НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»

УДК ____________

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ О. І. Клесов

«___»_____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему:
«Уточнення апроксимації де Вілдера для оцінки ймовірності банкрутства у страховій моделі Крамера-Лундберга»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Федчишина Ірина Юріївна __________

Керівник:
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Ільєнко А. Б. __________

Рецензент:
Провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук
Калюжний О. О. __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ О. І. Клесов
(підпис)

«__» _________ 20___ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Федчишиній Ірині Юріївні

1) Тема дисертації «Уточнення апроксимації де Вілдера для оцінки ймовірності банкрутства у страховій моделі Крамера-Лундберга», науковий керівник дисертації Ільєнко А. Б., канд. фіз.-мат. наук, доцент, затверджені наказом по університету від «23» березня 2018 р. № 1016-с.
2) Термін подання студентом дисертації: 04 травня 2018 р.
3) Об'єкт дослідження: процес страхового ризику в моделі Крамера-Лундберга.
4) Предмет дослідження: апроксимація ймовірності банкрутства у моделі Крамера-Лундберга.
5) Перелік завдань, які потрібно розробити:
    1. розробка уточненого алгоритму оцінювання ймовірності банкрутства на нескінченному часовому горизонті;
    2. дослідження якості роботи розробленого алгоритму в порівнянні з апроксимацією де Вілдера.
6) Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 1 рис.

7) Орієнтовний перелік публікацій: І. Ю. Федчишина. Уточнення апроксимації де Вілдера для оцінки ймовірності банкрутства у страховій моделі Крамера-Лундберга: VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р., Київ: Матеріали конф. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського» 2018. – с. 35.
8) Дата видачі завдання: 05 лютого 2018 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Вивчення літератури за темами: страхова модель Крамера-Лундберга, інтегральне рівняння для ймовірності банкрутства на нескінченному часовому горизонті, ймовірність банкрутства у випадку експоненціально розподілених страхових виплат.	05.02.2018 – 16.02.2018	виконано
2.	Вивчення літератури за темами: апроксимація де Вілдера для оцінки ймовірності банкрутства, формула Беєкмана.	16.02.2018 - 02.03.2018	виконано
3.	Чисельне дослідження якості класичної апроксимації де Вілдера за допомогою формули	02.03.2018 – 16.03.2018	виконано

	Беєкмана.		
4.	Знаходження ймовірності банкрутства у випадку страхових виплат, що є сумішшю декількох експоненціальних розподілів.	16.03.2018 – 30.03.2018	виконано
5.	Розробка уточненої апроксимації де Вілдера на основі наближення довільного розподілу страхових виплат сумішшю експоненціальних розподілі.	30.03.2018 – 13.04.2018	виконано
6.	Чисельне дослідження якості отриманого апроксимаційного алгоритму шляхом порівняння результатів його роботи з результатами застосування формули Беєкмана.	13.04.2018 – 27.04.2018	виконано
7.	Підготовка магістерської дисертації	27.04.2018 – 03.05.2018	виконано

Студент ____________ І. Ю. Федчишина

(підпис)

Науковий керівник дисертації ____________ А. Б. Ільєнко

(підпис)

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 48 сторінок, 1 рисунок, 8 таблиць, 4 додатки, 10 першоджерел, 25 слайдів для проектора.

В магістерській дисертації запропонований новий підхід до наближеного знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії на нескінченному часовому горизонті. Необхідність такого наближеного знаходження зумовлюється тим, що точне значення ймовірності банкрутства, будучи розв’язком складного інтегрального рівняння, часто не може бути виражене в явній аналітичній формі.

Ідея розробленого методу полягає в заміні процесу страхового ризику на інший процес ризику зі страховими виплатами, розподіленими за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів. Для такого процесу ризику ймовірність банкрутства відома в аналітичній формі. Заміна реалізується шляхом прирівнювання перших п’яти кумулянтів початкового та нового процесів ризику.

<u>Ключові слова</u>: страховий процес, страхова модель Крамера-Лундберга, ймовірність банкрутства, інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства, апроксимація де Вілдера, суміш двох експоненціальних розподілів, формула Беєкмана,.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация: 48 страниц, 1 рисунок, 8 таблиц, 4 приложения, 10 первоисточников, 25 слайдов для проектора.

В магистерской диссертации предложен новый поход к приближенному нахождению вероятности банкротства страховой компании на бесконечном временном горизонте. Необходимость такого приближенного нахождения обусловлено тем, что точное значение вероятности банкротства, будучи решением сложного интегрального уравнения, часто не может быть выражено в явной аналитической форме.

Идея разработанного метода заключается в замене процесса страхового риска на другой процесс риска со страховыми выплатами, распределенными по закону, который является смесью двух экспоненциальных распределений. Для такого процесса риска вероятность банкротства известна в аналитической форме. Замена реализуется путем приравнивания первых пяти кумулянтов начального и нового процессов риска.

Ключевые слова: страховой процесс, страховая модель Крамера-Лундберга, вероятность разорения, интегральное уравнения для вероятности небанкротства, аппроксимация де Вилдера, смесь двух экспоненциальных распределений, формула Беекмана.

ABSTRACT

Master's degree thesis contains 48 pages, 1 picture, 8 tables, 4 applications, 10 primary sources, 25 slides for the projector.

In the master's thesis a new approach to the approximate finding of the ruin probability of an insurance company on an infinite time horizon is proposed. The need for such an approximate finding is due to the fact that the exact value of the ruin probability, being a solution to a complex integral equation, can often not be expressed in explicit analytical form.

The idea of the developed method is to replace the process of risk with another risk process with insurance payments distributed according to the law, which is a mixture of two exponential distributions. For such a risk process, the ruin probability is known in analytical form. Replacement is realized by equating the first five cumulants of the initial and new risk processes.

Keywords: risk process, the Cramér-Lundberg risk model, ruin probability, integral equation for the non-ruin probability, de Vylder approximation, a mixture of two exponentials claim amount, the Beeckman formula.

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з важливих задач у страхових розрахунках є визначення ймовірності банкрутства страхової компанії. Крім теоретичного інтересу, знання цієї ймовірності дозволяє правильно будувати страхову політику компанії, зокрема, визначати обґрунтовану величину страхових виплат та страхових внесків. В рамках класичної моделі Крамера-Лундберга ймовірність банкрутства як функція від величини початкового капіталу є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра. На жаль, це рівняння може бути розв'язане аналітично лише у виключних випадках. Це зумовлює необхідність розробки алгоритмів наближеного знаходження таких ймовірностей.

Різні наближені методи обчислення ймовірності банкрутства в різні роки пропонувалися Г. Крамером, Ф. Лудбергом, Г. Хадвігером, Дж. Беєкманом, Н. Бауерсом, Ф. де Вілдером та іншими авторами. Ці методи детально описані в монографіях С. Асмуссена та Я. Гранделла.

Один з найбільш простих та точних алгоритмів був розроблений Ф. де Вілдером у 1978 р. В його основі лежить ідея заміни процесу ризику з довільним розподілом страхових виплат на інший процес ризику, побудований за експоненціально розподіленими страховими виплатами. При цьому параметри нового процесу (інтенсивність пуассонівського потоку страхових подій, сукупна величина страхових внесків за одиницю часу та параметр експоненціального розподілу страхових виплат) визначаються таким чином, щоб перші три моменти цього процесу збігалися з відповідними моментами початкового процесу ризику. Після такої заміни можна застосувати точну формулу для ймовірності банкрутства, яка у випадку експоненціально розподілених страхових виплат відома в явному вигляді.

В даній роботі запропоноване уточнення цього алгоритму. Воно засноване на заміні процесу ризику на інший процес, страхові виплати в якому розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів. Новий процес має тепер п'ять параметрів (інтенсивність потоку страхових подій, величина страхових внесків за одиницю часу, параметри обох експоненціальних компонент суміші та ваговий коефіцієнт самої суміші). Тому, прирівнюючи перші п'ять моментів початкового та нового процесів, можна підібрати значення цих параметрів і застосувати точну формулу для ймовірності банкрутства. У випадку страхових виплат, які розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів, ця формула відома в явному вигляді з монографії Г. Паньєра та Ґ. Віллмота.

Не зважаючи на схожість ідеї запропонованого уточнення з оригінальною ідеєю де Вілдера, в процесі виконання роботи були знайдені істотні відмінності в їх реалізації. По-перше, старші моменти процесу страхового ризику мають надзвичайно складний вигляд. Тому замість моментів ми вирішили прирівнювати кумулянти процесу, які мають істотно простішу форму. Як відомо з формул Леонова-Ширяєва, моменти та кумулянти виражаються одні через інші, й тому прирівнювання кумулянтів еквівалентне прирівнюванню моментів. По-друге, таке прирівнювання у випадку суміші експоненціальних розподілів призводить до необхідності наближеного розв'язання нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. По-третє, ця система має придатні розв'язки не для будь-якого розподілу страхових виплат, що дещо звужує сферу використання запропонованого алгоритму. Однак цей алгоритм показує високу якість роботи у випадках, коли розподіл страхових виплат має експоненціальну компоненту така ситуація часто зустрічається у страховій практиці.

Перевірка якості запропонованого методу проводилась шляхом порівняння результатів застосування апроксимації де Вілдера, уточненої апроксимації та «маже точних» значень ймовірності банкрутства. «Майже точні» значення були отримані за допомогою формули Беєкмана, яка дозволяє виразити цю ймовірність через ймовірність перевищення фіксованого рівня сумою випадкової кількості випадкових величин. Значення останньої ймовірності знаходили шляхом комп’ютерного моделювання. Перевірка якості показала, що запропонований алгоритм є істотно точнішим за апроксимацію де Вілдера. У деяких випадках його відносна похибка була в десятки разів меншою за відносну похибку апроксимації де Вілдера.

РОЗДІЛ 1. СТРАХОВА МОДЕЛЬ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА

1.1 Процес Пуассона

Означення 1.1.1 Випадковий процес $N = (N(t))_{t \geq 0}$ називається процесом Пуассона, якщо виконуються наступні умови:

(1) Процес починається в нулі : N(0)=0 м. н.

(2) Процес $N = (N(t))_{t \geq 0} -$ процес з незалежними приростами: для $\forall\ t_i, i = 0, \dots, n$ і $n \geq 1$: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, прирости $N(t_i) - N(t_{i-1}),\ i = 1, \dots, n$ є незалежними.

(3) $\forall\ t, h > 0$ приріст процесу $N(t+h) - N(t),$ задовольняє розподілу Пуассона з параметром λh, тобто

$$P\{N(t+h) - N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}, k = 0,1, \dots$$

(4) Кожна окрема реалізація процесу $N = (N(t, \omega))_{t \geq 0}$ є неперервною справа і має скінченні ліві границі.

1.2 Процес ризику

В класичній моделі ризику розміри виплат, що їх проводить страхова компанія, утворюють послідовність незалежних однаково розподілених майже напевно (м.н.) випадкових величин $X = (X_{i,} i \in \mathrm{N})$, з функцією розподілу $F(x)$. Ми будемо припускати, що $F(0) = 0$ (це означає, що величини X_i додатні). Також існують математичні сподівання $\mathbb{E}X_i = \mu$ та дисперсія $DX_i = \sigma^2$.

Число страхових виплат $N = (N(t), t \geq 0) -$ однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ. Таким чином, $\mathbb{E}N_t = \lambda t$. Також припускається, що процес N та послідовність X взаємно незалежні. Момент τ_k k-го стрибка процессу N – момент надходження до страхової компанії k-ї вимоги і в цей момент компанія виплачує суму X_i.

Припущення того, що N – пуассонівський процес фактично означає, що часові проміжки між страховими подіями є незалежними випадковими величинами, розподіленими за експоненціальним законом з параметром λ.

Розглянемо випадковий процес

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, \quad t \geq 0 \tag{1.2.1}$$

(припускається, що $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$).

Надалі ми припускаємо, що $p(t) -$ безперервний дохід від внесків в однорідному портфелі, який описується моделлю (1.2.1). Також припускається, що p $-$лінійна функція:

$$p(t) = ct.$$

Означення 1.2.1 Нехай $u_0 -$ початковий капітал компанії. *Процесом ризику* (risk process) називається випадковий процес

$$u(t) = u_0 + p(t) - S(t), \tag{1.2.2}$$

де $c > 0 -$ константа, яка характеризує інтенсивність надходження страхових внесків за одиницю часу (gross risk premium rate).

Процес страхового ризику (1.2.2) $-$ *страхова модель Крамера-Лундберга*.

Величина $u(t)$ $-$ сумарний капітал компанії в момент часу t, а процес $U = (u(t))_{t\geq 0}$ описує грошовий потік у портфелі через деякий час. Функція $p(t) -$ дохід компанії за час t, а $S(t) -$ страхові виплати, які компанія має сплатити за проміжок часу [0,t].

Наведемо приклад типової траєкторії процесу страхового ризику (1.2.2) при таких початкових даних:

- інтенсивність потоку страхових виплат: $\lambda = 1$;

- страхові внески за одиницю часу: $c = 1$;
- початковий капітал: $u_0 = 3$;
- розподіл страхових виплат: експоненціальний з параметром 1.

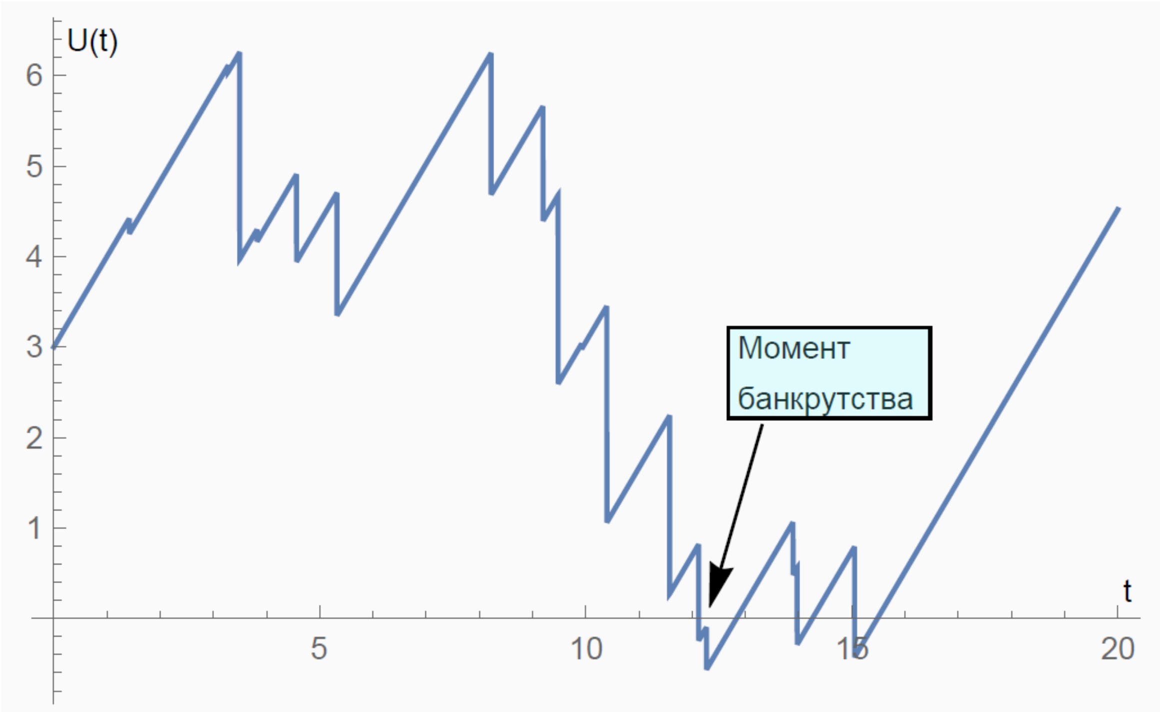

Рис. 1.1.1 Ескіз графіка типова реалізації страхового ризику

РОЗДІЛ 2. ЙМОВІРНІСТЬ БАНКРУТСТВА В МОДЕЛІ КРАМЕРА-ЛУНДБЕРГА

2.1 Ймовірність розорення та умова NPC (чистого прибутку) [8, ст. 151]

Означення 2.1.1 Випадкову подію $\{\exists t: u(t) < 0\}$ називають *банкрутством*.

Означення 2.1.2 Час T, коли величина (1.2.2) набуває від'ємного значення вперше, називається *моментом банкрутства*:

$$T = \inf\{t > 0: u(t) < 0\}.$$

Означення 2.1.3 Ймовірність банкрутства визначається так:

$$\psi(u) = P\{\exists t: u(t) < 0/u(0) = u\} = P\{T < \infty\}, u > 0. \quad (2.1.1)$$

В означені ми використали той факт, що

$$\{\exists t: u(t) < 0\} = \bigcup_{t\geq 0}\{u(t) < 0\} = \left\{\inf_{t\geq 0} u(t) < 0\right\} = \{T < \infty\}.$$

І банкрутство, і момент банкрутства залежать від початкового капіталу u_0, який ми часто упускаємо. Умова $u(0) = u$ у формулі (2.1.1) "штучна", оскільки $u(0) -$ константа. Ця умовна ймовірність часто використовується в літературі, щоб показати значення початкового капіталу.

Також ми будемо розглядати функцію

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u),$$

яка виражає ймовірність того, що на інтервалі часу $[0; +\infty)$ банкрутство не відбувається.

Означення 2.1.4 (Умова чистого прибутку (Net profit condition, NPC))

Ми кажемо, що (1.2.1) задовольняє умові чистого прибутку, якщо $c > \lambda\mu$. Якщо $c \leq \lambda\mu$, то банкрутство настає з ймовірністю 1.

Умова NPC фактично означає, що середній дохід компанії перевищує її середні витрати.

Якщо умова виконана, то існує ненульова ймовірність небанкрутства впродовж нескінченного часу. Якщо умову не виконано, то ймовірність небанкрутства $\varphi(u_0) = 0$ для будь-якого u_0, і компанія приречена на банкрутство не залежно від величини її початкового капіталу.

Позначимо прибуток компанії за час [0,t]:

$$Q(t) = ct - S(t).$$

Обчислимо математичне сподівання цього прибутку:

$$\mathbb{E}Q(t) = ct - \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X(t) = ct - \lambda t \cdot \mu = (c - \lambda\mu)t.$$

Відносна страхова надбавка (safety loading) ρ визначається так:

$$\rho = \frac{\mathbb{E}Q(t)}{\mathbb{E}S(t)} = \frac{(c - \lambda\mu)t}{\lambda t\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

Якщо страхова надбавка $\rho > 0$, то процес $u(t)$ з ймовірністю 1 прямує до $+\infty$. Умова $\rho > 0 \Leftrightarrow$ с $> \lambda\mu$.

2.2 Інтегральне рівняння Крамера-Лундберга [8, ст. 162]

Теорема (*про інтегральне рівняння Крамера-Лундберга*)

Розглянемо модель Крамера-Лундберга за умови NPC та $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Припустимо, що функція розподілу розміру позова F_{X_1} має щільність. Тоді ймовірність небанкрутства $\varphi(u)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}X_1}\int\limits_0^u \bar{F}_{X_1}(y)\varphi(u-y)dy, \qquad (2.2.1)$$

де $\bar{F}_{X_1} = 1 - F_{X_1}$.

Зауваження 2.2.1. Запишемо

$$F_{X_1,I}(y) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\int\limits_0^y \bar{F}_{X_1}(z)dz, \qquad y > 0$$

функцію розподілу величини X_1 для проінтегровного хвоста. Зауважимо, що $F_{X_1,I}(y) -$ це дійсно функція розподілу, оскільки для будь-якої додатної випадкової величини A маємо $\mathbb{E}A = \int_0^\infty \bar{F}_A(y)dy$ і, тому, $F_{X_{1,I}}(y) \to 1$ коли $y \to \infty$. Тепер переконуємось, що (2.2.1) переходить в

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\int\limits_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y). \qquad (2.2.2)$$

Зауваження 2.2.2. Константу $\varphi(0)$ у формулі (2.2.1) можна оцінити. Зауважимо, що $\varphi(u) \to 1$ коли $u \to \infty$. Це випливає з умови NPC і того факту, що $S_n \to -\infty$ м.н., отже, $\sup_{n\geq 1} S_n < \infty$ м.н. В силу (2.2.2) і теореми про монотонну збіжність

$$1 = \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\lim_{u\to\infty}\int\limits_0^\infty I_{\{y\leq u\}}\varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y) =$$

$$= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\int\limits_0^\infty 1\, dF_{X_1,I}(y) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}.$$

Отже, $\varphi(0) = \rho(1+\rho)^{-1}$.

Доведення теореми: Нагадаємо, що ймовірність банкрутства дорівнює

$$\psi(u) = P\{\sup_{n\geq 1} S_n > u\} = 1 - \varphi(u),$$

де $(S_n)-$ випадкове блукання, отримане з незалежної однаково розподіленої послідовності (Z_n) з $Z_n = X_n - cT_n$. Тоді

$$\varphi(u) = P\{\sup_{n\geq 1} S_n \leq u\} = P\{S_n \leq u \text{ для всіх } n \geq 1\} = \tag{2.2.3}$$

$$= P\{Z_1 \leq u, S_n - Z_1 \leq u - Z_1 \text{ для всіх } n \geq 2\} =$$

$$= \mathbb{E}\left[I_{\{Z_1\leq u\}} P\{S_n - Z_1 \leq u - Z_1 \text{ для всіх } n \geq 2 \mid Z_1\}\right] =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+c\tau} P\{S_n - Z_1 \leq u - (x - c\tau) \text{ для всіх } n \geq 2\}\, dF_{X_1}(x) dF_{\mathrm{T}_1}(\tau) =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+c\tau} P\{S_n \leq u - (x - c\tau) \text{ для всіх } n \geq 1\}\, dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau. \tag{2.2.4}$$

Тут ми використовували незалежність $Z_1 = X_1 - cT_1$ і послідовність $(S_n - Z_1)_{n\geq 2}$. Ця послідовність має такий самий розподіл, що і послідовність $(S_n)_{n\geq 1}$, і випадкова величина T_1має експоненціальний розподіл з параметром λ. З формул (2.2.3) та (2.2.4) отримуємо

$$\varphi(u) = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+c\tau} \varphi(u - x + c\tau)\, dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau.$$

Зробимо заміну $z = u + c\tau$ і будемо мати

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{u\lambda/c} \int_{z=u}^{\infty} e^{-\lambda z/c} \int_{x=0}^{z} \varphi(z - x) dF_{X_1}(x) dz. \tag{2.2.5}$$

Оскільки, ми припустили, що F_{X_1} має щільність, то функція

$$g(z) = \int_0^z \varphi(z - x) dF_{X_1}(x)$$

є неперервною. В силу (2.2.5),

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{u\lambda/c} \int_{z=u_0}^{\infty} e^{-\lambda z/c}\, g(z) dz,$$

і, отже, $\varphi(u)$ є навіть диференційованою. Диференціюючи (2.2.5), отримаємо

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u - x) dF_{X_1}(x).$$

Тепер інтегруємо останню рівність і застосовуємо інтегрування частинами

$$\varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u) du = -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_0^u \varphi(u - x)\, dF_{X_1}(x) du =$$

$$= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[\varphi(u - x) F_{X_1}(x)\,\Big|_0^u + \int_0^u \varphi'(u - x)\, F_{X_1}(x) dx\right] du =$$

$$= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[\varphi(0) F_{X_1}(u) + \int_0^u \varphi'(u - x)\, F_{X_1}(x) dx\right] du.$$

В останньому кроці ми скористалися $F_{X_1}(0) = 0$, оскільки $X_1 > 0$ м.н. Тепер перенесемо інтеграл в праву частину:

$$\varphi(t) - \varphi(0) =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u) du - \frac{\lambda}{\text{c}}\varphi(0)\int_0^t F_{X_1}(u) du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\, [\varphi(t - x) - \varphi(0)] dx =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t-u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\,\varphi(t-x)dx =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}_{X_1}(x)\varphi(t-x)dx. \qquad (2.2.6)$$

Зауважимо, що

$$\frac{\lambda}{\mathrm{c}} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\mathbb{E}X_1}.$$

Остання рівність та формула (2.2.6) доводять лему. ■

Доведена теорема разом із зауваженнями 2.2.1 та 2.2.2 гарантує, що ймовірність небанкрутства φ задовольняє наступному співвідношенню

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y), \qquad (2.2.7)$$

де

$$F_{X_1,I}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\int_0^x \left(1 - F_{X_1}(y)\right)dy, \qquad x > 0,$$

– проінтегровна функція розподілу страхових виплат X_i.

2.3 «Практичні» оцінки для ймовірності банкрутства в класичній моделі ризику

В класичній моделі ризику, яку ми розглядали в пункті 1.2, фактично явну формулу для ймовірності банкрутства $\varphi(u_0)$, можна вказати лише для випадку, коли виплати страхової компанії розподілені за експоненціальним розподілом.

Тому останнім часом було витрачено чимало зусиль на пошуки наближених формул для обчислення функції $\varphi(u_0)$, яка є ймовірністю банкрутства компанії при початковому капіталі u_0. Ми розглянемо формулу, запропоновану Ф. де Вілдер в 1978р.

Перед тим як переходити до її розгляду, сформулюємо дві леми, які будуть використані при обчисленнях. [10, ст. 254]

Лема 2.3.1. *Якщо* $X -$ *випадкова величина, що має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням* μ*, то*

$$\mathbb{E}X = \mu,\ \ \mathbb{E}X^2 = 2\mu^2,\ \ \mathbb{E}X^3 = 6\mu^3 \tag{2.3.1}$$

і у загальному випадку $\mathbb{E}X^n = n! \cdot \mu^n$.

Лему легко довести безпосереднім обчисленням.

Лема 2.3.2. *Нехай*

$$u(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{2.3.2}$$

$-$ *прибуток страхової компанії на відрізку часу [0,t] в класичній моделі ризику. Тоді характеристична функція випадкової величини* $u(t)$ *дорівнює*

$$\mathbb{E}e^{ivu(t)} = exp\{t(ivc + \alpha[\mathbb{E}e^{-ivX_i} - 1])\}. \tag{2.3.3}$$

Рівність (2.3.3) є наслідком формули повної ймовірності для математичного сподівання

$$\mathbb{E}e^{ivu(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{e^{ivu(t)}/N(t) = n\} \cdot P\{N(t) = n\}.$$

2.4 Класична апроксимація де Вілдера [10, ст. 257]

В 1978 році Ф. де Вілдером була запропонована експоненціальна апроксимація ймовірності банкрутства, яка є одним з найбільш простих та ефективних наближених методів. [1]

Вона заснована на заміні процесу *U(t)* в загальній класичній моделі ризику на процес $\widetilde{U}(t)$, у якого виплати мають експоненціальний розподіл, так щоб

$$\mathbb{E}U^k(t) = \mathbb{E}\widetilde{U}^k(t) \qquad \text{при } k = 1{,}2{,}3.$$

В процесі $\widetilde{U}(t)$ за ймовірність банкрутства $\psi(u_0)$ приймаємо ймовірність банкрутства $\psi_{DV}(u_0)$, для якої ми шукатимемо точну формулу.

Перед тим як виконувати обчислення, нагадаємо деякі відомості з теорії ймовірностей. Нехай ζ- випадкова величина з характеристичною функцією

$$f(t) = \mathbb{E}e^{it\zeta}$$

Означення 2.4.1. Кумулянтом випадкової величини ζ називаються коефіцієнти χ_r в розкладі за степенями it функції $\ln f(t)$:

$$\ln f(t) = \chi_1(it) + \chi_2\frac{(it)^2}{2!} + \cdots + \chi_r\frac{(it)^r}{r!} + \cdots$$

Кумулянти, як і моменти, є важливими числовими характеристиками випадкової величини. Кумулянти та моменти $\mu_\zeta = \mathbb{E}_\zeta r$ пов’язані між собою співвідношеннями, яке можна одержати, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в наступній рівності

$$\exp\left\{\chi_1(it) + \chi_2\frac{(it)^2}{2!} + \cdots + \chi_r\frac{(it)^r}{r!} + \cdots\right\} =$$
$$= 1 + \mu_1(it) + \frac{\mu_2}{2!}(it)^2 + \cdots + \frac{\mu_r}{r!}(it)^r + \cdots = f(t) = Ee^{it\zeta}.$$

Наприклад, можна переконатися, що

$$\mu_1 = \chi_1, \tag{2.4.1}$$

$$\mu_2 = \chi_2 + {\chi_2}^2, \tag{2.4.2}$$

$$\mu_3 = \chi_3 + 3\chi_2\chi_1 + {\chi_1}^3. \tag{2.4.3}$$

Почнемо шукати процес $\widetilde{U}(t)$, який визначається трьома параметрами $(\tilde{\alpha}, \tilde{c}, \tilde{\mu})$ або $(\tilde{\alpha}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$. Згідно з лемою 2.3.2

$$\ln\mathbb{E}e^{ivu(t)} = t\left\{ivc + \alpha\left[\mathbb{E}e^{-ivX_i} - 1\right]\right\} =$$
$$= t\left\{ivc + \alpha\left(1 - iv\zeta_1 - \frac{\nu^2}{2}\zeta_2 + i\frac{\nu^3}{6}\zeta_3 + o(\nu^3)\right) - 1\right\} =$$
$$= t\left\{iv(c - \alpha\zeta_1) - \frac{\nu^2}{2}\alpha\zeta_2 + i\frac{\nu^3}{6}\alpha\zeta_3 + o(\nu^3)\right\}$$

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ визначаються наступними рівностями

$$\zeta_k = \mathbb{E}X_1^k (k = 1, 2, 3) \tag{2.4.4}$$

Таким чином, в силу рівностей (2.4.1)-(2.4.3)

$$\mathbb{E}u(t) = (c - \alpha\zeta_1)t = \rho\alpha\zeta_1 t,$$
$$\mathbb{E}(u(t))^2 = \alpha\zeta_2 t + (\rho\alpha\zeta_1 t)^2,$$
$$\mathbb{E}(u(t))^3 = -\alpha\zeta_3 t + 3(\rho\alpha\zeta_1 t)(\alpha\zeta_2 t) + (\rho\alpha\zeta_1 t)^3.$$

Виберемо параметри $(\tilde{\alpha}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu})$ так, щоб

$$\rho\alpha\zeta_1 = \tilde{\rho}\tilde{\alpha}\tilde{\mu}, \qquad \alpha\zeta_2 = 2\tilde{\alpha}\tilde{\mu}^2, \qquad \alpha\zeta_3 = 6\tilde{\alpha}\tilde{\mu}^3.$$

Будемо мати

$$\tilde{\mu} = \frac{\zeta_3}{3\zeta_2}, \quad \tilde{\rho} = \frac{2\zeta_1\zeta_3}{3{\zeta_2}^2}\rho, \quad \tilde{\alpha} = \frac{9{\zeta_2}^3}{2{\zeta_2}^2}\alpha.$$

Отже,

$$\psi(u_0) \approx \psi_{DV}(u_0) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+\tilde{\rho}} e^{-\frac{u_0 \tilde{\rho}}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\rho})}}.$$

За побудовою апроксимації випливає, що $\psi(u_0) = \psi_{DV}(u_0)$ у випадку експоненціально розподілених виплат.

РОЗДІЛ 3. УТОЧНЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДЕ ВІЛДЕРА

3.1 Суміш двох експоненціальних розподілів

Розглянемо суміш двох експоненціальних розподілів з параметрами $\alpha, \beta > 0$ та ваговим коефіцієнтом $q \geq 0$. Щільність розподілу має вигляд:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} q\alpha e^{-\alpha x} + (1-q)\beta e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Інтегруючи щільність, отримуємо функцію розподілу суміші:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} q(1 - e^{-\alpha x}) + (1-q)\big(1 - e^{-\beta x}\big), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Знайдемо моменти даного розподілу за допомогою нескладного інтегрування:

$$\mathbb{E}\xi^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} x^n q e^{-\alpha x} d(\alpha x) + \int_0^{+\infty} x^n (1-q) e^{-\beta x} d(\beta x) =$$

$$= \left| \text{Зробимо заміну: } \alpha x = t, x = \frac{t}{\alpha}, dx = \frac{dt}{\alpha};\ \beta x = z, x = \frac{z}{\beta}, dx = \frac{dz}{\beta} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} q\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} (1-q)\left(\frac{z}{\beta}\right)^n e^{-z}dz =$$

$$= q\alpha^{-n} \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t}dt + (1-q)\beta^{-n} \int_0^{+\infty} z^{(n+1)-1} e^{-z}dz =$$

$$= q\alpha^{-n}\Gamma(n+1) + (1-q)\beta^{-n}\Gamma(n+1) = q\alpha^{-n}n! + (1-q)\beta^{-n}n!.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\xi^n = q\frac{n!}{\alpha^n} + (1-q)\frac{n!}{\beta^n}. \tag{3.1.1}$$

Таким чином, при $n = 1$ отримаємо перший момент

$$\mathbb{E}\xi = \mu = q\frac{1}{\alpha} + (1-q)\frac{1}{\beta},$$

при $n = 2$ – другий момент

$$\mathbb{E}\xi^2 = q\frac{2}{\alpha^2} + (1-q)\frac{2}{\beta^2}$$

і т.д.

3.2 Уточнення апроксимації де Вілдера

Уточнення апроксимації засноване на наступному результаті. [5]

Теорема *(Г. Паньєр та Ґ. Віллмот, 1992)*

Нехай страхові виплати розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів:

$$F(x) = \left(q(1-e^{-\alpha x}) + (1-q)\left(1-e^{-\beta x}\right)\right)\cdot \mathbb{1}_{[0;+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді ймовірність банкрутства при початковому капіталі u_0 *становить*

$$\psi(u_0) = \frac{(\rho - r_1)e^{-r_1 u_0} + (r_2 - \rho)e^{-r_2 u_0}}{(1+\theta)(r_2 - r_1)},$$

де

$$r_{1,2} = \frac{\rho + \theta(\alpha+\beta) \mp \sqrt{\left(\rho + \theta(\alpha+\beta)\right)^2 - 4\alpha\beta\theta(1+\theta)}}{2(1+\theta)},$$

$$\rho = \alpha + \frac{q}{\mu}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right), \qquad \theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1, \qquad \mu = \frac{q}{\alpha} + \frac{(1-q)}{\beta}.$$

Тут θ – відносна страхова надбавка;

μ – математичне сподівання.

Теорема доводиться за допомогою застосування перетворення Лапласа до наступного інтегрального рівняння для ймовірності небанкрутства

$$\varphi(u)=\frac{\rho}{1+\rho}+\frac{1}{(1+\rho)\mathbb{E}\xi}\int_0^u\left(qe^{-\alpha y}+(1-q)e^{-\beta y}\right)\varphi(u-y)dy,$$

де

$\frac{\rho}{1+\rho}=\varphi(0)-$ константа;

$\mathbb{E}\xi=q\frac{1}{\alpha}+(1-q)\frac{1}{\beta}-$ математичне сподівання;

$1-F(x)=\bar{F}(x)=\begin{cases}qe^{-\alpha y}+(1-q)e^{-\beta y}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ $-$ хвіст функції розподілу.

Ідея уточнення полягає в заміні процесу ризику U з характеристиками (c,λ,F) на процес $\widetilde{U}$ з характеристиками $(\tilde{c},\tilde{\lambda},\tilde{F})$, де

$$\tilde{F}(x)=\left(\tilde{q}\left(1-e^{-\tilde{\alpha}x}\right)+(1-\tilde{q})\left(1-e^{-\tilde{\beta}x}\right)\right)\cdot\mathbb{1}_{[0;+\infty)}(x),\ \ x\in\mathbb{R},$$

$-$ функція розподілу суміші двох експоненціальних законів.

Новий процес має тепер п’ять параметрів:

$\tilde{\lambda}-$ інтенсивність потоку страхових подій;

$\tilde{c}-$ величина страхових внесків за одиницю часу;

$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}-$ параметри обох експоненціальних компонент суміші;

$\tilde{q}-$ ваговий коефіцієнт самої суміші.

Характеристики $\tilde{\lambda},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ та $\tilde{q}$ знаходяться шляхом прирівнювання перших п’яти моментів початкового та нового процесів ризику (за кількістю невідомих параметрів):

$$\mathbb{E}U^k(t) = \mathbb{E}\widetilde{U}^k(t), \qquad \text{при } k = 1, \dots, 5.$$

Але з технічної точки зору простішим є еквівалентне прирівнювання кумулянтів. Нагадаємо, що кумулянтом k-го порядку випадкової величини ξ з характеристичною функцією χ_ξ називають число

$$\varkappa_k(\xi) = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{ds^k}\mathrm{Ln}\chi_\xi(s)\Big|_{s\,=\,0}, \tag{3.2.1}$$

де Ln – головне значення логарифму.

Запишемо характеристичну функцію випадкової величини $U(t), t \geq 0$:

$$\chi_{U(t)}(s) = \mathbb{E}e^{isU(t)} = \mathbb{E}e^{isu_0+isct-is\sum_{k=1}^{N(t)}X_k} = e^{isu_0+isct}\chi_Y(s), \tag{3.2.2}$$

де $Y = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$.

Випадкова величина Y є сумою випадкової (пуассонівської) кількості випадкових величин X_k. Тому її характеристичну функцію може бути знайдено за формулою

$$\chi_Y(-s) = G_{N(t)}\big(\chi_X(-s)\big),$$

де через $G_{N(t)}$ позначено генератрису (пуассонівської з параметром λt) випадкової величини $N(t)$. Добре відомо, що остання має вигляд

$$G_{N(t)}(z) = e^{\lambda t(z-1)}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Тому

$$\chi_Y(-s) = e^{\lambda t(\chi_X(-s)-1)}, \quad Ln\chi_Y(-s) = \lambda t(\chi_X(-s) - 1),$$

і з формули (3.2.2) отримуємо

$$\varkappa_k\big(U(t)\big) = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{ds^k} Ln\chi_{U(t)}\Big|_{s=0} = \\ = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{ds^k}\big(isu_0 + isct + \lambda t(\chi_X(-s) - 1)\big)\Big|_{s=0}. \tag{3.2.3}$$

Якщо нас цікавить кумулянт першого порядку, то $k = 1$, і тому

$$\varkappa_1\big(U(t)\big) = u_0 + ct - \lambda t \cdot \frac{\chi_X'(0)}{i} = u_0 + ct - \lambda t \mathbb{E}X.$$

Якщо ж $k \geq 2$, то доданок $isu_0 + isct$ в правій частині формули (3.2.3) після диференціювання зникає, і тому

$$\varkappa_k\big(U(t)\big) = (-1)^k \lambda t \cdot \frac{\chi_X^{(k)}(0)}{i^k} = (-1)^k \lambda t \mathbb{E}X^k.$$

Поєднуючи дві останні формули, маємо

Лема 3.2.1. *Кумулянт k-го порядку величини $U(t)$ має вигляд*

$$\varkappa_k\big(U(t)\big) = (u_0 + ct)\mathbb{1}\{k = 1\} + (-1)^k \lambda t \cdot \mathbb{E}X^k. \tag{3.2.4}$$

Теорема 3.2.1. *Нехай набір параметрів $\tilde{\lambda}, \tilde{c}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$* та *$\tilde{q}$ є розв'язком системи нелінійних рівнянь*

$$\begin{cases} c - \lambda \mathbb{E}X = \tilde{c} - \tilde{\lambda}\left(\dfrac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}} + \dfrac{1 - \tilde{q}}{\tilde{\beta}}\right), \\ \lambda \mathbb{E}X^k = \tilde{\lambda} k! \left(\dfrac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}^k} + \dfrac{1 - \tilde{q}}{\tilde{\beta}^k}\right), \quad k = 2, \dots, 5. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Тоді перші п'ять моментів процесу $U(t)$ збігаються з відповідними моментами процесу $\tilde{U}(t)$.

Внаслідок доведеного нами співвідношення (3.2.4) система рівнянь $\varkappa_k\big(U(t)\big) = \varkappa_k\left(\widetilde{U}(t)\right), k = 1, \dots, 5,$ може бути записана у вигляді (3.2.5).

Система (3.2.5) є нелінійною. Аналітично її, на жаль, розв'язати не можна. Тому вона розв'язувалась чисельно в системі Wolfram Mathematica 11.2.

Як приклад, в Додатку А, знаходиться скріншот коду програми розв'язку даної системи, у випадку страхових виплат, які розподілені за законом, який є сумішшю трьох експоненціальних розподілів з ваговими коефіцієнтами 0.1, 0.2, 0.7 та параметрами 1, 0.1, 0.2. Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 2. Страхові внески за одиницю часу: c = 15.

3.3 Представлення ймовірності банкрутства як складеної геометричної ймовірності (a Compound Geometric Probability)

Припускаємо, що в страховій моделі Крамера-Лундберга виконується умова NPC. Нагадаємо, що з інтегральної теореми та рівняння (2.2.7) слідує наступне рівняння для ймовірності не розорення $\varphi = 1 - \psi$:

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y). \tag{3.3.1}$$

Відповідно до умов теореми, для того, щоб дане інтегральне рівняння було вірним, необхідно вимагати, щоб випадкова послідовність страхових виплат X_i мала щільність зі скінченним математичним сподіванням та виконувалась умова NPC (умова чистого прибутку).

В цьому пункті будемо вивчати рівняння (3.3.1) більш детально. Спочатку, ми інтерпретуємо праву частину (3.3.1), як функцію розподілу складеної геометричної суми.

Введемо означення. Для початку уявимо, що в нас є схема Бернуллі − послідовність незалежних випробувань. В кожному випробувані у нас може настати певна подія – «успіх» з ймовірністю p, або не настати – «невдача» з ймовірністю $q = 1 - p$. Наприклад, підкидання монети: герб – «успіх», решка –«невдача».

Означення 3.1 (Геометричний розподіл)

Величина $M -$ кількість невдач до появи першого успіху. Кажуть, що M має геометричний розподіл з параметром p, $M \sim Geom(p)$, якщо

$$\mathbb{P}\{M = k\} = q^k p, \qquad q = 1 - p, \qquad k = 0,1,2,\dots \tag{3.3.2}$$

p – ймовірність успіху, q – ймовірність невдачі.

Випадкова сума

$$S_M = \sum_{i=1}^{M} X_i$$

має складений геометричний розподіл, якщо величина M та послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин X_i є незалежними. Безпосереднім обчисленням отримуємо функцію розподілу

$$\mathbb{P}\{S_M \leq x\} = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \, \mathbb{P}\{X_1 + \cdots + X_k \leq x\} =$$

$$= p + p \sum_{k=1}^{\infty} q^k \mathbb{P}\{X_1 + \cdots + X_k \leq x\}. \tag{3.3.3}$$

Цей результат порівняємо з наступним. Для того, щоб його сформулювати, ми введемо наступний клас функцій:

$$\mathcal{G} = \{G\text{: Функція } G\text{: } \mathbb{R} \to [0, \infty) - \text{ неспадна, обмежена,}$$
$$\text{неперервана справа і } G(x) = 0 \text{ для } x < 0\}.$$

Тобто, $G \in \mathcal{G}$ тоді і тільки тоді коли $G(x) = 0$ для від'ємних x і існують $c \geq 0$ та функція розподілу F невід'ємної випадкової величини така, що $G(x) = cF(x)$ для $x \geq 0$.

Теорема (Представлення ймовірності не розорення як складеної геометричної ймовірності) [8, ст. 173]

Припустимо, що страхова модель Крамера-Лундберга має $\mathbb{E}X_1 < \infty$ *та виконується умова NPC. Також, припускаємо, що випадкова послідовність страхових виплат* X_i *має щільність. Нехай* $\left(X_{I,n}\right) -$ *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі спільною функцією розподілу* $F_{X_1,I} = \mu^{-1}\int_0^x \left(1 - F(x)\right)dt,\ x \geq 0.$ *Тоді функція* φ*, задана наступним чином*

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\,\mathbb{P}\left\{X_{I,1} + \cdots + X_{I,n} \leq u\right\}\right], \qquad u > 0 \quad (3.3.4)$$

задовольняє (3.3.1). Крім того, вона являється єдиним розв'язком для (3.3.1) в класі функцій $\mathcal{G}$.

Рівність (3.3.4) є корисною, оскільки можна оцінити праву частину в деяких окремих випадках. Більш того, (3.3.3) показує, що ймовірність небанкрутства φ має інтерпретацію як функції розподілу складеної геометричної суми з незалежними однаково розподіленими величинами $X_{I,i}$ та $q = (1+\rho)^{-1}$.

Доведення: Покажемо, що φ, задана формулою (3.3.4) задовольняє (3.3.1). Для зручності запишемо $q = (1+\rho)^{-1}$ і $p = 1 - q = \rho(1+\rho)^{-1}$. Тоді ми маємо

$$\varphi(u) = p + qp\left[F_{X_1,I}(u) + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1} \int_0^u \mathbb{P}\{y + X_{I,2} + \cdots + X_{I,n} \le u\} dF_{X_1,I}(y)\right]$$

$$= p + q\int_0^u p\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n\, \mathbb{P}\{X_{I,1} + \cdots + X_{I,n} \le u - y\}\right] dF_{X_1,I}(y) =$$

$$= p + q\int_0^u \varphi(u-y)\, dF_{X_1,I}(y).$$

Отже, φ задовольняє (3.3.1).

Не зовсім очевидно, що (3.3.4) є єдиним рішенням для (3.3.1) в класі функцій $\mathcal{G}$. Для того, щоб це показати, зручно скористатися перетворенням Лапласа-Стілтьєса. Перетворення Лапласа-Стілтьєса функції $G \in \mathcal{G}$ задано формулою

$$\hat{g}(t) = \int_{[0;\infty)} e^{-tx}\, dG(x), \;\; t \ge 0.$$

Зазначимо, що для функції розподілу G, $\hat{g}(t) = \mathbb{E}e^{-tX}$, де X – невід'ємна випадкова величина з функцією розподілу F. Важливою властивістю перетворень Лапласа-Стілтьєса є те, що для будь-яких $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ з пертворенням Лапласа-Стілтьєса $\hat{g}_1, \hat{g}_2$, відповідно, $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ означає, що $G_1 = G_2$. Цю властивість можна використати, щоб показати, що φ з (3.3.4) є єдиним рішенням рівняння (3.3.1) в класі функцій $\mathcal{G}$. ■

3.4 Перевірка якості уточненої апроксимації

Перейдемо безпосередньо до перевірки уточненої апроксимації де Вілдера.

Перевірка проводилась шляхом порівняння

- результатів застосування апроксимації де Вілдера,
- результатів застосування уточненої апроксимації,
- «майже точних» значень ймовірності банкрутства.

«Майже точні» значення були отримані за допомогою формули (3.3.4), яка має назву – формула Беєкмана [2] для ймовірності небанкрутства за умови NPC. Перепишемо її наступним чином

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{k=0}^{\infty}(1+\rho)^{-k}\,\mathbb{P}\{X_{I,1}+\cdots+X_{I,k}\le u\}\,.$$

Зробимо заміну

$$\frac{1}{1+\rho} = q, \qquad \frac{\rho}{1+\rho} = p$$

і внесемо множник q під знак суми

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p\,\mathbb{P}\{X_{I,1}+\cdots+X_{I,k}\le u\}.$$

Для геометричної величини, яку ми ввели раніше $q^k p = \mathbb{P}\{M = k\}$, інтерпретуємо тепер

$$\mathbb{P}\{X_{I,1}+\cdots+X_{I,k}\le u\} = \mathbb{P}\left\{{X_{I,1}+\cdots+X_{I,M}\le u}\big/{M=k}\right\}.$$

Маємо

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\{M=k\}\mathbb{P}\left\{{X_{I,1}+\cdots+X_{I,M}\le u}\big/{M=k}\right\}.$$

Остання формула нагадує формулу повної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A/H_k).$$

В нашому випадку

$$H_k - M = k, M = 0,1, \dots ; A - X_{I,1} + \dots + X_{I,M} \le u.$$

Таким чином, згідно формули повної ймовірності

$$\varphi(u) = \mathbb{P}\{X_{I,1} + \dots + X_{I,M} \le u\},$$

де M – випадкова величина з параметром

$$p = \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{\frac{c}{\lambda\mu} - 1}{1 + \frac{c}{\lambda\mu} - 1} = \frac{c - \lambda\mu}{c} = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Цю формулу зручно використовувати для наближеного оцінювання ймовірності не розорення.

Ймовірність у правій частині знаходилася шляхом комп'ютерного моделювання з достатньо великою кількістю реалізацій – 100.000. Продемонструємо алгоритм моделювання, який можна знайти в Додатках Б – Г. Програми продемонстровані для різних розподілів.

Алгоритм:

1. Моделюємо геометричну величину $M \sim Geom(\frac{\rho}{1+\rho})$.
2. Моделюємо M штук незалежних величин, що мають розподіл $X_{I,1}$.
3. Знаходимо суму випадкової кількості випадкових аргументів.
4. Перевіряємо умову $X_{I,1} + \dots + X_{I,M} \le u$.
5. Запускаємо експеримент 100.000 разів.
6. Тоді

$$\varphi(u) \approx \frac{\text{скільки разів справдилася нерівність в п. 4}}{100\,000}.$$

Перейдемо до результатів перевірки якості.

3.5 Результати перевірки уточненої апроксимації

1. Розглянемо страхові виплати, які розподілені за законом, який є ***сумішшю трьох експоненціальних розподілів*** з ваговими коефіцієнтами 0.1, 0.2, 0.7 та параметрами 1, 0.1, 0.2.
   - Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 2.
   - Страхові внески за одиницю часу: c = 15.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$\lambda \to 1.83444, \alpha \to 0.222393, \mu1 \to 0.100279, \mu2 \to 0.202959, c \to 14.8967$

Код програми для розв'язку системи з початковими даними, які наведені вище, можна знайти в додатку А.

Табл. 3.5.1

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.49905	0.49997	0.50297	0.78 %	0.60 %
20	0.65205	0.65590	0.65548	0.52 %	0.06 %
30	0.75832	0.76111	0.76127	0.39 %	0.02 %
40	0.83214	0.83366	0.83422	0.25 %	0.07 %
50	0.88341	0.88406	0.88390	0.06 %	0.02 %

- Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 2.

- Страхові внески за одиницю часу: с = 30.

Система (3.2.5) має такі наближені розв’язки:

$$\lambda \to 1.83444, \alpha \to 0.222393, \mu 1 \to 0.100279, \mu 2 \to 0.202959, c \to 29.8967$$

Табл. 3.5.2

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.85447	0.85996	0.85894	0.52 %	0.12 %
20	0.93832	0.94168	0.94105	0.29 %	0.07 %
30	0.97386	0.97444	0.97488	0.10 %	0.04 %
40	0.98892	0.98853	0.98822	0.07 %	0.03 %
50	0.99531	0.99480	0.99460	0.07 %	0.02 %

- Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 1.
- Страхові внески за одиницю часу: с = 15.

Система (3.2.5) має такі наближені розв’язки:

$$\lambda \to 0.917221, \alpha \to 0.222393, \mu 1 \to 0.100279, \mu 2 \to 0.202959, c \to 14.9484$$

Табл. 3.5.3

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.85447	0.85959	0.85960	0.60 %	0.001 %
20	0.93832	0.94148	0.94205	0.40 %	0.06 %
30	0.97386	0.97434	0.97446	0.06 %	0.01 %
40	0.98892	0.98847	0.98830	0.06 %	0.02 %
50	0.99531	0.99477	0.99476	0.06 %	0.001 %

- Інтенсивність потоку страхових подій: $\lambda = 1$.
- Страхові внески за одиницю часу: $c = 30$.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$\lambda \to 0.917221, \alpha \to 0.222393, \mu 1 \to 0.100279, \mu 2 \to 0.202959, c \to 29.9484$

Табл. 3.5.4

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.94352	0.94699	0.94667	0.33 %	0.03 %
20	0.98098	0.98225	0.98220	0.13 %	0.005 %

30	0.99359	0.99346	0.99303	0.06 %	0.04 %
40	0.99784	0.99748	0.99759	0.03 %	0.01 %
50	0.99927	0.99901	0.99895	0.03 %	0.01 %

2. Розглянемо страхові виплати, які розподілені за законом, який є ***сумішшю чотирьох експоненціальних розподілів*** з ваговими коефіцієнтами 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 та параметрами 1, 0.1, 0.2, 0.3.
   - Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 1.
   - Страхові внески за одиницю часу: c = 8.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$$\lambda \to 0.885572, \alpha \to 0.239108, \mu 1 \to 0.100806, \mu 2 \to 0.245207, c \to 7.9152$$

Табл. 3.5.5

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.66961	0.67529	0.67753	1.17 %	0.33 %
20	0.80855	0.81448	0.81315	0.57 %	0.16 %
30	0.88906	0.89158	0.89291	0.43 %	0.15 %
40	0.93572	0.93623	0.93670	0.10 %	0.05 %
50	0.96275	0.96242	0.96238	0.04 %	0.004 %

   - Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 2.
   - Страхові внески за одиницю часу: c = 15.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$\lambda \to 1.77114, \alpha \to 0.239108, \mu1 \to 0.100806, \mu2 \to 0.245207, c \to 14.8304$

Табл. 3.5.6

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.62479	0.62957	0.63174	1.10 %	0.34 %
20	0.77039	0.77631	0.77663	0.80 %	0.04 %
30	0.85949	0.86238	0.86328	0.44 %	0.10 %
40	0.91402	0.91490	0.91560	0.17 %	0.08 %
50	0.94738	0.94731	0.94827	0.10 %	0.09 %

3. Розглянемо страхові виплати, які розподілені за законом, який є ***сумішшю експоненціального та рівномірного розподілів*** з ваговими коефіцієнтами 0.5, 0.5 та параметрами 0.1; 0, 10.
   - Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 1.
   - Страхові внески за одиницю часу: c = 12.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$\lambda \to 1.58022, \alpha \to 0.309659, \mu1 \to 0.099628, \mu2 \to 0.3474987, c \to 12.5509$

Табл. 3.5.7

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.62499	0.63126	0.63255	1.20 %	0.20 %
20	0.76250	0.76727	0.76717	0.61 %	0.01 %
30	0.84959	0.85166	0.85090	0.15 %	0.09 %
40	0.90475	0.90535	0.90522	0.05 %	0.01 %
50	0.93967	0.93961	0.93911	0.06 %	0.05 %

- Інтенсивність потоку страхових подій: λ = 2.
- Страхові внески за одиницю часу: c = 20.

Система (3.2.5) має такі наближені розв'язки:

$\lambda \to 3.16045, \alpha \to 0.309659, \mu 1 \to 0.099628, \mu 2 \to 0.3474988, c \to 21.1018$

Табл. 3.5.8

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Апроксимація на основі теореми 3.2.1	«Майже точне» значення, отримане за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 3.2.1
10	0.46952	0.47295	0.47533	1.22 %	0.50 %
20	0.61090	0.61491	0.61588	0.81 %	0.16 %

30	0.71461	0.71708	0.71594	0.19 %	0.16 %
40	0.79067	0.79203	0.79149	0.10 %	0.07 %
50	0.84646	0.84712	0.84702	0.07 %	0.01 %

Відносна похибка визначається за формулою $\frac{|x-y|}{y} \cdot 100\%,$ де $x -$ апроксимація, $y -$ «майже точне» значення.

Як бачимо з усіх наведених вище таблиць, якщо порівняти відносні похибки апроксимації де Вілдера з відносними похибками уточненої апроксимації, то наша відносна похибка набагато краща ніж відносна похибка у де Вілдера.

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації запропонований новий метод наближеного знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії в моделі Крамера-Лундберга, який уточнює класичну апроксимацію де Вілдера. Метод заснований на заміні процесу страхового ризику іншим процесом ризику, для якого страхові виплати розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів.

Перевагою розробленого методу є його істотно більша точність у порівнянні з апроксимацією де Вілдера.

Недоліками є вища складність реалізації внаслідок необхідності наближеного розв’язання системи нелінійних рівнянь, а також те,що ця система має придатні розв’язки не для будь-кого розподілу страхових виплат.

Наведено таблиці, які ілюструють отримані результати. Бачимо, що в тих випадках, коли система має розв’язки, наш метод працює набагато краще ніж метод де Вілдера.

Природним напрямком продовження досліджень є перевірка залежності якості розробленого методу від параметрів процесу ризику – значення початкового капіталу, інтенсивності потоку страхових подій, сукупної величини страхових внесків за одиницю часу та розподілу страхових виплат.

Отримані результати доповідались на VII Всеукраїнській науковій конференцій студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, що проводилася 19-20 квітня 2018р. у місті Київ.[9]

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *F. de Vylder*. A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. – Scandinavian Actuarial Jornal, 1978(2): 114-119, 1978.
2. *J.A. Beekman*. A series for infinite time ruin probabilities. – Insurance: Mathematics and Economics, 4(2):129-134, 1985.
3. *J. Grandell*. Aspects of risk theory. – Springer Science & Business Media, 2009.
4. *J. Grandell*. Simple approximations of ruin probabilities. – Insurance: Mathematics and Economics, 26(2-3):157-173, 2000.
5. *H.H. Panjer and G.E. Willmot*. Insurance risk models. – Society of Actuaries, 1992.
6. *K. Burnecki, P. Mista, A. Weron*. What is the best approximation of ruin probability in infinite time? – Applicationes Mathematics, 2(32):155-176, 2005.
7. *S. Asmussen and H. Albrecher*. Ruin probabilities. – World Scientific, 2010.
8. *T. Mikosch*. Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process. – Springer Science & Business Media, 2009.
9. *І.Ю. Федчишина*. Уточнення апрксимації де Вілдера для оцінки ймовірності банкрутства у страховій моделі Крамера-Лундберга: VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018 р., К.: Матеріали конф. Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НТУУ «КПІ ім.. І. Сікорського» 2018. – с. 35.
10. *М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура, В.М. Пархоменко, М.Й. Ядренко*. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.

Додаток А

```
(*𝒟 – це розподіл випадкової величини c-∑Xᵢ,
сума Xᵢ має так званий compound Poisson distribution,
𝒟1 – це розподіл, який ми підганяємо під дану суміш *)
Quiet[
|беззвучно
 𝒟 = TransformedDistribution[c - d,
     |розподіл функції випадкових змінних
   d ≈ CompoundPoissonDistribution[λ,
      |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{α, 1 - α}, {μ1, μ2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл

 𝒟𝒟 = TransformedDistribution[(c - d)^2,
      |розподіл функції випадкових змінних
   d ≈ CompoundPoissonDistribution[λ,
      |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{α, 1 - α}, {μ1, μ2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл
 𝒟𝒟𝒟 = TransformedDistribution[(c - d)^3,
       |розподіл функції випадкових змінних
   d ≈ CompoundPoissonDistribution[λ,
      |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{α, 1 - α}, {μ1, μ2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл
 𝒟𝒟𝒟𝒟 = TransformedDistribution[(c - d)^4,
        |розподіл функції випадкових змінних
   d ≈ CompoundPoissonDistribution[λ,
      |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{α, 1 - α}, {μ1, μ2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл
 𝒟𝒟𝒟𝒟𝒟 = TransformedDistribution[(c - d)^5,
         |розподіл функції випадкових змінних
   d ≈ CompoundPoissonDistribution[λ,
      |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{α, 1 - α}, {μ1, μ2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл
 𝒟1 = TransformedDistribution[15 - d1,
      |розподіл функції випадкових змінних
   d1 ≈ CompoundPoissonDistribution[2,
       |складений розподіл пуассона
     HyperexponentialDistribution[{.1, .2, .7}, {1, 0.1, 0.2}]]];
     |гіперекспоненційний розподіл
 NSolve[{Mean[𝒟] == Moment[𝒟1, 1], Mean[𝒟𝒟] == Moment[𝒟1, 2],
 |чисельн··· |середнє      |момент випадко···  |середнє     |момент випадкової вел
   Mean[𝒟𝒟𝒟] == Moment[𝒟1, 3], Mean[𝒟𝒟𝒟𝒟] == Moment[𝒟1, 4],
   |середнє      |момент випадко···  |середнє       |момент випадкової велич
   Mean[𝒟𝒟𝒟𝒟𝒟] == Moment[𝒟1, 5]}, {λ, α, μ1, μ2, c}]]
   |середнє          |момент випадкової величини
```

Додаток Б

Страхові виплати, які розподілені за законом, який є сумішшю трьох експоненціальних розподілів.

```
Quiet[λ = 1 (* Інтенсивність пуассонівского потоку страхових подій *);
|беззвучно
 α = 0.1; (*коефіцієнт*)
 β = 0.2;
 γ = 0.7;
 μ1 = 1; (*параметр експоненційного розподілу в суміші*)
 μ2 = 0.1;
 μ3 = 0.2;

 μ = α / μ1 + β / μ2 + γ / μ3 (* EXk *);
 c = 30 (* сума страхових внесків від клієнтів за одиницю часу *);
 U0 = 30 (* початковий капітал страхової компанії *);

 NT = 100000 (*кількість експерементів*);
 X = 0; (*кількість правильної нерівності S≤U0*)
 ρ = (c - λ * μ) / (λ * μ); (* відносна страхова надбавка *)
 p = ρ / (1 + ρ) (*Параметр Геометричного розподілу*);
 𝒟 = ProbabilityDistribution[
      |розподіл, заданий функцією щільності ймовірності
   ((μ1 * μ2 * μ3) / (α * μ2 * μ3 + β * μ1 * μ3 + γ * μ1 * μ2)) *
    (α * N[Exp[-μ1 * x]] + β * N[Exp[-μ2 * x]] + γ * N[Exp[-μ3 * x]]),
        |·· |показникова функція  |·· |показникова функція  |·· |показникова функція
   {x, 0, ∞}];
 For[t = 1, t ≤ NT, t++,
 |цикл ДЛЯ
  M = RandomVariate[GeometricDistribution[p]];
      |реалізація випа···  |геометричний розподіл
  S = 0(* лічильник *);
  For[i = 1, i ≤ M, i++,
  |цикл ДЛЯ
   X1 = RandomVariate[𝒟]; S += X1];
        |реалізація випадкової змінної
  If [S ≤ U0, X++]
  |умовний оператор
 ];
 Print[N[X / NT]]
 |надр···  |числове наближення
]
```

Додаток В

Страхові виплати, які розподілені за законом, який є сумішшю чотирьох експоненціальних розподілів.

```
Quiet[λ = 2 (* Інтенсивність пуассонівского потоку страхових подій *);
|беззвучно
 α = 0.1; (*коефіцієнт*)
 β = 0.2;
 γ = 0.3;
 θ = 0.4;
 μ1 = 1; (*параметр експоненційного розподілу в суміші*)
 μ2 = 0.1;
 μ3 = 0.2;
 μ4 = 0.3;

 μ = α / μ1 + β / μ2 + γ / μ3 + θ / μ4 (* EX_k *);
 c = 15 (* сума страхових внесків від клієнтів за одиницю часу *);
 U0 = 10(* початковий капітал страхової компанії *);

 NT = 100000(*кількість експерементів*);
 X = 0; (*кількість правильної нерівності S≤U0*)
 ρ = (c - λ * μ) / (λ * μ); (* відносна страхова надбавка *)
 p = ρ / (1 + ρ) (*Параметр Геометричного розподілу*);
 𝒟 = ProbabilityDistribution[
       |розподіл, заданий функцією щільності ймовірності
   ((μ1 * μ2 * μ3 * μ4) / (α * μ2 * μ3 * μ4 + β * μ1 * μ3 * μ4 + γ * μ1 * μ2 * μ4 + θ * μ1 * μ2 * μ3)) *
    (α * N[Exp[-μ1 * x]] + β * N[Exp[-μ2 * x]] + γ * N[Exp[-μ3 * x]] + θ * N[Exp[-μ4 * x]]),
        |·· |показникова функція  |·· |показникова функція  |·· |показникова функція  |·· |показникова функці
   {x, 0, ∞}];
 For[t = 1, t ≤ NT, t++,
 |цикл ДЛЯ
  M = RandomVariate[GeometricDistribution[p]];
      |реалізація випа···  |геометричний розподіл
  S = 0(* лічильник *);
  For[i = 1, i ≤ M, i++,
  |цикл ДЛЯ
   X1 = RandomVariate[𝒟]; S += X1];
        |реалізація випадкової змінної
  If [S ≤ U0, X++]
  |умовний оператор
 ];
 Print[N[X / NT]]
 |надр···  |числове наближення
]
```

Додаток Г

Страхові виплати, які розподілені за законом, який є сумішшю експоненціального та рівномірного розподілів.

```
Quiet[λ = 1 (* Інтенсивність пуассонівского потоку страхових подій *);
|беззвучно
 α = 0.5; (* коефіцієнт *)
 β = 0.5; (* коефіцієнт *)
 A = 0;
 B = 10;
 μ1 = 0.1; (* параметр експоненційного розподілу в суміші *)

 μ = α * ((A + B) / 2) + β / μ1; (* EXk *)
 c = 12 (* сума страхових внесків від клієнтів за одиницю часу *);
 U0 = 10(* початковий капітал страхової компанії *);

 NT = 100000(*кількість експерементів*);
 X = 0; (*кількість правильної нерівності S≤U0*)
 ρ = (c - λ * μ) / (λ * μ); (* відносна страхова надбавка *)
 p = ρ / (1 + ρ) (*Параметр Геометричного розподілу*);
 𝒟 = ProbabilityDistribution[
     |розподіл, заданий функцією щільності ймовірності
   Piecewise[
   |кусково задана функція
    {{1, x < 0},
     {((2 * μ1) / (α * μ1 * (A + B) + 2 * β)) * (1 - β * (1 - N[Exp[-μ1 * x]])),
                                                            |··· |показникова функція
      0 ≤ x < A},
     {((2 * μ1) / (α * μ1 * (A + B) + 2 * β)) *
       (1 - α * ((x - A) / (B - A)) - β * (1 - N[Exp[-μ1 * x]])), A ≤ x ≤ B},
                                                  |··· |показникова функція
     {((2 * μ1) / (α * μ1 * (A + B) + 2 * β)) * (1 - α - β * (1 - N[Exp[-μ1 * x]])),
                                                               |··· |показникова функція
      x > B}}, {x, 0, ∞}]];

 For[t = 1, t ≤ NT, t++,
 |цикл ДЛЯ
  M = RandomVariate[GeometricDistribution[p]];
      |реалізація випа··· |геометричний розподіл
  S = 0(* лічильник *);
  For[i = 1, i ≤ M, i++,
  |цикл ДЛЯ
   X1 = RandomVariate[𝒟]; S += X1];
        |реалізація випадкової змінної
  If [S ≤ U0, X++]
  |умовний оператор
 ];
 Print[N[X / NT]]
 |надр··· |числове наближення
]
```