I тур Олімпіади з математики

КПІ ім. Ігоря Сікорського

ФАКС/ІТС

2017

1-й курс

1. Для всіх значень параметра λ розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x + (\lambda - 1)y + 2\lambda z = \lambda + 1, \\ 2x + (\lambda - 1)y + (2\lambda - 1)z = 4, \\ (\lambda - 1)y + z = \lambda - 1. \end{cases}$$

2. Нехай A — квадратна матриця порядку n та E_n — одинична матриця порядку n і виконано рівність $(E_n + A)^2 = 0$. Доведіть, що матриця A невироджена та знайдіть A^{-1}.

3. Нехай $z + \dfrac{1}{z} = -1$. Знайдіть $z^{2018} + \dfrac{1}{z^{2018}}$.

4.. Дослідіть границю $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{1 + e^{nx} + x}$ для всіх значень x. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.

5.. Функцію $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ задано формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } x = 0, \\ x, & \text{для } x \in (0;1), \\ 0, & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

Чи існує така функція $g : [0;1] \to [0;1]$, що $g(g(x)) = f(x)$ для всіх x? Якщо так, наведіть приклад такої функції; якщо ні — доведіть це.

6. Набір з нулів та одиниць називають *правильним*, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць — непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 111001111101 — неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/

І тур Олімпіади з математики

КПІ ім. Ігоря Сікорського

ФАКС/ІТС

2017

Старші курси

1. Доведіть, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ розбігається для всіх значень $x \in \mathbb{R}$.

2. Знайдіть інтеграл $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+1+e^x}dx$.

3. Обчисліть $\iint\limits_D \left|y^2 - x^2\right| dxdy$, де D — кільце $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

4.. Розв'яжіть задачу Коші:

$$(y')^2 + (y-2x)y' - 2xy = 0, y(1) = 1.$$

5. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ існує така *неперервна* функція $g : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$, що $g(g(x)) = x^{\alpha}$ для всіх x? Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α, для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри із множини $\{0,1,\ldots,9\}$, обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес у той момент, коли число, утворене з *усіх* написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3 8 3 7 6 8 1, оскільки $3837681 = 1959 \times 1959$.) Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p > \frac{1}{2}$.

Результати олімпіади буде опубліковано на сайті http://matan.kpi.ua/