладання математики (за матеріалами наукової конференції з питань політехнічного навчання) / НДП; За ред. М. Б. Гельфанда. — Київ : Радянська школа, 1957. 66 с.
75. З досвіду викладання математики в середній школі : Педагогічні читання / НДП; За ред. М. Б. Гельфанда. Київ : Радянська школа, 1959.

Список літератури

- Гайдей, В. О., & Міхно, О. П. (2016). *УНДП на сторінках педагогічних журналів 1926—1976 рр.* Серія «Педагогічні републікації, вип. 3. О. В. Сухомлинська (Наук. консультант). Київ: Педагогічний музей України.
- Ніколюк, Л. І., & Моїсєєва, І. П. (2006). *Календар знаменних і пам'ятних дат у галузі освіти і педагогічної науки на 2007 рік.* П. І. Рогова (Наук. ред.). Київ: НАПН України, Держ. наук.-пед. б-ка України ім. В. О. Сухомлинського.

ДО 165-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ С. І. ШОХОР-ТРОЦЬКОГО (1853—1923), МАТЕМАТИКА-МЕТОДИСТА

В. О. Гайдей^{1, 2}, О. П. Міхно²

¹ Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

² Педагогічний музей України, Київ, Україна

victor144169@gmail.com

Подано відомості про життя та науково-методичну спадщину С. І. Шохор-Троцького, математика-методиста.

Ключові слова: історія методики математики.

Відомий методист-математик С. І. Шохор-Троцький (2(14).01.1853—12.03.1923) народився в Кам'янці-Подільському.

Рано втративши батька, він залишився зі своєю матір'ю без коштів. З 15-річного віку С. І. Ш.-Т. уже заробляє, даючи приватні уроки.

Середню освіту здобув у київській Першій та херсонській гімназіях. Вищу освіту розпочав на фізико-математичному факультеті Новоросійського університету (Одеса) і в Петербурзькому інституті шляхів сполучення, де провчився 2 роки, за станом здоров'я залишив його й оселився в Херсоні, де навчався самостійно і давав приватні уроки.

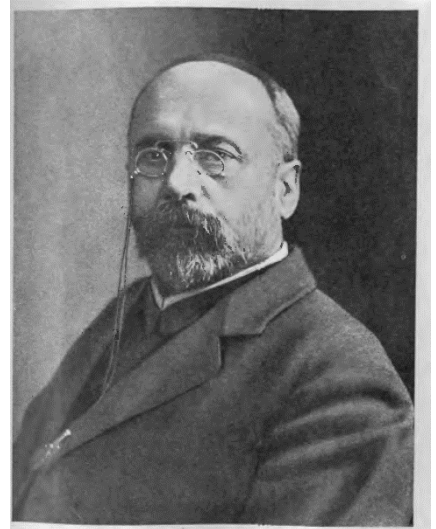
Продовжив свою освіту за кордоном (1877—1881) у Берлінському, Гейдельберзькому та Кенігсберзькому університетах, де вивчав математику, фізику та педагогіку, слухаючи лекції видатних учених (Гельмгольца, Веєрштраса, Куммера, Кронекера та інших).

У 1882 р. переїздить до Петербурга, де перші роки працює помічником редактора спершу журналу «Сім'я та Школа» («Семья и Школа») (1882—1885), а згодом «Російська школа» («Русская школа») (1890—1893).

Щоб одержати право викладання в гімназії, Шохор-Троцький складає 1887 р. учительський екзамєн, після якого викладає: у жіночих гімназіях та інститутах, певний час у початковій школі, у Кадетському корпусі, на педагогічних курсах військових закладів, у Педагогічній академії Ліги освіти, на Фребелівських педагогічних курсах, у Психоневрологічному інституті, а також у Педагогічній академії та Кам'яноостровському сільськогосподарському інституті.

Протягом двадцяти років (з 1896) виїжджає в різні міста Росії читати лекції з методики математики на літніх учительських курсах.

Літературно-педагогічна спадщина Ш.-Т. багата й різноманітна. Він писав і грубі книжки — підручники з математики, задачники, методичні посібники, і статті на методичні та загально-педагогічні теми, і рецензії.



Дітьми Шохора-Троцького до 35-річного ювілея його педагогічної діяльності було випущено вказівник його праць:

http://www.mathedu.ru/lib/books/ukazatel_trudov_shohor-troczkogo_1910/#0

Основні праці:

«Методика арифметики с приложением сборника упражнений по арифметике для учащихся» (1886).

«Цель и средства преподавания высшей математики с точки зрения требований общего образования» (1892).

«Почему и как учить на уроках арифметики» (1899).

«Наглядность и наглядные пособия при изучении арифметики» (1904).

«До реформы системы школьного образования» (1906, в соавторстве).

«Геометрия на задачах. Книга для учащихся» (выпуски 1—2, 1909).

«Геометрия на задачах. Книга для учителя» (1913).

Також відзначимо україномовну (перекладену М. Грінченко) статтю Шохор-Троцький (1911), де автор наполягає на викладанні математики рідною, зокрема, українською мовою.

С. І. Шохор-Троцький неодноразово брав участь у роботі різних комісій з розроблення планів та програм навчальних закладів різного типу. Досить часто виступав зі змістовними доповідями на учительських з'їздах.

С. І. Шохор-Троцький сформулював такий принцип навчання, висунутий французьким педагогом Ж. Жакото (1770—1840): «Навчати інших чому-небудь — означає показати їм, що вони повинні робити самі, щоб навчитись тому, чому їх навчають». Цей принцип обґрунтовує самодіяльність і посильну працю учнів під час навчання математики.

У своїх лекціях, доповідях і книгах С. І. Шохор-Троцький обстоює методи проблемного навчання, «методу доцільних задач». Під задачею він розумів і задачу, що вимагає обчислення, виготовлення моделі, креслення і питання, з якого випливає теорема. Така задача є вихідним пунктом, коли доводиться підводити учнів до нового математичного уявлення, а потім і поняття.

Він відстоював також принцип наочності (конкретності) та індуктивно-лабораторний метод під час вивчення математики, потребу у взаємному переплетенні різноманітних математичних дисциплін і внесення прикладних питань у навчання чистій математиці.

С. І. Шохор-Троцький прагнув до того, щоб під час навчання математики зробити учня не лише свідком математичних відкриттів, але й за можливістю, їх активних учасником.

С. І. Шохор-Троцький був одним з ініціаторів реформи математичної освіти. Зокрема, у праці «Мета і засоби викладання нижчої математики з погляду вимог загальної освіти» (СПб., 1892) він уперше висунув одну з основних ідей реформи — покласти в основу шкільного курсу вивчення функціональної залежності.

С. І. Шохор-Троцький різко виступав проти панівної тоді системи навчання в гімназіях. Він був переконаний, що неуспішність з математики значною мірою є результатом нехтування вчителів психологією: Учитель, який не може

або не бажає зважати на те, що той, кого навчають математиці повинен цікавитися предметом та його питаннями, що він повинен радіти подоланню труднощів, повинен відчувати розумове, моральне та естетичне задоволення, повагу до науки, здивування її результатам тощо, — такий учитель, не відповідає вимогам психології. Він не зважає на те, що учень — не бездушна посудина, яку можна наповнювати програмним навчальним математичним матеріалом, а людина в повному сенсі цього слова з нескінченно багатим світом душевних переживань...».

Цікаві погляди методиста на підручники математики і навчальні посібники для вчителів. Для учнів треба створити два типи книг з математики: задачник, який містить завдання і вправи для самостійної роботи, і книга, у якій математичні знання викладено логічно й послідовно. При цих умовах можна вести школяра від спостереження математичних фактів до узагальнень, і разом з тим, у потрібний момент учень може звернутись до систематичного викладу математичних знань у підручнику.

Учителю також доцільно запропонувати книгу з методики викладання навчального предмета та книгу з підбіркою методично розташованих задач і вправ, які виконують учні під безпосереднім керівництвом учителя. Ця друга книжка полегшить працю вчителя з підбору задач і вправ до уроків, але не зв'яже його певною системою викладання, надаючи можливості не за шаблоном, а творчо реалізовувати ті ідеї, які викладено у книзі, присвяченій методиці математики.

Семен Ілліч розробив методику навчання арифметиці разом з геометрією і з групою своїх учнів експериментально перевіряв її у школах.

Останні роки свого життя С. І. Шохор-Троцький присвятив критичному переробленню своєї творчості, залишивши величезний рукопис у тисячу сторінок. За матеріалами цього рукопису методистами І. М. Кавуном та В. І. Синакевич було видано дві книги: «Методика начального курсу математики» (Ленінград, 1924) і «Методика арифметики. Посібник для вчителів середньої школи» (Москва; Ленінград, 1935).

Список літератури

- Бородин А. И., & Бугай А. С. (1979). Биографический словарь деятелей в области математики. Киев: Радянська школа.
- Гайдей, В. О., & Клімова, Н. А. (2014). Рідкісні видання з методики математики у колекції «Розвиток наук у ХІХ — першій чверті ХХ ст.» Педагогічного музею України. У *Матеріалах П'ятнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука*, Київ, 5—17 травня, 2014 р., (Т. 4. Історія та методика математики, с. 62—63). Київ: КПІ.
- Дети С. И. Шохор-Троцкого (1910). *Указатель трудов, статей, рецензий и заметок С. И. Шохор-Троцкого*. С портретом, краткой биографической справкой и приложениями. Санкт-Петербург.
- Зайцев, Г. Т. (1979). Семен Ильич Шохор-Троцкий и его метод целесообразных задач. *Начальная школа*, (1), 58—59.

- Кавун, И. Н. (1924). В С. И. Шохор-Троцкий, *Методика начального курса математики*: в 2-х частях. Ч. 1. Учебники и учебные пособия для трудовой школы (9-е изд.). Ленинград: Государственное издательство.
- Кривко, Я. (1973, 28 грудня). Родом з Кам'янця-Подільського: Наші славетні. *Прапор Жовтня*, с. 4.
- Ланков А. В. (1951). *К истории развития передовых идей в русской методике математики: Пособие для учителей*. Москва: ГУПИ МО РСФСР.
- Минковский, В. Л., & Муромцева Л. И. (1978). С. И. Шохор-Троцкий — педагог-новатор: К 125-летию со дня рождения. *Математика в школе*, (1), 84—86; портрет.
- Пчелко, А. С. (1940). *Хрестоматия по методике начальной арифметики*. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Наркомпроса РСФСР.
- Симонов, И. С. (1923). С. И. Шохор-Троцкий (некролог). *Педагогическая мысль*, (3), 93—94.
- Скаткин, Л. (1973). Выдающийся педагог-математик С. И. Шохор-Троцкий. *Начальная школа*, (1), 86—87.
- Чехов, Н. В. (1923). Семен Ильич Шохор-Троцкий. *Вестник просвещения*, (4).
- Шохор-Троцкий, С. И. (1935). *Методика арифметики: Пособие для учителей средней школы*. В. И. Синакевич (Ред.). (5-е изд.). Москва: Госпедиздат.
- Шохор-Троцкий, С. И. (1911). Початкова математика в школі для дорослих. *Світло*, (7), 3—9.

КРИПТОГРАФІЯ — НАУКА ПРО ЗАХИСТ ІНФОРМАЦІЇ

Ю. О. Грегуль, О. А. Тимошенко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна
zorot@ukr.net

Які шифри бувають і чи є системи шифрування, які неможливо зламати та розкрити? Які методи й системи захисту інформації використовує криптографія? Як можна захистити себе від атаки хакерів? На всі ці питання можна отримати відповіді, опанувавши дисципліну «Криптографія»

Ключові слова: криптографія, «Скітала», шифр Цезаря, криптографічний алгоритм, загальний ключ.

Історія шифрування нараховує не одне тисячоліття. Зашифровані повідомлення знайдені на стінах печер первісних людей та на стінах гробниць фараонів Єгипту. Секретну інформацію за допомогою шифру передавали у Стародавній Індії та Месопотамії, та перші надійні системи захисту були розроблені у Китаї.



Рис.1 «Скітала»

Найчастіше шифрування інформації використовувалось у військових цілях. Широко відомий шифр «Скітала», який Спарта застосовувала проти Афін у VII столітті до н. е. Для засекречування інформації використовували пристрій, який уявляє собою жезл циліндричної форми. Вузька стрічка пергаменту намотувалась навколо жезлу, а повідомлення писалось рядочками за довжиною пристрою (Рис. 1).

Гай Юлій Цезар вдавався до шифрів при написанні листів військовим генералам. Для того, щоб уникнути ймовірності того, що посланець наважиться і захоче прочитати лист Цезаря, імператор міняв кожен букву А на D, кожен В на Е, і так далі (Рис. 2). І лише ті, хто знали правило «зсуву на 3» мали змогу розшифрувати його послання.

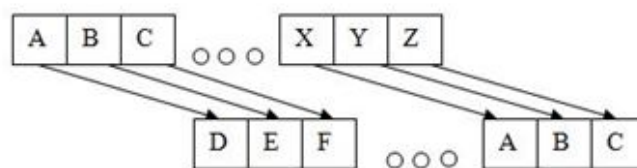


Рис 2. Шифр Цезаря

Королева Шотландії, Марія Стюарт, позбулася голови, коли її кодоване послання про змову було перехоплене та розшифроване.

Перехоплена телеграма, яка була відправлена Артуром Циммерманом, змусила Америку вступити в Першу світову війну. Розшифровування телеграми Циммермана повністю змінило історію XX століття.

Усім добре відома шифрувальна машина часів Другої світової війни — Enigma (рис. 3) та те, що Аланом Тьюрінгом було розроблено ряд методів зло-

му, в тому числі теоретичну базу для Bombe (рис. 4) — машини, яка використовувалась для злому німецького шифратора.



Рис. 3 «Enigma»



Рис.4. «Bombe»

Протягом усієї історії людство мало потребу в шифруванні тієї або іншої інформації. Недивно, що з цієї потреби з'явилася ціла наука криптографія. Саме винаходи часів Другої світової війни сприяли впровадженню таємничої науки криптографії зі світу шпигунства в наше повсякденне життя.

Секрети приховують політики, військові, вчені, бізнесмени. Важливою є надійність зберігання секретів на фінансових ринках. Уразливість фінансової інформації стосується кожної людини. Ми залишаємо численну кількість електронних відбитків: при кожній виконаній купівлі за допомогою кредитної картки, що фіксується у певній базі даних, при кожному візиті до лікаря, коли інформація вводиться до електронної системи, при кожному відправленні листа через електронну пошту. Поява доступного інтернету вивела криптографію на новий рівень. Методи криптографії почали широко використовуватись людством у електронній комерції, телекомунікаціях, та навіть призвели до появи нових неконтрольованих державами валют, перша й найвідоміша з яких — біткойн.

Криптографія ХХІ століття базується на прогресивній математиці та здатності сучасних комп'ютерів дуже швидко виконувати обчислювані операції та оброблювати інформацію. Але річ у тому, що справа не лише у здатності комп'ютера швидко оброблювати дані, але також у методі їх оброблення.

У минулому, щоб розшифрувати повідомлення при дешифровці потрібно було мати лише загальний ключ, який використовує і відправник повідомлення і отримувач і як ми вже мали змогу переконатись цей ключ можуть перехопити. Але сучасна технологія шифрування даних відкинула потребу лише в загальному ключі. Замість цього, кожен хто використовує комп'ютер для передачі зашифрованої інформації має два ключі: особистий та загальний. І особистий і загальний ключі мають між собою математичний зв'язок. Та математична складність такого зв'язку приголомшує.

Більшість криптосистем із загальним ключем базується на проблемі розкладу дуже великого числа на прості множники.

Наприклад, криптографічний алгоритм RSA (аббревіатура від прізвищ [Rivest](#), [Shamir](#) та [Adleman](#)) використовує в якості відкритого ключа добуток двох великих випадкових простих чисел.

Ця система працює саме тому, що до теперішнього часу не знайдено математичної формули, за допомогою якої можна швидко розкласти одне велике число на прості.

Сучасна криптографія — це гармонійне поєднання інформаційних технологій з математикою, причому в цьому дуєті саме математика грає головну роль. Математика знає такі способи шифрування, які неможливо зламати протягом століть, навіть якщо для цього залучені всі існуючі комп'ютери.

Людство ніколи не зможе відмовитись від математики на користь комп'ютерів, оскільки комп'ютери є лише способом передачі інформації від однієї людини до іншої, але з комп'ютерами можливості людей незрівнянно зросли.

На фізико-математичному факультеті Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського студенти за спеціалізацією «Страхова та фінансова математика» мають можливість прослухати курс лекцій з дисципліни «Елементи криптографії» та отримати відповіді на питання пов'язанні з шифрами та кодуванням інформації.

Наведемо деякі приклади методів кодування повідомлень.

Шифр перестановок. Шифр перестановки відомий принаймні з часів Стародавньої Греції, визначається двома параметрами: натуральним числом n та перестановкою чисел $1, 2, \dots, n$.

Нехай $n = 4$, а перестановкою $\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, то шифром слова «КІНО»

є слово «ІОНК». Загальне правило шифрування цим методом є таким: якщо пе-

рестановочний шифр визначається параметрами n та $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, то пер-

шою літерою у шифрі буде літера з номером i_1 у звичайному тексті, другою — i_2 і так далі.

Шифр Віженера. Шифр Віженера — це метод поліалфавітного шифрування буквеного тексту з використанням ключового слова. Уперше цей метод був описано Джованні-Баттіста Беллазо в 1553 році, але у XIX столітті отримав ім'я Блеза Віженера, швейцарського дипломата. Ключем до шифру є фіксоване слово, літери якого визначають зсуви початкового тексту.

Припустимо, що знайдено старий зашифрований текст з використанням шифру Віженера. Виявляється, що рядок РВМФПГІЦЛЬМЩ присутній у шифротексті двічі: вперше він починається з позиції 10-го символу тексту, а вдруге — з позиції 241-го (відлік символів тексту з одиниці, алфавіт український). За припущенням, що цей фрагмент шифротексту відповідає у відкритому тексті слову «КРИПТОГРАФІЯ». Якщо це припущення правильне, то яким був ключ шифрування?

Відстань між двома появами фрагменту $241 - 10 = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ знаків. Тому можливі значення періоду — 3, 7 або 11. Якщо припущення правильне, то можна знайти відповідний зсув. Так, у позиції 10 зсув ключа на 2 символи дає

$T - c = 20 - 2 = 18 = \text{«О»}$ і далі за аналогічними розрахунками в інших позиціях виникає ЕЛЕДЬОЖЕЛЕДЬ. При цьому період не може бути кратним ані 3, ані 11, бо в цих випадках словоподібні структури не з'являються при будь-якому зсуві. Отже, ключове слово «ОЖЕЛЕДЬ» має довжину 7 та починається з 15 позиції.

Шифр Хілла. Це поліграмний шифр підстановки, який засновано на лінійній алгебрі. За допомогою шифра Хілла літера x кодується в літеру y за правилом

$$y = (Ax) \bmod 26,$$

де A — деяка матриця. Наприклад, зашифруємо слово STUDENTS шифром Хілла з використанням матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}.$$

Замінюємо літери слова «STUDENTS» їх природніми номерами: STUDENTS $\sim$ 19, 20, 21, 4, 5, 14, 20, 19. Розіб'ємо одержану послідовність чисел на групи по два числа, та подамо їх у вигляді векторів:

$$\text{STUDENTS} \sim \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 178 \\ 613 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 22 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 70 \\ 243 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 108 \\ 371 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 173 \\ 596 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо отримані вектори у рядок, замінюємо числа відповідними літерами та отримаємо шифр

$$22, 15, 18, 9, 4, 7, 17, 24 \sim \text{VORIDGQX}.$$

Список літератури

- Kahn, D. (1996). *The Codebreakers: The story of secret writing from Ancient times to the Internet*. Scribner.
- Клесов, О. І. *Ймовірнісна теорія чисел та елементи криптографії: Підручник*. Київ: ТВіМС.
- Сингх, С. (2006). *Книга шифров: Тайная история шифров и их расшифровки*. Москва: АСТ, Астрель.

О НЕКОРРЕКТНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ ГИББСА ОБ ЭНТРОПИИ СМЕСИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

В. Н. Игнатович

Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина
v.ihnatovych@kpi.ua

В термодинамике известна теорема Гиббса, согласно которой энтропия смеси идеальных газов равна сумме энтропий компонентов смеси. Эту теорему доказывают либо путем математического вывода из начал термодинамики и законов идеальных газов, либо рассматривая мысленные эксперименты по обратимому разделению смеси идеальных газов на отдельные газы. В настоящем сообщении показано, что в этих доказательствах, в том числе доказательстве, которое дал Дж. В. Гиббс, имеются ошибки. Теорема Гиббса эквивалентна ложному положению об аддитивности неаддитивной функции. Ее следствиями являются различные формулировки парадокса Гиббса, объяснение которого ищут более 100 лет.

Ключевые слова: идеальные газы, энтропия, теорема Гиббса, парадокс Гиббса.

Теорема Гиббса об энтропии смеси идеальных газов выражается формулой:

$$S_c = \sum_i S_i (\eta_c = \sum_i \eta_i), \quad (I)$$

где $S_c (\eta_c)$ — энтропия смеси идеальных газов, $S_i (\eta_i)$ — энтропия i -го идеального газа — компонента смеси. (Здесь и далее римскими цифрами обозначаются формулы, записанные автором, и нумерованные формулы из различных источников).

Известно такое доказательство этой теоремы.

«По закону Дальтона, давление идеальной газовой смеси равно сумме парциальных давлений отдельных газов:

$$p = \sum_i p_i. \quad (II)$$

Поэтому энтропия смеси идеальных газов равна

$$S = \int \frac{dU + pdV}{T} = \sum_i \int \frac{dU_i + p_i dV}{T} = \sum_i S_i, \quad (III)$$

что выражает теорему Гиббса для энтропии смеси идеальной газовой смеси» (Базаров, 1991, с. 306).

В этом доказательстве кроме закона Дальтона (II) использовано допущение

$$dU = \sum_i dU_i. \quad (IV)$$

При этом упущены из виду следующие обстоятельства. Допущение (IV) применимо только к идеальным смесям, закон Дальтона (II) — только к смесям идеальных газов. Нижний предел интегрирования в формуле (III) равен 0 К. При температурах, близких к 0 К не существуют ни идеальные смеси (за редкими исключениями), ни идеальные газы. Следовательно, посылки (II) и (IV)

неприменимы ко всему интервалу интегрирования. Соответственно, приведенное доказательство теоремы Гиббса является некорректным.

Другое доказательство теоремы Гиббса выглядит так.

«Если имеется смесь различных идеальных газов, то с помощью полунепроницаемых перегородок (т. е. перегородок, проницаемых для одного газа и непроницаемых для другого) можно обратимо разделить эту смесь на составляющие ее компоненты, каждый из которых имеет объем смеси, без сообщения теплоты и затраты работы и, следовательно, без изменения энтропии системы. ... Это приводит к следующей *теореме Гиббса* об энтропии газовой смеси: *энтропия смеси идеальных газов равна сумме энтропий этих газов, когда каждый из них в отдельности занимает при температуре смеси тот же объем, что и вся смесь*» (Базаров, 1991, с.69). См. также (Базаров, 1991, с. 313—314; Лоренц, 1941, с. 100—104; Планк, 1925, с. 234—235; Робертс, 1950, с. 365—366).

Заметим, что в книге (Лоренц, 1941) разделение идеальных газов предложено осуществлять с помощью двух вертикальных цилиндров бесконечной высоты; в ней доказывалось эквивалентное теореме Гиббса положение о том, что так называемая свободная энергия (изохорно-изотермический потенциал) смеси идеальных газов равна сумме свободных энергий компонентов смеси.

Не касаясь вопроса о возможности реализации процессов, в которых используются полунепроницаемые перегородки или цилиндры бесконечной высоты, заметим следующее. Из того, что после обратимого разделения смеси идеальных газов на отдельные компоненты энтропия системы не изменилась, не следует, что энтропия смеси равна сумме энтропий компонентов смеси.

Доказательство теоремы Гиббса, которое дал Дж. В. Гиббс, опубликовано в его работе «О равновесии гетерогенных веществ» (Гиббс, 1982, с. 61—349). Оно заключается в выводе формулы, выражающей теорему Гиббса, из других формул. Проанализируем это доказательство.

На с. 68 Гиббс записывает выражения для полного дифференциала внутренней энергии ε гомогенной термодинамической системы (по его терминологии — гомогенной массы) как функции экстенсивных параметров системы:

$$d\varepsilon = t d\eta - p dv \quad (11)$$

$$d\varepsilon = t d\eta - p dv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \dots + \mu_n dm_n, \quad (12) \quad (86)$$

где t , p , μ_1 , μ_2 , ..., μ_n — частные производные ε по η , v , m_1 , m_2 , ..., m_n ; t — температура, η — энтропия, p — давление, v — объем, μ_i — химический потенциал i -го вещества, m_i — масса i -го вещества.

Он указывает (там же), что формула (11) относится к случаю, когда род и количество веществ в системе неизменны, а формула (12) — к случаю, когда вещество массы (системы) может изменяться. Формулу (12) он повторяет на с. 91 под номером (86).

Далее Гиббс определяет ряд функций (ψ , χ , ζ) и, с учетом (86), выводит формулы для их полных дифференциалов. На с. 92 он записывает:

$$\zeta = \varepsilon - t\eta + pv, \quad (91)$$

$$d\zeta = -\eta dt + vdp + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \dots + \mu_n dm_n. \quad (92)$$

Далее он пишет (там же):

«Если проинтегрировать (86), считая количество рассматриваемого составного вещества изменяющимся от нуля до некоторой конечной величины, а его природу и состояние неизменным, то получим

$$\varepsilon = t\eta - pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \dots + \mu_n m_n \quad (93)»$$

Далее он получает подобные формулы для ψ , χ , ζ . К этому месту редактор книги дал такой комментарий: «Строгое оправдание этой процедуры интегрирования обычно производится со ссылкой на теорему Эйлера об однородных функциях...» (Гиббс, 1982, с. 516). Разъясним, что это значит.

Гиббс указывал: «...мы знаем а priori, что если количество любой гомогенной массы, содержащей n независимо изменяющихся компонентов, меняется при неизменных природе и состоянии этой массы, то все величины ε , η , v , m_1 , m_2 , ..., m_n меняются в одинаковой пропорции» (там же, с. 90).

Поскольку Гиббс рассматривал равновесие в системах реагирующих веществ, то слова «при неизменных природе и состоянии... массы», означают: «при неизменном составе и состоянии веществ системы». Это имеет место при неизменных значениях температуры и давления. Слова «все величины ε , η , v , m_1 , m_2 , ..., m_n меняются в одинаковой пропорции» применительно к ε означают, что ε является однородной функцией первой степени величин η , v , m_i :

$$\varepsilon(a\eta, av, am_i) = a\varepsilon(\eta, v, m_i). \quad (V)$$

Полный дифференциал внутренней энергии системы веществ имеет вид:

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} dv + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1} dm_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2} dm_2 + \dots + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_n} dm_n. \quad (VI)$$

Если ε — однородная функция первой степени величин η , v , m_i , то на основании теоремы Эйлера об однородных функциях (Корн, Корн, 1968, с. 108), из (VI) можно вывести формулу, эквивалентную формуле (93):

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \eta - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} v + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1} m_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2} m_2 + \dots + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_n} m_n. \quad (VII)$$

Обращаем внимание на то, что формула (93) получена интегрированием (86) при «неизменных природе и состоянии... массы», т. е. при условии, что p , t , μ_i являются постоянными. Однако затем Гиббс дифференцирует формулу (93) так, будто все величины, стоящие в ее правой части, являются независимыми переменными, и, сравнив результат с (86), получает формулу (с. 92)

$$-vdp + \eta dt + m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \dots + m_n d\mu_n = 0, \quad (97).$$

а из нее выводит формулу:

$$dp = \frac{\eta}{v} dt + \frac{m_1}{v} d\mu_1 + \frac{m_2}{v} d\mu_2 + \dots + \frac{m_n}{v} d\mu_n. \quad (98)$$

Формулу (98) Гиббс использовал в доказательстве теоремы Гиббса (с. 157—158) путем выведения формулы, выражающей энтропию смеси η через энтропии компонентов как функций t , v , m_i .

Рассмотрим подробно его выкладки.

На с. 152 Гиббс приводит уравнения для единицы массы идеального газа:

$$pv = at, \quad (V)$$

$$d\varepsilon = cdt, \quad (VI)$$

где a и c постоянные.

Интегрируя второе уравнение, Гиббс получает:

$$\varepsilon = ct + E. \quad (VII)$$

Из этих уравнений и (11) Гиббс получает формулу:

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon - E}{c} d\eta - \frac{a}{v} \frac{\varepsilon - E}{c} dv. \quad (VIII)$$

Формулу (VIII) он преобразовывает следующим образом:

$$c \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - E} = d\eta - a \frac{dv}{v}, \quad (IX)$$

а затем интегрирует:

$$c \ln \frac{\varepsilon - E}{c} = \eta - a \ln v - H. \quad (X)$$

Далее (с. 152) Гиббс пишет: «Область применимости этого уравнения можно распространить на любое количество газа, не изменяя значений всех констант, если подставить ε / m , η / m , v / m вместо ε , η , v соответственно. В результате такой подстановки получим

$$c \ln \frac{\varepsilon - Em}{cm} = \frac{\eta}{m} - H + a \ln \frac{m}{v}. \quad (255)»$$

Переход от формулы (X) к формуле (255) основан на упомянутом выше положении о том, что ε является однородной функцией первой степени величин η , v , m_i . Дифференцируя формулу (255) и сравнивая полученный результат с (86), Гиббс получает формулы (257) — (259) для t , p , μ (с.153). Потом выводит ряд формул для ψ , ξ , η , p , μ , в том числе следующие:

$$\eta = m \left(H + c \ln t + a \ln \frac{v}{m} \right). \quad (262)$$

$$\xi = Em + mt \left[c + a - H - (c + a) \ln t + a \ln \frac{p}{a} \right]. \quad (265)$$

Дифференцируя (265) и сравнивая с (92), Гиббс получает формулы (с. 154):

$$\eta = m \left[H + (c + a) \ln t - a \ln \frac{p}{a} \right], \quad (266)$$

$$\mu = E + t \left[c + a - H - (c + a) \ln t + a \ln \frac{p}{a} \right] \quad (268)$$

Из (268) Гиббс выводит формулу:

$$p = a \exp \left(\frac{H - c - a}{a} \right) t^{\frac{c+a}{a}} \exp \left(\frac{\mu - E}{at} \right). \quad (270)$$

Из (270) на основе закона Дальтона Гиббс получает выражение для давления смеси идеальных газов (с.157):

$$p = \sum_i a_i \exp \left(\frac{H_i - c_i - a_i}{a_i} \right) t^{\frac{c_i+a_i}{a_i}} \exp \left(\frac{\mu_i - E_i}{a_i t} \right). \quad (273)$$

Дифференцируя (273) и сравнивая с (98), Гиббс получает (с.158):

$$\frac{\eta}{V} = \sum_i \left[\left(c_i + a_i - \frac{\mu_i - E_i}{t} \right) \exp \left(\frac{H_i - c_i - a_i}{a_i} \right) t^{\frac{c_i}{a_i}} \exp \left(\frac{\mu_i - E_i}{a_i t} \right) \right], \quad (274)$$

$$\frac{m_i}{V} = \exp \left(\frac{H_i - c_i - a_i}{a_i} \right) t^{\frac{c_i}{a_i}} \exp \left(\frac{\mu_i - E_i}{a_i t} \right), \quad (275)$$

поскольку, согласно (98), $\partial p / \partial t = \eta / v$, $\partial p / \partial \mu_i = m_i / v$.

При этом Гиббс упустил из виду то обстоятельство, что формула (98) является следствием формулы (93), полученной при том условии, что p , t , μ_i являются постоянными. Соответственно, в формуле (98) $dp = 0$, $dt = 0$, $d\mu_i = 0$, и заключения $\partial p / \partial t = \eta / v$, $\partial p / \partial \mu_i = m_i / v$ являются некорректными.

Из (275) Гиббс выводит формулу (276) для μ_i , исключает с ее помощью μ_i из (274) и получает формулу, являющуюся вариантом теоремы Гиббса (I):

$$\eta = \sum_i \left(m_i H_i + m_i c_i \ln t + m_i a_i \ln \frac{v}{m_i} \right). \quad (278)$$

Вывод формулы (I) из (274) и (275) можно сделать и по-другому. Из (266) и (268) следует, что в формуле (274) первый сомножитель в скобках равен η_i . Произведение трех последних сомножителей формулы (274), согласно (275), равно m_i / V . Из этого следует (I).

Несложно заметить, что в доказательстве Гиббса существенную роль играют некорректные следствия формулы (98):

$$\partial p / \partial t = \eta / v, \quad \partial p / \partial \mu_i = m_i / v.$$

Формула (I) означает, что энтропия является аддитивным свойством смеси идеальных газов: энтропия целого (смеси) равна сумме энтропий частей смеси (отдельных газов). Формула (II) означает, что давление является аддитивным свойством смеси идеальных газов. Поскольку энтропия — функция давления, то для смеси двух газов из (I) и (II) следует:

$$S(p_1 + p_2) = S(p_1) + S(p_2). \quad (\text{XI})$$

Формула (XI) означает, что энтропия является аддитивной функцией давления. А это возможно только в том случае, если энтропия является линейной функцией давления, поскольку аддитивными являются только линейные функции (см., например, (Фихтенгольц, 1962, с. 157—158)).

Теорему Гиббса (I) можно вывести из закона Дальтона (II) только в том случае, если энтропия является линейной функцией давления. Такой она выглядит по формуле (93), если не учитывать, что эта формула получена при условии $p = \text{const}$, которое неприменимо к смеси, поскольку давление смеси не равно давлениям компонентов.

Согласно (266), энтропия является логарифмической функцией давления газа, соответственно, не является аддитивной функцией давления. Из формулы (266) не следует, что $\partial p / \partial t = \eta / v$. Из формул (266) и (II) нельзя вывести формулу (XI): сумму энтропий компонентов смеси $S(p_1) + S(p_2)$ нельзя привести к виду $S(p_1 + p_2)$. Вследствие этого для энтропии смеси двух идеальных газов на основе формул (I) и (262) (или (I) и (266)) получаются формулы, содержащие так называемый логарифмический или концентрационный член L_x :

$$S_1(p_1) + S_2(p_2) = S(p_1 + p_2) + L_x$$

(вывод см., например, (Игнатович, 2010)).

Поскольку сумма энтропий компонентов смеси идеальных газов не приводится к виду (262) или (266), можно заключить, что функции «сумма энтропий компонентов смеси» и «энтропия идеального газа» характеризуют смесь и чистый идеальный газ в разных отношениях. Однако физики, вслед за Гиббсом считают, что энтропия смеси идеальных газов равна сумме энтропий компонентов смеси. Определяя энтропию смеси на основе формул (I) и (262) (или (I) и (266)), получают формулу, содержащую слагаемое L_x . Используя эту формулу, физики выводят формулы для величины изменения энтропии при смешении идеальных газов, первоначально разделенных непроницаемой перегородкой. Затем, исследуя поведение величин энтропии смеси и энтропии смешения идеальных газов при переходе от смеси (смешения) различных к смеси (смешению) тождественных газов, обнаруживают ряд необъяснимых (парадоксальных) следствий, которые составляют содержание различных формулировок парадокса Гиббса (Хайтун, 2010; Игнатович, 2010).

Этот парадокс пытаются объяснить на основе представлений различных теорий (Хайтун, 2010), упуская из виду то, что он получен путем логического

вывода в рамках классической термодинамики, и что его появление обусловлено использованием в рассуждениях некорректно доказанной теоремы, согласно которой неаддитивная функция ошибочно считается аддитивной.

Автор выражает благодарность доценту В. А. Гайдею и профессору В. Н. Горшкову за полезные замечания.

Список литературы

- Базаров, И. П. (1991). *Термодинамика* (4-е изд., перераб. и доп). Москва: Высшая школа.
- Гиббс, Дж. В. (1982). *Термодинамика. Статистическая механика*. Москва: Наука.
- Игнатович, В. Н. (2010). *Парадокс Гиббса с точки зрения математика: Монография*. Киев: Издательская группа «АТОПОЛ».
- Корн, Г., Корн, Т. (1968). *Справочник по математике*. Москва: Наука.
- Лоренц, Г. А. (1941). *Лекции по термодинамике*. Москва: ОГИЗ ГТТЛ.
- Планк, М. (1925). *Термодинамика*. Москва: Госиздат.
- Робертс, Дж. (1950). *Теплота и термодинамика*. Москва: ГИТТЛ.
- Фихтенгольц, Г. М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. (Т. 1.) (Изд. 5-е). Москва: ГИФМЛ.
- Хайтун, С. Д. (2010). *История парадокса Гиббса* (3-е изд.). Москва: КомКнига.

ВИДАТНІ МАТЕМАТИКИ І ПРОСТІ ЧИСЛА

Н. В. Філоненко

Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет
імені Григорія Сковороди, Переяслав-Хмельницький, Україна
filnadija@gmail.com

У статті розглядається розвиток знань про прості числа та вклад математиків різних поколінь у дослідження простих чисел.

Ключові слова: прості числа, теорія чисел, зручні числа, дружні числа, досконалі числа.

Теорія простих чисел є однією з основних проблем теорії чисел. Прості числа були надзвичайно важливими й складними для досліджень у всі часи, відколи існує математика. Давні греки цікавились ними дві з половиною тисячі років тому назад. Видатний давньогрецький математик Евклід (III ст. до н.е.) установив, що не існує найбільшого простого числа, тобто множина простих чисел нескінченна. Інший визначний вчений древності — Ератосфен, вказав спосіб виділення простих чисел в ряду натуральних чисел, це так зване Ератосфенове решето. Багато математиків робили спроби знайти ознаки, що дозволили б встановити, чи є простим дане число. Досягти значного успіху на цьому шляху вдалося лише видатному французькому математику П'єру Ферма (1601—1665). У 1640 р. він отримав важливий результат — теорему, яку тепер називають «малою теоремою Ферма»: «Якщо p просте число, і a не ділиться на p , то $a^{p-1} - 1$ ділиться на p ». Ферма повідомив про цю теорему без доведення в листі до математика Френікля де-Бессі. Це відкриття так вразило самого Ферма, що він написав слова: «Мене осяяло яскравим світлом» (Берман, 1960).

За фахом юрист, Ферма більшу частину життя працював радником парламенту в Тулузі, а математикою займався на дозвіллі. Саме це, а також відсутність періодичних видань у той час призвели до того, що значна частина його наукових результатів збереглися без доведень та методів, якими він користувався для досліджень. Цим самим Ферма залишив велике поле для роботи таким видатним математикам як Ейлер, Гаусс та інші. Перше доведення «малої теореми Ферма» опублікував Ейлер у 1736 р. Ейлер узагальнив цю теорему, установивши закон взаємності простих чисел: якщо два цілих додатних числа a і m ($m > 1$) взаємно прості і якщо $\varphi(m)$ — кількість чисел ряду $1, 2, \dots, m$, взаємно простих з m , то вираз $a^{\varphi(m)} - 1$ ділиться на m без остачі (Штокало та ін., 1966). За пропозицією Гаусса, функцію $\varphi(m)$ називають *функцією Ейлера*.

Ферма прийшов до цієї теореми, займаючись пошуком виразів, що містять число n , які були б простими числами. Розглядаючи вирази $2^{2^n} + 1$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, він отримав прості числа 3, 5, 17, 257, 65537, а при $n = 5$ число 4294967297. Не зумівши розкласти його на множники, Ферма робить хибний висновок, що воно також просте. Однак Ейлер знайшов помилку в міркуваннях Ферма. У 1732 році він встановив, що це число ділиться на 641, тобто не є простим (Берман, 1960).

І все ж математична інтуїція у Ферма була надзвичайна. Як з'ясувалося пізніше, ті з чисел виду $2^{2^n} + 1$, які є простими, мають ряд важливих властивостей, пов'язаних з геометричними побудовами. Уже давні математики вміли будувати правильні три-, чотири- і п'ятикутники з допомогою циркуля та лінійки. Задача побудови правильних семи- та одинадцятикутників залишалась нерозв'язаною більше двох тисяч років. Лише 1796 р. юний Гаусс знайшов спосіб побудови циркулем та лінійкою правильного сімнадцятикутника, а за п'ять років опублікував розв'язання задачі про побудову правильних многокутників у загальному вигляді. Гаусс довів, що з допомогою циркуля та лінійки можна побудувати тільки такі правильні многокутники із простим числом сторін, коли це просте число є числом Ферма, тобто числом виду $2^{2^n} + 1$. При $n = 2$ отримуємо 17-кутник, при $n = 3$ — 257-кутник. Якщо ж просте число не є числом Ферма, то побудова відповідного правильного многокутника з допомогою циркуля та лінійки неможлива. Це стосується, зокрема, правильних многокутників з семи, одинадцяти та тринадцяти сторонами.

Гаусс повністю розробив метод побудови тільки для 17-кутника. Повна побудова многокутника з 257 сторонами була виконана німецьким математиком Фрідріхом Рішело (1808—1875), вона займає 80 сторінок. Побудову правильного многокутника з 65537 сторонами за методом Гаусса виконав Гермес. Об'ємний рукопис побудови зберігається в Геттінгені (Берман, 1960).

Ферма відкрив також ряд формул представлень простих чисел. Так, прості числа виду $4n + 1$ можна представити у формі $x^2 + y^2$, виду $3n + 1$ — у формі $x^2 + 3y^2$, виду $8n + 1$ — у формі $x^2 + 2y^2$, де x та y — раціональні числа. Строго доведення двох перших тверджень дав Ейлер (Штокало та ін., 1966). Він також показав, що просте число представляється у вигляді суми квадратів єдиним способом, а складене, якщо таке представлення можливе, обов'язково декількома способами. Останнє твердження привело Ейлера до простішого способу пошуку простих чисел, ніж послідовне ділення числа N на прості числа до $\sqrt{N}$. А саме, для числа N визначається за таблицею квадратів натуральних чисел, скільки разів різниця $N - x^2$, де $x < \sqrt{\frac{N}{2}}$, є точним квадратом. Якщо це виконується тільки для одного x , то N — просте число.

Ейлер досліджував також інші властивості простих чисел, займався пошуком так званих зручних, дружніх та досконалих чисел.

При вивченні представлення простих чисел у формі $ax^2 + by^2$ Ейлер назвав числа $n = ab$, що дозволяють представити прості числа в такій формі, *зручними* числами (numeri idonei). Розробивши критерії, при яких число є зручним, Ейлер знайшов 65 зручних чисел, найбільше серед яких — 1848. Ейлер припустив, що 1848 — найбільше зручне число. Спроби Гаусса знайти більші зручні числа були безуспішними. Строго доведення гіпотези Ейлера так і не знайдено.

Досконалі числа — це числа, рівні сумі своїх власних дільників. Перші два числа 6 і 28 були відомі ще в давнину. Наступні два числа 496 і 8128 знайшов в IV столітті до н. е. Евклід, він же описав алгоритм побудови парних досконалих чисел у IX книзі «Начал». Ейлер довів, що кожне досконале число повинне задовольняти формулі Евкліда, $2n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, при умові, що p і $2^p - 1$ (т. зв. прості числа *Мерсенна*) є простими числами. До середини 20 ст. було знайдено тільки 12 парних досконалих чисел. З появою сучасних комп'ютерів стали можливими надзвичайно громіздкі обчислення. На січень 2016 року було відомо 49 простих чисел Мерсенна і відповідних їм парних досконалих чисел. На цей час невідомо, скінченна чи нескінченна множина досконалих простих чисел та їх розподіл у множині натуральних чисел. До цього часу залишається відкритим також питання існування непарних досконалих чисел. Доведено, що непарне досконале число, якщо воно існує, перевищує 10^{1500} ; при цьому число простих дільників такого числа із врахуванням кратності не менше 101 (Число Мерсенна, б. д.).

Дружні числа — це така пара чисел, кожне з яких є сумою дільників іншого. Дружні числа були відкриті піфагорійцями, яким була відома тільки одна пара таких чисел — 220 і 284. Ферма та Декарт знайшли ще по одній парі дружніх чисел. Ейлер, розглянувши цю проблему систематично, знайшов достатній критерій побудови пар дружніх чисел, і в 1747 р. дав список 30 пар, а пізніше довів список пар до 60. Досі не відомо, скінченна чи нескінченна кількість пар дружніх чисел. На квітень 2016 року відомо більше 1000000000 пар таких чисел (Дружественные числа, б. д.).

Загалом Ейлер написав по теорії чисел 148 робіт, заклавши фундамент різним напрямкам досліджень — адитивної теорії чисел, теорії квадратичних лишків, теорії квадратичних форм. Роботи Ейлера надихнули його послідовників на нові відкриття в галузі теорії чисел. Це визначні математики Лагранж, Лежандр, Гаусс, Діріхле, Чебишов, Гольдбах, Виноградов, Шнірельман.

Поява сучасних потужних комп'ютерів внесла нові перспективи в дослідження множини простих чисел. У той час, саме математичні задачі, пов'язані з множиною простих чисел, можуть сприяти досягненням в галузі програмування та обчислювальної техніки.

Список літератури

- Берман, Г. Н. (1960). *Число и наука о нем*. Москва: ГИФМЛ.
- Дружественные числа (б. д.). В *Википедии*. Взято из https://ru.wikipedia.org/wiki/Дружественные_числа.
- Число Мерсена (б. д.). В *Википедии*. Взято из https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Мерсенна.
- Штокало, И. З., Боголюбов, А. Н., Митропольский, Ю. А., Погребысский, И. Б., Ремез, Е. Я., Рыбников, К. А., Соколов, Ю. Д. (Ред.). (1966). *История отечественной математики* (Т. 1, с. 287—291). Київ: Наукова думка.

З ІСТОРІЇ ВІДКРИТТЯ ПОЛІНОМІВ КЛАСУ СЕМПСОНА

В. В. Хорошун

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

khoshun_vv@ukr.net

Наведені хронологічні дані щодо неодноразового відкриття неокласичних ортогональних поліномів класу Семпсона.

Ключові слова: спеціальні функції, ортогональність, поліноми Лежандра, поліноми Семпсона.

Історія математики знає чимало прикладів того, як раніше отримані результати в тому чи іншому розділі математики часом забувалися, губились, з тим, щоб інші дослідники відкривали їх заново. Добре відомий той факт (Бурбаки, 1963), що ідея геометричного уявлення комплексних чисел була запропонована датським математиком К. Весселем 1798 р, але була витягнута із забуття лише століттям пізніше. Така ж доля мало не спіткала і швейцарця Ж. Аргана, робота якого лише випадково була виявлена в 1813 р. через 7 років після її опублікування. Однак, щоб схилити математиків до нової точки зору, бракувало авторитету великого імені. І лише в 1831 р. К. Гаусс опублікував своє бачення цього питання.

Як зазначав головний редактор серії «Спеціальні функції» Р. Аски в передмові до книги Millera (1977) «був час, коли кожен математик досконало знав теорію вищих трансцендентних функцій. Так, наприклад, у другій половині дев'ятнадцятого століття з'явилася вражаюча кількість книг, присвячених еліптичним функціям, а на випускних іспитах в університетах постійно пропонувалися складні завдання на доведення різних фактів про функції Бесселя та функції Лежандра. Тепер ці функції та інші, винятково корисні спеціальні функції, відомі не настільки широкому колу фахівців; це призвело до того, що важливі спеціальні функції, які виникають у практичних потребах ось уже протягом двадцяти п'яти з гаком років вивчаються людьми, які не підозрюють, що багато відкритих ними фактів були встановлені більш ніж сто років тому».

Сказане вдало характеризує і результат Р. Семпсона (Sampson, 1891). А саме, загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(1 - x^2)y'' + n(n - 1)y = 0, \quad (1)$$
$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 H_n(x),$$

де

$$I_n(x) = \frac{P_{n-2}(x) - P_n(x)}{2n - 1}, H_n(x) = \frac{Q_{n-2}(x) - Q_n(x)}{2n - 1}, (n \geq 2),$$

$P_n(x)$ — поліноми Лежандра, $Q_n(x)$ — функції Лежандра другого роду,

$$I_0(x) = -1, I_1(x) = x,$$

$$H_0(x) = x, H_1(x) = 1.$$

У такому вигляді рівняння (1) подано лише в довіднику Зайцева та Полянина (2001) з таким коментарем: «це рівняння виникає в гідродинаміці для опису осесиметричних повільних (стоксових) течій».

Як стверджують Хаппель та Бреннер (1976) у гідродинаміці результати Семпсона були незалежно одержані в Savic (1953) і Haberman та Sayre (1958). В електродинаміці періодичних структур поліноми

$$\mu_n(x) \equiv -I_n(x)$$

було запроваджено Аграновичем, Марченко та Шестопаповим (1961) наступним чином:

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= P_n(x) - 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \quad (n \geq 2) \\ \mu_0(x) &= 1, \quad \mu_1(x) = -x,\end{aligned}$$

де $P_n(x)$ — поліноми Лежандра. Слід відзначити такі співвідношення між поліномами $\mu_n(x)$ та поліномами Лежандра $P_n(x)$ (Хорошун, 2016):

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= -\sum_{j=1}^n \mu_{n-j}(x)P_j(x), \quad (n \geq 1), \\ P_n(x) &= -\sum_{j=1}^n P_{n-j}(x)\mu_j(x), \quad (n \geq 1).\end{aligned}$$

Поліноми $\mu_n(x)$ були використані з метою спрощення вигляду матричних елементів СЛАР-2, одержаної в роботі Агранович та ін. (1962).

Як приклад наведемо деякі результати:

$$\begin{aligned}V_0^n(x) &= \frac{1}{2}\mu_{n+1}(x), \quad n > 0; \\ V_m^0(x) &= \frac{1}{2}(m+1)\mu_{m+1}(x), \quad m \neq 0\end{aligned}$$

Список літератури

- Haberman, W. L., & Sayre, R. M. (1958). Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes (No. DTMB-1143). David Taylor Model Basin Washington DC.
- Miller W. (1977). *Symmetry and separation of variables*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Sampson, R. A. (1891). On Stokes's current function. *Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A*, 182, 449–518.
- Savic, P. (1953). *Report no. MT-22: Circulation and distortion of liquid drops falling through a viscous medium*. Ottawa: Nat. Res. Council Canada.
- Агранович, З. С., Марченко, В. А., & Шестопапов, В. П. (1962). Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. *Журн. техн. физики*, 32(4), 381—390
- Бурбаки, Н. (1963). *Очерки по истории математики*. Москва: Изд-во иностранной литературы.
- Зайцев, В. Ф., & Полянин, А. Д. (2001). *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.
- Хаппель, Дж., & Бреннер, Г. (1976). *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*. Москва: Мир.
- Хорошун, В. В. (2016). О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала $[-1,1]$. У *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 19—20 травня* (Т. 2, с. 270—272). Київ: КПІ.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Goy T. <i>Some combinatorial identities for Narayana's cows sequence</i>	5
Kovalchuk V. V. <i>Lyapunov's stability theory for a triple inverted pendulum with a follower forces</i>	8
Semeniv O. <i>Geomagnetic activity prediction with deep statistical learning</i>	11
Voloshyna V. <i>With independent symbols of W-representation</i>	16
Блажієвська І. П., Моклячук О. М., Рибак О. В. <i>Казки своїми руками: Інтелектуальне мистецтво</i>	18
Бугрим О. В., Тимченко С. Е., Шелест Л. И. <i>О решении задач ползучести и релаксации стареющего тела (полимеров)</i>	22
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Моніторинг стану об'єктів критичної інфраструктури за допомогою нейронних мереж</i>	27
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. <i>Вплив імпульсних завад на реальну надійність електронної апаратури</i>	29
Голінко І. М., Галицька І. Є. <i>Динамічна модель мікроклімату для промислового приміщення, що кондиціонуються</i>	32
Горалік Є. Т., Лупіна Т. О. <i>Про рух стрижня під дією поперечної сили, прикладеної до його кінця</i>	36
Горленко С. В. <i>Про аналітичність функцій із прямолінійними множинами моногенності</i>	41
Дикач Ю. <i>Дослідження змін кліматичних факторів за даними метеостанції «Київ»</i>	43
Донецький С. В. <i>Приховані аттрактори в системі генератор — п'єзокерамічний випромінювач</i>	46
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Гаєвський М. В., Запорожчук Т. С. <i>Прогнозування ціни на нафту засобами ARIMA-моделей</i>	49
Іваненко Т. В. <i>Застосування границь у задачах з фінансової математики</i>	52
Кузьменко Б. В. <i>Дослідження теплового самозаймання пиловугільних сумішей та його математичної моделі</i>	56
Кучкін В. М., Кравцов О. В. <i>Теоретичне дослідження можливості керування станами деяких металевих антиферромагнетиків</i>	60
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Звінська Т. С. <i>Двовимірні мішані задачі в технологіях поліграфічного виробництва</i>	64
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р., Петров М. О. <i>Дослідження колірних профілів друкарських машин цифрового друку</i>	68
Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р. <i>Формування відбитка у плоскому офсетному друці</i>	72
Лапач С. М. <i>Розширення сфери застосування теорії планування експерименту</i>	76
Листопадова В. В., Хоменко М. В. <i>Моделі з невизначеними даними в екології</i>	81

Мейш В. Ф., Белов Є. Д. До постановки та чисельного розв'язку динамічних задач теорії оболонок у вигляді еліптичного параболоїду.....	85
Мейш В. Ф., Мейш Ю. А. Динамическом взаимодействии сферической оболочки с двухслойной грунтовой средой.....	89
Міцюхін А. І., Віхляєв В. А. Апісанне вияви сегментації.....	94
Ногін М. В. До розрахунку гідродинамічних характеристик тонкого крила в нестационарному режимі	98
Полетаев Г. С. Свойство решений уравнений родственных краевому условию задачи Римана с взаимно обратными рациональными коэффициентами	102
Поліщук Н. В., Бур Л. С. Дослідження ефективності роботи деякої системи масового обслуговування.....	105
Поліщук О. Д. Складні мережі, ієрархії та міжсистемні взаємодії.....	109
Потемкина С. Н., Розанов А. В. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатического поля в диэлектрике	113
Пушак А. С., Пушак Я. С., Пирч Н. М. Математична подель поглинання світла домішковими центрами	116
Радченко С. Г. Концепция корректности при использовании экспериментально-статистических методов исследования	120
Рожок Л. С. Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів.....	120
Савва В. А. Расчет эффективности и кинетики флуоресценции сред, легированных редкоземельными элементами	129
Сіренко В. О. Узагальнення класичних сценаріїв переходу до хаосу в неідеальних динамічних системах	134
Сокульська Н. Б., Сокульський В. М. Методи математичної статистики як ефективні засоби обробки та аналізу даних експериментальних досліджень при вивченні дисципліни «Методика наукових досліджень, Патентознавство».....	138
Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С. Способи покращання збіжності чисельних методів при розв'язанні крайових задач теорії оболонок.....	142
Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Концепція квазіпохідних у нестандартних задачах теплопровідності.....	146
Фрей М. М. Про віківське числення та його зв'язок зі стохастичним диференціюванням в аналізі білого шуму Леві.....	150
Чепок О. Л. Застосування інверсії до побудови взаємного базису для довільного базису множини векторів евклідової площини.....	157
Шаповалова Н. В., Криворучко О. І. Імітаційне моделювання як один із сучасних інструментів для дослідження різноманітних галузей людської діяльності	160
Шаповалова Н. В., Слободенюк І. І. Геометрія в мистецтві створення орнаментів	164
Штефан Д. И., Штефан Т. А. Применение математических методов в задачах биологического содержания	170
Янчук П. С. Ряди Фур'є за системою квазіспектральних поліномів.....	174

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Shtefan T. A., Slyusarova T. I. <i>Optimization of control of knowledge and skills of students of technical specialties at the study of the “Higher mathematics” course</i>	181
Авраменко Л. Г. Теорема Биркгофа — Тарского в курсе высшей математики	184
Баліна О. І., Безклубенко І. С., Буценко Ю. П. Глибина засвоєння курсу математики студентами першого курсу технічного вишу: послідовність викладання розділів, підходи до контролю	186
Баштова Л. С. Методологія викладання в КПІ на початку ХХ ст. Метод К. К. Симінського	189
Бердник О. М., Юрчук І. А. Про прикладні аспекти згортки функцій	195
Білаш О. В., Гузик Н. М., Ліщинська Х. І., Петрученко О. С. Сучасні аспекти методики викладання вищої математики студентам військових вищих навчальних закладів	199
Білий В. О., Білий О. Г. Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності	202
Блажівська І. П., Свяженіна О. Ю. Художнє моделювання в аналітичній геометрії.....	210
Бондаренко Н. В. Деякі застосування лінійної алгебри	213
Величко Л. Д., Сокіл Б. І., Гузик Н. М., Сокіл М. Б. Застосування методу інтенсифікації на практичних заняттях	218
Вишенська О. В., Мейш Ю. А. Деякі питання формування поняття функціональної залежності	221
Гайдей В. О., Федорова Л. Б. Про лінійні диференціальні рівняння з кусково-заданими коефіцієнтами	225
Гончаренко Я. В., Сушко О. С. Елементи актуарної математики в системі підготовки студентів математичних спеціальностей	228
Грудкіна Н. С., Паламарчук В. О., Ровенська О. Г., Чумак О. О. Прикладні аспекти реалізації професійної спрямованості під час викладання математичних дисциплін.....	231
Дзигора К. Р., Нестеренко Т. В. Отдельные вопросы корректности символьных вычислений средствами специализированных программных пакетов	234
Довгай В. В. Проблеми з викладанням математики в сучасному технічному університеті в умовах безсистемного реформування держави	238
Драганюк С. В., Карапетров В. В., Манолі А. А. Про структуру і зміст інтегрованого курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів нематематичних спеціальностей ВНЗ	242
Дрозд В. В. Чи знаєте ви, панове, що таке «домашнє завдання»?	245
Задерей П. В., Нестеренко О. Б. Сучасні вимоги до математичної освіти у ВНЗ	249
Калайда О. Ф. Інтегрування лінійних однорідних нормальних систем диференціальних рівнянь з фі-циркулянтною матрицею коефіцієнтів	252
Калайда О. Ф. Про метод Лагранжа дослідження інтегральних функціоналів на екстремум	253
Калайда О. Ф. Про першу теорему про середнє в інтегральному численні	254
Кільчинський О. О., Рудоміно-Дусятська І. А., Сновида В. Є. До розкладення правильного дробу при кратних коренях знаменника.....	255

Мошонько А. З., Васіна Л. С., Мошонько В. Д. <i>Метод наименьших квадратов</i> <i>у задачах електротехніки</i>	259
Панасюк Н. М. <i>Децо про методику викладання вищої математики</i>	264
Панасюк Н. М. <i>Поглиблення знань з елементарної математики</i> <i>під час вивчення теми «Границі»</i>	267
Поплавська О. А., Самарук Н. М. <i>Підготовка майбутніх математиків:</i> <i>компетентнісний підхід</i>	270
Рассоха І. В., Блажко Л. М., Карпалюк Т. О. <i>Підвищення мотивації навчання</i> <i>шляхом використання прикладних задач</i>	277
Репета В. К., Репета Л. А. <i>Деякі методичні аспекти викладання теорії границь</i> <i>у курсі вищої математики для студентів технічних спеціальностей</i>	281
Чернобай О. Б. <i>Про деякі аспекти мотивації в курсі</i> <i>«Вища та прикладна математика»</i>	286
Широканова Н. И. <i>Применение теории вероятностей</i> <i>и математической статистики в экономике</i>	288
Шульга С. В., Халецька З. П., Ізюмченко Л. В. <i>Методичні особливості вивчення</i> <i>теми «Апроксимація функцій» студентами фізичних спеціальностей</i>	291
Шылінец У. А. <i>Аб рэалізацыі навукова-даследчага прынцыпу пры выкладанні</i> <i>вышэйшай матэматыкі пры падрыхтоўцы на эканамічных спецыяльнасцях</i>	294
Юрчук І. А., Бердник О. М. <i>Згортка функцій як інтеграл від параметра</i>	297

Секція 3. Історія точних наук

Бондар В. В. <i>Розвиток знань про число e</i>	303
Волков А. В. <i>З історії диференціального та інтегрального числення</i>	307
Гайдей В. О., Міхно О. П. <i>До 110-річчя від дня народження Михайла Гельфанда (1907—1991), українського математика-методиста</i>	311
Гайдей В. О., Міхно О. П. <i>До 165-річчя від дня народження С. І. Шохор-Троцького (1853—1923), математика-методиста</i>	317
Грегуль Ю. О., Тимошенко О. А. <i>Криптографія — наука про захист інформації</i> ...	321
Игнатович В. Н. <i>О некорректности доказательств теоремы Гиббса об энтропии смеси идеальных газов</i>	325
Філоненко Н. В. <i>Видатні математики і прості числа</i>	332
Хорошун В. В. <i>З історії відкриття поліномів класу Семпсона</i>	335

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. <i>Переваги застосування тестування для контролю знань з вищої математики студентів технічних спеціальностей</i>	339
Буряк Д. В., Крапива Н. В., Крапива І. В. <i>Вплив інформаційного суспільства на розроблення навчальної літератури для сучасного технічного університету</i>	342
Волков А. В. <i>Застосування пакету комп'ютерної математики Maple для створення демонстраційних матеріалів для лекцій з вищої математики</i>	346
Диховичний О. О., Дудко А. Ф., Круглова Н. В., Шурубур К. І. <i>Система моделювання та аналізу результатів тестування</i>	350
Диховичний О. О., Круглова Н. В., Ординська З. П. <i>Моделювання прогнозів результатів ЗНО з математики</i>	352
Жданова Ю. Д., Спасітелєва С. О., Шевченко С. М. <i>Автоматизація процесу генерування завдань як інноваційний підхід організації самостійної роботи студентів</i>	355
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Практико-орієнтована стратегія сучасної університетської освіти</i>	359
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Мельник І. Ю. <i>Гуманітарна складова підготовки майбутніх фахівців у системі вищої технічної освіти</i>	362
Коновенко Н. Г., Федченко Ю. С., Худенко Н. П. <i>Методологічні особливості дистанційного модулю в курсі «Вища математика» ОНАХТ</i>	366
Омелян О. М., Ічанська Н. В. <i>Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі викладання математики</i>	370
Орловський І. В., Тимошенко О. А. <i>Аналіз якості нових методів контролю знань з вищої математики в технічному університеті</i>	374