РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
З МАТЕМАТИКИ, 2017 р.

Старші курси

Задача 1. Для кожного $n \in \mathrm{N}$ позначимо $F_n(x) = x^n \ln x,\ \ x > 0.$ Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n)!} F_{2n}^{(n)}(1),$$

де через $F_{2n}^{(n)}(1)$ позначено похідну порядку n від функції F_{2n} , обчислену в точці 1.

Розв'язання: Знайдемо $F_{2n}^{(n)}(1)$.

Помітимо, що якщо функція має вигляд $x^m\left(a\ln x + b\right)$, де $a, b \in R$, то її похідна дорівнює $x^{m-1}\left(ma\ln x + \left(a + bm\right)\right)$, тобто теж має такий вигляд. Оскільки $F_{2n}\left(x\right) = x^{2n}\ln x$ такий вигляд має, то її перші n похідних теж.

Позначимо

$$F_{2n}^{(k)}\left(x\right) = x^{2n-k}\left(a_k \ln x + b_k\right),\ k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Тоді $F_{2n}^{(n)}\left(1\right) = b_n$.

Якщо $a_0 = 1,$ то $b_0 = 0$.

Оскільки $a_{k+1} = \left(2n-k\right)a_k$, то

$$a_k = \left(2n\right)\cdot\left(2n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(2n-k+1\right) = \frac{\left(2n\right)!}{\left(2n-k\right)!}.$$

З останнього випливає, що

$$b_{k+1} = a_k + \left(2n-k\right)b_k = \left(2n-k\right)b_k + \frac{\left(2n\right)!}{\left(2n-k\right)!}.$$

Доведемо за індукцією, що

$$b_k = \frac{\left(2n\right)!}{\left(2n-k\right)!}\cdot\left(\frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n-k+1}\right) \text{ при } k > 0.$$

Дійсно, $b_1 = 1$. Якщо

$$b_k=\frac{(2n)!}{(2n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n-k+1}\right),$$

то

$$b_{k+1}=(2n-k)b_k+\frac{(2n)!}{(2n-k)!}=\frac{(2n)!}{(2n-(k+1))!}\left(\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n-k+1}\right)+\frac{(2n)!}{(2n-k)!}=$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n-(k+1))!}\left(\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n-k+1}+\frac{1}{2n-k}\right).$$

Отже,

$$F_{2n}^{(n)}(1)=b_n=\frac{(2n)!}{(n)!}\cdot\left(\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right),$$

і треба знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$. Скористаємось формулою для суми перших n членів гармонічного ряду:

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,$$

де γ – константа, а $\varepsilon_n\to 0, n\to\infty$. Отримаємо

$$\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n+1}=\ln(2n)+\varepsilon_{2n}-\ln(n)-\varepsilon_n\to\ln 2,\ n\to\infty.$$

Відповідь: $\ln 2$.

Задача 2. Числову послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано співвідношеннями $a_0 = 1$ та $a_{n+1} = \cos(\operatorname{arctg} n)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Розв'язання: Помітимо, що

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{cos^2\left(\operatorname{arctg} a_n\right)} = 1 + tg^2\left(\operatorname{arctg} a_n\right) = 1 + a_n^2 .$$

Отже, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}$. Позначимо через $\{F_n\}$ послідовність Фібоначчі:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\ (\forall n \in N).$$

Доведемо за індукцією, що $a_n = \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$. При $n = 0$ твердження очевидне. Якщо $a_n = \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$, то

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}} = \sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+2}+F_{n+1}}} = \sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}} .$$

Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ існує і дорівнює $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 3. Знайти всі диференційовані функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, які для всіх x задовольняють співвідношення

$$f(2x)=f(x)+xf'(2x)\ .$$

Розв'язання: Очевидно, $f'(x)$ неперервна при $x>0$. Доведемо, що $f'(x)$. неперервна справа в точці 0. Дійсно, за означенням похідної

$$f(x)=xf'(0)+f(0)+o(x),$$

тому

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x/2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}f'(0)+\left(o(x)-o\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)}{x/2}=f'(0).$$

Припустимо, що для деякого $z>0$ виконується $f'(z)=k\neq f'(0)$. Розглянемо інфімум множини $S=\{x>0:f'(x)=k\}$; позначимо її a. В силу неперервності $f'(x)$ маємо $f'(a)=k$ і, отже, $a>0$. За умовою

$$k=f'(a)=\frac{f(a)-f\left(\dfrac{a}{2}\right)}{a/2}=\frac{\int_{a/2}^{a}f'(x)dx}{a/2}.$$

Очевидно, ця рівність не може виконуватись, якщо на інтервалі $\left(\dfrac{a}{2},a\right)$ виконується нерівність $f'(x)>k$ або $f'(x)<k$. Отже, в силу неперервності $f'(x),\exists x\in\left(\dfrac{a}{2},a\right)$:

$$f'(x)=k,$$

але $0<x<a$, що суперечить тому, що a – інфімум. Отже, для всіх $z>0$ виконується $f'(z)=f'(0)$. Аналогічно доводиться, що для $z<0$ також $f'(z)=f'(0)$. Отже, $f'(x)=const$, звідки $f(x)=ax+b$, $a,b\in R$. Перевіркою впевнюємось, що всі такі функції задовольняють умову.

Відповідь: $f(x)=ax+b$, $a,b\in R$.

Задача 4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 (3x^2-3x+1)\cos(x^3-3x^2+4x-2)dx \ .$$

Розв'язання:

$$\int_0^2 \left(3x^2-3x+1\right)\cos\left(x^3-3x^2+4x-2\right)dx =$$

$$=\int_0^2 \left(3x^2-6x+4\right)\cos\left(x^3-3x^2+4x-2\right)dx +$$

$$+3\int_0^2 \left(x-1\right)\cos\left(x^3-3x^2+4x-2\right)dx = \left[y=x-1\right] =$$

$$=\sin\left(x^3-3x^2+4x-2\right)\Big|_0^2 +3\int_{-1}^1 y\cos\left(y^3+y\right)dy = 2\sin 2,$$

оскільки $y\cos\left(y^3+y\right)$ – непарна функція, від якої береться інтеграл по відрізку з центром в 0, і тому $\int_{-1}^1 y\cos\left(y^3+y\right)dy = 0$.

Відповідь: $2\sin 2$.

Задача 5. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через u_n найбільший непарний дільник числа n. (Наприклад, $u_8 = 1,\ u_9 = 9,\ u_{12} = 3$.) Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^3} .$$

Розв'язання. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що $n = u_n \cdot 2^{k_n}$. Наприклад, $8 = 1 \cdot 2^3$, $9 = 9 \cdot 2^0$, $12 = 3 \cdot 2^2$. Тому шукана сума може бути записана у вигляді

$$\sum_{u \not\vdots\, 2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u}{\left(u \cdot 2^k\right)^3} = \sum_{u \not\vdots\, 2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u^2 \cdot 8^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 8^{-k} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2}.$$

Перша сума, очевидно, дорівнює $\frac{8}{7}$, а другу може бути легко обчислено:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Отже, шукана сума дорівнює $\frac{8}{7} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{7}$.

Відповідь: $\frac{\pi^2}{7}$.

Задача 6. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{\substack{2n\,\textit{кратний}\\ \textit{інтеграл}}}\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_{2n}}{1-x_1\cdot\ldots\cdot x_{2n}}dx_1\ldots dx_{2n}\ .$$

Розв'язання: Позначимо $A_n=\int_0^1\ldots\int_0^1\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{1-x_1\cdot\ldots\cdot x_n}dx_1\ldots dx_n$, де інтеграл береться n разів. Помітимо, що

$$\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{1-x_1\cdot\ldots\cdot x_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\right)^m,$$

оскільки $x_1\cdot\ldots\cdot x_n<1$. Позначимо

$$A_n^m=\int_0^1\ldots\int_0^1\left(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\right)^m dx_1\ldots dx_n,$$

де інтеграл береться n разів. Тоді $A_n=\sum_{m=1}^{\infty}A_n^m$. Помітимо, що

$$A_n^m=\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 x_k^m dx_k=\left(\int_0^1 x^m dx\right)^n=\left(\frac{1}{m+1}\right)^n.$$

Тоді

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}=\sum_{m,n\in N}A_{2n}^m=\sum_{m,n\in N}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2n}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right)^n=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$

Задача 7. Знайти значення нескінченного добутку

$$\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Розв'язання: Оскільки

$$1-tg^4x=\frac{cos2x}{cos^4x},$$

то

$$\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{2^n}\right)=\prod_{n=3}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\cos^4\frac{\pi}{2^n}}=cos\frac{\pi}{4}\left(\prod_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\prod_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}\right)^3.$$

В свою чергу

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}=\prod_{n=3}^{\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=3}^{m}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{m-2}\sin\frac{\pi}{2^m}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\pi^3}{32}.$$

Відповідь: $\frac{\pi^3}{32}$.

Задача 8. Для кожного $n \in \mathrm{N}$ позначимо через $\sigma(n)$ суму всіх дільників числа n, не включаючи саме це число. (Наприклад, $\sigma(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$.) Число n називають надлишковим, якщо $\sigma(n) > n$. Довести, що частка надлишкових серед перших 1000000 чисел перебільшує $\frac{1}{5}$.

Доведення: Помітимо, що кожне число, кратне 6 і більше за 6, є надлишковим. Дійсно, при $n > 1$ число $6n$ має різними дільниками числа $3n$, $2n$, n і 1, сума яких перевищує $6n$. Таких чисел серед перших 1000000 є 166665.

Помітимо, що кожне число, кратне 20, є надлишковим. Дійсно, число $20n$ має різними дільниками числа $10n$, $5n$, $4n$ і $2n$, сума яких перевищує $20n$. Чисел, кратних 20, але не кратних 6, серед перших 1000000 є 33334.

Помітимо, що числа 56 і 70 також є надлишковими ($56 < 28 + 14 + 8 + 7$, $70 < 35 + 14 + 10 + 7 + 5$) і не кратні 6 або 20.

Отже, серед перших 1000000 чисел є принаймні 166665+33334+2=200001 надлишкових, що й треба було довести. ■

Задача 9. В просторі R^3 на відстані d одна від одної розташовані пряма l і точка M. Позначимо через S геометричне місце таких точок простору, відстань від яких до l більш ніж у два рази перевищує відстань до M. Знайти об'єм S.

Розв'язання: Введемо координати в R^3 так, щоб пряма l співпадала з віссю $\overrightarrow{OZ}$, а точка М належала площині $z=0$. Позначимо координати точки М через $(k,l,0)$, тоді $\sqrt{k^2+l^2}=d$.

Запишемо умову $X(x,y,z)\in S$:

$$\sqrt{x^2+y^2}>2\sqrt{(x-k)^2+(y-l)^2+z^2}.$$

Підносячи до квадрату і роблячи очевидні перетворення, отримаємо рівняння S:

$$3\left(x-\frac{4}{3}k\right)^2+3\left(y-\frac{4}{3}l\right)^2+4z^2<\frac{4}{3}\left(k^2+l^2\right).$$

Скористаємось формулою для знаходження об'єму еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$:

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Підставляючи $a=b=\frac{2}{3}d, c=\frac{1}{\sqrt{3}}d$, отримаємо $V=\frac{16\pi}{27\sqrt{3}}d^3$.

Відповідь: $\frac{16\pi}{27\sqrt{3}}d^3$.

Задача 10. Згідно з політикою компанії, день народження будь-якого співробітника є загальним вихідним. Скільки співробітників має найняти компанія, щоб максимізувати математичне сподівання річної кількості людино-днів (тобто добутку числа співробітників та річної кількості робочих днів)? Вважати, що в році 365 днів, а інших вихідних у співробітників не передбачено.

Розв'язання: Позначимо через ξ_n випадкову величину – кількість робочих днів при n співробітниках. Нам потрібно знайти n, при якому $nM\left(\xi_n\right)$ набуває найбільшого значення.

Помітимо, що

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{365} \xi_n^k,$$

де ξ_n^k – індикатор події «k-й день року є робочим», якщо загальна кількість співробітників становить n. Тому

$$M\left(\xi_n\right) = \sum_{k=1}^{365} M\left(\xi_n^k\right),$$

де $M\left(\xi_n^k\right)$ фактично дорівнює ймовірності того, що в k-й день року не народився жоден з n співробітників, і яка дорівнює $\left(\frac{364}{365}\right)^n$. Отже,

$$M\left(\xi_n\right) = 365\left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

і треба знайти $n \in N$, при якому $f\left(n\right) = n\left(\frac{364}{365}\right)^n$ набуває найбільшого значення. Функція $f\left(x\right)$ зростає на $\left[0, \frac{1}{\ln\frac{365}{364}}\right]$ і спадає на $\left(\frac{1}{\ln\frac{365}{364}}, +\infty\right)$. Помітимо, що при $\alpha > 0$ виконується нерівність:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \ln\left(1+\alpha\right) < \alpha.$$

Дійсно, значення цих трьох функцій при $\alpha = 0$ співпадають, а для похідних

$$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)' = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2, \quad \left(\ln\left(1+\alpha\right)\right)' = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha' = 1$$

виконується нерівність $\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2 < \frac{1}{1+\alpha} < 1$ при $\alpha > 0$.

Підставляючи $\alpha = \frac{1}{364}$, отримаємо, що

$$365 > \frac{1}{\ln\frac{365}{364}} > 364.$$

Отже, є два кандидати на максимум: $n = 364$ і $n = 365$. Підставляючи, отримаємо, що $f\left(364\right) = f\left(365\right)$.

Відповідь: 364 або 365 співробітника.