Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

О.О. Дем'яненко, В.В. Дрозд, В.А. Жук

Інтегральне числення функції однієї змінної. Гамма- та бета-функції.

Практикум для студентів І курсу

фізико-математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 111 «Математика»
спеціалізацією «Комп'ютерне та математичне моделювання динамічних систем», «Страхова та фінансова математика»

Київ 2018

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2018

Рецензенти: *Шарапов О. Д.*, доктор тех. наук, професор

Каніовска І.В.., кандидат фіз-мат наук, доцент

Відповідальний редактор *Буценко Ю. П.*, кандидат фіз-мат наук, доцент

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.Ігоря Сікорського (протокол №5 від

24.05.2018 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол №5 від

24.05.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Дем'яненко Ольга Олегівна, канд. фіз-мат наук, доц.

Дрозд В'ячеслав Володимирович, канд. фіз-мат наук, доц.

Жук Віктор Андрійович

Інтегральне числення функції однієї змінної. Гамма- та бета-функції.

Практикум

для студентів І курсу фізику-математичного факультету

Інтегральне числення функції однієї змінної. Гамма- та бета-функції: Практикум для студентів І курсу фізико-математичного факультету [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Комп'ютерне та математичне моделювання динамічних систем», «Страхова та фінансова математика» / О. О. Дем'яненко, В.В. Дрозд, В.А. Жук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані(1 файл:6.462 Кб).– Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського,2018 –123 с.

Запропонований посібник призначено для студентів першого курсу фізико-математичного факультету. Він складається з тем «Невизначений інтеграл, методи інтегрування», «Визначений інтеграл Рімана, невласні інтеграли» , «Функції обмеженої варіації, гамма- та бета-функції. Інтеграл Стілтьєса-Рімана», які вивчаюься у другому семестрі. Теоретичний матеріал викладений у посібнику містить необхідні означення і важливі теореми з кожної теми. Основні поняття і твердження кожної з тем проілюстровані значною кількістю розв'язаних типових прикладів і рисунків. Для перевірки засвоєння матеріала пропонуються задачі для самостійного опрацювання. Також ці задачі можуть бути використані при проведенні практичних занять або в якості домашнього завдання.

Тема 1. Первісна функції. Невизначений інтеграл.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* (або *первісною*) для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо в будь-якій точці цього інтервалу функція $F(x)$ диференційована, причому $F'(x)=f(x)$.

Зауважимо, що аналогічно можна визначити первісну для функції $f(x)$ на нескінченній прямій, або пів прямій.

Приклади. 1) Функція $F(x)=\arcsin x$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1;1)$, бо $\forall x\in(-1;1)$ $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Функція $F(x)=\sqrt{x}$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на інтервалі $(0;\infty)$, бо $\forall x\in(0;\infty)$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) Функція $F(x)=\sin x$ є первісною для функції $f(x)=\cos x$ на $(-\infty;\infty)$, бо $\forall x\in R$

$(\sin x)'=\cos x$.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $F(x)+C, C=const$ також є первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, тобто первісна, якщо вона існує, не єдина.

Теорема. Якщо $F_1(x), F_2(x)$ - будь-які дві первісні для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$,

то скрізь на цьому інтервалі $F_1(x)-F_2(x)=C$, де $C=const$.

Наслідок. Якщо $F(x)$- одна з первісних для функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то будь-яка первісна для функції $f(x)$ має вигляд: $F(x)+C, C=const$.

Означення. Сукупність всіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом,* $f(x)$ - *підінтегральною функцією,* $C\in R$ - *сталою інтегрування.*

Таким чином, операцію інтегрування можна розглядати, як операцію обернену до диференціювання.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

2. $\int dF(x)=F(x)+C$.

3. $\int(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x))dx=\alpha_1\int f_1(x)dx+\alpha_2\int f_2(x)dx$, де $\alpha_1,\alpha_2=const$ - властивість лінійності.

4. Властивість інваріантності формул інтегрування:
$\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C$, де u - диференційована функція.

Таблиця основних невизначених інтегралів.

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$.

5. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, a \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

6. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$.

7. $\int \sin\alpha x dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C$.

8. $\int \cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^{2}x} = tgx + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^{2}x} = -ctgx + C, x \neq \pi n, n \in Z$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, x \in (-a;a)$, $a \in (0;\infty)$.

12. $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}tg\frac{x}{a} + C$, $a \in (0;\infty)$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C$, у випадку знаку «-», $x \in (-\infty;-a) \cup (a;\infty)$, $a \in (0;\infty)$.

14. $\int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq 1$, $a \in (0;\infty)$.

15. $\int shxdx = chx + C$.

16. $\int chxdx = shx + C$.

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C, x \neq 0$.

Зауважимо, що формули 13,14 не мають аналогів в таблиці похідних. Для їх перевірки достатньо пересвідчитись, що похідна від правої частини рівності співпадає з підінтегральною функцією зліва. Є цілий набір елементарних функцій, інтеграли від яких не являються елементарними функціями. Наведемо приклади:

1) $\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона.

2) $\int \cos\left(x^2\right)dx$,

3) $\int \sin\left(x^2\right)dx$,

2),3) – інтеграли Френеля.

4) $\int \frac{dx}{\ln x}, x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ - інтегральний логарифм.

5) $\int \frac{\cos x}{x} dx, x \neq 0$ - інтегральний косинус.

6) $\int \frac{\sin x}{x} dx, x \neq 0$ - інтегральний сінус.

Про вказані підінтегральні функції кажуть, що вони не інтегровані в елементарних функціях. Зважаючи на те, що всі вказані функції не просто реально існують, але й відіграють важливу роль і мають широкі застосування у фізиці, вони докладно вивчені й для їх обчислення складені таблиці та побудовані графіки.

Повертаючись до функцій, що інтегровані в елементарний функціях, поставимо перед собою завдання доповнити таблицю невизначених інтегралів основними методами та прийомами інтегрування. Цьому і будуть присвячені наступні параграфи.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

№ 1. Знайдіть інтеграли, зводячи їх до табличних.

1. $\int \frac{x\sqrt{x}+1-2xe^{x}}{x}dx$

2. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^{2}e^{x}+3x}{x^{2}}dx$

3. $\int \frac{(1+x)^{2}}{x\sqrt{x}}dx$

4. $\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}}{\sqrt[3]{x}}dx$

5. $\int \frac{2\cdot 3^{x}-4\cdot 5^{x}}{3^{x}}dx$

6. $\int \frac{5^{2x}+e^{x}}{125^{x}}dx$

7. $\int \frac{x^{4}}{x^{2}-4}dx$

8. $\int \frac{x^{4}}{x^{2}+2}dx$

9. $\int (\arcsin x+\arccos x)dx$

10. $\int (arctgx+arcctgx)dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^{2}}}$

12. $\int \frac{dx}{16x^{2}+25}$

13. $\int (\cos 3x\sin 2x+\cos 2x\sin 3x)dx$

14. $\int (\cos 4x\cos 3x+\sin 4x\sin 3x)dx$

15. $\int tg^{2}xdx$

16. $\int ctg^{2}xdx$

17. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^{2}x\cos^{2}x}dx$

18. $\int \frac{1+\cos^{2}x}{1+\cos 2x}dx$

Вілповіді:

1. 1) $\frac{2}{3}x^{3/2}+\ln|x|-2e^{x}+C$; 2) $\frac{-4}{\sqrt{x}}-e^{x}+2\ln|x|+C$; 3) $\frac{-2}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$; 4) $\frac{3}{2}x^{2/3}-$ $-\frac{12}{7}x^{7/6}+\frac{3}{5}x^{5/3}+C$; 5) $2x-4\frac{\left(5/3\right)^{x}}{\ln 5/3}+C$; 6) $\frac{e^{x}}{125^{x}(1-3\ln 5)}-\frac{1}{5^{x}\ln 5}$;7) $\frac{x^{3}}{3}+4x+2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ + +C; 8) $\frac{x^{3}}{3}-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 9) $\frac{\pi}{2}x+C$; 10) $\pi x+C$; 11) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; 12) $C+$ $+\frac{1}{20}arctg\frac{4x}{5}$; 13) $C-\frac{\cos 5x}{5}$; 14) $\sin x+C$; 15) $tgx-x+C$; 16) $-ctgx-x+C$; 17) $-ctgx-tgx+C$; 18) $\frac{1}{2}tgx+\frac{x}{2}+C$.

Питання теоретичного характеру.

1.Що таке первісна функції, скільки первісних має функція?

2.Яке геометричне тлумачення має невизначений інтеграл?

3.Як перевірити правильність табличних інтегралів?

Тема 2. Основні методи інтегрування.

I. ***Метод заміни змінної, або введеня функції під знак диференціалу.***

Теорема. Нехай функція $t=\varphi(x)$ визначена та диференційована на інтервалі (a,b). Нехай $\{t\}$ є множиною значень функції $t=\varphi(x)$. Нехай також для функції $g(t)$ на множині $\{t\}$ існує первісна $G(t)$, тобто

$$\int g(t)dt = G(t)+C \qquad (1)$$

Тоді скрізь на інтервалі (a,b) для функції $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ існує первісна, що рівна $G(\varphi(x))$, тобто

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C \qquad (2)$$

Для ефективного застосування наведеної теореми необхідно, щоб у підінтегральній функції був множник, що є похідною внутрішнього аргументу складеної функції, який і можна ввести під знак диференціалу, або за рахунок якого можна ввести заміну. Новою змінною при цьому позначають внутрішній аргумент складеної функції.

Приклади .Знайдіть а) $\int \cos 3xdx$, б) $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$, в) $\int e^{\sin x}\cos xdx$.

а) 1-й спосіб, внесення під знак диференціалу:

$$\int \cos 3xdx = \left| d(3x)=3dx \right| = \frac{1}{3}\int \cos 3xd(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

2-й спосіб, введення заміни:

$$\int \cos 3xdx = \left| \begin{matrix} 3x=t \\ 3dx=dt\, dt \\ dx=\frac{1}{3} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \cos tdt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C .$$

б) 1-й спосіб, внесення під знак диференціалу:

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \left| d(1+x^2) = 2xdx \right| = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2)+C ,$$

2-й спосіб, введення заміни:

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left(1+x^2\right) + C .$$

в) 1-й спосіб, внесення під знак диференціалу:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| d\left(\sin x\right) = \cos x dx \right| = \int e^{\sin x} d\left(\sin x\right) = e^{\sin x} + C ,$$

2-й спосіб, введення заміни:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C .$$

Як наслідок з розглянутої теореми, можна розглядати таку властивість: якщо $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$, то $\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{1}{a} F\left(ax+b\right) + C$.

Приклад. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+4}} = \left| d\left(2x+4\right) = \frac{1}{2} dx \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(2x+4\right)}{\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x+4} + C = \sqrt{2x+4} + C$.

II***. Метод інтегрування частинами.***

Теорема. Нехай функції $u = u\left(x\right), v = v\left(x\right)$ диференційовані на інтервалі $\left(a,b\right)$. Нехай на інтервалі $\left(a,b\right)$ існує первісна функції $u'\left(x\right)v\left(x\right)$, тоді на інтервалі $\left(a,b\right)$ існує первісна функції $u\left(x\right)v'\left(x\right)$, причому виконується рівність:

$$\int u\left(x\right)v'\left(x\right)dx = u\left(x\right)v\left(x\right) - \int u'\left(x\right)v\left(x\right)dx \text{, або}$$

$$\int udv = uv - \int vdu ,$$

яка і називається *формулою інтегрування частинами.*

Приклади .

1) $\int \left(x+3\right)\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x+3, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| = \left(x+3\right)\sin x - \int \sin x dx = \left(x+3\right)\sin x + \cos x + C$.

2) $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$.

3) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, v = tgx \end{matrix} \right| = xtgx - \int tgxdx = xtgx + \ln\left|\cos x\right| + C$.

4) $\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{3x}dx, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int \frac{2}{3}xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{2}{3}x, du = \frac{2}{3}dx \\ dv = e^{3x}dx, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} -$

$-\frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C$.

В цьому прикладі формула інтегрування частинами застосована двічі.

5) I=$\int e^{2x}\cos 3xdx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3xdx, v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \int 2e^{2x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3xdx =$

$= \left| \begin{matrix} u = \frac{2}{3}e^{2x}, du = \frac{4}{3}e^{2x}dx \\ dv = \sin 3xdx, v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{matrix} \right| = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx$.

Порівнюючи між собою початок і кінець цього ланцюга рівностей, отримаємо рівняння відносно шуканого інтеграла I:

I=$\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}$I $\Rightarrow$ I=$\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C$.

Тут застосоване так званне кругове інтегрування.

Питання теоретичного характеру.

1.Які є основні методи інтегрування?

2.При яких умовах, що накладені на підінтегральну функцію, можливе введення під знак диференціалу?

3.Що таке кругове інтегрування?

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

Знайдіть інтеграли.

№ 2. 1) $\int \frac{x\left(1 - x^2\right)}{1 + x^4}dx$ 2) $\int \frac{x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}dx$

3) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$ 4) $\int \frac{x+\left(\arccos 3x\right)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

5) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$

7) $\int \frac{x-\operatorname{arc}tg^2 x}{1+x^2}dx$ 8) $\int \sqrt[3]{\left(\ln x-1\right)^2}\,\frac{dx}{x}$

№ 3. 1) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ 2) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

3) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ 4) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$

5) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx$ 6) $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$

7) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ 8) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

№ 4. 1) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}dx$ 2) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x-1}}dx$

3) $\int \frac{2-x}{x^2+2x-7}dx$ 4) $\int \frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-6}}dx$

5) $\int \frac{2x-5}{x^2-6x+8}dx$ 6) $\int \frac{6-x}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$

7) $\int \frac{4x+3}{x^2-8x+1}dx$ 8) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{x^2+8x-5}}dx$

№ 5. 1) $\int x\operatorname{arc}tgx dx$ 2) $\int \operatorname{arc}tg\sqrt{x}dx$

3) $\int \arccos x dx$ 4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

5) $\int xtg^2 x dx$ 6) $\int \frac{\lg x}{x^2}dx$

7) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$ 8) $\int \frac{x\operatorname{arc}tgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$

№ 6. 1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 2) $\int x\cos^2 x dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{3/2}}dx$ 4) $\int \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}$

5) $\int\left(2-3\sqrt[3]{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{3}}dx$ 6) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7) $\int\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$ 8) $\int\frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$

6. 1) $\int\frac{1-tgx}{1+tgx}dx$ 2) $\int\frac{(1+tgx)}{\sin 2x}dx$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}$ 4) $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$

5) $\int\frac{e^x\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ 6) $\int\sqrt{e^x-1}dx$

7) $\int\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)dx$ 8) $\int\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

Тема 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Дробово-раціональною функцією будемо називати функцію вигляду

$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ та $Q_x(x)$- алгебраїчні многочлени порядку

n та m відповідно. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо

$n<m$. Будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми елементарних дробів. До елементарних дробів відносять дроби наступних чотирьох типів: $I.\frac{A}{x-a}$; $II.\frac{A}{(x-a)^m}$ (де $m\neq 1$); $III.\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

$IV.\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ (де $q-\frac{p^2}{4}>0$);

Покажемо, що всі чотири типи елементарних дробів є інтегральні.

$$I.\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln\left|x-a\right|+C.$$

$$II.\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

$$III.\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a} arctg\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

$$IV.\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array} \right| = \int \frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Введемо позначення $I_m = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}$, $K_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$.

Елементарний дріб IV типу буде зінтегрований, якщо будуть знайдені інтеграли I_m та K_m.

$$I_m = \int (t^2+a^2)^{-m} d(t^2+a^2) = \frac{(t^2+a^2)^{1-m}}{1-m} + C,$$

$$K_m=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2}{(t^2+a^2)^m}dt-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{m-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{2ttdt}{(t^2+a^2)^m}=\left|\begin{array}{l} u=t \\ dv=\dfrac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} \\ du=dt \\ v=\int\dfrac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\dfrac{(t^2+a^2)^{-m+1}}{-m+1}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{m-1}-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}-\frac{1}{1-m}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{m-1}-\frac{t}{2a^2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{1}{2a^2(1-m)}K_{m-1}$$

Отримаємо рекурентну формулу, яка дозволяє послідовно обчислити K_m для довільного $m=2,3,...,$ спираючись на те, що $K_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{1}{a}+C.$

Отже, всі чотири типи елементарних дробів інтегруються, що обгрунтовує наступну теорему.

***Теорема**:* Будь-яка дробово-раціональна функція є інтегрованою в елементарних функціях.

Питання теоретичного характеру

1.Які з наведених дробів є елементарними й до якого типу їх можна віднести: $a)\frac{3x+5}{x^2-8x+9}$; б) $\frac{7x+9}{3x-1}$; в) $\frac{x}{4x-5}$; г) $\frac{675}{(2x-6)^3}$; д) $\frac{1}{(x^2+4)^4}$?

Приклади: Знайдіть інтеграли:

$$a).\int\frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx;\quad б).\int\frac{3x^2+5x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx;\quad в).\int\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-5x-3}dx;$$

$$г).\int\frac{x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx;\quad д).\int\frac{2x^5+x^4+15x^3+5x^2+28x+7}{x^4+7x^2+12}dx;$$

Розв'язання.

$$a).\int\frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx=\int\frac{6x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}dx=I.$$

Розкладемо на елементарні дроби раціональний дріб

$\frac{6x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$. Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівнявши чисельники, отримаємо:

$$6x^2+2x-2=x^2(A+B+C)+x(A+2B-C)-2A.$$

Застосуємо метод порівняння коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+B+C=6 \\ A+2B-C=2 \\ -2A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3. \end{cases} \text{ тоді}$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\ln|x|+2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C.$$

$$б).\int\frac{3x^2+5x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx=\int\frac{3x^2+5x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx=I.$$

Розкладемо дріб $\frac{3x^2+5x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}\Rightarrow$

$$3x^2+5x+2=A(x^2+2x+2)+(x+2)(Mx+N)=x^2(A+M)+x(2A+2M+N)+(2A+2N).$$

За методом порівняння коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+M=3 \\ 2A+2M+N=5 \\ 2A+2N=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ M=1 \\ N=-1. \end{cases} \quad \text{тоді}$$

$$I=\int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}\right)dx=2\ln|x+2|+\int\frac{x-1}{(x+1)^2+1}dx=$$

$$=2\ln|x+2|+\int\frac{(x+1)-2}{(x+1)^2+1}dx=2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\int\frac{d((x+1)^2+1)}{(x+1)^2+1}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln((x-1)^2+1)-2arctg(x+1)+C.$$

$$в).\int\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-5x-3}dx=\int\frac{3x^2+x+2}{(x+1)^2(x-3)}dx=I.$$

Розкладемо дріб $\frac{3x^2+x+2}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}\Rightarrow$

$$3x^2+x+2=x^2(A+C)+x(-2A+B+2C)+(-3A-3B+C)=>$$

$$\begin{cases} A+C=3 \\ -2A+B+2C=1 \\ -3A-3B+C=2 \end{cases} => \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2. \end{cases}$$ тоді

$$I=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+2\ln|x-3|+C.$$

$$г).\int\frac{x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int\frac{x+2}{((x-1)^2+1)^2}dx=\int\frac{(x-1)+3}{((x-1)^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d((x-1)^2+1)}{((x-1)^2+1)^2}+3\int\frac{1+(x-1)^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{-1}{2((x-1)^2+1)}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}-\frac{3}{2}\int\frac{2(x-1)(x-1)}{((x-1)^2+1)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x-1, du=dx \\ dv=\dfrac{(x-1)dx}{((x-1)^2+1)^2}, v=\displaystyle\int\frac{d((x-1)^2+1)}{((x-1)^2+1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2+1} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{-1}{2(x^2-2x+2)}+3arctg(x-1)-\frac{3}{2}\left(-\frac{x-1}{(x-1)^2+1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2(x^2-2x+2)}+3arctg(x-1)+\frac{3(x-1)}{2(x^2-2x+2)}-\frac{3}{2}arctg(x-1)+C=$$

$$=\frac{-1}{2(x^2-2x+2)}+\frac{3}{2}arctg(x-1)+\frac{3(x-1)}{2(x^2-2x+2)}+C.$$

д). Функція $f(x)=\dfrac{2x^5+x^4+15x^3+5x^2+28x+7}{x^4+7x^2+12}$ є неправильним раціональним дробом, тому виділяємо спочатку його цілу частину:

$$\frac{2x^5+x^4+15x^3+5x^2+28x+7}{x^4+7x^2+12}=2x+1+\frac{x^3-2x^2+4x-5}{(x^2+4)(x^2+3)}$$

Розкладемо дріб $\dfrac{x^3-2x^2+4x-5}{(x^2+4)(x^2+3)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}=>$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=-2 \\ 3A+4C=4 \\ 3B+4D=-5 \end{cases} => \begin{cases} A=0 \\ B=-3 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$$ тому

$$\int \frac{2x^5+x^4+15x^3+5x^2+28x+7}{x^4+7x^2+12}dx = \int (2x+1+\frac{-3}{x^2+4}+\frac{x+1}{x^2+3})dx =$$

$$= x^2+x-\frac{3}{2}arctg\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}} =$$

$$= x^2+x-\frac{3}{2}arctg\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

Знайдіть інтеграли.

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-12}dx$

2. $\int \frac{-x-9}{x^2-2x-3}dx$

3. $\int \frac{4x-1}{x^2-5x-14}dx$

4. $\int \frac{2x+17}{x^2+4x-5}dx$

5. $\int \frac{4x^2+15x+5}{x^3+4x^2+x-6}dx$

6. $\int \frac{-4x^2-8x-6}{x^3+2x^2-x-2}dx$

7. $\int \frac{3x^2-6x+5}{x^3-x^2-8x+12}dx$

8. $\int \frac{3x^2+9x+4}{x^3+5x^2+3x-9}dx$

9. $\int \frac{5x^2+9x+3}{(x+2)^2(x-3)}dx$

10. $\int \frac{2x^2-9x+10}{(x-1)^2(x+2)}dx$

11. $\int \frac{5x^2-5x-4}{x^3-2x^2-2x-3}dx$

12. $\int \frac{6x^2+18x-3}{x^3+3x^2-3x+4}dx$

13. $\int \frac{3x^3+4x^2-4x+5}{(x+1)^2(x^2-2x+2)}dx$

14. $\int \frac{-4x^2-4x+3}{(x+2)^2(x^2+2x+5)}dx$

15. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

16. $\int \frac{dx}{(x^2+3)^2}$

17. $\int \frac{3x^4-x^3+15x^2-x+9}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

18. $\int \frac{3x^4+5x^3+103x^2+127x+702}{(x+1)(x^2+25)^2}dx$

19. $\int \frac{2x^3+13x^2+29x+19}{x^2+5x+6}dx$

20. $\int \frac{2x^3+3x^2-30x+12}{x^2+2x-15}dx$

21. $\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^3+1}dx$

22. $\int \frac{x^4-3x^3+3x^2-4x+6}{x^3-1}dx$

23. $\int \frac{5x^3+13x^2+13x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

24. $\int \frac{4x^3-5x^2+2x-2}{x^3-2x^2+x}dx$

Відповіді.

$$1.\ln\left|x^2+x-12\right|+C;\ \ 2.\ln\frac{(x+1)^2}{\left|x-3\right|^3}+C;\ \ 3.\ln\left|x-7\right|^3\left|x+2\right|+C;\ \ 4.\ln\frac{\left|x-1\right|^3}{(x+5)^2}+C;$$

$$5.\ln\frac{(x-1)^2\left|x+2\right|^3}{\left|x+3\right|}+C;\ \ 6.\ln\frac{\left|x+1\right|}{(x+2)^2\left|x-1\right|^3}+C;\ \ 7.\ln(x+2)^2\left|x-3\right|^3+\frac{1}{x+2}+C;$$

$$8.\ln\frac{(x+2)^4}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+C;\ \ 9.\ln\left|x-2\right|(x+3)^2-\frac{1}{x-2}+C;\ \ 10.\ln(x+3)^2\left|x-1\right|+\frac{1}{x+3}+C;$$

$$11.\ln(x-3)^2\sqrt{(x^2+x+1)^3}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$$

$$12.\ln\left|x+4\right|\sqrt{(x^2-x+1)^5}+\sqrt{3}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

$$13.\ln\left|x+1\right|(x^2-2x+2)-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}arctg(x-1)+C;$$

$$14.\ln(x+2)^2(x^2+2x+5)+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}+C;$$

$$15.\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}+C;$$

$$16.\frac{1}{6\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x}{6(x^2+3)}+C;\ \ 17.\ln\left|x-1\right|(x^2+4)+\frac{3x}{8(x^2+4)}+\frac{11}{16}arctg\,\frac{x}{2}+C;$$

$$18.\ln\left|x+1\right|(x^2+25)+\frac{x}{25(x^2+25)}+\frac{76}{125}arctg\,\frac{x}{5}+C;$$

$$19.x^2+3x+\ln\left|x^2+5x+6\right|-4\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C;\ \ 20.x^2-x+\ln\left|x^2+2x-15\right|-\frac{5}{8}\ln\left|\frac{x-3}{x+5}\right|+C;$$

$$21.\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|x^3+1\right|+2\sqrt{3}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

$$22.\frac{x^2}{2}-3x+\ln\left|x^3-1\right|-2\sqrt{3}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$$

$$23.5x+\ln x^2\left|x+1\right|-\frac{3}{x+1}+C;\ 24.4x+\ln\frac{\left|x-1\right|^5}{x^2}+\frac{1}{x-1}+C;$$

Тема 4. Інтегрування тригонометричних виразів.

Розглянемо нетабличний інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція аргументів $\sin x, \cos x$. Іноді достатньо виконати деякі перетворення, щоб звести цей інтеграл до табличного. Зупинимось на випадку, коли до табличного інтеграл не зводиться і не застосовуються методи внесення під знак диференціалу та інтегрування частинами.

Існує загальна універсальна підстановка, яка переводить інтеграл від тригонометричного виразу до інтеграла від раціонального дробу, що напевне інтегрується в елементарних функціях. Ця підстановка має вигляд: $t = tg\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$. Якщо виразити функції $\sin x, \cos x$ через функцію $tg\frac{x}{2}$, одержимо формули:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайдіть $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{1+2\sin x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t \\ \sin x \quad = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{4t}{1+t^2}} =$$

$$\int \frac{2dt}{1+t^2+4t} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{t+2}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{tg\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}} + C.$$

В деяких випадках окрім універсальної підстановки можна використовувати інші підстановки, які швидше дають позитивний результат. Розглянемо їх:

1) Функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тоді використовують підстановку $\cos x = t, x \in [0, \pi]$.

2) Функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тоді використовують підстановку $\sin x = t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Тоді використовують підстановку $tgx = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Для цієї підстановки $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Приклади. Знайдіть а) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}$.

Розв'язання:

а) Це приклад на перший частковий випадок

$$\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} \frac{\cos^2 x}{-\sin x} = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} \Rightarrow \\ \cos x = t, -\sin xdx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(-\sin x)dx = -\int \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}(-\sin x)dx =$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C;$$

б) Це приклад на третій частковий випадок $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x} = \left| \frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^4} = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \Rightarrow tgx = t \right|$

$$= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{3}tg^3 x + C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

Знайдіть інтеграли.

1) $\int \cos^5 xdx$	2) $\int \sin^7 xdx$
3) $\int \sin^3 x \cos^4 xdx$	4) $\int \cos^5 x \sin^7 xdx$

5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$	6) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$
7) $\int \frac{dx}{\sin x}$	8) $\int \frac{dx}{\cos x}$
9) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$	10) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1}$	12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 1}$
13) $\int tg^5 x dx$	14) $\int tg^3 x dx$
15) $\int \frac{2\sqrt{tg^3 x}}{\sin 2x} dx$	16) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$
17) $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$	18) $\int \frac{dx}{8 + 4\sin x}$
19) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$	20) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$
21) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$	22) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \cdot \sin^3 x dx$
23) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$	24) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$
25) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$	26) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$
27) $\int \frac{dx}{1 + \sin^3 x}$	28) $\int \frac{dx}{4\sin x (\sin x + 2\cos x)}$
29) $\int \frac{dx}{\sin^3 4x}$	30) $\int \frac{dx}{\cos^3 2x}$
31) $\int tg^3 x dx$	32) $\int tg^2 x dx$
33) $\int \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin^2 x}$	34) $\int \frac{dx}{4 - \sin^2 x + 5\cos^2 x}$

Відповіді:

1) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$; 2) $-\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$;

3) $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$; 4) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$; 5) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$;

6) $3\sqrt[3]{\cos x}-\frac{6}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x}+\frac{3}{13}\sqrt[3]{\cos^{13} x}+C$; 7) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$; 8) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$;

9) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|-\frac{1}{4(\sin x-1)}-\frac{1}{4(\sin x+1)}+C$; 10) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\ \frac{1}{4(\cos x-1)}+$

$+\frac{1}{4(\cos x+1)}+C$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C$; 12) $C-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}}$; 13) $\frac{1}{4}tg^4x-$

$-\frac{1}{2}tg^2x+\frac{1}{2}\ln\left|tg^2x+1\right|+C$; 14) $\frac{1}{2}tg^2x-\ln\sqrt{tg^2x+1}+C$; 15) $\frac{2}{3}\sqrt{tg^3x}+C$;

16) $\frac{4}{9}tg^{9/4}x-\frac{4}{\sqrt[4]{tgx}}+C$; 17) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+C$; 18) $\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$;

19) $\frac{1}{2}\ln\left|2tg\frac{x}{2}+3\right|+C$; 20) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}-1}{2tg\frac{x}{2}+4}\right|+C$; 21) $\frac{3}{5}(\sin x)^{5/3}-\frac{3}{11}(\sin x)^{11/3}+C$;

22) $\frac{5}{19}(\cos x)^{\frac{19}{5}}-\frac{5}{9}(\cos x)^{\frac{9}{5}}+C$; 23) $\frac{2}{7}(\cos x)^{\frac{7}{2}}-3(\cos x)^{\frac{1}{3}}+C$;

24) $\frac{3}{14}(\sin 2x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}(\sin 2x)^{\frac{1}{3}}+C$; 25) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$; 26) $\frac{1}{11}\cos^{11} x-\frac{1}{9}\cos^9 x+C$;

27) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C$; 28) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{tgx}{tgx+2}\right|+C$; 29) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}\right|+\frac{1/16}{\cos^4 x-1}+$

$+\frac{1/16}{\cos^4 x}+C$; 30) $\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|-\frac{1}{\sin 2x-1}-\frac{1}{\sin 2x+1}\right)+C$; 31) $C+\frac{1}{2}tg^2x+$

$+\ln\sqrt{tg^2x+1}$; 32) $tgx-x+C$; 33) $\frac{x}{3}+C$; 34) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{tgx+3}{tgx-3}\right|+C$.

Тема 5.Інтегрування деяких ірраціональностей.

При інтегруванні ірраціональних виразів головне підібрати таку заміну, яка дозволить позбутись ірраціональності. Виділимо деякі основні типи ірраціональностей.

I.Лінійні ірраціональності.

Розглянемо інтеграл виду $\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{n_1}{m_1}},(ax+b)^{\frac{n_2}{m_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx$, де $R(\cdot)$ - раціональна функція.. Нехай $r=$ Н.С.К.$\left(m_1,m_2,\ldots,m_k\right)$. Тоді заміна $ax+b=t^r$ переведе даний інтеграл в інтеграл від раціонального дробу.

Приклад. Знайдіть $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}=\left|\begin{array}{l}2x+1=t^3\\ x=\frac{1}{2}\left(t^3-1\right)\\ dx=\frac{1}{2}\cdot 3t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}\left(t^3-1\right)}{t}\frac{3}{2}t^2dt=\frac{3}{4}\int t\left(t^3-1\right)dt=\frac{3}{4}\int\left(t^4-t\right)dt=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2+C.$$

II.Дробово-лінійні ірраціональності.

Розглянемо інтеграл виду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{m_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx$. В цьому випадку зручно використати заміну $\frac{ax+b}{cx+d}=t^r$, де $r=$ Н.С.К. $\left(m_1,m_2,\ldots,m_k\right)$.

Приклад. Знайдіть $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{x-1}=t^2\\ x=\frac{1+t^2}{t^2-1}\\ dx=\frac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right|=\int\frac{-4t^2dt}{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)\left(t-1\right)}=\int\left(\frac{-2}{t^2+1}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$= -2arctgt + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = -2arctg\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2 + C.$$

III. Квадратичні ірраціональності.

Квадратичні ірраціональності можна інтегрувати декількома способами.

Інтеграл від квадратичної ірраціональності виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна позбавити кореня квадратного введенням тригонометричної, або гіперболічної підстановки. Для цього у квадратному тричлені під коренем треба виділити повний квадрат і ввести відповідну заміну:

1) для інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{l^2-x^2}\right)dx$, заміну $x = l\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, або $x = ltht$;
2) для інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2+l^2}\right)dx$, заміну $x = ltgt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, або $x = lsht$;
3) для інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2-l^2}\right)dx$, заміну $x = \frac{l}{\cos t}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, або $x = lcht$.

Приклад. Знайдіть $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$.

Розв'язання:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx = \left|\begin{matrix} x+1 = 2\sin t \\ dx = 2\cos tdt \end{matrix}\right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt =$$

$$= \int \sqrt{4\cos^2 t}\cdot 2\cos tdt = \int 4\cos^2 tdt = 2\int(1+\cos 2t)dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = 2\arcsin\frac{x+1}{2} +$$

$$+ \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

Для квадратичних ірраціональностей можливе також застосування підстановок Ейлера.

1-а підстановка Ейлера: при $a > 0, \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$;

2-а підстановка Ейлера: при $c > 0, \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3-а підстановка Ейлера: якщо x_1 - корінь тричлена $ax^2+bx+c, \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$.

В усіх підстановках t - нова змінна інтегрування.

Приклад: Знайдіть $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

Розв'язання: Оберемо першу підстановку Ейлера: $\sqrt{x^2+9}=x+t \Rightarrow t=\sqrt{x^2+9}-x$

$\Rightarrow x^2+9=x^2+2tx+t^2 \Rightarrow x=\frac{9-t^2}{2t}, dx=\left(-\frac{9}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)$. Тоді

$$I=\int \frac{2t}{\left(9-t^2\right)\left(\frac{9-t^2}{2t}+t\right)}\left(-\frac{9}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)dt=-\int \frac{4t^2\left(9+t^2\right)}{\left(9-t^2\right)\left(9+t^2\right)2t^2}dt=-2\int \frac{dt}{9-t^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-x-3}{\sqrt{x^2+9}-x+3}\right|+C.$$

Інтеграл від квадратичної ірраціональності виду $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, де $P_n(x)$ - многочлен n-го порядку, за формулою Остроградського можна представити у вигляді

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $Q_{n-1}(x)$ - многочлен $(n-1)$-го порядку з невизначеними коефіцієнтами. Ці коефіцієнти та константу λ шукають методом невизначених коефіцієнтів. Знаходження самого інтегралу зводиться до інтегрування другого доданку в сумі справа.

Приклад **.**Знайдіть $\int \frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу Остроградського:

$$\int \frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx=(ax+b)\sqrt{x^2-2x+10}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Продиференцюємо обидві частини рівності:

$$\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}=a\sqrt{x^2-2x+10}+(ax+b)\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Домножимо обидві частини рівності на $\sqrt{x^2-2x+10}$:

$$4x^2-3x+19=a\left(x^2-2x+10\right)+(ax+b)(x-1)+\lambda.$$

Розкриваємо дужки справа і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x з обох боків рівності.

$$\begin{aligned} x^2&:4=2a \\ x&:-3=-3a+b \\ x&:19=10a-b+\lambda \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ \lambda=2 \end{cases}.$$

Отже, $\int\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx=(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}=$

$(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+$

$$+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}=(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right|+C.$$

Інтеграл від квадратичної ірраціональності виду

$$\int\frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},\ r=1,2$$

підстановкою $mx+n=\frac{1}{t}$ зводиться до попереднього випадку, або до табличного інтегралу.

Приклад. Знайдіть $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}=\left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t} \\ dx=\frac{-dt}{t^2} \end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}+1}}=\int\frac{-dt}{\sqrt{2+2t+t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+1}}=$$

$$= -\ln\left|t+1+\sqrt{t^2+2t+2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}\sqrt{1+2x+2x^2}\right| + C.$$

IV.Інтегрування диференціального біному.

Означення. Вираз виду $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, де $m, n, p \in Q;\; a, b \in R$ називають *диференціальним біномом*.

Теорема (Чебишова). Інтеграли від диференціального бінома $x^m\left(a+bx^n\right)^p$ виражаються через елементарні функції у трьох випадках:

1) якщо $p \in Z$, то застосовують підстановку $x = t^r$, де r - найменше спільне кратне знаменників дробів m, n;
2) якщо $p \notin Z, \frac{m+1}{n} \in Z$, то застосовують підстановку $a+bx^n = t^r$, де r - знаменник дробу p;
3) якщо $p \notin Z, \frac{m+1}{n} \notin Z, \frac{m+1}{n}+p \in Z$, то застосовують підстановку $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^r$,

де r - знаменник дробу p.

Якщо жодний із вказаних випадків не виконується, то інтеграл від диференціального біному не виражається через елементарні функції.

Приклад. Знайдіть а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання:

а) $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-1}dx = \left|\begin{array}{c} p=-1\in Z \\ x=t^4, t=\sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3dt \end{array}\right| = \int t^2\left(t+1\right)^{-1}4t^3dt = \int \frac{4t^5}{t+1}dt =$$

$$= 4\int\left(t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-$$

$$-2\sqrt{x}+4x^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C.$$

б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} m=-11, n=4, p=-\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n}+p=-3\in Z \Rightarrow \\ \frac{1+x^4}{x^4}=t^2, x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ dx=-\frac{1}{4}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 2tdt \end{array} \right| = \int \left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}\right)\times$

$\times\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 2tdt = -\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2 dt = -\frac{1}{2}\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=$

$=\frac{-1}{10}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

Знайдіть інтеграли.

1. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x+1}}$
2. $\int \frac{dx}{4+\sqrt{x-5}}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}$
5. $\int \frac{2+\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x+3}}dx$
6. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}}dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$
8. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}dx$
9. $\int \frac{x+1-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$
10. $\int \frac{x-2+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$
11. $\int \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}\cdot\frac{dx}{x}$
12. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5}}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^5\left(x-2\right)}}$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+5}}$
17. $\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2\sqrt{4x^2+4x-3}}$
18. $\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2\sqrt{x^2+6x+10}}$

19. $\int \frac{2x^2+3x-5}{\sqrt{5x^2-8x+4}}dx$

20. $\int \frac{3x^2+x-2}{\sqrt{1-2x-8x^2}}dx$

21. $\int \frac{3x^2+8x^2+5x+10}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

22. $\int \frac{6x^3-12x^2+x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

23. $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$

24. $\int \sqrt{x^2-x+1}dx$

25. $\int \sqrt{5-4x-x^2}dx$

26. $\int \sqrt{6x-x^2-5}dx$

27. $\int \sqrt[3]{x}\left(2+3\sqrt{x}\right)dx$

28. $\int \sqrt[4]{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)dx$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{8+\sqrt{x}}}{x}dx$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{8+x^4}}$

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

32. $\int x^{-1}\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}dx$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

35. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}}dx$

36. $\int x^{-9}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)}dx$

Відповіді.

1) $-2\sqrt{x+1}-4\ln\left|\sqrt{x+1}-2\right|+C$; 2) $2\sqrt{x-5}-8\ln\left|\sqrt{x-5}+4\right|+C$; 3) $2\sqrt{x+2}-3\sqrt[3]{x+2}+$ $+6\sqrt[6]{x+2}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right|+C$; 4) $2\sqrt{x-1}+4\sqrt[4]{x-1}+4\ln\left|\sqrt[4]{x-1}-1\right|+C$; 5) $-x-3+$ $+4\sqrt{x+3}+8\ln\left|\sqrt{x+3}-2\right|+C$; 6) $1-x-3\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+2\ln\left|\sqrt[3]{x-1}-1\right|+C$;

7) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{3}\ln\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x+1}}+C$; 8) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-6arctg\sqrt[6]{x}+C$;

9) $\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}(x+2)^{\frac{5}{6}}-2\sqrt{x+2}+C$; 10) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{6}}-2\sqrt{x-1}+C$;

11) $2arctg\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}\right|+C$; 12) $2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C$;

13) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$; 14) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2}+C$; 15) $-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right|+C$;

16) $-\ln\left|\sqrt{5}\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right|+C$; 17) $\frac{1}{3}\sqrt{4-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{2x+5}{4(x+1)}+C$;

18) $-\frac{1}{17}\sqrt{\frac{17}{(x-1)^2}+\frac{8}{x-1}+1}+\frac{4}{17}\ln\left|\frac{\sqrt{17}}{x-1}+\frac{4}{\sqrt{17}}+\sqrt{\frac{17}{(x-1)^2}+\frac{8}{x-1}+1}\right|+C$;

19) $\frac{5x+27}{25}\sqrt{5x^2-8x+4}-\frac{37}{25}\ln\left|\sqrt{5}x-\frac{4}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-8x+4}\right|+C$; 20) $-\frac{24x+7}{128}-$

$-\frac{159}{128}\arcsin\frac{8x+1}{3}+C$; 21) $\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+4x+5}+15\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$;

22) $\left(2x^2-11x+46\right)\sqrt{x^2+2x-3}-76\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|+C$;23) $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+$

$+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; 24) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$;

25) $\frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; 26) $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-5}+2\arcsin\frac{x-3}{2}+C$;

27) $\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^8}+\frac{18}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C$; 28) $\frac{4}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{8}{7}\sqrt[6]{x^7}+C$; 29) $2\ln\frac{\left(\left(8+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}-2\right)^2}{\left(8+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}+2\left(8+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}+4}+$

$+6\left(8+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}-4\sqrt{3}arctg\frac{\left(8+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}+C$; 30) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(8+x^4\right)^{\frac{1}{3}}-2}{\left(8+x^4\right)^{\frac{2}{3}}+2\left(8+x^4\right)^{\frac{1}{3}}+4}\right|$ +

$+\frac{3}{4}\left(8+x^4\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{3}arctg\frac{\left(8+x^4\right)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{3}}+C$; 31) $\left.\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\right)\right|_{t=\sqrt[3]{1+x^2}}$;

32) $\left.\left(8t+2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-4arctgt+C\right)\right|_{t=\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}}$; 33) $\left.\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(t+2)^2}{t^2-t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C\right)\right|_{t=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}}$;

34) $\left.\left(\ln\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}-\frac{1}{2}arctgt+C\right)\right|_{t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}}$;35) $-\frac{4}{3}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{2}}+C$;36) $\frac{1}{8}\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{8}{3}}-\frac{1}{5}\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{5}{3}}$

+C.

Тема 6.Інтеграл Рімана як границя інтегральної суми

Розглянемо обмежену функцію на замкненому проміжку $[a;b]$. Розіб’ємо проміжок на частини точками $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Цю множину точок будемо називати розбиттям R проміжка $[a;b]$. На кожному проміжку $[x_i;x_{i+1}]$ виберемо довільну точку ξ_i та розглянемо суму

$$S_R=\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i, \quad \text{де } \Delta x_i=x_{i+1}-x_i \ .$$

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{d\to 0} S_R$, де $d=\max\limits_{i}\Delta x_i$, яка не залежить від розбиття та вибору точок ξ_i , то вона називається *інтегралом Рімана* (*визначеним інтегралом*) і позначається

$$\int_a^b f\left(x\right)dx .$$

Теорема: Якщо існує інтеграл $\int_a^b f\left(x\right)dx$, то функція $f\left(x\right)$ обмежена на $\left[a;b\right]$.

Якщо інтеграл Рімана існує, то кажуть ,що функція $f\left(x\right)$ інтегрована (за Ріманом) на $\left[a;b\right]$. Ця теорема, зокрема дає необхідну умову інтегрованості, але вона не є достатньою. Розглянемо два класи інтегрованих на $\left[a;b\right]$ функції:

1)неперервні на $\left[a;b\right]$ функції;

2)обмежені та монотонні на $\left[a;b\right]$ функції.

Звичайно, цими двома множинами не вичерпуються усі класи інтегрованих функцій. Наприклад, інтегрованими є обмежені та кусково-монотонні функції, або обмежені та неперервні за виключенням скінченної кількості точок тощо.

Позначимо через

$$m_i=\inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x); \quad M_i=\sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x).$$

Тоді суми

$$\underline{S_R}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i; \quad \overline{S_R}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i.$$

називаються відповідно *нижньою* та *верхньою сумами Дарбу* для розбиття R.

Якщо R_1 та R_2 - два довільних розбиття, то $\underline{S_{R_1}} \le \overline{S_{R_2}}$ Тому існують числа

$\underline{I} = \sup\limits_R \underline{S_R}$ та $\overline{I} = \inf\limits_R \overline{S_R}$, які називаються *нижнім* та *верхнім інтегралами*.

Теорема: Функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{I} = \underline{I} = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Питання теоретичного характеру

4) Наведіть приклад монотонної на $[a;\mathrm{b}]$ функції, яка має нескінченну множину точок розриву. Чи інтегрована ця функція на $[a;\mathrm{b}]$?

5) Довести, що функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \ \textit{ірраціональне}, \\ 1, \textit{якщо } x \ \textit{раціональне}, \end{cases}$$

не є інтегрованою на будь-якому проміжку $[a;\mathrm{b}]$.

4) Довести, що функція Рімана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } x \ \textit{ірраціональне}, \\ \dfrac{1}{n}, \textit{якщо } x = \dfrac{m}{n}, \end{cases}$$

де m та n– взаємно прості цілі числа $(n \ge 1)$,інтегровна на будь-якому проміжку $[a;\mathrm{b}]$.

5) Нехай $f(x)$ обмежена на $[a;\mathrm{b}]$. Довести, що якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує скінченна кількість проміжків, які містять усі точки розриву функції $f(x)$ та мають суму довжин меншу за ε, то $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$.

Довести, що при цьому значення інтеграла не залежить від значень $f(x)$ у точках розриву.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i-1}^{n}\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

6)Довести, що якщо $f(x)$ та $\varphi(x)$ є неперервними на $[a,b]$ то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi)\varphi(\theta_i)\Delta x_i, \partial e x_i \le \xi_i, \theta_i \le x_{i+1}$$

7)Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, $f(x)>0$ на $[a;b]$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot f(b)} = \exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right\};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}} = \frac{b-a}{\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}}$$

8)Нехай $f(x)$ монотонна та обмежена на $[a;b]$. При якому $\delta>0$ з нерівності $d=\max\Delta x_i<\delta$ випливає нерівність $\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$?

10) Нехай функція $|f(\mathrm{x})|$ інтегровна на $[a;b]$. Чи буде інтегровною на $[a;b]$ функція $f(x)$?

11) Довести, що $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для $\forall R_1$ та R_2, у яких $\Delta x_1<\delta$ має місце нерівність

$$\left|S_{R_1}-S_{R_2}\right|<\varepsilon.$$

12) Довести, що будь-яка функція обмеженої варіації на $[a;b]$ є інтегровною на $[a;b]$.

13) Показати, що з того, що $f(x)$ інтегровна на будь-якому проміжку $[\alpha;\beta]$, де $a<\alpha<\beta<b$ не випливає, що вона інтегровна на $[a;b]$.

14) Довести, що якщо $f(x)$ інтегровна на будь-якому проміжку $[\alpha;\beta]$, де $a<\alpha<\beta<b$, і якщо вона обмежена на $[a;b]$, то вона інтегровна на $[a;b]$.

15) Нехай $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ інтегровна на $[a;b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\varphi(x)$ на $[a;b]$, $\exists K>0$ отже, що $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[a;b]$

$|f_n(x)|\le K$. Чи буде функція $\varphi(x)$ інтегровною на $[a;b]$?

16) Довести, що границя рівномірно збіжної послідовності інтегровних на $[a;b]$ функцій є функцією, інтегровною на $[a;b]$.

17) Нехай $f(x)$ обмежена на $[a;b]$. Довести, що $\underline{S}_R = \inf_{\xi_i} S_R$; $\overline{S}_R = \sup_{\xi_i} S_R$.

18) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$. Довести, що $\lim_{d\to 0} \underline{S}_R = \lim_{d\to 0} \overline{S}_R = \int_a^b f(x)dx$.

19) Довести, що $\underline{I} = \lim_{d\to 0} \underline{S}_R$, $\overline{I} = \lim_{d\to 0} \overline{S}_R$.

20) Побудувати таку функцію $f(x)$, яка не є інтегровною на $[a;b]$, але $f^2(x)$ є інтегровною на $[a;b]$.

21) Побудувати функцію, яка є неперервною в точці, але не є інтегровною на будь-якому проміжку, що містить цю точку.

22) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$. Довести, що існує послідовність неперервних на $[a;b]$ функцій $\varphi_n(x)$ така, що $\forall c \in [a;b]$ має місце рівність $\lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

23) Довести, що функція, яка має розрив у кожній точці $[a;b]$, не є інтегровною на $[a;b]$.

Приклади. 1.Обчисліть $\int_1^5 e^x dx$ як границю інтегральної суми.

Розв'язання: Розіб'ємо проміжок $[1;5]$ на n рівних частин, тобто $\forall i = \overline{1,n}$ $\Delta x_i \equiv h \equiv \frac{4}{n}$. Нехай на кожному проміжку $[x_i; x_{i+1}]$, $\xi_i = x_{i+1}$. Тоді інтегральна сума матиме вигляд $S_n = \sum_{i=1}^{n} he^{1+ih} = he\sum_{i=1}^{n} e^{ih}$.

За формулою суми членів геометричної прогресії $S_n^* = \frac{a_n\left(g^n - 1\right)}{g-1}$ маємо

$S_n = he \cdot \frac{e^h\left(e^{nh}-1\right)}{e^h - 1} = \frac{he^h\left(e^{1+nh}-e\right)}{e^h-1}$. Але $1+nh=5$, отже $S_n = h \cdot e^h \cdot \frac{e^5 - e}{e^h - 1}$.

Таким чином

$$\int_1^5 e^h dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{h\to 0} \frac{he^h\left(e^5 - e\right)}{e^h - 1} = e^0\left(e^5 - e\right)\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1}$$

Відповідь: $\int_1^5 e^x de = e^5 - e$

2) Обчисліть $\int_1^{10} x^5 dx$ як границю інтегральної суми.

Розв'язання: Розіб'ємо проміжок $\left[0;1\right]$таким чином, щоб абсцис точок x_i утворювали геометричну прогресію. При цьому на кожному проміжку $\left[x_i; x_{i+1}\right]$

нехай $\xi_i \equiv x_i$. Якщо знаменник прогресії позначити через $q(q>1)$, то $1 = q^0, 10 = q^n, x_i = \xi_i = q_i, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = q^i(q-1).$ Таким чином

$$\int_1^{10} x^5 dx = \lim_{\substack{q\to 1\\ (n\to\infty)}} \left(q-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}(q^i)^5 \cdot q^i = \lim_{q\to 0}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} q^{6i}$$

За формулою суми членів геометричної прогресії маємо

$$\int_1^{10} x^5 dx = \lim_{q\to 1}\left(q-1\right)\cdot\frac{q^{6n}-1}{q^6-1} = \left(10^6-1\right)\lim_{q\to 0}\frac{q-1}{q^6-1} = \left(10^6-1\right)\lim_{q\to 1}\frac{1}{6q^5} = \frac{1}{6}\left(10^6-1\right).$$

3) Знайдіть границю $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$, перетворивши суму в інтегральну суму Рімана для деякої функції та скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца.

Розв'язання: Представимо суму у вигляді

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2} = \left(\frac{n}{n^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{n}{n^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{n} = S_n$$

Ця сума є інтегральною сумою для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на проміжку $\left[0;1\right]$. Дійсно, якщо $x_i = \frac{i}{n}$, $\xi_i \equiv x_i$, то $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ і маємо $S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.

Оскільки $f(x)$ є інтегровною на $[0;1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x)\Big|_0^1 = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

6) Нехай $f(x)$ інтегрована на $[a;\mathrm{b}]$. Довести, що функція

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

неперервна на $[a;\mathrm{b}]$. Чи існує похідна $F'(x)$ в точках розриву функції $f(x)$?

7) Симетричною похідною функції $\varphi(x)$ в точці x_0 називається границя

$$D\ \phi(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0-h)}{2h}\ .$$

Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;\mathrm{b}]$, $x_0 \in [a;b]$ є її точкою розриву першого роду, то функція

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

не є диференційовною в точці x_0 , але її симетрична похідна існує, причому

$$D\ F(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) + f(x_0-0)\big)\ .$$

8) Знайти додатню диференційовну на $[0;+\infty]$ функцію $f(x)$, якщо відомо, що при заміні

$\xi = \int\limits_0^x f(t)dt$ функція $f(x)$ перетворюється в функцію $e^{-\xi}$.

9) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;\mathrm{b}]$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a;b]$.

Нехай $F(x)$ неперервно диференційовна на $[a;\mathrm{b}]$. Чи вірно, що $f(x)$ неперервна на $[a;\mathrm{b}]$?

10) Функція $F(x)$ називається узагальною первісною функції $f(x)$ на $[a;\mathrm{b}]$, якщо $F(x)$ неперервна на $[a;\mathrm{b}]$ та $F'(x) = f(x)$ у точка неперервності функції

$f(x)$. Довести, що кусково-неперервна на $[a;\mathrm{b}]$ функція має узагальнену первісну на $[a;\mathrm{b}]$.

11) Чи існують функції, інтегровані на $[a;\mathrm{b}]$, які не мають первісної на $[a;\mathrm{b}]$? Чи існують функції, які мають первісну на $[a;\mathrm{b}]$, але не є інтегрованими на $[a;\mathrm{b}]$,?

12) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;\mathrm{b}]$, $a \le c < d \le b$. Записати значення інтеграла $\int\limits_c^d f(t)dt$ через значення функції $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

13) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;\mathrm{b}]$. Доведіть, що для функції $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ відношення $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ обмежене в будь-якій точці $[a;\mathrm{b}]$.

14) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;\mathrm{b}]$, $|f(x)| \le M$ для будь-якого $x \in [a;b]$. Доведіть, що $|F(x_1)-F(x_2)| \le M|x_1-x_2|$, де x_1, x_2-довільні точки проміжка $[a;\mathrm{b}]$, $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

15) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;\mathrm{b}]$ та має в точці $x_0 \in [a;b]$ усувний розрив. Довести, що функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ має в точці x_0 похідну. Чому вона дорівнює?

16) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;\mathrm{b}]$ за виключенням точки x_0, в якій вона має розрив першого роду. Довести, що функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ має в точці x_0 односторонні похідні.

17) Нехай $f(x)$ неперервна та $f(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$. Доведіть, що $f(x)=0$.

18) Доведіть, що при непарному n функції $F(x)=\int\limits_0^x \sin^n x dx$, $G(x)=\int\limits_0^x \cos^n x dx$

є періодичними з періодом 2π, а при парному n кожна з цих функцій є сума лінійної функції та періодичної функції.

19) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Знайти $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx$.

20) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Знайти $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$.

Розв'язування. Чисельник та знаменник дробу є нескінченно-малими функціями, які є диференційованими. Отже, можна застосувати теорему Лопіталя, враховуючи, що

$\left(\int_0^x \cos t^2 dt\right)' = \cos x^2$, одержимо $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$.

Відповідь: 1.

Приклад 2. Знайти первісну функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad |x| < 1, \\ 0, & \textit{якщо} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Розв'язування. Однією з первісних буде функція(в якості нижньої межі інтегрування можна взяти будь-яке число):

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt.$$

Відповідь: $F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le -1 \\ x+1, & \textit{якщо} \quad -1 < x \le 1 \\ 2, & \textit{якщо} \quad x > 1 \end{cases}$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

Розв'язування . Чисельник та знаменник є нескінченно-великими диференційовними функціями. Отже, має місце теорема Лопіталя. Застосуємо її двічі:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{2t^2}dt\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{d}{dx}e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$$

Відповідь: 0.

Приелад 4. Знайти похідну функції $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\ln tdt$.

Розв'язування. Скористаємось властивістю адитивності інтегралаю Тоді

$F(x)=\int_{x^2}^{c}\ln tdt+\int_{c}^{x^3}\ln tdt=\int_{c}^{x^3}\ln tdt-\int_{c}^{x^2}\ln tdt$, де c-довільна константа, $c>0$.

Знайдемо похідну, користуючись теоремою Барроу та правилом диференціювання складеної функції:

$$F(x)'=\left(\int_c^{x^3}\ln tdt\right)'\left(x^3\right)'-\left(\int_c^{x^2}\ln tdt\right)'_{x^2}\left(x^2\right)'=\ln x^3 3x^2-\ln x^2 2x=\left(9x^2-4x\right)\ln x.$$

Відповідь: $\left(9x^2-4x\right)\ln x.$

Приклад 5. Знайти похідну функції $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2dt\ \ (x>0)$.

Розв'язування :

$$F(x)'=\left(\int_c^{\sqrt{x}}\cos t^2dt-\int_c^{\frac{1}{x}}\cos t^2dt\right)'_x=\left(\int_c^{\sqrt{x}}\cos t^2dt\right)'_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\int_c^{\frac{1}{x}}\cos t^2dt\right)'_{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos x\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x.$

Приклад 6. Знайти точки екстремума функції $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt, x>0.$

Розв'язування: Знайдемо похідну $F'(x)=\left(\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt\right)'=\frac{\sin x}{x}.$

Точки $x=\pi n,\ n\in \mathrm{N},$ є кратними. Знайдемо другу похідну у цих точках:

$$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\qquad F''(\pi n)=\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n)=(-1)^n\frac{1}{\pi n}.$$

Як бачимо, при парному n $F''(\pi n)>0$, отже, ці критичні точки є точками мінімуму. При непарному n $F''(\pi n)<0$ і критичні точки є точками максимуму.

Відповідь: Точки $x=2\pi k, k\in N$, є точками мінімуму, точки $x=\pi(2k-1), k\in N$, є точками максимуму.

Приклад 7. Знайти похідну від функції, заданої параметрично:

$$x=\int\limits_1^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln zdz,\quad y=\int\limits_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln zdz.$$

Розв'язування . Відомо, що $\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}.$ За теоремою Барроу:

$$x_t'=\left(\int\limits_1^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln zdz\right)'_{t^3}\left(t^3\right)'=t\ln t^3 3t^2=9t^3\ln t,$$

$$y_t'=\left(\int\limits_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln zdz\right)'_{\sqrt{t}}\left(\sqrt{t}\right)'=-t\ln\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t.$$

Таким чином $\frac{dy}{dx}=\frac{9t^3\ln t}{-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t}=-36t^2\sqrt{t}.$

Відповідь: $-36t^2\sqrt{t}, t>0.$

Приклад 8. Знайти похідну функції, що задано неявно $\int\limits_0^y e^{-t^2}dt+\int\limits_0^{x^2}\sin^2 tdt=0$

Розв'язування . Продиференціюємо ліву та праву частини рівності по x, вважаючи, що $y=y(x)$ функцією від x:

$$\left(\int_0^y e^{-t^2}dt\right)'_y \frac{dy}{dx}+\left(\int_0^{x^2}\sin^2 tdt\right)'_{x^2}\left(x^2\right)'=0,\qquad e^{-y^2}\frac{dy}{dx}+\sin^2 x^2 2x=0.$$

Розв'яжем рівняння відносно $\frac{dy}{dx}$: $\quad \frac{dy}{dx}=-2xe^{y^2}\sin^2 x^2.$

Відповідь: $-2xe^{y^2}\sin^2 x^2$.

Приклад 9. Знайти точки перегину графіка функції $\quad f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt.$

Розв'язування. Продиференціюємо функцію двічі:

$$f(x)'=(x-1)(x-2)^2,\qquad f(x)''=(x-2)^2+2(x-1)(x-2)=(x-2)(3x-4).$$

Функція $f(x)''$ дорівнює нулю та міняє свій знак в точках $x_1=2$, $x_2=\frac{4}{3}$. Це і є точками перегину.

Відповідь: $x_1=2$, $x_2=\frac{4}{3}$.

Приклад 10. Знайти алгебраїчний многочлен найменшої степені, грацік якого має три точки перегину: $(-1;1)$, $(1;1)$ та точку з абсцисою $x=0$, в якій графік нахилений до осі Ox під кутом $60°$.

Розв'язування. Оскільки многочлен є двічі диференційовною функцією, то абсциси точок перегину можуть бути тільки серед коренів другої похідної, яка теж є многочленом. Многочлен найменшої степені, який має корені $-1,\ 0,\ 1$ має вигляд $P'(x)=ax\left(x^2-1\right)$. Оскільки за умовою $P'(0)=tg60=\sqrt{3}$,то

$P'(x)=\int_0^x P''(x)dx+\sqrt{3}=a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+\sqrt{3}$. Оскільки $P(1)=1$, то

$P(x)=\int_1^x P'(x)+1=a\left(\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{7}{60}\right)+\sqrt{3(x-1)}+1$. Оскільки $P(-1)=-1$, то

$$a=\frac{60\left(\sqrt{3}-1\right)}{7}$$

Відповідь: $P(x)=\frac{\sqrt{3}-1}{7}\left(3x^5-10x^3\right)+x\sqrt{3}$.

Приклад 11. Довести, що $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{1}{2x}e^{x^2}$, при $x \to +\infty$.

Розв'язування. Застосуємо двічі теорему Лопіталя до границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{\frac{d}{dt}e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} + 1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{d}{dx}\left(xe^{x^2}\right)} + 1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} = 1$$

Що і треба було довести.

Завдання для аудиторної та домашньої роботи

Обчислити похідну функції

1) $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2dt}$;

2) $\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

3) $\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\left(\pi t^2\right)dt$;

4) $\int_1^x \ln t dt$, $x > 0$;

5) $\int_{\frac{2}{x}}^{x^2}\frac{dt}{t}$, $x > 0$;

6) $x = \int_2^t \frac{\ln z}{z}dz$, $y = \int_5^{\ln t} e^z dz$;

7) $x = \int_{c^2}^{\sin t}\arcsin z dz$, $y = \int_n^{\sqrt{t}}\frac{\sin z^2}{z}dz$,

Користуючись формулою Лейбніца

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t;x)dt = f\left(\psi(x);x\right)\psi'(x) - f\left(\varphi(x);x\right)\varphi'(x) + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_{x'}(t;x)\,dt$$, обчисліть похідні:

8) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$;

9) $\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$;

10) $\frac{d}{da}\int\limits_a^{x^2} \sin x^2 dx$;

11) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt$;

12) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+x^2}\,dx$;

13) $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

14) $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

15) $\frac{d}{dx}\int\limits_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

16) $\frac{d}{dt}\int\limits_{x^2}^{t^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

17) $\frac{d}{dt}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

18) $\frac{d}{dx}\int\limits_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^4}}$;

Знайдіть границю:

19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x arctg^2 t\,dt}{\sqrt{1+x^2}}$;

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

21) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt}{\int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin t}\,dt}$;

22) Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{2t+1}{t^2-2t+2}dt$ на проміжку $[-1;1]$.

Знайдіть точки екстремуму функцій:

23) $\int\limits_1^x e^{-t^2/2}\left(1-t^2\right)dt$;

24) $\int\limits_0^{x^2}\dfrac{t^2-5t+4}{2+e^t}dt$;

Знайдіть невизначені інтеграли від функцій:

25) $\operatorname{sgn}x$;

26)* $\operatorname{sgn}(\sin x)$;

27)* $[x]$ (Ціла частина дійсного числа x);

28)* $x[x]$;

29)* $(-1)^{[x]}$;

30)* Доведіть тотожність $\int\limits_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int\limits_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=\dfrac{\pi}{4}$;

31)* Знайдіть $\lim\limits_{x\to+0}x^{\alpha}\int\limits_x^1\dfrac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$, якщо $\alpha>0,\ f(x)$ неперервна на $[0;1]$.

Відповіді:

1. $2x\sqrt{1+x^4}$; 2) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; 3) $(\sin x-\cos x)\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$; 4) $\ln x$; 5) $\dfrac{3}{x}$;

6) $y'_x=\dfrac{t}{\ln t}$; 7) $y'_x=\dfrac{tgt}{t^2}$; 8) 0; 9) $\sin b^2$; 10) $-\sin a^2$; 11) $2x\sqrt{1+x^6}$; 12) $2x\sqrt{1+x^4}$;

13) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$; 14) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$; 15) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}$; 16) $\dfrac{3t^2}{\sqrt{1+t^{12}}}$; 17) 0;

18) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+x^{12}}}-x\int\limits_{t^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{\left(x^2+t^4\right)^3}}$; 19) $\dfrac{\pi^2}{4}$; 20) $\dfrac{1}{3}$; 21) 1;

22) $\max\limits_{-1\le x\le1}f(x)=f(1),\ \min\limits_{-1\le x\le1}f(x)=f(-\dfrac{1}{2})$; 23) $x_{\max}=1, x_{\min}=-1$;

24) $x_{\min}=-2, x'_{\min}=0, x''_{\min}=2, x_{\max}=1, x'_{\max}=-1$; 25) $|x|+e$;

26) $\arccos(\cos x)+C$; 27) $x[x]-\dfrac{[x]([x]+1)}{2}+C$;

28) $\frac{1}{2}x^2[x]-\frac{1}{12}([x]+1)(2[x]+1)[x]+C;$

29) $\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)+C;$ 31) $\frac{f(0)}{\alpha}.$

Тема 7. Обчислення визначених інтегралів.

Теорема: (Ньютона-Лейбніца). Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ та $F(x)$ будь-яка її первісна на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)|_a^b \ .$$

Теорема: (про заміну змінної). Нехай функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна на $[c;d], \varphi(c)=a, \varphi(d)=b, A\le\varphi(t)\le B.$ Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, $[a;b]\subseteq[A;B]$. Тоді виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ .$$

Теорема: (інтегрування частинами). Якщо функції $u=u(x), v=(v)$ неперервно диференційовні на $[a;b]$, то викогується формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Питання теоретичного характеру.

1) Довести, що якщо $f(x)$ парна неперервна на $[-a;a]$ функція, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx\,.$$

2) Довести, що якщо $f(x)$ непарна неперервна на $[-a;a]$ функція, то $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

.

3) Довести, що якщо $f(x)$ неперервна періодична з періодом Т функція, то $\forall a\in\mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx\,.$$

4) Довести, що $\forall a\in\mathbb{R}$, $n,k\in\mathbb{N}$ $\int_a^{a+2\pi k}\sin^{2n+1}xdx=\int_a^{a+2\pi k}\cos^{2n+1}xdx=0\,.$

5) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0,1]$. Довести, що $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx,$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \ .$$

6) Нехай $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$. Довести, що $f(x)$ буде непарною тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in \mathbb{R}$: $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0.$

7) Нехай $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$. Довести, що $f(x)$ буде періодичною з періодом T тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in \mathbb{R}$: $\int_{x}^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$

8) Нехай $f(x)$ неперервна на $[-1;1]$. Довести нерівність

$$\int_0^1 f(x)f(-x)dx \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx.$$

9) Нехай $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$, причому $\exists\, p, q \in \mathbb{R}$, $p+q \ne 0$, такі, що $\forall x \in \mathbb{R}$: $pf(x)+qf(-x)=1.$ Знайти $\int_{-a}^{a} f(x)dx,$ де $a>0.$

10) Нехай $f(x)$ неперервна на $[-a;a]$ і парна. Довести рівність

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx.$$

11) Нехай $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[a;b]$. Довести рівність

$$\int_a^b xf''dx = \left(bf'(b) - f(b)\right) - \left(af'(a) - f(a)\right).$$

12) Нехай функція $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$. Довести, що $f(x)$ буде парною тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in \mathbb{R}$: $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt.$

13) Довести, що первісна неперервної на $\mathbb{R}$ періодичної з періодом $T>0$ функції є періодичною з періодом T функцією тоді й тільки тоді, коли

$$\int_0^T f(x)dx = 0.$$

14) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$. Доведіть, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\left(a+(b-a)x\right)dx.$$

15) Нехай $f(x)$ неперервна на $\left[0;a^2\right]$. Довести, що $\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$

16) Нехай $f(x)$ визначена на $[a;b]$. Кажуть, що неперервна на $[a;b]$ функція $F(x)$ є її первісною в широкому сенсі, якщо $\exists F'(x) = f(x)$ у всіх точках проміжку $[a;b]$ окрім скінченної кількості точок. Довести, що якщо у функції

$f(x)$ існує первісна в широкому сенсі, то має місце формула Ньютона-Лейбніца.

17) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$. Довести, що $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

18) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ та в точках цього проміжку, які симетричні одна одній відносно точки $x = \frac{1}{2}(a+b)$, вона приймає однакові значення. Довести, що $\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} f(x)\,dx$.

19) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0;+\infty]$. Довести, що

$$\int_0^a x^{r+1} f\left(x^r\right) dx = \frac{1}{r}\int_0^{a^r} x^{2/r} f(x)\,dx, \text{ де } a>0, r\ge 1.$$

20) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ та для всіх $t\in[0;b-a]$ виконується рівність $f(a+t)=f(b-t)$. Довести, що $\int_a^b f(x)\,x\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$

21) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;b]$. Показати, що в інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ завжди можна зробити лінійну заміну $x = at+b$, де a,b - постійні, щоб вийшов інтеграл вигляду $\int_0^1 g(t)\,dt.$

22) Нехай $f(x)$ неперервна на $[-a;a]$. Довести, що $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \left(f(x)+f(-x)\right)dx$.

23) Нехай $f(x)$ неперервна на $\left[0;a^2\right]$. Довести, що

$$\int_{-a}^a \cos x f\left(x^2\right) dx = 2\int_0^a \cos x f\left(x^2\right) dx, \int_{-a}^a \sin x f\left(x^2\right) dx = 0.$$

24) Нехай $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на $\mathbb{R}$. Довести, що

$$\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = \int_0^t g(x)\,f(t-x)\,dx.$$

25) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0;1]$. Довести, що $\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$.

26) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$. Нехай функція $F(x)$ має на $[a;b]$ скінченну кількість точок розриву першого роду $x_1, x_2, ..., x_n$. Нехай у всіх точках $[a;b]$ крім скінченної кількості внутрішніх його точок $\exists F'(x) = f(x)$. Довести, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{k=1}^n \left(F(x_k+0) - F(x_k-0)\right).$$

Приклади.

1) Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

Розв'язування. Зробимо заміну $t=\sqrt{e^x-1}$. Тоді $e^x=t^2+1$; $x=\ln\left(t^2+1\right)$; $dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$.

Знайдемо нові межі інтегрування: $t(0)=\sqrt{e^0-1}=0; t(\ln 5)=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2$.

Таким чином $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int\limits_0^2 \frac{\left(t^2+1\right)t\,2t\,dt}{\left(t^2+4\right)\left(t^2+1\right)}=\int\limits_0^2 \frac{2t^2dt}{t^2+4}=2\int\limits_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=$

$=2\left(\int\limits_0^2 dt-4\int\limits_0^2 \frac{dt}{t^2+4}\right)=2\left(t-\frac{4}{2}arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2=2\left(2-2arctg1\right)=4-\pi$.

Відповідь: $4-\pi$.

2) Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx.$

Розв'язування. Застосуємо двічі формулу інтегрування частинами:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos x dx; & v=\sin x \end{matrix}\right|=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx=$$

$$=e^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin x dx; & v=-\cos x \end{matrix}\right|=e^{\pi}-2\left(-\cos xe^{2x}\Big|_0^{\pi/2}+2\int\limits_0^{\pi/2}\cos xe^{2x}dx\right);$$

Таким чином, одержимо рівність $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}-2-4\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx,$ яка є рівнянням відносно невідомого інтеграла. Розв'язавши його, одержимо

$5\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}-2.$

Відповідь: $\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-2\right).$

3) Довести, що при $k\in\square$ $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}dx=0.$

Розв'язування. Зробимо заміну $x=\pi-t; dx=-dt.$ При цьому межі інтегрування зміняться, а саме $t(0)=\pi, t(\pi)=0.$ Отже,

$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}dx=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\sin\left(2k\pi-2kt\right)}{\sin\left(\pi-t\right)}dt=-\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2kt}{\sin t}dt.$

Оскільки значення нашого інтеграла I не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування, маємо рівність $I=-I,$ або $I=0$, що й треба було довести.

4) Обчислити інтеграл $\int\limits_{-21}^{40}(-1)^{[x]}dx.$

Розв'язування. Оскільки $(-1)^{[x]} = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ за винятком точок $x = n \in \mathbb{Z}$, якщо на проміжку $[-21; 40]$ скінченна кількість, то $\int\limits_{-21}^{40} (-1)^{[x]} dx =$

$$\int\limits_{-21}^{40} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) dx = \int\limits_{-21}^{40} \frac{\sin \pi x}{|\sin \pi x|} dx = \int\limits_{-21}^{40} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{1-\cos^2 \pi x}} dx = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-21}^{40} \frac{d(\cos \pi x)}{\sqrt{1-\cos^2 \pi x}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) \Big|_{-21}^{40} = \frac{1}{\pi}\left(\arccos 1 - \arccos(-1)\right) = -1,$$

Оскільки первісною нашої розривної функції є неперервна функція $\arccos(\cos \pi x)$ (див. «питання теоретичного характеру» №16).

Відповідь: -1.

Завдання для аудиторної та домашньої роботи

1) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1} dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$;

5) $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$; 6) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

7) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}$; 8) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

9) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$; 10) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

11) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 12) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4 - x^2} dx$;

13) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 14) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^3 x dx$;

15) $\int\limits_{0}^{1/3} ch^2 3x dx$; 16) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$;

17) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$; 18) $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x} dx$;

19) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 20) $\int\limits_{1}^{3} \ln x dx$;

21) $\int\limits_{1}^{2} x \ln x dx$; 22) $\int\limits_{0}^{1/2} \arcsin x dx$;

23) $\int\limits_{0}^{\pi} x^3 \sin x dx$; 24) $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$;

25) $\int_{0}^{e} \sin \ln x dx;$ 26) $\int_{0}^{2} |1-x|\, dx;$

27) $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}, 0 \le \varepsilon < 1;$

28) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}, |a|<1, |\mathrm{b}|<1, \mathrm{ab}>0;$

29) $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)};$

30) $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

31) $\int_{-1}^{3} \frac{f\,'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}}{1+f^2(x)}$, *якщо* $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)};$

32) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{a^2 six^2 x + b^2 \cos^2 x},\ a>0,\ b>0;$

33) $\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx;$

34) $\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x};$

35) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}, a>0, b>0;$

36) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x}, ac-b^2>0;$

37)* $\int_{0}^{a} (a^2 - x^2) dx,\ n \in N;$

38)* $\int_{0}^{a} (\mathrm{a}^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx,\ n \in N;$

39)* $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx,\ n \in N;$

40)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\cos(m+2)xdx,\ \ m\in N;$

41)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m n\cos(m+2)xdx,\ \ m\in N;$

42)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos(m+2)xdx,\ \ m\in N;$

43)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\sin(m+2)xdx,\ m\in N;$

44)* $\int\limits_0^{3} \operatorname{sgn}(x-x^3)dx;$

45)* $\int\limits_0^{2} [e^x]dx;$

46)* $\int\limits_0^{6} [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx;$

47)* $\int\limits_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)dx;$

48)* $\int\limits_1^{n+1} \ln[x]dx;$

49)* $\int\limits_0^{1} \operatorname{sgn}(\mathrm{sinlnx})\,\mathrm{dx};$

Відповіді:

1) $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$; 2) $2-\ln 5$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 6) $4-2\ln 3$; 7) $7+2\ln 2$; 8) $2-\ln 2$;

9) $\frac{(e-e^{\frac{1}{4}})}{2}$; 10) $\sin 1$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 13) $\mathrm{arctg}e-\frac{\pi}{4}$; 14) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; 15) $\frac{1}{12}sh2+\frac{1}{6}$;

16) $\ln 2$; 17) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) $1-\frac{2}{e}$; 19) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 20) $3\ln 3-2$; 21) $2\ln 2-\frac{3}{4}$;

22) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; 23) $\pi^3-6\pi$; 24) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$; 25) $\frac{e(\sin 1-\cos 1)}{2}$; 26) 1; 27) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$;

28) $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$; 29) $\pi(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}})$; 30) $2\pi\sqrt{2}$; 31) $\mathrm{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$; 32) $\frac{4\pi}{ab}$; 33) $200\sqrt{2}$;

34) $\frac{\pi^2}{4}$; 35) $\frac{\pi}{4}\frac{(a^2+b^2)}{a^3b^3}$; 36) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$; 37) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+1}$; 38) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}a^{2n}$; 39) $\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

40) 0; 41) $\frac{1}{m+1}$; 42) $-\frac{1}{m+1}\sin\frac{\pi m}{2}$; 43) $\frac{1}{m+1}\cos\frac{\pi m}{2}$; 44) -1; 45) $14-\ln(7!)$; 46) $\frac{30}{\pi}$;

47) $-\frac{\pi^2}{4}$; 48) $\ln(n!)$; 49) $-\mathrm{th}(\frac{\pi}{2})$.

Тема 8. Застосування визначеного інтеграла.

Обчислення площі плоскої фігури.

Множина точок площини, яка обмежена віссю Ox, прямими $x=a, x=b$, $a<b$, та графіком функції $y=f(x), f(x)\ge 0,$ називається криволінійною трапецією. Якщо $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Якщо криву, що обмежую криволінійну трапецію, задано параметрично $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha;\beta],$ де функція $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають неперервні похідні, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S=-\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$$

при умові, що коли значення параметра t змінюється від α до β, точки $(\varphi(t);\psi(t))$ рухається по кривій так, що криволінійна трапеція залишається при цьому зліва.

Якщо фігура обмежена прямими $x=a$, $x=b$, $a<b$, та двома графіками неперервних $y=f(x)$ та $y=g(x)$, $f(x)\le g(x)$ на $[a;b]$, то площа цієї фігури обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

Фігура, обмежена кривою, яку задано в полярній системі координат рівністю $\rho=\rho(\varphi)$ неперервна та невід’ємна на $[\alpha;\beta]$, то площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

Довжина дуги кривої

Якщо криву у просторі задано параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\eta(t), t\in[\alpha;\beta]$, де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$, неперервно диференційовні на $[a;b]$

то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l==\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t)^2+(\psi'(t))^2+(\eta'(t))^2}dt$$

Якщо плоску криву задано явним рівнянням $y=f(\mathrm{x})$, $x\in[a;b]$, і функція $f(x)$ неперервно диференційовна на $[a;b]$, то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(\mathrm{x}))^2}dx$$

Якщо криву задано в полярній системі координат рівнянням $\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервно диференційована на $[\alpha;\beta]$, то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi$$

Обчислення об'єму тіла

Нехай площа перетину тіла площиною $x=const$ дорівнює $S(x)$, де функція $S(x)$ неперервна на $[a;\mathrm{b}]$.

Тоді об'єм цього тіла обчислюється за формулою:

$$V=\int_{a}^{b}S(x)dx$$

Якщо тіло отримано шляхом обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox, прямими $x=a$, $x=b$, $a<b$, та графіком неперервної функції $y=f(x)$, $x\in[a;\mathrm{b}]$, то об'єм цього тіла обчислюється за формулою:

$$V_{Ox}=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)dx$$

Площа поверхні обертання

Якщо плоску криву задано параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, $\psi(t)\geq 0$ на $[\alpha;\beta]$, де функція $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$, то площа поверхні, одержаної шляхом обертання кривої навколо осі Ox, обчислюються за формулою

$$S_{Ox}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

Якщо криву задано явно рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, де $f(x)$ неперервно диференційовна на $[a;\mathrm{b}]$, то площа поверхні, одержаної шляхом обертання кривої навколо осі Ox, обчислюється за формулою:

$$S_{Ox}=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+(f'(\mathrm{x}))^2}\,dx,\quad \text{де } f(x)\geq 0 \text{ на } [\mathrm{a};\mathrm{b}].$$

Питання теоретичного характеру

1. Записати формулу обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю Oy, прямими $y=c$, $y=d$, $c<d$, та графіком неперервної функції $x=f(y),\ \ f(y)\geq 0$ на $[a;b]$.

2. Записати формулу обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю Оу, прямими $y=c$, $y=d$, $c<d$, та кривою, заданою параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, де функція $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають неперервні похідні, $\psi(t)\geq 0$. Домовимось, що коли значення параметра t змінюється від α до β, точка $(\varphi(t);\psi(t))$ рухається по кривій так, що криволінійна трапеція залишається при цьому зліва.

3. Записати формулу обчислення площі фігури, обмеженої прямими $y=c$, $y=d$, $c<d$, та двома графіками неперервних функція $x=f(y)$ та $x=g(y)$ $f(y)\leq g(y)$ на $[c;d]$.

4. Враховуючи домовленість з №2, записати формулу обчислення площі фігури, обмеженої прямими $y=c$, $y=d$, $c<d$, кривою, заданою параметрично $x=\varphi_1(t), y=\psi_1(t)$, $t\in[\alpha_1;\beta_1]$, та кривою, теж заданою параметрично $x=\varphi_2(t)$, $y=\psi_2(t)$, $t\in[\alpha_2;\beta_2]$, де функції $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ мають неперервні похідні $(\psi_1(t)\leq\psi_2(t))$.

5. Нехай фігура обмежена кусково-гладкою простою замкненою кривою, заданою параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$,

$\psi(\alpha)=\psi(\beta)$. Враховуючи домовленість з №2, довести, що площу цієї фігури можна обчислити за однією з трьох формул:

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt;$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\psi'(t)dt;$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi(\mathrm{t})\psi'(\mathrm{t})-\psi(\mathrm{t})\varphi'(\mathrm{t}))\,\mathrm{dt}$$

6. Нехай $y(x)=ax^2+bx+\mathrm{c}>0$ при $x_1\le x\le x_2$. Довести, що площа фігури, заданою нерівностями $0\le y\le y(x)$, $x_1\le x\le x_2$, дорівнює

$$S=\frac{1}{6}(x_2-x_1)(y(x_1)+y(x_2)+4y(x_0)),\qquad \text{де } x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2).$$

7. Нехай функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$ неперервні на $[a;\mathrm{b}]$, $g(a)=g(b)=0$, $g(x)>0$ на $[a;b]$. Довести, що площі фігур, обмежених відповідно кривими $y^2=g(x)$ та $(\mathrm{y}-\mathrm{f(x)})^2=g(x)$, співпадають.

8. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна та додатня при $x>0$. Нехай $S(\mathrm{c})$ - площа фігури, обмеженої осями координат, прямою $x=\mathrm{c}$ та графіком функції $y=f(x)$. Знайти функцію $f(x)$, якщо $\forall \mathrm{c}>0\ \ S(\mathrm{c})=\alpha \mathrm{c} f(\mathrm{c})$, де $0<\alpha\le 1$.

9)* Нехай $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, a>0, b>0.$ Використовуючи властивість площин, довести нерівність $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, причому рівність можлива тільки при $b=a^{p-1}$.

10) Записати формулу обчислення площі фігури, яка обмежена двома променями $\varphi=\alpha, \varphi=\beta, \alpha<\beta$, та двома кривими, що задані в полярній системі координат рівностями $p=p_1(\varphi)$ та $p=p_2(\varphi)$, де $0\le p_1(\varphi)\le \mathrm{p}_2(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$, функції $p_1(\varphi)$ та $p_2(\varphi)$ неперервні на $[a;\mathrm{b}]$.

11) Нехай криву ℓ задано в полярній системі координат рівностю $\varphi=\varphi(\rho)$, де функція $\varphi(\rho)$ є неперервно диференційованою на проміжку $[\rho_1;\rho_2]$.

Нехай при зміні ρ від значення ρ_1 до значення ρ_1 точка з координатами $(\rho;\varphi(\rho))$ рухається вздовж кривої ℓ так, що фігура

$$\phi=\{(\rho;\varphi\,|\,0\le\varphi\le\varphi(\rho);\rho_1\le\rho\le\rho_2\}$$

Залишається при цьому зліва. Довести, що площа фігури ϕ обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\rho_2}^{\rho_1}\rho^2\varphi'(\rho)d\rho$$

12) Нехай фігура обмежена кусково-гладкою простою замкненою кривою, заданою в полярній системі координат параметрично $\rho=\rho(\mathrm{t})$, $\varphi=\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$. Враховуючи домовленість з №2, довести, що площа цієї фігури обчислюється за формулою: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(t)\varphi'(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$

13) Записати формулу обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої параметрично.

14) Нехай просторову криву задано параметрично $x=\varphi(t),\mathrm{y}=\psi(t),z=\eta(t),\mathrm{t}\in[\alpha;\beta],$ де функції $\varphi(t),\psi(t),\eta(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha;\beta]$. Нехай $\ell=\ell(\mathrm{t})$ є довжина дуги кривої від точки $(\varphi(\alpha);\psi(\alpha);\eta(\alpha))$ до точки $(\varphi(\mathrm{t});\psi(\mathrm{t});\eta(\mathrm{t}))$, $t\in[\alpha;\beta]$.

Довести, що $(d\ell)^2=(d\varphi)^2+(d\psi)^2+(d\eta)^2$.

15) Якщо криву задано в полярній системі координат рівністю $\varphi=\varphi(\rho)$, $\rho\in[\rho_1;\rho_2]$, де функція $\varphi(\rho)$ має неперервну додатню похідну $\varphi'(\rho)$ на проміжку $[\rho_1;\rho_2]$, то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою

$\ell=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+(\rho\varphi'(\rho))^2}\,d\rho$. Довести це.

16) Нехай криву задано в полярній системі координат параметрично $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(\mathrm{t})$, $t\in[\alpha;\beta]$, де функції $\rho(t)$ та $\varphi(t)$ мають неперервні похідні на $[\alpha;\beta]$. Довести, що довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(t)+(\frac{\rho'(\mathrm{t})}{\varphi'(t)})^2}\,\varphi'(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}.$$

17) Довжина дуги графіка неперервно диференційованої функції $y=f(x)$ від точки $A(0;a)$ до точки $M(x;f(x))$ пропорційна кутовому коефіцієнту до точної

до графіка в точці M із заданим коефіцієнтом пропорційності k. Знайти довжину дуги кривої $x = f''(t)\cos(t) + f'(t)sin(t),\ \ y = f'(t)\cos(\mathrm{t}) - f''(\mathrm{t})\mathrm{si}\,n(t),$ від t_1 до t_2, $a < t_1 \le t_2 < b.$

19) Нехай функція $f(t)$ та $g(t)$ двічі неперервно диференційовні на $[a;b]$. Довести, що довжину дуг кривих $x = f(t) - \mathrm{g}'(\mathrm{t})$, $y = f'(\mathrm{t}) + \mathrm{g}(\mathrm{t})$, та $x = f'(t)\sin t - g'(\mathrm{t})\cos t,\ y = f'(\mathrm{t})\cos t + g'(\mathrm{t})\sin t,$ які відповідають відрізку $[t_1;t_2] \subset [\mathrm{a;b}],$ співпадають.

20) Нехай тіло – це множина точок, де $0 \le z \le 1$, причому $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, коли □ - раціональне, та $-1 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 0$, якщо □ - ірраціональне. Довести, шо об'єм тіла не існує, хоча існує інтеграл $\int\limits_0^1 S(z)dz = 1$.

21) Записати формулу обчислення об'єму тіла, отриманого шляхом обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої Oy, прямими $y = c$, $y = d$, $c < d$, та графіком неперервної функції $x = f(\mathrm{y})$, $y \in [c;d]$.

22) Записати формулу обчислення об'єму тіла, отриманого шляхом обертання навколо осі Ox фігури $\varPhi = \{(x;y) \,|\, \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b},\ 0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на [a;b].

23) Записати формулу обчислення об'єму тіла, отриманого шляхом обертання навколо осі Oy фігури $\varPhi = \{(\mathrm{x;y}) \,|\, c \le y \le d,\ 0 \le \mathrm{f}_1(y) \le x \le f_2(y)\}$, якщо $f_1(y)$ та $f_2(y)$ неперервні на $[c;d]$.

24) Нехай криволінійна трапеція обмежена віссю Ox, прямими $x = a$, $x = b$, $a < b$, та кривою, заданою параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$. Нехай при зміні параметра t від значення α до значення β точка $(\alpha(\mathrm{t});\psi(\mathrm{t}))$ рухається вздовж кривої так, що криволінійна трапеція залишається при цьому зліва. Довести, шо об'єм тіла, одержаного шляхом обертання навколо осі Ox цієї криволінійної трапеції, обчислюється за формулою: $V_{ox} = -\pi\int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)dt,$ де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$.

25) Нехай криволінійна трапеція обмежена віссю Оy, прямими $\mathrm{y} = \mathrm{c}, \mathrm{y} = \mathrm{d},$ та $\mathrm{c} < d,$ кривою, заданою параметрично $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{t}), \mathrm{y} = \psi(\mathrm{t}), \mathrm{t} \in [\alpha;\beta],$ де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$. Довести, що об'єм тіла,

одержаного шляхом обертання навколо осі Оу цієї криволінійної трапеції ,

обчислюється за формулою: $V_{oy}=\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(t)\psi'(t)dt.$

26) Нехай фігура Ф обмежена кусково-гладкою простою замкненою кривою, яка не перетинає вісь Ох. Нехай криву задано параметрично $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t}), \mathrm{y}=\psi(\mathrm{t}), \mathrm{t}\in[\alpha;\beta],$ причому $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta), \psi(\alpha)=\psi(\beta)$. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання навколо осі Ох цієї фігури,

обчислюється за формулою: $V_{ox}=-\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\varphi'(t)dt.$

27) Нехай Ф – фігура, розглянути в попередньому завданні № 26. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання навколо осі Оу фігури Ф,

обчислюється за формулою: $V_{oy}=\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(t)\psi'(t)dt.$

28) Нехай криволінійна трапеція $\Phi=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,0\le a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$,

де $f(x)$ – неперервна на $[\alpha;\beta]$, обертається навколо осі Оу. Довести, що

об'єм одержаного тіла обчислюється за формулою: $\mathrm{V}_{oy}=2\pi\int\limits_{a}^{b}xf(x)dx.$

29) Нехай криволінійна трапеція $\Phi=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,a\le x\le b\le 0, 0\le y\le f(x)\}$,

де $f(x)$ – неперервна на $[\alpha;\beta]$, обертається навколо осі Оу. Довести, що

об'єм тіла обертання обчислюється за формулою: $\mathrm{V}_{oy}=2\pi\int\limits_{a}^{b}xf(x)dx.$

30) Нехай функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на $[a;b]$. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання навколо осі Оу будь-якої з двох фігур

$$\Phi_1=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,0\le a\le x\le b, f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$

або $$\Phi_2=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,a\le x\le b\le 0,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$

Обчислюється за формулою: $V_{oy}=2\pi\int\limits_a^b |x|\left(f_2(\mathrm{x})-f_1(\mathrm{x})\right)dx$.

31) Нехай криволінійна трапеція обмежена віссю Ox, прямими $x=a, x=b,$ $a<b,$ та кривою, заданою параметрично $x=\varphi(\mathrm{t}), \mathrm{y}=\psi(\mathrm{t}), \mathrm{t}\in[\alpha;\beta]$. Враховуючи домовленість з №2,довести,що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Oy, обчислюється за формулою: $V_{oy}=-2\pi\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)dt.$

32) Нехай пряма $y=l$ не перетинає фігури $\Phi=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$, де функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на $[a;b]$. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання фігури Ф навколо прямої $y=l$, обчислюється за формулою:

$$V_l=\pi\int\limits_a^b |\left(f_2(x)-l\right)^2-\left(f_1(x)-l\right)^2|dx.$$

33) Нехай пряма $x=p$ не перетинає фігуру $\Phi=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$, де функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на $[a;b]$. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання фігури Ф навколо прямої $x=p$, обчислюється за формулою:

$$V_p=2\pi\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)|x-p|dx$$

34)Нехай криволінійний сектор

$$\Phi=\{(\rho;\varphi)\,|\,0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi, 0\le\rho\le\rho(\varphi)\},$$

де функція $\rho(\varphi)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$,обертається навколо полярної осі. Довести, що об'єм одержаного тіла, обчислюється за формулою:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{3}(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

35) Нехай криву задано параметрично $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha;\beta],$ де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$. Довести, що площа поверхні, що одержана шляхом обертання кривої навколо осі Оу,

обчислюється за формулою: $\mathrm{S}_{oy}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(t)|\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^{2}+\left(\psi'(t)\right)^{2}}dt$

36) Нехай криву задано явно рівнянням $x=f(y), y\in[c;d]$, де $f(y)$ неперервно диференційована на $[c;d]$. Довести, що площа поверхні, одержаної шляхом обертання кривої навколо осі Оу, обчислюється за формулою:

$$\mathrm{S}_{oy}=2\pi\int_{c}^{d}|f(y)|\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^{2}}dy.$$

37) Нехай просторову криву задано параметрично $x=\varphi(t), y=\psi(t), \mathrm{z}=\eta(t),$ $t\in[\alpha;\beta]$, де функції $\varphi(t),\psi(t),\eta(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$.

Нехай ця крива та пряма l лежать в одній площині. Довести, що площа поверхні,одержаної шляхом обертання цієї кривої навколо прямої l, обчислюється за формулою:

$$S_{l}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)\cdot\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^{2}+\left(\psi'(t)\right)^{2}+\left(\eta'(t)\right)^{2}}dt,$$

де $\rho(t)$- відстань від точки $M\left(\varphi(t);\psi(t);\eta(t)\right)$до прямої l.

38) Нехай криву задано в полярній системі координат рівняння $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервно диференційована на $[\alpha;\beta]$. Довести, що площа поверхні, одержаної шляхом обертання цієї кривої навколо полярної осі, обчислюється за формулою:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left|\rho(\varphi)\sin\varphi\right|\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^{2}+\left(\rho'(\varphi)\right)^{2}}\,d\varphi\,.$$

39) Нехай крива з попереднього №38 обертається навколо прямої, перпендикулярної до полярної осі. Довести, що площа одержаної поверхні обчислюється за формулою:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left|\rho(\varphi)\cos\varphi\right|\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^{2}+\left(\rho'(\varphi)\right)^{2}}\,d\varphi\,.$$

40) Нехай площа $S(x)$ перетину тіла площиною $x=const$ змінюється за законом $S(x)=ax^{2}+bx+c, x_1\le x\le x_2$. Довести, що об'єм цього тіла дорівнює: $V=\frac{1}{6}\left(x_2-x_1\right)\left(S(x_1)+\mathrm{S}(x_2)+4S\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$.

41)* Нехай фігура Ф обмежена простою неперервною замкненою опуклою кривою, ординати точок якої належать проміжку $[y_1;y_2]$. Довести, що об'єм тіла, одержаного шляхом обертання цієї фігури навколо осі Ох, обчислюється за формулою: $V_{ox}=2\pi\int_{y_1}^{y_2}y\left(f_2(y)-f_1(y)\right)dy,$

де $x=f_1(y)$ - рівняння лівої частини кривої , $x=f_2(y)$ - рівняння правої частини кривої, при чому функції $f_1(y)$ та $f_2(y)$ неперервні на $[y_1;y_2]$.

42)* Нехай криву задано на площині xOy параметрично $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, $\mathrm{t}\in[\alpha;\beta]$, де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha;\beta]$.

Через кожну точку кривої проведемо пряму, паралельну осі Oz. Одержимо циліндричну поверхню. Довести, що площа частини цієї поверхні, для якої $0 \le z \le \eta(t)$, обчислюється за формулою $S = \int_{\alpha}^{\beta} \eta(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$,

де $\eta(t)$ неперервна на $[\alpha; \beta]$.

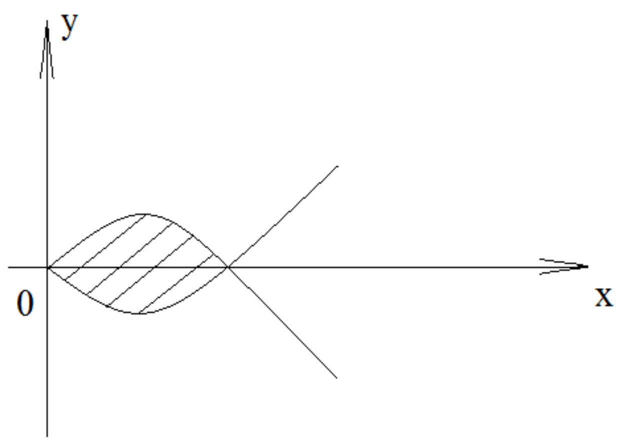
Приклади.

1)Обчислити площу петлі кривої $y^2 = x\left(x-1\right)^2$.

Розв'язування. Область визначеності є проміжок $x \in [0; +\infty)$. Якщо деяка точка $\left(x_0; y_0\right)$ лежить на кривій, то разом з нею на кривій лежить точка $\left(x_0; -y_0\right)$. Це означає, що крива симетрична відносно осі Ox. Запишемо явно рівняння половини кривої, яка відповідає значенням $y \ge 0$:

$$y = f(x) = \sqrt{x}\left|x-1\right| = \begin{cases} \sqrt{x}\left(1-x\right), при & 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{x}\left(x-1\right), при & x > 1. \end{cases}$$

Спільні точки симетричних кривих $y = f(x)$ та $y = -f(x)$ лежать на осі Ox, отже вони мають абсциси: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Таким чином, петля утворюється кривими $y = \sqrt{x}\left(1-x\right)$ та $y = \sqrt{x}\left(x-1\right)$ при $0 \le x \le 1$.



Тому

$$S=2\int_0^1 \sqrt{x}\left(1-x\right)dx=2\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{8}{15}.$$

Відповідь: $\frac{8}{15}$.

2)Обчислити площу петлі, заданої параметрично $x=2t-t^2, y=2t^2-t^3$.

Розв'язування. Знайдемо два значення параметра t таким чином,щоб виконувались рівності $x(t_1)=x(t_2)$ та $y(t_1)=y(t_2)$. Нехай $t_1<t_2$, тоді

$$\begin{cases}2t_1-t_1^2=2t_2-t_2^2,\\ 2t_1^2-t_1^3=2t_2^2-t_2^3;\end{cases}$$

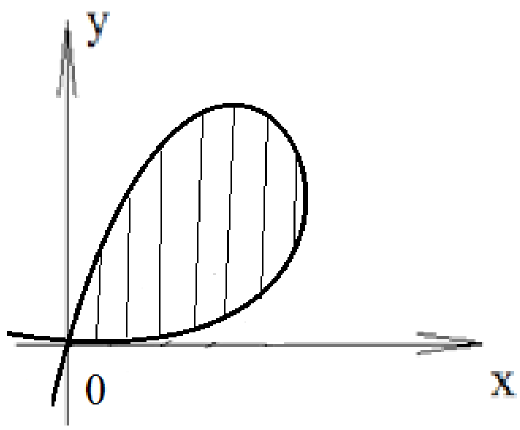
$$\begin{cases}2\left(t_1-t_2\right)-\left(t_1^2-t_2^2\right)=0,\\ 2\left(t_1^2-t_2^2\right)-\left(t_1^3-t_2^3\right)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(t_1-t_2\right)\left(2-\left(t_1+t_2\right)\right)=0,\\ \left(t_1-t_2\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)^2+t_1t_2\right)=0.\end{cases}$$

Оскільки $t_1-t_2\neq 0$, то $\begin{cases}t_1-t_2\neq 0,\\ t_1t_2=0.\end{cases}$

Умові $t_1<t_2$ відповідає розв'язок $t_1=0, t_2=2$.

Оскільки $x(0)=\mathrm{x}(2)=0, \mathrm{y}(0)=\mathrm{y}(2)=0,$ то петля кривої має вигляд $\left(x\geq 0, y\geq 0\, при \quad t\in[0;2]\right)$:



Неважко пересвідчитись, що при зміні параметра t від значення 0 до значення 2 точка $\left(x(t); y(t)\right)$ рухається вздовж кривої так, що фігура залишається при цьому зліва. Таким чином,

$$S = -\int_0^2 y(\mathrm{t})\,\mathrm{x}'(\mathrm{t})dt = -\int_0^2 \left(2t^2 - t^3\right)\left(2 - 2t\right)dt = \int_0^2 \left(-2t^4 + 6t^3 - 4t^2\right)dt =$$

$$= \left(-\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{15}$$

Відповідь: $\frac{8}{15}$.

3) Обчислити площу фігури, обмеженої замкненою кривою $x^4 + y^4 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

Розв'язування. Перейдемо до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Тоді рівняння кривої прийме вигляд:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}.$$

Неважко показати, що крива симетрична відносно осей Ох та Оу (див. розв'язування приклада 1). Таким чином, фігура складається з чотирьох частин однакової площі. Оскільки функція

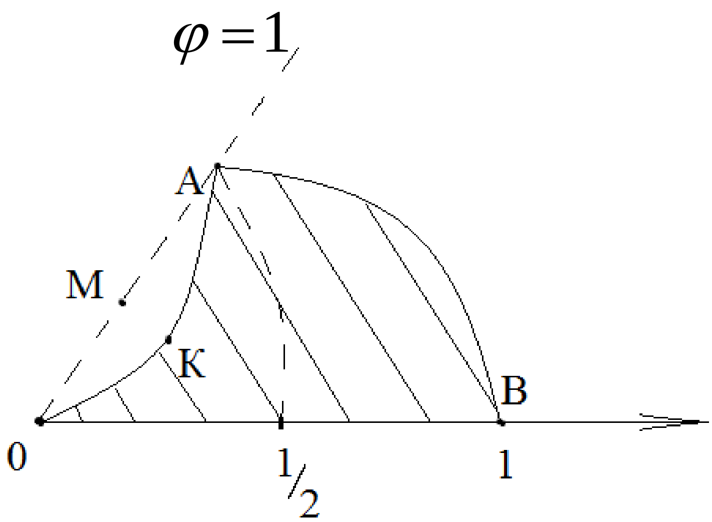
$$\frac{a^2}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}=\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}$$

має множину значень $[a^2;2a^2]$, малювати задану криву немає необхідності.

Таким чином, $\frac{1}{4}S=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}$. Обчисливши інтеграл, одержимо, що $S=\pi\sqrt{2}a^2$.

Відповідь: $\pi\sqrt{2}a^2$.

5)Знайти площу фігури , обмеженої кривими $\varphi=\sin\pi\rho$ $\left(0\le\rho\le1\right)$ та $\varphi=0$. ***Розв'язання.*** Коли ρ зростає від 0 до $\frac{1}{2}$, значення φ зростає від 0 до 1. Коли ρ зростає від $\frac{1}{2}$ до 1, значення φ спадає від 1 до 0. Тому задана фігура має такий схематичний вигляд:



Інтеграл $\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\rho^2\left(\sin\pi\rho\right)'d\rho$ дорівнює площі фігури OKAMO. Інтеграл

$\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\rho^2\left(\sin\pi\rho\right)'\,d\rho$, якщо його взяти зі знаком мінус, дорівнює площі фігури ОМАВО. Таким чином, шукана площа дорівнює:

$$S=-\frac{1}{2}\int_0^1\rho^2\left(\sin\pi\rho\right)'\,d\rho=-\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^2\cos(\pi\rho)d\rho=$$

$$=-\left(\frac{\rho^2}{2}\sin\pi\rho+\frac{\rho}{\pi}\cos\pi\rho-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi\rho\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{\pi}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\pi}$

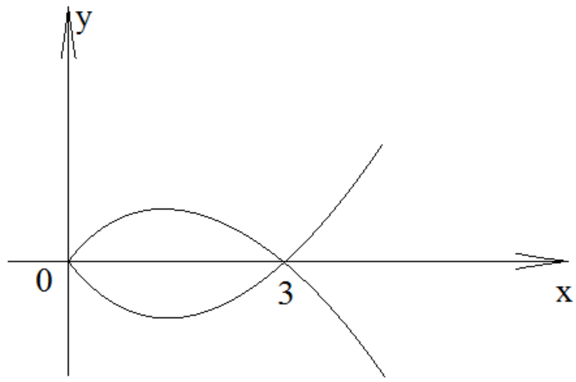
6) Обчислити довжину петлі лінії, заданої параметрично $x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3}$.

Розв'язування. Знайдемо такі значення параметра t, щоб виконувались рівності $x(t_1)=x(t_2),\mathrm{y}(t_1)=y(t_2)$:

$$\begin{cases}t_1^2=t_2^2,\\ t_1-\frac{1}{3}t_1^3=t_2-\frac{1}{3}t_2^3;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\left(t_1-t_2\right)\left(t_1+t_2\right),\\ \left(t_1-t_2\right)\left(3-\left(t_1+t_2\right)^2+t_1t_2\right)=0.\end{cases}$$

Оскільки $t_1\neq t_2$, то одержимо систему: $\begin{cases}t_1+t_2=0,\\ t_1t_2=-3,\end{cases}$

яка має розв'язки $t_1=-\sqrt{3},t_2=\sqrt{3}.$ Оскільки $x(-t)=x(t),\,y(-t)=-y(t),$ то крива симетрична відносно осі Ох та має вигляд:



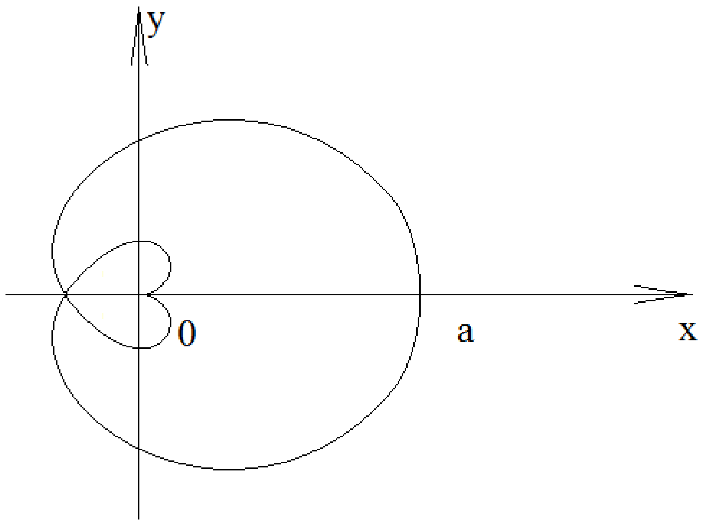
Таким чином, довжина петлі дорівнює:

$$l = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2)dt = 2\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$

7) Обчислити довжину замкненої кривої $\rho = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$.

Розв'язування. Оскільки функція $\rho = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ парна, то крива симетрична відносно полярної осі. Оскільки ця функція маж період 4π та на половині періода від 0 до 2π вона зростає, а при зміні φ від -2π до 0 ми одержимо другу половину кривої, симетричну першій відносно полярної осі, то вся крива має вигляд:



Оскільки на проміжку $[0, 2\pi]$

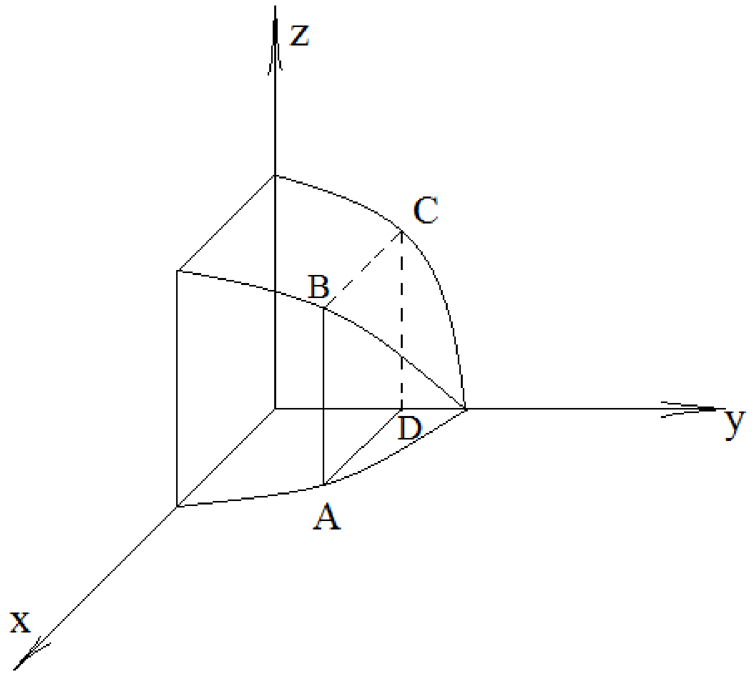
$$\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{a^2\sin^8\frac{\varphi}{4}+a^2\sin^6\frac{\varphi}{4}\cos^6\frac{\varphi}{4}}=a^2\sin^3\frac{\varphi}{4},$$

то $$l=2a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}d\varphi=8a\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,dt=\frac{16}{3}a.$$

Відповідь: $\frac{16}{3}a$

8) Вісі двох циліндрів з радіусами основи, рівними a, перетинаються під прямим кутом. Обчислити об'єм спільної частини цих циліндрів.

Розв'язування. Нехай осі циліндрів співпадають з осями Oy та Oz декартової системи координат. Розглянемо восьму частину тіла, яка знаходиться в першому октані (з міркувань симетрії усі інші сім частин тіла, яка знаходяться в інших октанах, мають той же об'єм, що і ця):



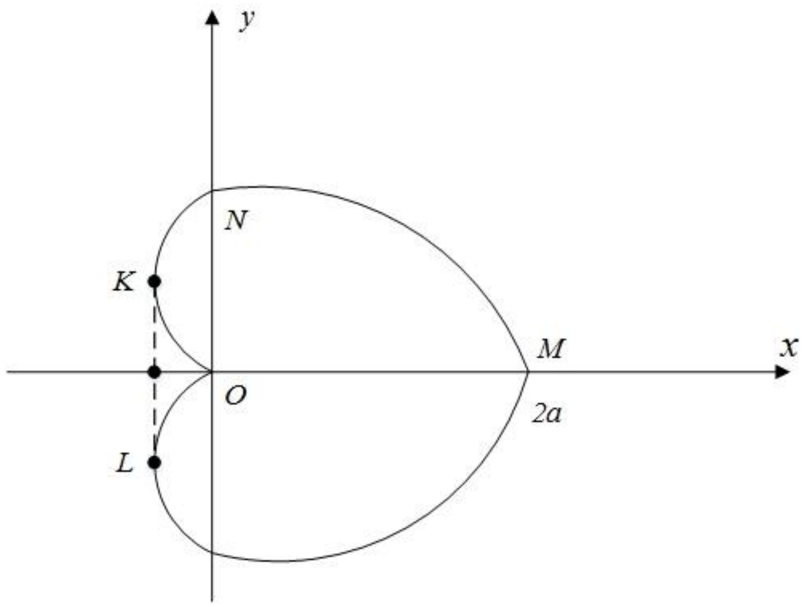
Перетнемо намальоване тіло площиною, що перпендикулярна до осі Ох і перетинає її у точці з абсцисою $x \in (0; a)$. Одержимо квадрат ABCD із стороною $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$. Тоді площа перетину дорівнює $S(x) = a^2 - x^2$.

Таким чином, $V = 8\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{16}{3}a^3$

Відповідь: $\frac{16}{3}a^3$

9) Обчислити об'єм тіла, одержаного шляхом обертання тіла кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Розв'язування. Оскільки функція $a(1 + \cos\varphi)$ парна, крива симетрична відносно полярної осі. При зміні φ від 0 до π ця функція спадає від значення $2a$ до значення 0.Таким чином, кардіоїда є замкнена крива вигляду:



Запишемо рівняння кривої в параметричному вигляді:

$$x = a\cos\varphi(1+\cos\varphi),$$

$$y = a\sin\varphi(1+\cos\varphi).$$

Обчислимо абсцису точки К як точки на кардіоїді з найменшою абсцисою. Для цього знайдемо найменше значення функції $x = a\cos\varphi(1+\cos\varphi)$.

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi(1+2\cos\varphi) = 0,$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{2}{3}\pi.$$

При $\varphi_1 = 0$ маємо $x = 2a$, тобто абсцису точки М.

При $\varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$ одержимо $x = -\frac{a}{4}$, тобто абсцису точки К. Об'єм, який треба обчисляти, є різницею об'ємів тіл, які одержані шляхом обертання навколо осі Ох(полярної осі) криволінійних трапецій MNKLM та OKLO. Таким чином

$$v = \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y_2^2(x)dx - \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{0} y_1^2(x)dx.$$

Підставивши значення $x(\varphi)$ та $y(\varphi)$ в інтегралі, одержимо

$$v=\pi\int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{0} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi(-a\sin\varphi(1+2\cos\varphi))d\varphi-\pi\int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi(-a\sin\varphi(1+2\mathrm{co}$$

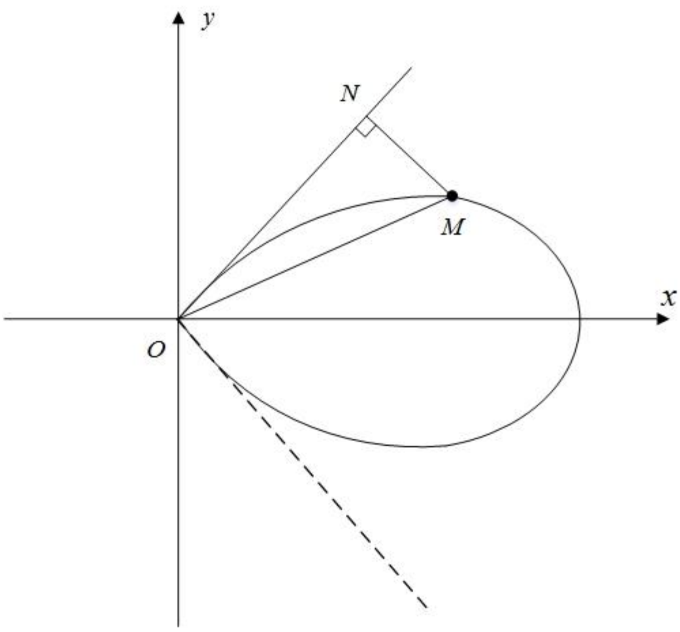
$$=\pi a^3\int\limits_0^{\pi}\sin^3\varphi(1+\cos\varphi)^2(1+2\cos\varphi)d\varphi=\pi a^3\int\limits_1^1(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)du=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

Відповідь: $\frac{8}{3}\pi a^3$.

10) Обчислити площу поверхні, утвореної шляхом обертання однієї вітки лемніскати $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ навколо прямої $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язування. З трикутника OMN знаходимо відстань MN довільної точки прямої вітки лемніската від осі обертання $\varphi=\frac{\pi}{4}$:

$$MN=\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi).$$



Оскільки

$$dl=\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\frac{a^2\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

то площа поверхні дорівнює:

$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin(\frac{\pi}{4} - \varphi) * \frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2.$$

Відповідь: $2\pi a^2$.

Завдання для аудиторної та домашньої роботи

Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1) $y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py;$

2) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = \frac{1}{6}(x^2 - 4x + 16);$

3) $x^2 + y^2 = a^2, \quad y = \frac{1}{2p} * x^2, \quad y \geq 0;$

4) $y^2 = 4px, \quad y^2 = 2q(h - x), \quad p > 0, \quad q > 0, \quad h > 0;$

5) $y^2 = 2px, \quad (y - y_o)^2 = 2q(x - x_o)$, де $p > 0, \quad q > 0, \quad y_o > 0, \quad y_o < 2(p + q)x_o;$

6) $2py = x^2, \quad 2q(\mathrm{y} - \mathrm{y}_o) = (x - x_o)^2$, де $q > p > 0, \quad 2(q - p)y_o + x_o^2 > 0;$

7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = y^2, \quad y = 0;$

8) $(y - x)^2 = x^\alpha, \quad x = a^2, \quad a > 0, \quad \alpha > 0;$

9) $(y - x + 2)^2 = 9y, \quad x = 0, \quad y = 0;$

10) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2);$

11) $a^4y^2 = (a^2 - x^2)^3;$

12) $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0;$

13) $x^4y^2 = a^5(x - a), \quad x = 2a;$

14) $y^2 = \sin^2 x \cos x$, де $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

Обчислити площу фігури, обмеженою петлею лінії:

15) $x = at - t^2, \quad y = at^2 - t^3, \quad a > 0;$

16) $x = t^2 - a^2, \quad y = t^3 - a^2 t, \quad a > 0;$

17) $x = 1 + t - t^3, \quad y = 1 - 15t^2;$

18) $x = \dfrac{t(1-t^2)}{1+3t^2}, \quad y = \dfrac{4t^2}{1+3t^2};$

19) $x = \dfrac{1}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{t(1-\mathrm{t}^2)}{1+t^2};$

20) $x = a\sin 2t, \quad y = a\sin t, \quad a > 0;$

21) $x = a\left(\dfrac{2}{\pi}t - \sin t\right), \quad y = a(1-\cos t), \quad a > 0;$

22) $x = a(1+2\cos\mathrm{t}), \quad \mathrm{y} = \mathrm{a}(\mathrm{tgt} + 2\sin\mathrm{t}), \quad \mathrm{a} > 0;$

23) $x = 4t - t^3, \quad y = \sin\dfrac{\pi t}{2}, \quad 0 \le t \le 2;$

Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

24) $\rho = \dfrac{a}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

25) $\rho = a\cos\varphi;$

26) $\rho = a(1+\cos\varphi);$

27) $\rho = b + a\cos\varphi, \quad a \ge b > 0;$

28) $\rho = a\sin 2\varphi;$

29) $\rho = a\cos 3\varphi;$

30) $\rho = a\sin 5\varphi;$

31) $\rho = a\sin \mathrm{n}\varphi, \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N};$

32) $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0,$ де $0 \le \varphi \le \varphi_0, \quad 0 < e < 1;$

33) $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0,$ де $0 \le \varphi \le \varphi_0, \quad e > 1, \quad e\cos\varphi_0 > -1;$

34) $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}},\quad \varphi=0,\quad \varphi=\dfrac{\pi}{4};$

35) $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{4-3\cos^2\varphi}},\quad \varphi=0,\quad \varphi=\dfrac{\pi}{2};$

36) $\rho=2\sqrt{\varphi\arccos(\varphi^2-1)},\quad \varphi=1,\quad \varphi=\sqrt{\dfrac{3}{2}};$

37) $\rho=\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}},\quad \varphi=0,\quad \varphi=\dfrac{\pi}{6};$

38) $\rho=2a\cos\varphi,\quad \rho=\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \varphi=0;$

39) $\rho=2-\cos\varphi,\quad \rho=\cos\varphi;$

40) $\rho=a\sqrt{3}\sin\varphi,\quad \rho=2a\sin^2\dfrac{\varphi}{2},\quad \rho\geq 2a\sin^2\dfrac{\varphi}{2};$

41) $\rho=a\left|tg\varphi\right|,\quad \rho=\dfrac{b}{\cos\varphi},\quad 0<b<a;$

42) $\rho=\dfrac{2a\cos^2\varphi}{\sin\varphi},\quad \rho=\dfrac{2b}{\sin\varphi},\quad 0<b<a;$

43) $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi;$

44) $\rho^2=2\sin 2\varphi,\quad \rho=1,\quad \rho\geq 1;$

45) $\rho^2=a^2\cos 4\varphi;$

46) $\rho^2=a^2\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi},\quad 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{3};$

47) $\rho^2=a^2(1-2\cos 2\varphi),\quad \rho=a,\quad \rho\leq a;$

48) $x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=6x,\quad y\sqrt{3}+x=0,\quad y-x\sqrt{3}=0;$

49) $x^2+y^2=16,\quad x^2+y^2=4y,\quad y\sqrt{3}-x=4\sqrt{3},\quad y+x\sqrt{3}=4;$

50) $x^2+y^2=9,\quad x^2+y^2=2x\sqrt{3},\quad y\sqrt{3}+x=0,\quad y\sqrt{3}-x=0,\quad \mathrm{x}\rangle 0,\quad \mathrm{x}^2+y^2\leq 9;$

51) $x^2+y^2=6,\quad x^2+y^2=2x+2y,\quad x^2+y^2\geq 6;$

52) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2);$

53) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy;$

54) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2;$

55) $x^4+y^4=ax^2y;$

56) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2), \quad x^2+y^2=a^2, \quad x^2+y^2\ge a^2;$

Обчислити довжину дуги кривої:

57) $y=\frac{1}{4}x\sqrt{2-x^2}, \quad 0\le x\le 1;$

58) $y=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad 0\le x\le \frac{5}{6};$

59) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad 0\le x\le \frac{9}{16};$

60) $x=2arctg\sqrt{\frac{(1-y)}{(1+y)}}-\sqrt{1-y^2}, \quad |y|\le a\le 1;$

61) $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{1-x}, \quad \frac{11}{36}\le x\le \frac{15}{16};$

62) $y=2(\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^x-1}), \quad 0\le x\le x_0;$

63) $y=2a\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-4\sqrt{ax}, \quad 0\le x\le x_0<a;$

64) $y=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}, \quad 0\le x\le x_0\le a;$

65) $y=\sqrt{x^2-32}+8\ln(x+\sqrt{x^2-32}), \quad 6\le x\le 9;$

66) $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t, \quad 0\le t\le 2\pi;$

67) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t, \quad 0\le t\le 2\pi, \quad c^2=a^2-b^2;$

68) $x=(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi;$

69) $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi), \quad y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi), \quad 0\le\varphi\le\varphi_0;$

70) $x = ch^3 t, \quad y = sh^3 t, \quad 0 \le t \le t_0;$

71) $x = ae^{\alpha\varphi}\cos\varphi, \quad y = ae^{\alpha\varphi}\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0;$

72) $x = \dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}}\cos(a\ln t), \quad y = \dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}}\sin(a\ln t), \quad 0 < t_1 \le t \le t_2;$

73) $x = t - \dfrac{1}{2}sh2t, \quad y = 2cht, \quad 0 \le t \le t_0;$

74) $x = a(\cos t + \ln tg\dfrac{t}{2}), \quad y = a\sin t, \quad 0 < t_0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

75) $x = t^2\cos t, \quad y = t^2\sin t, \quad 0 \le t \le 1;$

76) $x = 1 - \cos 2t, \quad y = \sin t - \dfrac{1}{3}\sin 3t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

77) $x = \sin^3 t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

78) $\rho = a\varphi, \quad \rho \le 2\pi a;$

79) $\rho = \varphi^2, \quad 0 \le \varphi \le \pi;$

80) $\rho = a\sin\varphi;$

81) $\rho = 1 - \cos\varphi;$

82) $\rho = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2};$

83) $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3};$

84) $\rho = a\cos^4\dfrac{\varphi}{4};$

85) $\rho = ath\dfrac{\varphi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

86) $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2};$

87) $\varphi = \sqrt{\rho}, \quad 0 \le \rho \le 5;$

88) $\varphi = \dfrac{1}{2}\rho\sqrt{\rho^2+2} + \ln\left|\rho + \sqrt{\rho^2+2}\right|, \quad 0 \le \rho \le 2;$

89) $\varphi=\rho+\ln\rho, \quad 1\le\rho\le 5;$

90) $\rho=1+\cos t, \quad \varphi=t-tg\frac{t}{2}, \quad 0\le t\le a\le\pi;$

91) $\rho=a\cos^2 t, \quad \varphi=2(t-tgt), \quad 0\le t\le\frac{\pi}{4};$

92) $\rho=a(1+tgt), \quad \varphi=tgt-\ln(1+tgt)$ від точки $A(a;0)$ до точки $B(\rho_0;\varphi_0)$.

Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

93) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=\frac{c}{a}x, \quad z=0;$

94) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

95) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=\pm c;$

96) $x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2;$

97) $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax;$

98) $z^2=b(a-x), \quad \mathrm{x}^2+y^2=ax;$

99) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0, \quad z=a, \quad 0\le z\le a;$

100) $x+y+z^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0;$

101) $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz=a^2;$

Знайти об'єм тіла, утвореного шляхом обертання фігури, обмеженої кривими, навколо а)осі Ох; б)осі Оу;

102) $y=(x-a)(x-b), \quad y=0, \quad b>a\ge 0;$

103) $y=\sin x, \quad y=0, \quad 0\le x\le\pi;$

104) $y=\arcsin x, \quad y=0, \quad x=1;$

105) $y=\frac{a^3}{(a^2+x^2)}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=a;$

106) $y=\dfrac{a^3}{(a^2+x^2)}, \quad y=\dfrac{a}{2};$

107) $y=\sqrt{(3+3x)(3-x)}, \quad y=6, \quad x=0, \quad 0\le x\le 2;$

108) $2py=(x-a)^2, \quad 2py=a^2;$

109) $2py=x^2, \quad y=|x|;$

110) $y=e^x+6, \quad y=e^{2x}, \quad x=0;$

111) $y=x, \quad y=x+\sin^2 x, \quad 0\le x\le \pi;$

112) $x=t^3, \quad y=t^2, \quad y=0, \quad |x|=1;$

113) $x=a\sin t, \quad y=a\sin 2t, \quad 0\le t\le 2\pi;$

114) $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad y=0, \quad 0\le t\le 2\pi;$

Обчислити об'єм тіла, утвореного шляхом обертання фігури, обмеженої даними кривими:

115) $x=a\sin^3 t, \quad y=b\cos^3 t, \quad 0\le t\le 2\pi:$ навколо а)осі Оу; б)прямої х=а;

116) $x=\dfrac{2at^2}{(1+t^2)}, \quad y=\dfrac{2at^3}{(1+t^2)}, \quad x=a:$ навколо а)осі Ох; б)прямої х=а;

117) $x=a(1+\cos t), \quad y=a(tgt+\sin t), \quad x=\dfrac{3}{2}a:$ навколо а)осі Ох; б)прямої х=а.

Обчислити об'єм тіла, отриманого шляхом обертання петлі кривої:

118) $x=2t-t^2, \quad y=4t-t^3:$ навколо а)осі Ох; б) осі Оу;

119) $x=\dfrac{2a}{t^2+1}, \quad y=a\dfrac{t^3-t}{t^2+1}:$ навколо а)осі Ох; б)осі Оу;

Обчислити об'єм тіла, отриманого шляхом обертання навколо полярної осі фігури, яку заданими нерівностями:

120) $0\le \rho\le a(1+\cos\varphi);$

121) $0\le \rho\le 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad 0\le \varphi\le \dfrac{\pi}{3};$

122) $0 \le \rho \le \dfrac{\rho}{1+e\cos\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2};$

123) $0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\varphi};$

124) $0 \le \rho \le a\sqrt{\sin 2\varphi};$

125) $0 \le \rho \le -\dfrac{3a\cos 2\varphi}{(2+\cos 2\varphi)\sin\varphi}, \quad \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4};$

126) $0 \le \rho \le \dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6};$

127) $a \le \rho \le a\sqrt{2\sin 2\varphi};$

Обчислити площу поверхні, яка утворена шляхом обертання навколо осі Ох кривої:

128) $y = \sqrt{x}, \quad \dfrac{5}{4} \le x \le \dfrac{21}{4};$

129) $y = x^3, \quad 0 \le x \le 1;$

130) $y = e^{-x}, \quad 0 \le x \le a;$

131) $y = ach\dfrac{x}{a}, \quad |x| \le b;$

132) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$

133) $2ay = a^2 + x^2, \quad 0 \le x \le a;$

134) $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \le x \le 1;$

135) $y = \dfrac{1}{x}, \quad 1 \le x \le a;$

136) $y = tg\,x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4};$

137) $y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad 1 \le x \le 5;$

138) $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4};$

139) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\quad 1\le x\le 2;$

140) $x^2+y^2=2y;$

141) $x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad 2\pi n\le t\le (2n+1)\pi,\quad n\in N;$

142) $x=a(2\cos t-\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t);$

143) $x=a\cos t+a\ln tg\dfrac{t}{2},\quad y=a\sin t,\quad 0\le y_0\le y\le a;$

144) $x=\dfrac{1}{3}t^3,\quad y=4-\dfrac{1}{2}t^2,\quad |t|\le 2\sqrt{2};$

145) $x=2\sqrt{3}\cos t,\quad y=\sin 2t;$

146) $x=\dfrac{1}{3}e^{3t},\quad y=\dfrac{1}{5}e^{5t},\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2}{3}\le t\le 0.$

Обчислити площу частини циліндричної поверхні:

147) $x^2+y^2=a^2,\quad 0\le z\le \dfrac{hx}{a},\quad x\ge 0;$

148) $y=b-bx^2/a^2,\quad 0\le z\le hx/a,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;$

149) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad 0\le z\le hx/a,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad a>b;$

150) $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1,\quad 0\le z\le x\sqrt{3},\quad \sqrt{2}\le x<2.$

Відповіді:

1) $\dfrac{4}{3}p^3$; 2) 12; 3) $a^2\arcsin\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{1}{6p}x_0^3$; 4) $\dfrac{4}{3}h\sqrt{\dfrac{2pqh}{p+q}}$; 5) $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2pq}{p+q}}\left(x_0-\dfrac{y_0^2}{2(p+q)}\right)^{\frac{3}{2}}$;

6) $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2pq}{q-p}}\left(y_0+\dfrac{x_0^2}{2(q-p)}\right)^{\frac{3}{2}}$; 7) $\dfrac{3}{2}$; 8) $\dfrac{4}{\alpha+2}a^{\alpha+2}$; 9) $\dfrac{1}{2}$; 10) $\dfrac{4}{3}a^2$;

11) $\dfrac{3}{4}\pi a^2$; 12) $\dfrac{1}{8}\pi a^2$; 13) $\dfrac{1}{2}(\pi-2)a^2$; 14) $\dfrac{8}{3}$; 15) $\dfrac{1}{60}a^5$;

16) $\dfrac{8}{15}a^5$; 17) 8; 18) $\dfrac{1}{3}$; 19) $\dfrac{1}{4}(4-\pi)$; 20) $\dfrac{4}{3}a^2$;

$21) a^2(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi});\quad 22) a^2(\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi-4\ln(2+\sqrt{3}));\quad 23)\frac{8}{\pi}(\frac{12}{\pi^2}-1);\quad 24)\frac{2}{3}a^2\sqrt{3};\quad 25)\frac{1}{4}\pi a^2;$

$26)\frac{3}{2}\pi a^2;\quad 27)\frac{1}{2}\pi(a^2+2b^2);\quad 28)\frac{1}{4}\pi a^2;\quad 29)\frac{1}{2}\pi a^2;\quad 30)\frac{1}{4}\pi a^2;$

$31)\frac{1}{4}\pi a^2;\quad 32)\frac{p^2}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\arccos\frac{e+\cos\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0}-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0});$

$33)\frac{p^2}{2(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}(\ln\frac{e+\cos\varphi_0-\sqrt{e^2-1}\sin\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0}+\frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0});$

$34)\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{1}{\sqrt{2}};\quad 35) 8\sqrt{13}(\pi+3\pi^3);\quad 36)\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1;\quad 37)\frac{1}{4}(\ln 3-1);$

$38)\frac{1}{12}a^2(3\pi+4);\quad 39)\frac{17\pi}{4};\quad 40)\frac{3}{4}a^2\sqrt{3};\quad 41) a^2\arcsin\frac{b}{a}-b\sqrt{a^2-b^2};$

$42) 6a^2 arctg\sqrt{{}^{b}\!\big/_{(a-b)}-2(2b+3a)\sqrt{b(a-b)}};\quad 43) 2a^2;\quad 44)\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-\pi);$

$45) a^2;\quad 46)\frac{1}{12}a^2(2\pi+3\sqrt{3});\quad 47)\frac{1}{3}a^2(2\pi+3\sqrt{3}-6);\quad 48) 4(\pi+\sqrt{3});$

$49) 6\left(\pi+\sqrt{3}\right)$; $50)\frac{1}{4}\left(7\pi-5\sqrt{3}\right)$; $51)\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$; $52)\pi a^2\sqrt{2}$; $53) a^2$;

$54)\frac{1}{2}\pi\left(a^2+b^2\right)$; $55)\frac{\pi}{8\sqrt{2}}a^2$; $56)\frac{1}{3}a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$; $57)\frac{1}{4}\left(\pi+1\right)$;

$58)\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$; $59)\frac{1}{\sqrt{2}}$; $60) 2\sqrt{2}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)$; $61)\frac{7}{6}$;

$62) 2\left(e^{{}^{x_0}\!/_2}-1\right)$; $63) 2a\ln\left({}^{a}\!\big/_{(a-x_0)}\right)-x_0$; $64) a\ln\frac{a}{x_0}$; $65)\sqrt{2}\left(5+4\ln 2\right)$; $66) 6a$;

$67)\frac{4\left(a^3-b^3\right)}{ab}$; $68) 8a$; $69)\frac{a}{4}\varphi_0{}^2$; $70)\frac{1}{2}\left(\left(ch2t_0\right)^{{}^3\!/_2}-1\right)$; $71)\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}a\left(e^{\alpha\varphi_0}-1\right)$;

$72) t_2-t_1$; $73) sh^2t_0$; $74) -a\ln\sin t_0$; $75)\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)$; $76)\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; $77)\frac{61}{27}$;

$78)\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$; $79)\frac{1}{3}\left(\left(\pi^2+4\right)\sqrt{\pi^2+4}-8\right)$; $80)\pi a$; $81) 8$;

82) $a\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)/8$; 83) $\frac{3}{2}\pi a$; 84) $\frac{16}{3}a$; 84) $\frac{16}{3}a$; 85) $a\left(2\pi-th\pi\right)$;

86) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 87) $\frac{19}{3}$; 88) $\frac{14}{3}$; 89) $3\sqrt{37}-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{6+\sqrt{37}}{2+\sqrt{5}}$; 90) a;

91) $2a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 92) $a\left(\frac{\sin t_0}{2\cos^2\varphi_0}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$, де $\varphi_0=\varphi(t_0)$, $\rho_0=\rho(t_0)$;

93) $\frac{2}{3}abc$; 94) $\frac{4}{3}\pi abc$; 95) $\frac{8}{3}\pi abc$; 96) $\frac{16}{3}a^3$; 97) $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$; 98) $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$;

99) $\frac{1}{2}\pi a^3$; 100) $\frac{4}{5}$; 101) $\frac{4}{3}\pi\sqrt{2}a^3$; 102) а) $\frac{\pi}{30}(b-a)^5$; б) $\frac{\pi}{6}(b+a)(b-a)^3$;

103) а) $\frac{1}{2}\pi^2$; б) $2\pi^2$; 104) а) $\frac{\pi}{4}\left(\pi^2-8\right)$; б) $\frac{1}{4}\pi^2$; 105) а) $\frac{1}{8}a^3(\pi+2)$; б) $\pi a^3\ln 2$;

106) а) $\frac{1}{4}\pi^2a^3$; б) $\pi a^3(\ln 2-0.5)$; 107) а) $4\pi(44-27\ln 3)$; б) $4\pi\left(27-5\pi\sqrt{3}\right)/3$;

108) а) $2\pi a^5/\left(5p^2\right)$; б) $4\pi a^4/(3p)$; 109) а) $32\pi p^3/15$; б) $\frac{4}{3}\pi p^3$;

110) а) $4\pi(2+9\ln 3)$; б) $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$; 111) а) $\pi^3/2+3\pi/8$; б) $\pi^3/2$;

112) а) $6\pi/7$; б) $3\pi/4$; 113) а) $8\pi a^3/15$; б) $\pi^2a^3/2$; 114) а) $5\pi^2a^3$; б) $6\pi^3a^3$;

115) а) $32\pi a^2b/105$; б) $3\pi^2a^2b/4$; 116) а) $8\pi a^3(3\ln 2-2)/3$; б) $2\pi a^3(10-3\pi)/3$;

117) а) $\frac{1}{24}\pi a^3(24\ln 4-1)$; б) $\frac{2}{3}\pi^2a^3$; 118) а) $64\pi/35$; б) $64\pi/105$;

119) а) $\frac{1}{3}\pi a^3(6\ln 2-4)$; б) $\frac{4}{3}\pi a^3$; 120) $\frac{8}{3}\pi a^3$; 121) $\frac{1}{4}\pi a^3(51-64\ln 2)$;

122) $\frac{\pi(2+e)}{3(1+e)^2}p^3$; 123) $\frac{\pi}{12}a^3\left(3\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-2\right)$; 124) $\frac{1}{4}\pi^2a^3$; 125) $\frac{16}{9}\pi^2a^3\sqrt{3}$;

126) $2\pi a^3(9\ln 1.5-2)/9$; 127) $\pi^2a^3/\left(2\sqrt{2}\right)$; 128) $98\pi/3$; 129) $\pi\left(10^{3/2}-1\right)/27$;

130) $\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\frac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$; 131) $2\pi a\left(b+\frac{a}{2}sh\frac{2b}{a}\right)$;

132) $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; 133) $\frac{1}{8}\pi a^2\left(3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\sqrt{2}\right)$;

134) $\frac{1}{9}\pi\left(7\sqrt{2}+3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$; 135) $\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}+\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+a^2}{\sqrt{2}+1}\right)$;

136) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$; 137) $\pi\left(34-\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$;

138) $\frac{1}{16}\pi\sqrt{2}\left(3+4\ln 2\right)$; 139) $\frac{1}{6}\pi^2+\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 140) $4\pi^2$; 141) $\frac{4}{5}\sqrt{2}\pi e^{(4n+1)\pi}ch\pi$;

142) $\frac{128}{5}\pi a^2$; 143) $4\pi a\left(a-y_0\right)$; 144) 59.2π; 145) $\frac{15}{8}\pi\left(4+\ln 5\right)$; 146) $\frac{2}{75}\pi\sqrt{2}$;
147) $2ah$; 148) $\left(h/\left(12b^2\right)\right)\left(\left(a^2+4b^2\right)^{3/2}-a^3\right)$; 149) $\frac{1}{2}ah\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right)$;

150) $\sqrt{2}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}\right)$.

Тема 9. Невласні інтеграли.

Нехай $f\left(x\right)$ інтегрована на будь-якому скінченному проміжку $\left[a;b\right]$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to\infty}\int_n^b f\left(x\right)dx,$$

то вона називається *невласним інтегралом першого роду* та позначається

$$\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx. \qquad (1)$$

Нехай $f\left(x\right)$ інтегрована на будь-якому проміжку $\left[a;b-\varepsilon\right]$,де $0<\varepsilon<b-a$, та необмежена в околі точки b. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx,$$

то вона називається *невласним інтегралом другого роду* та позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2)$$

Домовимось обидва невласні інтеграли позначати через

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad (3)$$

і казати, що він має особливість в єдиній точці b, де b може бути або скінченним, або $b=+\infty$. Якщо границі (1) та (2) існують та скінченні, то кажуть, що невласний інтеграл (3) *збігається*, в іншому випадку кажуть, що він *розбігається.*

Критерій Коші. Нехай інтеграл (3) має єдину особливість в точці b. Тоді він збігається тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $b_0<b$ таке, що $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$, які б не були b_1 та b_2, що задовольняють умові $b_0<b_1<b_2<b$.

Теореми порівняння.

Теорема 1. Нехай інтеграл (3) та інтеграл

$$\int_a^b \varphi(x)dx \qquad (4)$$

мають єдину особливість в точці b та для кожного $x\in[a;b]$ виконуються нерівності

$$0\le f(x)\le\varphi(x)$$

Тоді із збіжності інтеграла (4) випливає збіжність інтеграла (3). А із розбіжності інтеграла (3) випливає розбіжність інтеграла (4).

Теорема 2. Нехай інтеграли (3) та (4) мають єдину особливість в точці b, $f(x)>0, g(x)>0$ на $[a;b)$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A>0,$$

то інтеграли або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Кажуть, що інтеграл (3) збігається абсолютно, якщо збігається інтеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx. \tag{5}$$

Відомо, що абсолютно збіжний інтеграл збігається. Якщо ж інтеграл (3) збігається, а інтеграл (5) розбігається, то кажуть, що інтеграл (3) збігається умовно.

Достатні умови збіжності

Ознака Діріхле. Нехай $f(x)$ інтегрована на будь-якому скінченному проміжку $[a;b]$, причому існує константа $K > 0$ така, що $\forall b > a$ виконується нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le K$$

Нехай $g(x)$ інтегрована на $[a;+\infty)$ та монотонно прямує до нуля при $x \to +\infty$ Тоді збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$

(6)

Ознака Абеля. Нехай $f(x)$ інтегрована на $[a;+\infty)$, $g(x)$ монотонна та обмежена на $[a;+\infty)$. Тоді інтеграл (6) збігається.

Оскільки заміна $t = 1/x - b$ перетворює інтеграл (2) в невласний інтеграл першого роду, то вказані достатні ознаки збіжності можуть бути застосовані і для невласних інтегралів другого роду.

Питання теоретичного характеру

1)Для $x > 0$, $a > 0$ довести нерівність:

$$\left|\int_x^{x+a} \frac{\sin t}{t} dt\right| < \frac{3}{x} \ .$$

Чи можна застосувати її для доведення збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$?

2)Для $x>0$, $a>0$ довести нерівність: $\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right|<\frac{2}{x}$. Чи можна застосувати її для доведення збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty}\sin t^2 dt$?

3)Нехай $\forall n\in N$, $n>1$ $g(n)=1$, на проміжках $\left[n-n^{-3};n\right]$ та $\left[n;n+n^{-3}\right]$ функція $g(x)$ лінійна та рівна нулю в точках з абсцисами$\left(n-n^{-3}\right)$ та $\left(n+n^{-3}\right)$ та за межами цих проміжків. Довести, що функція $f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2}$ є додатною, неперервною, тою, що не прямує до нуля при $x\to+\infty$, для якої інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ збігається.

4) Якщо в попередньому питанні замість умови $g(n)=1$покласти $g(n)=n$, то $f(x)$буде додатною, неперервною, необмеженою на будь-якому проміжку $[a;+\infty)$, де $a>0$. Довести, що інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ збігається.

5) Довести рівність $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)$, де $a>0, b>0$ та інтеграл в лівій частині збігається.

6) Нехай інтеграл $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ збігається, $f(x)$монотонна. Довести, що

$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$

при $x\to+\infty$.

7) Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ є алгебраїчними многочленами , які не мають спільних множників.

8) Нехай функція $f(x)\geq 0$при $x\to+\infty$ є нескінченно малою порядка $k>0$ в порівнянні з функцією $\frac{1}{x}$. Довести ,що інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається при $k>1$ та розбігається при $k\leq 1$

9) Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається. Довести нерівність

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

10) Нехай функція $f(x) \ge 0$ при $x \to b-0$ є нескінченно великою порядку $k > 0$ в порівнянні з функцією $\dfrac{1}{b-x}$. Довести, що інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається при $k < 0$ та розбігається при $k \ge 0$.

11) Нехай $f(x)$ неперервна на $[0;1]$, $\alpha > 0$. Знайти границю

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\alpha} \int\limits_1^x \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \ .$$

12) Нехай $f(x)$ неперервно диференційована на проміжку $[a;+\infty]$, $|f'(x)| < M$ при $a \le x < +\infty$. Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається . Довести, що $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

13) Чи можна збіжний невласний інтеграл другого роду $\int\limits_a^b f(x)dx$ розглядати як границю інтегральної суми?

14) Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а функція $g(x)$ обмежена. Чи буде збіжним інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$? Якщо ні, навести приклад.

15) Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ bзбігається, а функція $g(x)$ обмежена. Чи буде збіжним інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$?

16) Нехай $f(x)$ монотонна на $(0;1]$ та необмежена в околі точки x=o. Нехай збігається інтеграл $\int_0^1 f(x)dx$. Довести, що $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$.

17) Нехай $f(x)$ монотонна та обмежена на $(0;\text{a})$. Нехай збігається невласний інтеграл $\int_0^a x^p f(x)dx$. Довести, що $\lim_{x\to 0+0} x^{p+1} f(x)=0$.

18) Дослідити на збіжність інтеграл $\int_a^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ алгебраїчні многочлени, $Q_m(x)>0$ при $x\ge a\ge 0$.

19) Довести рівність $\int_0^{+\infty} f(x^2)dx=a\int_0^{+\infty} f\left(a^2x^2-2ab+\frac{b^2}{x^2}\right)dx$, де $\alpha>0, b>0$ та інтеграл в лівій частині збігається.

20) Довести рівність $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln a\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}$, де $\alpha>0$ та інтеграл в лівій частині збігається.

21) Довести рівність $\int_0^{+\infty} f\left(x^\alpha+\frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{\ln x}{x}dx=0$, де $\alpha\ne 0$ та інтеграл в лівій частині існує.

22) Довести рівність $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$,

де $\alpha>0, b>0$, $f(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$, причому існує $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$.

23) Довести рівність $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{a}{b}$, де $\alpha>0, b>0$, $f(x)$ неперервна на $[0;+\infty)$, причому інтеграл $\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ збігається при будь-якому $c>0$.

24) Нехай $f(x)$ монотонна на $[0;+\infty)$ та інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Довести, що $\lim\limits_{h\to+0} h\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(kh) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$.

25) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;+\infty)$, $g(x)$ неперервно диференційовна на $[a;+\infty)$. Нехай $F(x)$- первісна функції $f(x)$ на $[a;+\infty)$. Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g'(x)|dx$ збігається. Довести, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)g(x)$.

26) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;+\infty)$ періодична з періодом T , $g(x)$ неперервно диференційовна та монотонна функція, причому $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Нехай $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = 0$. Довести, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається.

27) Нехай $f(x)$ неперервна на $[1;+\infty)$ періодична з періодом T функція.

При яких значеннях a збігається інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left(f\left(x^2\right) + a\right)dx$?

28) Довести рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$, якщо інтеграл в лівій частині рівності збігається.

29) Нехай $f(x)$ неперервна додатна на $[0;+\infty)$ функція. Нехай інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$$

збігається. Довести, що $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{a^2}\int\limits_0^a f(x)dx = +\infty$.

Приклади.

1) Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$.

Розв'язання. Оскільки функція $\ln\mathrm{sinx}$ необмежена в околі точки $x=0$, ми маємо невласний інтеграл другого роду. Скористаємося формулою інтегрування частинами, поклавши $u=\ln\sin x,\ dv=dx, du=\frac{\cos x}{\sin x}dx,\ v=x$:

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin xdx=x\ln\sin x\,\Big|_{0+0}^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}xctgxdx=\lim_{x\to+0}x\ln\sin x-\int_0^{\pi/2}xctgxdx=-\int_0^{\pi/2}xctgxdx$$

Останній інтеграл збігається, оскільки функція $xctgx$ обмежена на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$. Щоб обчислити інтеграл I , зробимо в ньому заміну $x=2t$.

Одержимо:

$$I=2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2tdt=2\int_0^{\pi/4}\left(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t\right)dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin tdt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos tdt$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $t=\frac{\pi}{2}-u$. Одержимо:

$$\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\mathrm{sint}\,dt+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\mathrm{sinu}\,du=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi/2}\ln\mathrm{sint}\,dt$$

Таким чином, для невідомої I одержимо рівняння: $I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$, з якого

зрозуміло, що $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

Відповідь. $-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

2). Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}\ .$$

Розв'язання. Скористаємось властивістю адитивності:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}=\int_0^{1}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}\ .$$

В першому інтегралі правої частини рівності зробимо заміну $y = 1/x$, одержимо

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+y^2\right)\left(1+y^{-\alpha}\right)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^{-\alpha}} + \frac{1}{1+x^{\alpha}}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}} + \frac{1}{1+x^{\alpha}}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \mathrm{arctg} x \,|_1^b = \lim_{b\to\infty} \mathrm{arctg} b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} .$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

Зауваження. Як бачимо, результати не залежать від параметра α.

3) Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}$.

Розв'язування. Скористаємось критерієм Коші. Для цього розглянемо інтеграл від нашої функції на проміжку [a;b], де $a = 1 - 1/(\pi n), b = 1 - 1/(2\pi n)$, та зробимо заміну $t = 1/(1-x)$:

$$\left|\int_a^b \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}\right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 t}{t}dt > \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 t dt = \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}$$

Таким чином, існує число $\varepsilon = \frac{1}{4}$ таке, що для будь-якого числа $c \in [0;1]$ існують числа $b > a > c,$ для яких виконується нерівність:

$$\left|\int_a^b \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}\right| \geq \varepsilon .$$

За крітерієм Коші це означає, що наш інтеграл розбігається.

Відповідь: розбігається.

4) Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} x^2 \cos e^x dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $e^x = t,$ одержимо: $\int_0^{+\infty} x^2 \cos e^x dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t}\cos t\, dt$.

Покажемо, що функція $g(x)=\dfrac{\ln^2 t}{t}$ монотонно прямує до нуля при $t\to+\infty$.

Дійсно: $g'(x)=\dfrac{2\ln t-\ln^2 t}{t^2}<0$ при $t>e^2$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln^2 t}{t}=2\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=2\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0.$

Оскільки $\forall b>1$ $\left|\int\limits_1^b \cos t\,dt\right|=\left|\sin b-\sin 1\right|\le 2,$ то за ознакою Діріхле наш інтеграл збігається. З'ясуємо, чи збігається він абсолютно. Оскільки $\forall t>0$ виконується нерівність $\dfrac{\ln^2 t}{t}\left|\cos t\right|\ge\dfrac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t,$ то дослідимо на збіжність інтеграл

$$I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos 2t\,dt.$$

Перший з інтегралів в правій частині рівності розбігається, тому що

$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln^2 t}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^{x}\ln^2 t\,d(\ln t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3}\ln^3 x=+\infty.$ В той же час інтеграл

$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t\,dt$ збігається за ознакою Діріхле. Таким чином, інтеграл I розбігається.

Відповідь. Збігається умовно.

Завдання для аудиторної та домашньої роботи

Обчислити інтеграл, або встановити його розбіжність:

1) $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}};$

3) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx;$

4) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(4x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}};$

6) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2+12}{\left(x^2+1\right)^2}dx;$

$7)\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}};$

$8)\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2};$

$9)e^{-ax}\sin bxdx, a>0;$

$10)\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos bxdx, a>0;$

$11)\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\sin^2 bxdx, a>0;$

$12)\int_{0}^{+\infty}x^n e^{-x}dx, \mathrm{n}\in\square;$

$13)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3};$

$14)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(ax^2+2bx+c\right)^n}, \mathrm{a}>0,$

$\mathrm{ac}-\mathrm{b}^2>0, \mathrm{n}\in\square;$

$15)\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}};$

$16)\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}};$

$17)\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\left(4x^1-1\right)\sqrt{x^2-1}};$

$18)\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}(\mathrm{x}-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\mathrm{dx};$

$19)\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{dx};$

$20)\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{x}\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{dx};$

$21)\int_{0}^{\pi}\frac{|\mathrm{cosx}|}{\sqrt{\mathrm{sinx}}}\mathrm{dx};$

$22)\int_{0}^{e}\frac{dx}{e^x-1};$

$23)\int_{-1}^{0}e^{1/x}\cdot\frac{dx}{x^3};$

$24)\int_{-1}^{1}e^{1/x}\cdot\frac{dx}{x^3};$

$25)\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{arcsinx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx};$

$26)\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\mathrm{arcsinx}}};$

$27)\int_{0}^{1}\frac{2-\sqrt[3]{x}-x^3}{\sqrt[5]{x^3}}\mathrm{dx};$

$25)\int_{-0.5}^{-0.25}\frac{dx}{x\sqrt{2\mathrm{x}+1}};$

$29)\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{\mathrm{x}^2-2}};$

$30)\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};$ $\qquad$ $31)\int_{-1}^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x}};$

$32)\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{1-x^2}};$ $\qquad$ $33)\int_{-1}^1 \frac{x^4dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}};$

$34)\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}}, \mathrm{a}>0, \mathrm{b}\ge 0;$ $\qquad$ $35)\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \mathrm{n}\in\mathbb{N};$

$36)\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx, b>a;$ $\qquad$ $37)\int_0^{\pi/4} \sqrt{ctgx}dx;$

$38)\int_0^{\pi/2} \sqrt{tgx}dx;$ $\qquad$ $39)\int_0^2 \left(x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx;$

$40)\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\mathrm{arccosx}}};$

Дослідити на збіжність інтеграл:

$41)\int_1^{+\infty} \frac{1+\mathrm{arcsinx}(1/x)}{1+x\sqrt{\mathrm{x}}}\mathrm{dx};$ $\qquad$ $42)\int_2^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x}-1\right)dx;$

$43)\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2-1}};$ $\qquad$ $44)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\left(x-\cos(\pi/x)\right)^2}\mathrm{dx};$

$45)\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{x}^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\mathrm{dx};$ $\qquad$ $46)\int_{-3/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{x}+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\mathrm{dx};$

$47)\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{xshx}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx};$ $\qquad$ $48)\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}-e^{-4/x^2}\right)dx;$

$49)\int_0^{+\infty} \mathrm{x}^{-2}\,\mathrm{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{dx};$ $\qquad$ $50)\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{arctg}\frac{x}{2+x}\mathrm{dx};$

$51)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sinx}}{x^2}\mathrm{dx};$ $\qquad$ $52)\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{dx};$

53) $\int_{1}^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}};$

54) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos x-\sin x}}{\sqrt{\cos x+\sin x}}\mathrm{dx};$

55) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{tg\left(x^3-7x^2+15x-9\right)}};$

56) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\ln(1+\mathrm{x})};$

57) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}};$

58) $\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1};$

59) $\int_{0}^{\pi} \frac{shdx}{e^x-\cos x};$

60) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}-\mathrm{arctgx}};$

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл:

61) $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{x}\cos\left(x^2\ln x\right)dx;$

62) $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{x}^{3/2}\sin\left(x^3-2x\right)dx;$

63) $\int_{1}^{+\infty} \cos\left(x^{3/2}-\ln x\right)dx;$

64) $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{x}\sin\left(\sqrt{x^5}-1\right)dx;$

65) $\int_{1}^{+\infty} \cos\left(x^3-x\right)dx;$

66) $\int_{1}^{+\infty} \sin\left(\mathrm{x}\ln x\right)dx;$

67) $\int_{0}^{+\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\mathrm{sinx}^3\,dx;$

68) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2\cos x^3}{\left(3x-\mathrm{arctgx}\right)^{\alpha}}\mathrm{dx};$

69) $\int_{1}^{+\infty} \left(\left(x+1\right)^{\alpha}-x^{\alpha}\right)\mathrm{sinx}^2\,dx;$

70) $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{sinx}^{\alpha}\,\mathrm{sinx}^{-\alpha}\,dx,\alpha>0;$

71) $\int_{1}^{1} \frac{\sin\left(1/x\right)dx}{x^2+\sqrt{x^3}+x^2\cos\left(1/x\right)};$

72) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx};$

73) $\int_{0}^{1} \left(1-e^{\sqrt[3]{x^2}\cos(1/x)}\right)\frac{dx}{x^2};$

74) $\int_{0}^{0.5} \frac{\cos^3\ln x}{x\ln x}\mathrm{dx};$

75) $\int_{0}^{1} (1-x)^{\alpha}\sin\frac{\pi}{1-x}dx;$

76) $\int_{0}^{1} \frac{x^{\alpha}}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}dx;$

77) $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x^\alpha}$;

78) $\int_0^{0.5}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \cos\frac{1}{x^2}dx$;

79) $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)dx}{x^2\left(1/x+\sin(1/x)\right)^\alpha}$;

80) $\int_0^{\pi/4}\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sin^\alpha x}$;

Обчислити головне значення інтеграла:

81) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\text{arctgx}+\frac{1}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}\right)\text{dx}$;

82) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{13+x}{17+x^2}\text{dx}$;

83) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}$;

84) $\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}$;

85) $\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$;

86) $\text{v.p.}\int_a^b\frac{dx}{(x-c)^3},\text{c}\in(a;b)$;

87) $\text{v.p.}\int_{0.5}^4\frac{dx}{x\ln x}$;

88) $\text{v.p.}\int_0^\pi x\,\text{tgxdx}$;

85) $\text{v.p.}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3-5\sin x}$;

90) $\text{v.p.}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\alpha-\sin x},\alpha\in(0;1)$;

Відповіді. 1) $\pi/2\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3)6; 4) $\frac{1}{2}e^{\pi/2}$; 5) $\pi\sqrt{3}/9$; 6) $13\pi/4$; 7) $\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)$;
8) $\frac{2}{3}$; 9) $b/\left(a^2+b^2\right)$; 10) $a/\left(a^2+b^2\right)$; 11) $2b^2/\left(a\left(a^2+4b^2\right)\right)$; 12) n!;
13) $4\pi/\left(3\sqrt{3}\right)$; 14) $\frac{(2n-3)!!\pi a^{n-1}}{(2n-2)!!\left(ac-b^2\right)^{n-1/2}}$; 15) $\frac{3\pi}{4}$; 16) $2b^2/\left(a\left(a^2+4b^2\right)\right)$;
16) $2\pi/\left(3\sqrt{3}\right)$; 17) $\pi\sqrt{3}/18$; 18) $\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)/4-(3\ln 2)/2$; 19)0; 20)0; 21)4;
22) *розбігається*; 23) $-2e^{-1}$; 24) *розбігається*; 25) $\pi/8$; 26) $\sqrt{2\pi}$; 27) 625/187;
28) $2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; 29) $\pi/2$; 30) $\pi/2\arcsin(3/4)$; 31) $\pi/\sqrt{15}$; 32) $\pi/4\sqrt{15}$;

$33)\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right);\ 34)2,\text{якщо}\,b\ge a;\frac{2a}{b},\text{якщо}\,b>a;$

$35)\frac{(n-1)!!!}{n!!},\text{якщо}\,n=2k,k\in\mathbb{N};\frac{(n-1)!!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2},\text{якщо}\,n=2k-1,k\in\mathbb{N};$

$36)\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b);\ 37)\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right);\ 38)\pi/\sqrt{2};\ 39)\sqrt{2};\ 40)2\sqrt{\pi};$

41) зб.; 42) зб.; 43) зб.; 44) розб.; 45) розб.; 46) розб.; 47) зб.; 48) зб.; 49) зб.;
50) розб.; 51) розб.; 52) зб.; 53) зб.; 54) зб.; 55) розб.; 56) розб.; 57) зб.;
58) зб.; 59) розб.; 60) зб.; 61) зб.ум.; 62) зб.ум.; 63) зб.ум.; 64) зб.ум.;
65) зб.ум.; 66) зб.ум.; 67) зб.абс.при $\alpha<-1$, зб.ум.при $-1\le\alpha<2$;
68) зб.абс.при $\alpha>3$, зб.ум.при $0<\alpha\le 3$;
69) зб.абс.при $\alpha\le 0$, зб.ум.при $0<\alpha\le 2$;
70) зб.абс.при $\alpha>1$, зб.ум.при $1/2<\alpha\le 1$; 71) зб.ум.; 72) розб.; 73) зб.ум.;
74) зб.ум.; 75) зб.абс.при $\alpha>-1$, зб.ум.при $-2<\alpha\le -1$;
76) зб.абс.при $\alpha>-1$, зб.ум.при $-2<\alpha\le -1$;
77) зб.абс.при $\alpha<1$, зб.ум.при $1\le\alpha<3/2$;
78) зб.абс.при $\alpha>-1$, зб.ум.при $-3<\alpha\le -1$;
79) зб.абс.при $\alpha>1$, зб.ум.при $0<\alpha\le 1$; 80) зб.абс.при $\alpha<1$, зб.ум.при $1\le\alpha<2$;

$81)\pi;\ 82)13\pi/\sqrt{17};\ 83)0;\ 84)0;\ 85)-\ln 2;\ 86)\frac{1}{2}\left((a-c)^{-2}-(b-c)^{-2}\right);\ 87)\ln 2;$

$88)-\pi\ln 2;\ 89)-\frac{\ln 3}{4};\ 90)\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}.$

Тема 10. Гамма-функція та бета-функція Ейлера.

Гамма та бета-функції є одними з найважливіших (крім елементарних) функцій математичного аналізу.

Питання теоретичного характеру.

6) Означення гамма-функції Ейлера та знаходження її області визначення.
7) Неперервність та нескінченна диференційованість гамма-функції на області визначення. Формули для похідних гамма-функції.
8) Основне функціональне співвідношення для гамма-функції (формула зведення). Гамма-функція як узагальнення факторіала.

4.Обчислення значень гамма-функції в точках $p=n+\frac{1}{2},n\in N$.

5.Поведінка гамма-функції $\Gamma(p)$ при $p \to +\infty$ та при $p \to +0$.

6.Продовження гамма-функції $\Gamma(p)$ на ліву піввісь $p < 0, p \neq -1, -2, \ldots$ Графік гамма-функції.

7.Теорема про функціональну характеристику гамма-функції.

8.Бета-функція: означення та знаходження області визначення.

9.Неперервність бета-функції на області визначення. Симетрія.

10.Інтегральне представлення бета-функції.

11.Зв'язок між гамма та бета-функцією.

12.Формули зведення для бета-функції.

13. Довести, що

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-1} (\cos x)^{p-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right), (p, q > 0).$$

Означення: *Гамма-функцією* називається невласний інтеграл $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$

.

Основні властивості гамма-функції.

1.Функція $\Gamma(p)$ визначена при всіх $p > 0$, неперервна та має неперервні похідні всіх порядків в своїй області визначення $(0, +\infty)$.

2.Похідні гамма-функції знаходяться за формулами : $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$

.

3.***Теорема*** (формула зведення). $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ для всіх $p > 0$.

Це основне функціональне співвідношення для гамма-функції. Оскільки $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, то застосувавши формулу зведення n разів, отримаємо

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \ldots = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Отже, для натуральних n маємо $\Gamma(n) = (n-1)!$, тобто гамма-функція є узагальненням факторіала.

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx=\left|x=t^2\right|=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ (Пуассон). Звідки за формулою зведення маємо $\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$ для натурального n.

5.За допомогою співвідношення $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$ функцію $\Gamma(p)$ можна продовжити на від'ємні значення аргументу $p<0; p\neq -1,-2,\ldots$. Якщо $-n<p<-(n-1)$, то $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}$. Вибираючи натуральне n так, щоб $p+n=\alpha$ задовольняло умові $0<\alpha<1$ і виконавши заміну $p+n=\alpha$, отримуємо $\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}$.

6.Поведінка при $p\to+0$ і $p\to+\infty$.

Маємо $\Gamma(p)\to+\infty$ при $p\to+\infty$ і $\Gamma(p)\to+\infty$ при $p\to+0$.

Більше того $\Gamma(p)\sim\frac{1}{p}$ при $p\to+0$.

Означення. Функція $f(x):(a,b)\to(0,+\infty)$ називається *логарифмічно опуклою* на (a,b), якщо $\ln f(x)$ є опуклою вниз на (a,b) функцією.

7.***Теорема.*** (про функціональну характеристику гамма-функції)

Припустимо, що для функції $f:(0,+\infty)\to R$ виконуються умови:

1) $f(1)=1$;

2) $\forall p>0 \quad f(p+1)=pf(p)$;

3) f - логарифмічно опукла на $(0;+\infty)$.

Тоді $\forall p>0 \quad f(p)=\Gamma(p)$.

Означення. Бета-функцією називається інтеграл $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$.

8.Бета-функція $B(p,q)$ визначена при $p>0, q>0$ і неперервна на всій області визначення

9.Симетрія. $\forall p>0, q>0$ справедлива рівність $B(p,q)=B(q,p)$.

10.Інтегральне представлення бета-функції. Справедлива рівність

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\,,\ \ p,q>0\,.$$

11.Зв'язок між бета та гамма-функціями: $\forall p,q>0\quad B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

12.Формули зведення для бета-функції: $B(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,q)$

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q),\quad \forall p,q>0\,.$$

13.Формула доповнення для бета-функції: $B(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi},0<p<1$.

14.Формула доповнення для гамма-функції: $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi},0<p<1$.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)$.

Розв'язання: .Маємо $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-3\right)$. Застосувавши формулу п.5, отримаємо

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-3\right)=\frac{(-1)^3\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{\pi}\cdot 2^3}{1\cdot 3\cdot 5}=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}\,.$$

Відповідь: $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{8}{15}\sqrt{\pi}$.

Приклад 2. Обчисліть $\left(-\dfrac{5}{2}\right)!$.

Розв'язання. Для натуральних n маємо $n! = \Gamma(n+1)$. Звідки $\left(-\frac{5}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right) = \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-2\right)$. За формулою п.5 маємо:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{(-1)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot 2^2}{1\cdot 3} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,.$$

Відповідь: $\left(-\frac{5}{2}\right)! = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

Приклад 3. Доведіть рівність $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \quad m,n>0$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $x = \sin^2 t$:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-1}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin^2 t, dx = 2\sin t\cos t dt \\ x \in (0,1) \Rightarrow t \in \left(0, \pi/2\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-2} t\left(1-\sin^2 t\right)^{2q-2} \cdot 2\sin t\cos t dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t\cos^{2q-1} t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{позначимо}\, 2p-1 = m, 2q-1 = n, \\ \Rightarrow p = \frac{m+1}{2}, q = \frac{n+1}{2} \end{array} \right| = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t\cos^n t dt\,.$$

Отже $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, що і треба було довести.

Приклад 4. Обчислити $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)$.

Розв'язання. Маємо $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) = \Gamma\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}-2\right) = \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{(-1)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)} =$

$$=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$. За формулою доповнення для гамма-функції (п.14) маємо $\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Отже $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi$.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi$.

Приклад 5. Обчисліть інтеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+1\right)}dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $x=\sqrt{t}$:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+1\right)}dx=\left|\begin{array}{l} x^2=t, x=\sqrt{t}, dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x\in(0,+\infty)\Rightarrow t\in(0,+\infty)\end{array}\right|=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-1/4}}{t+1}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\ln t\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-3/4}}{t+1}\ln t\,dt.$$

Згідно інтегрального представлення бета-функції та формули доповнення маємо: $B(p,1-p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$. Диференціюючи обидві частини рівності по параметру p і враховуючи, що $\left(x^{p-1}\right)'_p=x^{p-1}\ln x$, отримаємо:

$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)'_p dx=\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)'_p$, тобто $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx=\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)'_p$. Отже

$$I=\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-3/4}}{t+1}\cdot\ln t\,dt=\left|p-1=-\frac{3}{4}, p=\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)'_{p=1/4}=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 p\pi}\cdot\cos p\pi\cdot\pi\right)_{p=1/4}=$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\cos\pi/4}{\sin^2\pi/4}=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}/2}{1/2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2.$$

Відповідь: $I=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

10) Обчисліть значення функції.

1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. $\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$

3. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

4. $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$

5. $\left(-\frac{7}{2}\right)!$

6. $\left(-\frac{11}{2}\right)!$

7. $B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

8. $B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

9. $B\left(\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$

10. $B\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$

11. $\left(\frac{3}{2}\right)!$

12. $\left(\frac{5}{2}\right)!$

Виразіть через значення гамма-функції інтеграли:

13. $\int_0^{+\infty} e^{-x^{\alpha}} dx, \alpha > 0$

14. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx, \alpha, p > 0$

15. $\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x^{\beta}} dx, \alpha > -1, \beta > 0$

16. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} e^{-\frac{\alpha}{2x^2}} dx, \alpha > 0, n \in N$

17. $\int_1^{\infty} (\ln x)^p \frac{dx}{x^2}, p > -1$

18. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$

Виразіть через значення бета-функції інтеграли:

19. $\int_0^1 x^{\alpha}\left(1-x^{\beta}\right)^{\gamma} dx, \quad \alpha, \gamma > -1, \beta > 0$

20. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^{\alpha}}}, \alpha > 0$

21. $\int_0^a x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \; a, \alpha, \beta > 0$

22. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta}} dx, 0 < \alpha < \beta$

23. $\int_0^1 \frac{x^{3\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx, \; \alpha > -\frac{1}{3}$

24. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x} dx, \; p > 1$

Доведіть рівності;

25. $B(p,q) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad p, q > 0$

26. $B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad p, q > 0$

27. $B(p,p)=\dfrac{1}{2^{2p-1}}B\left(\dfrac{1}{2},p\right),\ p>0$

28. $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ p,q>0$

Обчисліть за допомогою гамма- чи бета-функції:

29. $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$

30. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$

31. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^8 x\,dx$

32. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^4 x\,dx$

33. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^5 x\,dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\cos^4 x\,dx$

35. $\int_0^{\pi/4} \sin^5 4x\cos^4 2x\,dx$

36. $\int_0^{\pi} \sin^6 x\cos^2 \dfrac{x}{2}\,dx$

37. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$

38. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4}dx$

39. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^3}dx$

40. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\left(1+x^3\right)^2}dx$

41. $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^4 dx$

42. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx,\ n\ge 2, n\in N$

43. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

44. $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ n\in N$

45. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\ln x}{1+x^3}dx$

46. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$

47. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}dx$

48. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}dx$

49. $\int_0^1 \dfrac{x}{(2-x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$

50. $\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x^2-x^3}}dx$

51. $\int_0^1 \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}\cdot\dfrac{dx}{(x+3)^2}$

52. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(2+x)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

Відповіді.

13. $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$; 14. $\frac{1}{2^p}\Gamma(p)$; 15. $\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$; 16. $2^{\frac{n}{2}-1}a^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ 17. $\Gamma(p+1)$; 18. $\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}$;

19. $\frac{1}{\beta}B\left(\frac{\alpha+1}{\beta},\gamma+1\right)$; 20. $\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{n}\right)$; 21. $a^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)$; 22. $B(\beta-\alpha,\alpha)$; 23. $\frac{1}{3}B\left(\alpha+\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; 24. $2^{p-1}B\left(\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right)$; 25. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}$; 30. $\frac{\pi}{8}$; 31. $\frac{5\pi}{2^{12}}$; 32. $\frac{3\pi}{512}$; 33. $\frac{1}{24}$;

34. $\frac{9\pi}{4096}$; 35. $\frac{8}{105}$; 36. $\frac{5\pi}{32}$;37. $\frac{\pi}{3}$; 38. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 39. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 40. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$; 41. $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

42. $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$; 43. $\frac{\pi a^4}{16}$; 44. $\frac{(2n-1)!!\cdot a^{n+2}}{(n+1)!\cdot 2^{2n+2}}$; 45….; 46. $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$; 47. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 48. $\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}}$;

49. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$; 51. $\frac{\pi\sqrt{5}}{100}$; 52. $\frac{\pi}{4\sqrt{6}}$

Тема 11. Інтеграл Стілтьєса. Основні поняття і теореми.

1.Монотонні функції.

Означення. Функція $f(x):[a,b]\to R$ називається *монотонно зростаючою* на відрізку $[a,b]$, якщо для $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ з умови $x_1<x_2$ випливає $f(x_1)\le f(x_2)$.

(Позначається : $f(x)$□ $на[a,b]$). Якщо з умови $x_1<x_2$ випливає $f(x_1)\ge f(x_2)$, то функція $f(x)$ називається *монотонно спадною*. (Позначається : $f(x)$□ $на[a,b]$).

Для довільної точки $x_0\in[a,b]$ величина $\Delta_{x_0}=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ називається *стрибком* функції в точці x_0.

Домовимось, що $f(a-0)=f(a), f(b+0)=f(b)$.

Зауважимо, що для неперервної в точці x_0 функції $\Delta_{x_0}=0$.

Теорема. Множина точок розриву монотонної функції на відрізку скінченна або зліченна.

Означення. Якщо функція $h(x)$ монотонно зростає на відрізку $[a,b]$, $(x_k)_{k\ge 1}$ - всі її точки розриву і виконується умова $\sum_{k\ge 1}\Delta_{x_k}(h)=h(b)-h(a)$, то $h(x)$ називається *функцією стрибків*.

Теорема: Якщо функція $f(x)$ монотонно зростає на відрізку $[a,b]$ то її можна подати у вигляді суми $f(x)=g(x)+h(x)$, де функція $g(x)$ неперервна і монотонно зростає на відрізку $[a,b]$, а функція $h(x)$ - функція стрибків, яка має розриви в тих сам точках і тієї ж величини, що і функція $f(x)$.

В якості функції $h(x)$ можна взяти функцію:
$h(0)=0, h(x)=\sum_{x_k<x}\Delta_{x_k}(f)+f(x)-f(x-0)$.

Означення. Функція $g(x)$ називається *неперервною компонентою*, а $h(x)$ - *дискретною компонентою* функції $f(x)$.

Приклад 1. Подайте у вигляді суми неперервної та дискретної компонент функцію $f(x)=\begin{cases} x^3, 0\le x<1 \\ \sqrt{x}+1, 1\le x\le 2 \\ 2^x, 2<x\le 3 \end{cases}$.

Розв'язання. Функція має розриви в точках $x_1=1, x_2=2$. Відповідно,
$\Delta_{x_1}(f)=2-1=1$, $\Delta_{x_2}(f)=4-\left(\sqrt{2}+1\right)=3-\sqrt{2}$. Отже, $h(x)=\begin{cases} 0, x<1 \\ 1, 1\le x\le 2 \\ 4-\sqrt{2}, 2<x\le 3 \end{cases}$.

Звідки $g(x)=f(x)-h(x)=\begin{cases} x^3, 0\le x<1 \\ \sqrt{x}, 1\le x\le 2 \\ 2^x-4+\sqrt{2}, 2<x\le 3 \end{cases}$.

2. Функції обмеженої варіації.

Нехай $f(x)$ - функція, що визначена на відрізку $[a,b]$, $(a<b)$, яка приймає дійсні значення. Позначимо через T довільне розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Означення. Функція $f(x):[a,b]\to R$ називається *функцією обмеженої варіації* на відрізку $[a,b]$, якщо існує константа C така, що для довільного розбиття T відрізка $[a,b]$ виконується умова: $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le C$.

Множина всіх функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ позначається символом $BV[a,b]$.

Означення. Варіацією функції $f(x):[a,b]\to R$ на відрізку $[a,b]$ називається число $\mathop{V}\limits_a^b(f)=\sup\limits_T\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$, де точна верхня межа обчислюється по всіх можливих розбиттях відрізка $[a,b]$.

Зрозуміло, що $f(x)$ - функція обмеженої варіації на $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\mathop{V}\limits_a^b(f)<+\infty$. Для функцій, що не мають обмеженої варіації вважаємо $\mathop{V}\limits_a^b(f)=+\infty$.

Приклад 2. Обчисліть варіацію монотонної функції на $[a,b]$.

Розв'язання. Нехай $f(x)$ монотонно зростає на $[a,b]$. Тоді з $x_{k-1}<x_k \Rightarrow$ $f(x_{k-1})\le f(x_k)$. Отже, $\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=f(x_k)-f(x_{k-1})$, тому

$$S_T(f)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a).$$

Звідки $\mathop{V}\limits_a^b(f)=\sup\limits_T S_T(f)=f(b)-f(a)$.

Якщо функція $f(x)$ монотонно спадає на $[a,b]$, то $\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=f(x_{k-1})-f(x_k)$, звідки $\mathop{V}\limits_a^b(f)=f(a)-f(b)$. Отже, для монотонної функції $\mathop{V}\limits_a^b=\left|f(b)-f(a)\right|$.

3. Властивості функцій обмеженої варіації.

1. $\mathop{V}\limits_a^b(f)\ge 0$ (невід'ємність).

2. $\mathop{V}\limits_a^b(f)\ge\left|f(b)-f(a)\right|$ (оцінка знизу).

3. Кожна функція обмеженої варіації є обмеженою .

4. Якщо $f(x), \mathrm{g}(x)$, функції обмеженої варіації то їх сума , різниця та добуток є функціями обмеженої варіації .

Якщо додатково $\exists\alpha > 0$, що $\forall \alpha \epsilon [\mathrm{a,b}]$ $g(x) \ge \alpha$, то відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ є функцією обмеженої варіації.

5. (Адитивність). Якщо $f(x)$ є $BV[a,b]$, то $\forall c$ є (a,b) , $\mathrm{f}(x)$ є $\mathrm{BV[a,c]}$, то f(x) є $\mathrm{BV[c,b]}$ і

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Приклад 3. Обчислити $\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(|\cos x|)$.

Розв'язання, Функція $f(x) = |\cos x|$ монотонно спадає на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і монотонно зростає на $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Отже за властивістю адитивності

$$\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(|\cos x|) = \overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}}(\cos x) + \overset{\pi}{\underset{\frac{\pi}{2}}{V}}(-\cos x) = (1-0) + (1-0) = 2 .$$

Теорема Жордана. Для того, щоб функція $f(x)$ мала обмежену варіацію на відрізку $[a,b]$ необхідно і достатньо , щоб на цьому відрізку її можна було подати у вигляді різниці двох монотонно зростаючих функцій.

(монотонність вважається тут у широкому сенсі: $\forall x_1, x_2$ є $[a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$)

Приклад 4. Подати функцію $f(x) = x^2$ на відрізку $[-1,1]$ у вигляді різниці двох монотонно зростаючих функцій

Розв'язання. Беремо $g(x) = \overset{x}{\underset{-1}{V}}(x^2)$. Тоді на відрізку $[-1,0]$ $f(x) = \mathrm{x}^2$ монотонно спадає, отже $\forall x \in [-1,0]$ маємо $g(x) = f(-1) - f(x) = 1 - x^2$. При $x \in [0,1]$ функція $f(x)$ монотонно зростає , тому $g(x) = \overset{x}{\underset{-1}{V}}(x^2) = \overset{0}{\underset{1}{V}}(x^2) + \overset{x}{\underset{0}{V}} = 1 + x^2$.

Отже $g(x)=\begin{cases}1-x^2, x\epsilon[-1,0]\\ 1+x^2, x\epsilon[0,1]\end{cases}$. Звідки маємо $h(x)=g(x)-f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\epsilon[-1,0]\\ 1, x\epsilon[0,1]\end{cases}$.

Тоді за побудовою $f(x)=g(x)-h(x)$.

4. Питання теоретичного характеру.

1. Означення монотонних функцій.

2. Розриви монотонних функцій. Стрибки.

3. Теорема про множину точок розриву монотонності функцій.

4. Значення функції стрибків. Приклад.

5. Теорема про представлення монотонної функцій у вигляді суми неперервної та дискретної компонент.

6. Що таке розбиття відрізка $[a,b]$? Означення діаметра розбиття. Приклад.

7. Означення функції обмеженої варіації. Означення варіації функції та відрізку.

8. Приклад функції необмеженої варіації.

9. Довести, що абсолютна величина(модуль) функції обмеженої варіації теж є функцією обмеженої варіації.

10.Обчислити варіацію неперервно диференційовної функції та відрізку.

11. Довести, що кожна функція, що має обмежену похідну на відрізку є функцією обмеженої варіації.

12. Теорема Жордана про функції обмеженої варіації.

5. Завдання для аудиторної та домашньої роботи.

Подати у вигляді суми неперервної функції та функції стрибків:

1. $f(x)=\begin{cases}x-1, 0\le x<1\\ \mathrm{e}^x, 1\le x<2\\ 10, x=2\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x+1, -1\le x\le 0\\ \mathrm{e}^x+1, -\le x<1\\ 5, x=1\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \sin x, -1 \le x < 0 \\ 2^x, 0 \le x < 1 \\ \sqrt[3]{x}+3, 1 \le x < 2 \\ 5, x = 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x^2, 0 \le x < 1 \\ 3^x, 1 \le x < 2 \\ \sqrt{x}+10, 2 \le x < 3 \\ 15, x = 3 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x^3, -1 \le x < 0 \\ tgx+1, 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ e^{2x}, \frac{\pi}{4} < x < 1 \\ 10, x = 1 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x^5, -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{\cos x}, 0 \le x \le \frac{\pi}{3} \\ e^{x}, \frac{\pi}{3} < x < 1 \\ 5, x = 1 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{x}+1, \frac{\pi}{2} \le x < 2 \\ 2^x, 2 \le x < 3 \\ 10, x = 3 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ \sqrt[3]{x}+2, 0 \le x < 1 \\ e^x+1, 1 \le x < 2 \\ 12, x = 2 \end{cases}$

Обчислити варіацію функції:

9. $f(x)=x^2,\ x \in [-1,1].$

10. $f(x)=x^4,\ x \in [-1,1].$

11. $f(x)=\sin x,\ x \in [0,\pi].$

12. $f(x)=\cos x,\ x \in [0,\pi].$

13. $f(x)=\cos 2x,\ x \in [0,2\pi].$

14. $f(x)=\sin 2x,\ x \in [0,2\pi].$

15. $f(x)=|\sin x|,\ x \in [0,3\pi].$

16. $f(x)=|\cos x|,\ x \in [0,4\pi].$

17. $f(x)=\sin^2 x,\ x \in [0,2\pi].$

18. $f(x)=\cos^2 x,\ x \in [0,2\pi].$

19. $f(x)=\cos^3 x,\ x \in [0,2\pi]$

20. $f(x)=\sin^3 x,\ x \in [0,2\pi].$

21. $f(x)=\begin{cases} x+1, 0 \le x < 1 \\ 6, x = 1 \\ x^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$

На відрізку $[0,2]$

22. $f(x)=\begin{cases} x-1, 0 \le x < 1 \\ 3, x = 1 \\ x^3, 1 < x \le 2 \end{cases}$

На відрізку $[0,2]$

23. $f(x)=\sin x,\ x \in [0,2\pi]$

24. $f(x)=\cos x,\ x \in [0,2\pi]$

25. $f(x)=1+\cos^2 x,\ x \in [0,\pi]$

26. $f(x)=1+\sin^2 x,\ x \in [0,\pi]$

27. $f(x)=1+\sin 2x,\ x \in [0,\pi]$

28. $f(x)=1+\cos 2x,\ x \in [0,\pi]$

29. $f(x)=\begin{cases} x+1, 0\le x<1 \\ 5, x=1 \\ 1-x^2, 1<x\le 2 \end{cases}$

$x \in [0,2]$

30. $f(x)=\begin{cases} x-1, 0\le x<1 \\ 2, x=1 \\ 2-x^3, 1<x\le 2 \end{cases}$

$x \in [0,2]$

Відповіді:

1. $g(x)=\begin{cases} x-1, 0\le x<1 \\ e^x-e, 1\le x\le 2 \end{cases}$

2. $h(x)=\begin{cases} 0, 0\le x<1 \\ e, 1\le x<2 \\ 10-e^2+e, x=2 \end{cases}$

3. $g(x)=\begin{cases} \sin x, -1\le x<0 \\ 2^x-1, 0\le x<1 \\ \sqrt[3]{x}, 1\le x\le 2 \end{cases}$

4. $h(x)=\begin{cases} 0, -1\le x<0 \\ 1, 1\le x<2 \\ 3, 1\le x<2 \\ 5-\sqrt[3]{2}, x=2 \end{cases}$

5. $g(x)=\begin{cases} x^3, -1\le x<0 \\ tgx, 0\le x\le \frac{\pi}{4} \\ e^{2x}-e^{\frac{\pi}{2}}+1, \frac{\pi}{4}<x\le 1 \end{cases}$

6. $h(x)=\begin{cases} 0, -1\le x<0 \\ 1, 1\le x\le \frac{\pi}{4} \\ e^{\frac{\pi}{2}}-1, \frac{\pi}{4}\le x<1 \\ 9-e^2+e^{\frac{\pi}{2}}, x=1 \end{cases}$

7. $g(x)=\begin{cases} 1-\cos x, 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{x}+1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\le x<2 \\ 2^x-\sqrt{2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}-3, 2\le x\le 3 \end{cases}$

8. $h(x)=\begin{cases} 0, 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\le x<2 \\ 3+\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}, 2\le x<3 \\ 7-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}, x=3 \end{cases}$

9. $V=2$ 11. $V=2$ 13. $V=8$ 15. $V=6$

17. $V=4$ 19. $V=4$ 21. $V=14$

$$23.\ \alpha(x)=\mathop{V}_{0}^{x}(\sin x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 2-\sin x, \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2}\\ 4+\sin x, \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases} \qquad \beta(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 2-2\sin\mathrm{x}, \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2}\\ 4, \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

$$25.\ \alpha(x)=\mathop{V}_{0}^{x}\left(1+\cos^2 x\right)=\begin{cases}\sin^2 x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 1+\cos^2 x, \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases} \qquad \beta(x)=\begin{cases}-2\cos^2\mathrm{x}, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, \frac{\pi}{2}\le x\le 0\end{cases}$$

$$f(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

$$27.\ \alpha(x)=\mathop{V}_{0}^{x}(1+\sin 2x)=\begin{cases}\sin 2x, 0\le x\le \frac{\pi}{4}\\ 2-\sin 2x, \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{3\pi}{4}\\ 4+\sin 2x, \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases} \qquad \beta(x)=\begin{cases}-1, 0\le x\le \frac{\pi}{4}\\ 1-2\sin 2\mathrm{x}, \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{3\pi}{4}\\ 3, \frac{3\pi}{4}\le x\le \pi\end{cases}$$

$$f(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

$$29.\ \alpha(x)=\mathop{V}_{0}^{x}(x)=\begin{cases}x, 0\le x<1\\ 6, \mathrm{x}=1\\ x^2+7, 1<x\le 2\end{cases} \qquad \beta(x)=\begin{cases}-1, 0\le x<1\\ 1, \mathrm{x}=1\\ 6+2\mathrm{x}^2, 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

6. Інтеграл Стілтьєса.

Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Нехай $f(x):[a,b]\to R$ є обмеженою функцією на $[a,b]$, $\alpha(x):[a,b]\to R$ монотонно зростаюча функція на відрізку $[a,b]$. Розглянемо довільне розбиття $T: a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$ відрізка $[a,b]$ з відміченими точками

$\theta_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1,\ldots,n$. Позначимо через

$m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x),\quad M_k = \sup\limits_{[x_{-1}x_k]} f(x),\quad \alpha_T = \max\limits_k (x_k - x_{k-1})$.

Означення. *Інтегральною сумою Рімана-Стілтьєса* функції $f(x)$ відносно

функції $\alpha(x)$ називається сума $S_T(f,\alpha,\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\theta_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$.

Нижньою інтегральною сумою Дарбу-Стілтьєса функції $f(x)$ відносно

функції $\alpha(x)$ називається сума $\underset{-T}{S}(f,\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$.

Верхньою інтегральною сумою Дарбу-Стілтьєса функції $f(x)$ відносно

функції $\alpha(x)$ називається сума $\bar{S}_T(f,\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$.

Нижнім інтегралом функції $f(x)$ відносно функції $\alpha(x)$ на відрізку $[a,b]$

називається число $I_* = \sup\limits_T \underset{-T}{S}(f,\alpha)$, *а верхнім інтегралом* – число

$I^* = \inf\limits_T \bar{S}_T(f,\alpha)$, де sup та inf беруться по всіх розбиттях T відрізка $[a,b]$

Функція *f(x)* називається інтегровною на відрізку $[a,b]$, якщо її нижній та верхній інтеграли рівні : $I_*=I^*=I$. В цьому випадку число I. називають інтегралом функції *f(x)*відносно функції $\alpha(x)$ на відрізку $[a,b]$, і позначається $I = \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$.

Приклад 1. Нехай $f(x)=\begin{cases}-1, \alpha<0\\ 1, \alpha\ge 0\end{cases}$, $\alpha(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\ge 0\end{cases}$. Чи існує інтеграл, де $a<0, b>0$?

Розв'язання. Розглянемо довільне розбиття $T: a=x_0<x_1<\ldots x_n=b$.

$$(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}))=\begin{cases}0, \text{при } 0\le x_{k-1} \text{ або } 0>x_k\\ 1, \text{при } x_{k-1}<0\le x_k\end{cases}.$$

Звідки $\underset{-T}{S}(f,\alpha)=m_k(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}))=(-1)\cdot 1=-1$,

аналогічно $\bar{S}_T(f,\alpha)=M_k(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}))=1\cdot 1=1$ для довільного розбиття T.

Тому $I_*=\sup\limits_T(-1)=-1$, $I^*=\inf\limits_T(1)=1$. Отже, *f(x)* не інтегровна на [*a*,*b*].

Теорема 1. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, $\alpha(x)$ монотонна на $[a,b]$, то $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$.

Теорема 2. Якщо $f(x)$ монотонна на відрізку $[a,b]$, $\alpha(x)$ неперервна (і монотонна) на цьому відрізку, то $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$.

Теорема (про наближення через границю інтегральних сум). Якщо інтеграл $I=\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ існує, то справедлива рівність: $I=\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=\lim\limits_{dT\to 0}S_T(\mathrm{f},\alpha,\theta)$. Це означає, що $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$, таке що $\forall T$ $d_T<\delta$ незалежно від вибору відмічених точок. $\theta_k\in[x_{k-1},\mathrm{x}_k]$, $k=1...n$ виконується нерівність $\left|S_T(\mathrm{f},\alpha;\theta)-I\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^n f(\theta_k)(a(x_k)-\alpha(x_{k-1}))-I\right|<\varepsilon$. Позначимо множину $f(x)$ інтегровних відносно функції $\alpha(x)$ функції на відрізку $[a,b]$ через $RS_\alpha[a,b]$.

2. Властивості інтеграла Рімана-Стілтьєса.

1.***Лінійність***. Якщо функції $f(x), g(x)\in RS_\alpha[a,b]$. то їх сума $f(x)+g(x)\in RS_\alpha[a,b]$. і $f(x)\in RS_\alpha[a,b]$. $\forall C\in\mathbb{R}$.

2.***Адетивність.*** Якщо $f(x)\in RS_{\alpha}[a,b]$ і $a<c<b$, то $f(x)\in RS_{\alpha}[a,c]$ і $f(x)\in RS_{\alpha}[c,b]$ і справедливо рівність: $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=\int\limits_a^c f(x)d\alpha(x)+\int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$.

3.***Монотонність.*** Якщо $f(x),g(x)\in RS_{\alpha}[a,b]$. , $\alpha(x)$ монотонно зростає на $[a,b]$ і $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\le\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$.

4.***Оцінка інтеграла***. Якщо $f(x)\in RS_{\alpha}[a,b]$, і $|f(x)|\le M\,\forall x\in[c,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\le M(\alpha(b)-\alpha(a))$ ($\alpha(x)$ монотонно зростає на $[a,b]$).

5. Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)-$ монотонно зростають на $[c,b]$, $f(x)\in RS_{\alpha}[a,b]$.і $f(x)\in RS_{\beta}[a,b]$., то $f(x)\in RS_{\alpha+\beta}[a,b]$., $\forall c$ $f(x)\in RS_{c\alpha(x)}[a,b]$.і справедливі рівності: $\int\limits_a^b f(x)d(\alpha(x)+\beta(x))=\int\limits_a^a f(x)d\alpha(x)+\int\limits_a^b f(x)d\beta(x)$; $\int\limits_a^b f(x)d(c\alpha(x))=c\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$

Остання властивість дозволяє поширити процес інтегрування на функції обмеженої варіації. Нехай $\omega(x)$ є BV$[a,b]$. Тоді за формулою Жордана її можна подати у вигляді різниці $\omega(x)=\alpha(x)-\beta(x)$, де $\alpha(x),\beta(x)$ монотонно зростають на відрізку $[a,b]$.

Означення. Інтегралом Рімана-Стілтьєса функції *f(x).* відносно функції обмеженої варіації $\omega(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається $\int\limits_a^b f(x)d\omega(x)=\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)-\int\limits_a^b f(x)d\beta(x)$, де $\omega(x)=\alpha(x)-\beta(x)-$ розклад Жордана в різницю двох монотонних функцій.

Це означення є коректним (не залежить від вибору $\alpha(x)$ та $\beta(x)$)

3. Обчислення інтегралу Стілтьєса.

Теорема 1. Нехай *f(x)* інтегровна (за Ріманом) на відрізку $[a,b]$, $\alpha(x)-$ неперервна на $[a,b]$ і за винятком скінченого числа точно існує похідна $\alpha'(x)$, яка теж інтегровна (за Ріманом) на відрізку $[a,b]$.

Тоді справедлива рівність: $(RS)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=\int\limits_a^b f(x)d\alpha'(x)$ (ліва частина рівності – інтеграл Стілтьєса, права – інтеграл Рімана).

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}2^x d|x|$.

Розв’язання. Маємо $\alpha(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$, звідки $\alpha'(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1\\ -1, & -1\le x<0\end{cases}$.

Тоді

$$\int\limits_{-1}^{1}2^x d|x|=\int\limits_{-1}^{0}2^x\cdot(-1)\,dx+\int\limits_{0}^{1}2^x\cdot 1dx=\left(-\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2\ln 2}$.

Теорема 2. Нехай $f(x)$– неперервна на відрізку $[a,b]$, $\alpha(x)$– кусково неперервна і має кусково неперервну похідну на відрізку $[a,b]$; тоді справедлива рівність: $(RS)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=\int\limits_a^b f(x)d\alpha'(x)+\sum\limits_{k=1}^{m}f(k)\Delta c_k(\alpha)$, де $c_1,\ldots,c_m$ точки розриву функції $\alpha(x)$, $\Delta c_k(\alpha)=\alpha(c_k+0)-\alpha(c_k-0)$– величина стрибка функції $\alpha(x)$ в точці $c_k, k=1...m$.

В лівій частині цієї рівності інтеграл Стілтьєса, перший доданок в правій частині рівності – інтеграл Рімана. За означенням $\Delta_a(\alpha)=\alpha(a+0)-\alpha(a)$, $\Delta_b(\alpha)=\alpha(b)-\alpha(b-0)$.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}(x^3+1)d\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ визначається формулою $\alpha(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0\\ 2, & x=0\end{cases}$.

Розв’язання. Функція $\alpha(x)$ має єдину точку розриву $x=0$. Маємо $\Delta_0(\alpha)=\alpha(0+0)-\alpha(0-0)=3-1=2$. Отже

$$\int\limits_{-1}^{1}(x^3+1)d\alpha(x)=\int\limits_{-1}^{0}(x^3+1)dx+\int\limits_{0}^{1}(x^3+1)\cdot 2xdx+(x^3+1)\Big|_{x=0}(3-1)=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{2x^5}{5}+x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}+1\cdot 2=$$

$$=-\frac{1}{4}+1+\frac{2}{5}+1+2=4-\frac{1}{20}=3\frac{19}{20}$$

Відповідь: $3\frac{19}{20}$

Питання теоретичного характеру.

1. Інтегральні суми Стілтьєса : загальна, нижня та верхня.
2. Властивості нижніх та верхніх інтегральних сум Дарбу-Стілтьєса.
3. Критерії інтегровності функції Рімана- Стілтьєса.
4. Класи інтегровних функцій за Стілтьєсом.
5. Інтеграл Стілтьєса як границя інтегральних сум.
6. Властивості лінійного інтеграла Стілтьєса.
7. Адитивність інтеграла Стілтьєса.
8. Властивість монотонності інтеграла Стілтьєса.
9. Оцінка інтеграла Стілтьєса.
10. Обчислення інтеграла Стілтьєса для кусково гладкої функції $\alpha(x)$.
11. Перетворення Абеля .
12. Інтегрування частинами для інтеграла Стілтьєса.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи.

Обчисліть інтеграл Стілтьєса.

1. $\int_0^{\pi} x^2 d\cos x$.

2. $\int_0^{\pi} x^2 d\sin x$.

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xd\left|\sin x\right|$.

4. $\int_0^{\pi} xd\left|\cos x\right|$.

5. $\int_0^{\pi} xd\left|\cos 2x\right|$.

6. $\int_0^{\pi} x^2 d\left|\sin 2x\right|$.

7. $\int_1^{n} xd\alpha(x)$, де $\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=1, \quad n\in \mathrm{N} \\ k, & k-1\le x\le k,\ 1\le k\le n\end{cases}$.

8. $\int_1^{n} xd\alpha(x)$, де $\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=1, \quad n\in \mathrm{N} \\ (-1)^{k+1}k, & k-1\le x\le k,\ 1\le k\le n\end{cases}$.

9. $\int_1^{n} x^2 d\alpha(x)$, де $\alpha(x)=(-1)^k$, якщо $x\in[k,k+1), k=0,n-1$.

10. $\int_1^n x^2 d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = (-1)^{k+1}$, якщо $x \in [k, k+1), k = 0, n-1$.

11. $\int_{-1}^{1} \sin x d|x|$.

12. $\int_{-1}^{1} \cos x d|x|$.

13. $\int_0^2 \sin \pi x d|x-1|$.

14. $\int_0^2 \cos \pi x d|x-1|$.

15. $\int_{-2}^{2} (x^3+1) d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x \le -1 \\ 2, & -1 < x < 0 \\ x^2+3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

16. $\int_{-1}^{1} (x^2+2) d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3+3, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

17. $\int_{-1}^{3} x d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ 1, & -1 < x < 2 \\ -1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$.

18. $\int_0^3 x d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ x^2, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$.

19. $\int_0^2 x^2 d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{1} \le x < \frac{3}{2} \\ 2, & x = \frac{3}{2} \\ -2, & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$.

20. $\int_0^2 x^3 d\alpha(x)$, де $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ -1, & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$.

21. $\int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d\left(e^x sign \sin x\right)$.

22. $\int_{-\pi}^{\pi} (x+1) d\left(e^x sign \cos x\right)$.

23. $\int\limits_0^{\pi}(x-1)d(\cos\cdot signx)$.

24. $\int\limits_0^{2\pi}(x+1)d(\sin\cdot signx)$.

25. $\int\limits_1^{2}\frac{3^x}{x}d\left(x^2 sign\cos 4x\right)$.

26. $\int\limits_1^{2}\frac{2^x}{x}d\left(x^2 sign\sin 4x\right)$.

Відповіді

1. $4-\pi^2$.

3. $\pi-2$.

5. (-1).

7. $\frac{n(n-1)}{2}$.

9. $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i i^2$.

11. $2-2\cos 1$.

13. $-\frac{4}{\pi}$.

15. $\frac{301}{20}$.

17. (-5).

19. $-\frac{17}{4}$.

21. $2-e^{\pi}-e^{-\pi}$.

23. $1-\pi$.

25. $\frac{4}{\ln 3}\left(6-3^{\frac{3\pi}{8}}-3^{\frac{5\pi}{8}}+3^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Список літератури.

1) Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1. – К.: Либідь; 1993. – 320 с.
2) Фихтенгольц Г.М. Курс интегрального и дифференциального исчисления. Т.3.– М.: Физматгиз, 1963. – 624 с.
3) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 628 с.
4) Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г.Н. Берман. – С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. – 448 с.
5) Рудин У. Основы математического анализа . – М.: Мир, 1966. – 240 с.
6) Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.Наук, 1985. – Т.1. – 456 с. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика. Т 1,2. – М .Эдиториал УРСС, 2007. – 192 с.
7) Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика. Т 1. – М .Эдиториал УРСС, 2010. – 336 с.
8) Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика. Т 2. – М .Эдиториал УРСС, 2007. – 192 с.

9) Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. – К. Техніка, 2003.

ЗМІСТ