РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО З МАТЕМАТИКИ, 2017 р.

1-й курс

Задача 1. Записати рівняння параболи з вертикальною віссю, яка дотикається до прямих $y=-x,\ y=x+1,\ y=2x.$

Розв'язання: Шукана парабола має рівняння ax^2+bx+c, де $a\neq 0$.

Якщо відомо, що ця парабола дотикається до прямої з рівнянням $y=kx+l$, то для деякого z рівняння дотичної до параболи в точці $\left(z, az^2+bz+c\right)$, яке має вигляд

$$y-\left(az^2+bz+c\right)=\left(2az+b\right)\left(x-z\right),$$

буде збігатися з рівнянням цієї прямої, тобто $k=2az+b$, $l=\left(c-az^2\right)$. Звідси

$$\left(\frac{k-b}{2a}\right)^2=z^2=\frac{c-l}{a},$$

тобто $\left(k-b\right)^2=4a\left(c-l\right)$.

Послідовно підставимо $\left(k=-1,l=0\right),\left(k=1,l=1\right),\left(k=2,l=0\right)$:

$$\begin{cases}\left(b+1\right)^2=4ac\\ \left(b-1\right)^2=4a\left(c-1\right)\\ \left(b-2\right)^2=4ac\end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо $a=b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{9}{8}$.

Переконуємось, що парабола $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{8}$ задовольняє умову задачі (прямі $y=-x, y=x+1 i y=2x$ дотикаються до неї в точках $\left(\dfrac{-3}{2},\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$ відповідно).

Відповідь: $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{8}$.

Задача 2. Числову послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано співвідношеннями $a_0 = 1$ та $a_{n+1} = \cos(\operatorname{arctg} n)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Розв'язання: Помітимо, що

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{cos^2\left(\operatorname{arctg} a_n\right)} = 1 + tg^2\left(\operatorname{arctg} a_n\right) = 1 + a_n^2.$$

Отже, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}$. Позначимо через $\{F_n\}$ послідовність Фібоначчі:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\ (\forall n \in N).$$

Доведемо за індукцією, що $a_n = \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$. При $n = 0$ твердження очевидне. Якщо $a_n = \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$, то

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}} = \sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+2}+F_{n+1}}} = \sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}}.$$

Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ існує і дорівнює $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 3. Визначити всі числа з відрізку $[-2017, 2017]$, які можуть бути результатом обчислення визначника порядку 11, складеного лише з елементів 1 та -1.

Розв'язання: Покажемо, що такий визначник має ділитись на 1024.

Дійсно, додамо верхній рядок до інших. Тоді елементи верхнього рядка залишаться ± 1, а решта елементів буде з множини $\{-2, 0, 2\}$. Тоді кожен ненульовий доданок визначника – добуток 11 елементів матриці – буде $\pm 2^{10}$, і визначник – сума цих добутків – буде ділитись на 1024.

Отже, з відрізка $[-2017, 2017]$ такий визначник не може досягати ніяких значень, крім, можливо, чисел з множини $\{-1024, 0, 1024\}$.

Визначник з одиниць дорівнює 0.

Визначник, головна діагональ і верхній рядок якого містять лише одиниці, а решта елементів – мінус одиниці, дорівнює 1024 (щоб переконатись в цьому, потрібно додати верхній рядок до кожного з інших). Якщо ж у ньому поміняти елементи верхнього рядка на (-1), то він стане дорівнювати -1024.

Відповідь: $-1024,\ 0,\ 1024$.

Задача 4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 (3x^2 - 3x + 1)\cos(\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 2)dx \ .$$

Розв'язання:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - 3x + 1\right)\cos\left(x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(3x^2 - 6x + 4\right)\cos\left(x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)dx +$$

$$+ 3\int_0^2 (x - 1)\cos\left(x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)dx = \left[y = x - 1\right] =$$

$$= \sin\left(x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)\Big|_0^2 + 3\int_{-1}^{1} y\cos\left(y^3 + y\right)dy = 2\sin 2,$$

оскільки $y\cos\left(y^3 + y\right)$ – непарна функція, від якої береться інтеграл по відрізку з центром в 0, і тому $\int_{-1}^{1} y\cos\left(y^3 + y\right)dy = 0$.

Відповідь: $2\sin 2$.

Задача 5. Знайти всі прості числа вигляду $p^q + q^p$, де p та q - також прості числа.

Розв'язання: Якщо p та q - непарні прості числа, то $p^q + q^p$ – парне число більше двійки, а отже не просте. Будемо вважати, що $q = 2$. Тоді якщо $p = 2$, то $p^q + q^p = 8$ – не просте число; якщо $p = 3$, то $p^q + q^p = 17$ – підходить; якщо p непарне і не ділиться на 3, то p^2 і 2^p мають залишки 1 і 2 відповідно при діленні на 3, тобто $p^2 + 2^p$ ділиться на 3 (і, звісно, більше 3), тобто не є простим.

Відповідь: 17.

Задача 6. Визначити всі цілі n, для яких існує многочлен P з цілими коефіцієнтами такий, що $P(10)=3$, $P(12)=5$, $P(14)=7$, $P(\mathrm{n})=0$.

Розв'язання: Оскільки $P(n)=0$, то існує многочлен $Q(x)$ такий, що $P(x)=(x-n)Q(x)$; всі коефіцієнти $Q(x)$ також будуть цілими, оскільки його можна отримати в результаті застосування схеми Горнера. Отже, $Q(x)$ набуває лише цілі значення при цілих значеннях x.

Згідно з умовою $(10-n)Q(10)=P(10)=3$, тобто $3 \vdots 10-n$, тобто $n\in\{7,9,11,13\}$. З двох інших умов аналогічно отримаємо $n\in\{7,11,13,17\}$ і $n\in\{7,13,15,21\}$, тобто $n\in\{7,13\}$.

При $n=7$ такий многочлен існує: $P(x)=x-7$.

При $n=13$ такий многочлен також існує (знаходиться шляхом припущення, що існує потрібний многочлен $Q(x)$ степеню 2 і рішення відповідної системи лінійних рівнянь): $P(x)=(x-13)\left(2x^2-46x+259\right)=2x^3-72x^2+857x-3367$.

Відповідь: 7 і 13.

Задача 7. Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, які для всіх x та y задовольняють співвідношення $f(x)f(y)=f(x+y)+xy.$

Розв'язання: Підставимо $x=y=1$, тоді $f^2(1)=f(2)+1$, звідки $\exists a\in\{1,2\}: f(a)\neq 0$.

Підставимо $x=a, y=0$, тоді $f(a)f(0)=f(a)$, звідки $f(0)=1$.

Підставимо $x=1, y=-1$, тоді $f(1)f(-1)=0$, звідки або $f(1)=0$, або $f(-1)=0$.

Якщо $f(1)=0$, підставимо $y=1$, тоді $\forall x\in R$: $f(x+1)=-x$, звідки шукана функція $f(x)=1-x$. Перевіряємо, що вона задовольняє умову задачі.

Якщо $f(-1)=0$, підставимо $y=-1$, тоді $\forall x\in R$: $f(x-1)=x$, звідки шукана функція $f(x)=1+x$. Перевіряємо, що вона задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x)=1-x$ і $f(x)=1+x$.

Задача 8. Для кожного $n \in \mathrm{N}$ позначимо через $\sigma(n)$ суму всіх дільників числа n, не включаючи саме це число. (Наприклад, $\sigma(18)=1+2+3+6+9=21$.) Число n називають надлишковим, якщо $\sigma(n)>n$. Довести, що частка надлишкових серед перших 1000000 чисел перебільшує $\frac{1}{5}$.

Доведення: Помітимо, що кожне число, кратне 6 і більше за 6, є надлишковим. Дійсно, при $n>1$ число $6n$ має різними дільниками числа $3n$, $2n$, n і 1, сума яких перевищує $6n$. Таких чисел серед перших 1000000 є 166665.

Помітимо, що кожне число, кратне 20, є надлишковим. Дійсно, число $20n$ має різними дільниками числа $10n$, $5n$, $4n$ і $2n$, сума яких перевищує $20n$. Чисел, кратних 20, але не кратних 6, серед перших 1000000 є 33334.

Помітимо, що числа 56 і 70 також є надлишковими ($56<28+14+8+7$, $70<35+14+10+7+5$) і не кратні 6 або 20.

Отже, серед перших 1000000 чисел є принаймні 166665+33334+2=200001 надлишкових, що й треба було довести. ■

Задача 9. В просторі R^3 на відстані d одна від одної розташовані пряма l і точка M. Позначимо через S геометричне місце таких точок простору, відстань від яких до l більш ніж у два рази перевищує відстань до M. Знайти об'єм S.

Розв'язання: Введемо координати в R^3 так, щоб пряма l співпадала з віссю $\overrightarrow{OZ}$, а точка М належала площині $z=0$. Позначимо координати точки М через $(k,l,0)$, тоді $\sqrt{k^2+l^2}=d$.

Запишемо умову $X(x,y,z)\in S$:

$$\sqrt{x^2+y^2}>2\sqrt{(x-k)^2+(y-l)^2+z^2}.$$

Підносячи до квадрату і роблячи очевидні перетворення, отримаємо рівняння S:

$$3\left(x-\frac{4}{3}k\right)^2+3\left(y-\frac{4}{3}l\right)^2+4z^2<\frac{4}{3}\left(k^2+l^2\right).$$

Скористаємось формулою для знаходження об'єму еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$:

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Підставляючи $a=b=\frac{2}{3}d, c=\frac{1}{\sqrt{3}}d$, отримаємо $V=\frac{16\pi}{27\sqrt{3}}d^3$.

Відповідь: $\frac{16\pi}{27\sqrt{3}}d^3$.

Задача 10. Знайти всі неперервні функції $f:[0,1]\to \mathrm{R}$, які задовольняють рівність

$$\int_0^1 f(x)dx=\pi+\int_0^1 (x^2+1)f^2(x)dx \ .$$

Розв'язання: Оскільки $\pi=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ (так як $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}$), то за умовою

$$\int_0^1 4f\left(x\right)dx=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx+\int_0^1 \left(x^2+1\right)f^2\left(x\right)dx \,.$$

Переносячи в праву частину, отримаємо, що інтеграл від неперервної невід'ємної функції по відрізку $[0,1]$ дорівнює 0:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}f\left(x\right)-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 dx=0 .$$

Очевидно, це можливо, тільки якщо функція тотожно дорівнює 0:

$$\sqrt{x^2+1}f\left(x\right)-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}=0 .$$

Звідси отримаємо $f\left(x\right)=\frac{2}{1+x^2}$.

Відповідь: $f\left(x\right)=\frac{2}{1+x^2}$.