# ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО З МАТЕМАТИКИ, 2017 р.

***Перший курс***

1. Записати рівняння параболи з вертикальною віссю, яка дотикається до прямих $y = -x$, $y = x + 1$ та $y = 2x$.

2. Числову послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано співвідношеннями $a_0 = 1$ та $a_{n+1} = \cos(\operatorname{arctg} a_n)$. Знайти $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Визначити всі числа з відрізку $[-2017, 2017]$, які можуть бути результатом обчислення визначника порядку 11, складеного лише з елементів 1 та $-1$.

4. Обчислити інтеграл
$$\int_0^2 (3x^2 - 3x + 1)\cos(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)\,\mathrm{d}x.$$

5. Знайти всі прості числа вигляду $p^q + q^p$, де $p$ та $q$ — також прості числа.

6. Визначити всі цілі $n$, для яких існує многочлен $P$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(10) = 3$, $P(12) = 5$, $P(14) = 7$ та $P(n) = 0$.

7. Знайти всі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які для всіх $x$ та $y$ задовольняють співвідношення
$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

8. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\sigma(n)$ суму всіх дільників числа $n$, не включаючи саме це число. (Наприклад, $\sigma(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$.) Число $n$ називають надлишковим, якщо $\sigma(n) > n$. Довести, що частка надлишкових серед перших $1\,000\,000$ чисел перебільшує $\frac{1}{5}$.

9. В просторі $\mathbb{R}^3$ на відстані $d$ одна від одної розташовані пряма $l$ і точка $M$. Позначимо через $S$ геометричне місце таких точок простору, відстань від яких до $l$ більш ніж у два рази перевищує відстань до $M$. Знайти об'єм $S$.

10. Знайти всі неперервні функції $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність
$$4\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \pi + \int_0^1 (x^2 + 1) f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$