

**I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО**

**ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ ТА МАРКЕТИНГУ
2017 р.**

Перший курс

1. Побудувати геометричне місце точок:

$$\begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ xy & -1 & 2y & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома вершина $A(-5, 2)$ і рівняння двох медіан: $5x + 4y = 0$, $3x - y = 0$.

3. Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

4. Для функції $f(x) = (x^2 + 1)\cos 2x$ знайти похідну порядку 2017.

5. Функція $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ задано формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ x, & \text{при } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Чи існує така функція $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, що $g(g(x)) = f(x)$ для всіх x ?
Якщо так, наведіть приклади такої функції; якщо ні – доведіть це.

6. Назвемо набір з нулів та одиниць правильним, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць – непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 11100111101 – неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua/>

**I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО**

**ФАКУЛЬТЕТ МЕНЕДЖМЕНТУ ТА МАРКЕТИНГУ
2017 р.**

Старші курси

1. Група УЗ-31 налічує 15 дівчат та 2 хлопців, а група УМ-31 – 6 дівчат та 6 хлопців. Після святкування дня факультету менеджменту та маркетингу в клубі «Біоніка», троє студентів вирішили продовжити святкування в клубі «Форсаж», всі інші – повернулись додому. Зранку в гуртожиток зайшов куратор груп та зіткнувся зі студентом. Яка ймовірність того, що куратор зустрів хлопця?

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' \cos y = x - \sin y.$$

3. Обчислити

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \cos^2 x dx$$

4. Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

5. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ існує така *неперервна* функція $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, що $g(g(x)) = x^\alpha$ для всіх x . Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α , для яких це можливо, та доведіть її не існування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри з множини $\{0, 1, \dots, 9\}$, обираючи кожен наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число, утворене з усіх написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3 8 3 7 6 8 1, оскільки $3\,837\,681 = 1\,959 \times 1\,959$). Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p > \frac{1}{2}$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua/>