І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

РТФ, ФЕЛ
2017 р.

Перший курс

1. Довести, що можна виправити точно один елемент визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

   на величину, не більшу за 10^{-6} так, щоб визначник став рівний нулю.

2. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо $A(4;-1)$, а прямі $\ell_1 : x = 1$ та $\ell_2 : x - y = 1$ є його бісектрисами.

3. Для функції $f(x) = (x^2 + 1)\cos 2x$ знайти похідну порядку 2017.

4. Дослідити функцію

$$y(x) = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad x > 0,$$

   на неперервість. Встановити характер точок розриву та на основі проведених досліджень побудувати схематичний графік функції.

5. Функцію $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ задано формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ x, & \text{при } x \in (0,1), \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

   Чи існує така функція $g\colon [0,1] \to [0,1]$, що $g(g(x)) = f(x)$ для всіх x? Якщо так, наведіть приклад такої функції; якщо ні — доведіть це.

6. Назвемо набір з нулів та одиниць *правильним*, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць — непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 111001111101 — неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

РТФ, ФЕЛ
2017 р.

Старші курси

1. Розкласти в ряд Тейлора-Маклорена функцію
$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$$y' \cos y = x - \sin y.$$

3. Обчислити
$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

4. Розклавши в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi)$, знайти суму ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

5. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ існує така *неперервна* функція $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, що $g(g(x)) = x^{\alpha}$ для всіх x? Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α, для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри з множини $\{0, 1, \ldots, 9\}$, обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число, утворене з *усіх* написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3 8 3 7 6 8 1, оскільки $3\,837\,681 = 1\,959 \times 1\,959$.) Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p > \frac{1}{2}$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/