

**ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА  
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
З МАТЕМАТИКИ, 2017 р.**

*Старші курси*

1. Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  позначимо  $F_n(x) = x^n \ln x$ ,  $x > 0$ . Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(2n)!} F_{2n}^{(n)}(1),$$

де через  $F_{2n}^{(n)}(1)$  позначено похідну порядку  $n$  від функції  $F_{2n}$ , обчислену в точці 1.

2. Числову послідовність  $(a_n, n \geq 0)$  задано співвідношеннями  $a_0 = 1$  та  $a_{n+1} = \cos(\arctg a_n)$ . Знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

3. Знайти всі диференційовні функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які для всіх  $x$  задовольняють співвідношення

$$f(2x) = f(x) + x f'(2x).$$

4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 (3x^2 - 3x + 1) \cos(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) dx.$$

5. Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  позначимо через  $u_n$  найбільший непарний дільник числа  $n$ . (Наприклад,  $u_8 = 1$ ,  $u_9 = 9$ ,  $u_{12} = 3$ .) Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^3}.$$

6. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{2n\text{-кратний інтеграл}} \frac{x_1 \cdots x_{2n}}{1 - x_1 \cdots x_{2n}} dx_1 \cdots dx_{2n}.$$

7. Знайти значення нескінченного добутку

$$\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{2^n}\right).$$

8. Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  позначимо через  $\sigma(n)$  суму всіх дільників числа  $n$ , не включаючи саме це число. (Наприклад,  $\sigma(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$ .) Число  $n$  називають надлишковим, якщо  $\sigma(n) > n$ . Довести, що частка надлишкових серед перших 1 000 000 чисел перебільшує  $\frac{1}{5}$ .

9. В просторі  $\mathbb{R}^3$  на відстані  $d$  одна від одної розташовані пряма  $l$  і точка  $M$ . Позначимо через  $S$  геометричне місце таких точок простору, відстань від яких до  $l$  більш ніж у два рази перевищує відстань до  $M$ . Знайти об'єм  $S$ .

10. Згідно з політикою компанії, день народження будь-якого співробітника є загальним вихідним. Скільки співробітників має найняти компанія, щоб максимізувати математичне сподівання річної кількості людино-днів (тобто добутку числа співробітників та річної кількості робочих днів)? Вважати, що в році 365 днів, а інших вихідних у співробітників не передбачено.