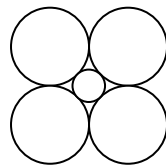




ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА
З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ОЧНИЙ ТУР, 2017 Р.



1. Сума третього та дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайдіть суму перших одинадцяти членів цієї прогресії.
2. Спростіть вираз $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$.
3. Обчисліть $\lg\left(1+\frac{1}{1}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \lg\left(1+\frac{1}{99}\right)$.
4. Про двозначне число відомо, що воно більше у чотири рази за суму і у три рази за добуток цифр, що його утворюють. Знайдіть це число.
5. Спростіть вираз $\frac{\sin^3 \alpha(1 + \operatorname{ctg} a) + \cos^3 \alpha(1 + \operatorname{tg} a)}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.
6. Дано чотири кола радіуса R , які попарно дотикаються зовні. Знайдіть радіус r меншого кола, яке дотикається до всіх чотирьох кіл. (Див. рисунок).



7. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \geq 0$.
8. Рівність $(x^2 + ax + 2)(x + 3) = (x + b)(x^2 + cx + 6)$ є тотожністю. Чому дорівнює добуток abc ?
9. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$, де $a > 0, b > 0$.
10. Спростіть вираз для $f(x)$ і знайдіть $f'(x)$, якщо $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4} - x + 2} \right)^{-2}$.
11. За яких значень a відношення дійсних коренів рівняння $x^2 + ax + a + 2 = 0$ дорівнює 2?
12. Знайдіть область значень функції $y = (\sin x + \cos x)^3$.