

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« 14 » _____ травня _____ 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

**на тему: «Оцінка Уітла параметра спектральної щільності лінійного
випадкового шуму в нелінійній моделі регресії»**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-61м

Кулумбегова Тетяна Андріївна _____

Керівник:

Кандидат фізико-математичних наук, доцент,

Орловський І.В. _____

Рецензент:

Кандидат фізико-математичних наук,

Нестеренко О.Н. _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студентка _____

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« 14 » травня 2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Кулумбеговій Тетяні Андріївні

1. Тема дисертації: «Оцінка Уїтла параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії»,
науковий керівник дисертації: Орловський Ігор Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
затверджені наказом по університету від « 23 » березня 2018 р. № 1016 – с.
2. Термін подання студентом дисертації 04.05.2018.
3. Об'єкт дослідження: нелінійні моделі регресії з неперервним часом.
4. Предмет дослідження: оцінка Уїтла параметрів спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійних моделях регресії.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись з літературою щодо оцінки Уїтла параметрів спектральної щільності випадкових процесів та полів.

2) Сформулювати умови та довести теорему про консистентність оцінки Уїтла.

3) Сформулювати умови та довести теорему про асимптотичну нормальність оцінки Уїтла.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: не передбачено.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

Орловський І. В., Кулумбегова Т.А. Консистентність оцінки Уїтла параметрів спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній регресії // Вісімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука. - 7–10 жовтня, 2017. – Луцьк-Київ. – т. 2. – С. 70-72.

Орловський І. В., Кулумбегова Т. А. Оцінка Уїтла параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // VII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених. - 19–20 квітня, 2018. – Київ. – С. 17.

8. Дата видачі завдання 05.02.2018

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання завдання на магістерську дисертацію. Узгодження попереднього змісту дипломної роботи. Робота з літературою.	05.02.18 – 25.02.18	Виконано
2.	Дослідження асимптотичних властивостей періодограми залишків.	26.02.18 – 20.03.18	Виконано
3.	Доведення властивості консистентності оцінки мінімального контрасту Уїтла	21.03.18 – 02.04.18	Виконано

	невідомого параметра спектральної щільності випадкового шуму нелінійної моделі регресії.		
4.	Доведення властивості асимптотичної нормальності оцінки мінімального контрасту Уїтла невідомого параметра спектральної щільності випадкового шуму нелінійної моделі регресії.	03.04.18 – 24.04.18	Виконано
5.	Оформлення магістерської дисертації.	25.04.18 – 02.05.18	Виконано

Студент

Кулумбегова Т.А.

Науковий керівник дисертації

Орловський І.В.

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 72 сторінок, 27 посилань.

Об'єкт дослідження – нелінійна модель регресії із лінійним стаціонарним випадковим шумом.

Предмет дослідження – асимптотичні властивості оцінки Уїтла спектральної щільності випадкового шуму вказаної моделі.

Метою роботи є подальший розвиток теорії параметричного оцінювання в частотній області, а саме, дослідження властивостей оцінки Уїтла параметрів спектральної щільності випадкового шуму, який не є обов'язково гауссівським.

Результатом роботи є знаходження достатніх умов консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Уїтла невідомих параметрів спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії.

Результати магістерській дисертації доповідались на Вісімнадцятій міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука та на VII Всеукраїнській конференції молодих вчених.

Ключові слова: оцінка Уїтла, спектральна щільність, нелінійна модель регресії, лінійний випадковий шум, консистентність, асимптотична нормальність.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация: 72 страниц, 27 ссылок.

Объект исследования – нелинейная модель регрессии с линейным стационарным случайным шумом.

Предмет исследования – асимптотические свойства оценки Уитла спектральной плотности случайного шума указанной модели.

Целью работы является развитие теории параметрического оценивания в частотной области, а именно, исследования свойств оценки Уитла параметров спектральной плотности случайного шума, который не обязательно является гауссовским.

Результатом работы есть нахождение достаточных условий состоятельности и асимптотической нормальности оценки Уитла неизвестных параметров спектральной плотности линейного случайного шума в нелинейной модели регрессии.

Результаты магистерской диссертации были представлены на Восемнадцатой международной конференции имени академика Михаила Кравчука и на VII Всеукраинской конференции молодых учёных.

Ключевые слова: оценка Уитла, спектральная плотность, нелинейная модель регрессии, линейный случайный шум, состоятельность, асимптотическая нормальность.

ABSTRACT

Master's thesis: 72 pages, 27 links.

The object of research is nonlinear regression model with linear stationary random noise.

The subject of research is asymptotic properties of the Whittle estimator of the parameter of spectral density of random noise in the model.

The aim of work is further development of theory of parameter estimation in frequency domain, namely, the study of Whittle estimator of random noise spectral density parameters.

Sufficient conditions of consistency and asymptotic normality of Whittle estimator of spectral density unknown parameters of linear random noise in the nonlinear regression model are obtained in the work. The main feature of the obtained result is that the noise is not necessary Gaussian in this case.

The results of master's thesis were presented at the 18th International conference named after academician Mykhailo Kravchuk and at the VII National conference for young scientists.

Key words: Whittle estimator, spectral density, nonlinear regression model, linear random noise, consistency, asymptotic normality.

Зміст

ВСТУП	9
Розділ 1. Умови для параметрів регресійної моделі	12
1.1. Постановка задачі	12
1.2. Блок додаткових умов	15
Розділ 2. Допоміжні твердження	17
2.1. Багатовимірні ядра типу Фейера	17
2.2. Деякі властивості лінійних процесів	18
2.3. Додаткові відомості	24
2.4. Оцінка для періодограми залишків	26
2.5. Цілі функції та поліноми Левітана	42
Розділ 3. Асимптотичні властивості оцінки Уїтла	46
3.1. Консистентність	46
3.2. Асимптотична нормальність	48
ВИСНОВКИ	68
Список використаних джерел	69

ВСТУП

Тематика дисертації відноситься до статистики випадкових процесів, що є важливою галуззю сучасної теорії ймовірностей та математичної статистики. Серед великого різноманіття математичних моделей цієї галузі, для дослідження було обрано широко використовувану модель типу "сигнал + шум". Моделі такого типу мають велику сферу застосування в різних галузях як природничих, так і соціальних наук, таких як: метеорологія, геофізика, теорія турбулентності, статистична радіофізика, економіка, фінанси, соціологія тощо.

У роботі зосереджено увагу на такому важливому аспекті дослідження регресійних моделей, як оцінка функціональних характеристик випадкового шуму. При розгляді задачі, з цієї точки зору, «сигнал» і «шум», у певному сенсі, міняються місцями: «сигнал» тепер стає заважаючим, оскільки ускладнює дослідження «шуму». В цьому випадку, спочатку нівелюють вплив «сигналу». Для цього оцінюють параметри функції регресії, яка виступає у ролі «сигналу». Після цього переходять до побудови оцінок параметрів частотних характеристик. В роботі, у якості таких параметрів, було обрано параметри спектральної щільності.

Для того, щоб оцінити параметр функції регресії, доцільно використовувати оцінки, які не потребують знання характеристик випадкового шуму. У якості такої оцінки було обрано оцінку найменших квадратів (о.н.к.). Асимптотичні властивості о.н.к. параметрів нелінійних моделей регресії вивчалися багатьма авторами. Зробимо посилання лише на монографії О.В. Іванова та М.М. Леоненка [1], О.В. Іванова [2], які містять достатньо повний список посилань на роботи з цього питання.

У якості оцінки параметрів спектральної щільності і об'єкту дослідження, у магістерській дисертації було обрано оцінку Уїтла, яка була запропонована Р. Whittle [3], [4] у 50-х роках минулого століття. На теперішній час вона є однією із найбільш популярних оцінок параметрів спектральної щільності, які застосовуються. Отримані на цей час результати утворили розвинену теорію, яка охоплює велику кількість різноманітних моделей випадкових процесів і полів. Зробимо посилання на деякі з цих робіт: E.J.Hannan [5], [6]; W.Dunsmuir, E.J.Hannan [7]; X. Guyon [8]; M.R.Rosenblatt [9]; R.Fox, M.S.Taqqu [10]; R. Dahlhaus [11]; C.Heyde, R.Gay [12]; L.Giraitis, D.Surgailis [13]; C.Heyde, R.Gay [14]; L.Giraitis, M.S.Taqqu [15]; J.Gao, N.N.Anh, C.C.Heyde, Q.Tieng [16]; J.Gao [17]; N.N.Leonenko, L.M.Sakhno [18] Л.М.Сахно [19].

У роботі Іванов О.В., Приходько В.В. [20] отримано достатні умови консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Уїтла параметрів спектральної щільності гауссівського випадкового шуму у нелінійній моделі регресії. Результати магістерської дисертації продовжують дане дослідження, розширюючи його на випадок лінійних випадкових процесів. Особливістю даної постановки задачі є те, що випадковий шум, вже не буде, обов'язково, гауссівським, що суттєво ускладнює задачу. Розв'язання поставленої задачі розширює спектр математичних моделей, до яких можна застосовувати оцінку Уїтла. Тому обраний напрям досліджень є актуальним та перспективним, як з теоретичної точки зору, так і з точки зору застосувань.

В даній роботі використовувалась схема доведення роботи [20] та деякі результати робіт [21] і [22] де розглядалися асимптотичні властивості оцінки Уїтла, але без прив'язки до моделі регресії.

Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані в різних галузях природничих та соціальних наук, які використовують методи статистичного аналізу випадкових процесів.

РОЗДІЛ 1

Умови для параметрів регресійної моделі

1.1. Постановка задачі

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(t, \alpha_0) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

де $g : (-\Delta; \infty) \times \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена відкрита опукла множина, $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\|e\| \leq 1} (\mathcal{A} + \gamma e)$, γ, Δ — деякі додатні числа, $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ — істинне значення невідомого параметра, а випадковий процес ε задовільняє умовам:

Н1. $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$, — вимірний стаціонарний лінійний процес у тому сенсі, що він має представлення

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} a(t-s) d\zeta(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

де $a(t), t \in \mathbb{R}$, — не випадкова функція, $a \in L_2(\mathbb{R})$, $\zeta(t), t \in \mathbb{R}$, є процесом Леві зі скінченими другими моментами. Припустимо також, що для ε існують моменти усіх порядків, $E\varepsilon(t) = 0$, $B(t) = E\varepsilon(0)\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — коваріаційна функція.

Позначимо через

$$s_r(t_1, \dots, t_r) = i^{-r} \frac{\partial^r}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_r} \ln E \exp \left\{ i \sum_{j=1}^r \lambda_j \varepsilon(t_j) \right\} \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0} \quad (1.3)$$

кумулянтну функцію процесу ε .

Перевагою припущення щодо лінійного представлення (1.2) є явне представлення кумулянтної функції

$$s_r(t_1, \dots, t_r) = d_r \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^r a(t_j - s) ds,$$

де d_r — кумулянта r -го порядку випадкової величини $\zeta\left([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\right)$, зокрема

$$d_2 = E\left(\zeta\left([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\right)\right), \quad d_4 = E\left(\zeta\left([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\right)\right)^4 - 3E\left(\zeta\left([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\right)\right)^2. \quad (1.4)$$

Крім того, з умови **Н1** випливає існування всіх спектральних щільностей (с.щ.) старших порядків, причому

$$f_r(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) = d_r \cdot \widehat{a}(-\lambda_1 - \dots - \lambda_{r-1}) \cdot \prod_{j=1}^{r-1} \widehat{a}(\lambda_j), \quad (1.5)$$

де $\widehat{a}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\lambda t} dt$ — перетворення Фур'є функції a .

Для $r = 2$ будемо мати звичайну с.щ.

$$f_2(\lambda) = d_2 \widehat{a}(\lambda) \widehat{a}(-\lambda) = d_2 |\widehat{a}(\lambda)|^2. \quad (1.6)$$

Н2. Припустимо, що $\widehat{a}(\lambda) = \widehat{a}(\lambda, \theta_{a0})$, $d_k = d_k(\theta_{d0})$, причому $\widehat{a}(\cdot, \theta_{a0})$ є неперервною та $\widehat{a}(\cdot, \theta_{a0}) \in L_1(\mathbb{R})$. Тоді с.щ. випадкового процесу ε

$$f_2(\lambda) = f(\lambda, \theta_0), \quad \theta_0 = (\theta_{a0}, \theta_{d0}) \in \Theta,$$

де $\Theta \in \mathbb{R}^m$ — обмежена відкрита опукла множина; функція $f(\lambda, \theta) > 0$

означена на множині $\mathbb{R} \times \Theta_\tau$, $\Theta_\tau = \bigcup_{\|e\| \leq 1} (\Theta + \tau e)$, $\tau > 0$, — деяке число, та $f(\lambda, \theta_1) \neq f(\lambda, \theta_2)$ на множині додатної міри Лебега при $\theta_1 \neq \theta_2$.

Зауважимо, що з умов **H2** випливає, що $f(\cdot, \theta) \in L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta^c$.

Означення 1. Оцінкою найменших квадратів (о.н.к.) параметра $\alpha \in \mathcal{A}$, отриманою за спостереженнями процесу (1.1), називається будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha}_T = (\hat{\alpha}_{1T}, \dots, \hat{\alpha}_{qT}) \in \mathcal{A}^c$, $\mathcal{A}^c$ — замикання $\mathcal{A}$, для якого

$$Q_T(\hat{\alpha}_T) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}^c} Q_T(\alpha), \quad Q_T(\alpha) = \int_0^T (X(t) - g(t, \alpha))^2 dt.$$

Введемо періодограму залишків

$$I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) = \frac{1}{2T\pi} \left| \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)) e^{-it\lambda} dt \right|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

і розглянемо поле контрасту Уїтла

$$U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta) + \frac{I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}{f(\lambda, \theta)} \right) \omega(\lambda) d\lambda, \quad \theta \in \Theta^c, \quad (1.8)$$

де $\omega(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — деяка парна, додатна, обмежена, вимірنا за Лебегом вагова функція.

Означення 2. Оцінкою мінімального контрасту (о.м.к.) невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називається випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{mT})$ для якого

$$U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) = \min_{\theta \in \Theta^c} U_T(\theta, \hat{\alpha}_T).$$

1.2. Блок додаткових умов

Припустимо, що виконуються такі умови:

R1. О.н.к. $\hat{\alpha}_T$ є слабко консистентною оцінкою α_0 , тобто

$$\hat{\alpha}_T \xrightarrow{P} \alpha_0 \quad T \rightarrow \infty.$$

Позначимо

$$\Phi_T(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^T (g(t, \alpha_1) - g(t, \alpha_2))^2 dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}^c.$$

R2. Для деякої константи $c_0 < \infty$

$$T^{-1} \Phi_T(\alpha_1, \alpha_2) \leq c_0^2 \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}^c.$$

R3. Функції $\omega(\lambda) \ln f(\lambda, \theta)$, $\frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta)}$ неперервні по $\theta \in \Theta^c$ для майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$, причому

(i) $\omega(\lambda) |\ln f(\lambda, \theta)| \leq Z_1(\lambda)$, $\theta \in \Theta^c$, для майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ і $Z_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$, $Z_1(\lambda)$ — обмежена функція, яка не залежить від θ ;

(ii) $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta^c} \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta)} = c_1 < \infty$.

Із умов **H1-H2** і **R3** маємо наступне:

$$\frac{f(\cdot, \theta_1)}{f(\cdot, \theta_2)} \omega(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta^c. \quad (1.9)$$

R4. Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що

- (i) $\frac{v(\lambda)}{f(\lambda, \theta)}$ рівномірно неперервна на $\mathbb{R} \times \Theta^c$;
- (ii) $f(\cdot, \theta) \frac{\omega(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$.

РОЗДІЛ 2

Допоміжні твердження

2.1. Багатовимірні ядра типу Фейера

Розглянемо деякі властивості багатовимірних ядер типу Фейера, необхідні для доведення основних результатів роботи. Наступні твердження базуються на результатах Бенткуса [23], Бенткуса [24], Бенткуса [25], Бенткуса і Руткаускаса [26]. Нехай

$$\begin{aligned}\Phi_T^k(u_1, \dots, u_k) &= \Phi_T^k(u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}T} \int_{[0,T]^k} e^{i \sum_{j=1}^k t_j u_j} dt_1 \dots dt_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k-1}T} \prod_{j=1}^k \frac{\sin \frac{T u_j}{2}}{\frac{u_j}{2}},\end{aligned}$$

де $u_k = -(u_1 + \dots + u_{k-1})$, $u_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, k$. Функції $\Phi_T^k(u_1, \dots, u_k)$, $k \geq 2$ мають властивості, які є подібними до ядра Фейера [18]. При $k = 2$ отримаємо звичайне ядро Фейера.

Твердження 1. *Нехай функція $G(u_1, \dots, u_k)$, $u_k = -(u_1 + \dots + u_{k-1})$ неперервна та обмежена в точці $(u_1, \dots, u_{k-1}) = (0, \dots, 0)$. Тоді*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Phi_T^k(u_1, \dots, u_{k-1}) G(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_{k-1} = G(0, \dots, 0).$$

2.2. Деякі властивості лінійних процесів

Нехай випадковий процес ε задовольняє умові **Н1**. Розглянемо деякі його властивості.

Введемо функцію

$$m_r(t_1, \dots, t_r) = E\xi(t_1)\dots\xi(t_r)$$

яка називається моментною функцією процесу ε порядку $r, r \geq 1$. Оскільки для ε існують всі моменти, то $m_r(t_1, \dots, t_r)$ та $s_r(t_1, \dots, t_r)$, яку задано (1.3), визначені для всіх k .

За умови **Н1**, для $m_2(t_1, t_2)$ та $m_4(t_1, t_2, t_3, t_4)$ є вірними співвідношення [1]:

$$m_2(t_1, t_2) = E\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2) = B(t_1 - t_2) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= s_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + m_2(t_1, t_2)m_2(t_3, t_4) + \\ &+ m_2(t_1, t_3)m_2(t_2, t_4) + m_2(t_1, t_4)m_2(t_2, t_3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Крім того, кумулянтні функції та спектральні щільності старших порядків зв'язані співвідношенням [1]

$$s_r(t_1, \dots, t_r) = s_r(t_1 - t - r, \dots, t_{r-1} - t_r, 0) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j (t_j - t_r) \right\} \times$$

$$\times f_r(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) d\lambda_1 \dots d\lambda_{r-1} \quad (2.3)$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови **H1**, **H2**, тоді*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \rightarrow B(0), \quad t \rightarrow \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо $\rho > 0$. Тоді за Нерівністю Чебишова

$$\begin{aligned} J_T^{(\rho)} &= \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt - B(0) \right| > \rho \right\} \leq \frac{1}{\rho^2 T^2} E \left(\int_0^T (\varepsilon^2(t) - B(0)) dt \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T E(\varepsilon^2(t) - B(0))(\varepsilon^2(s) - B(0)) dt ds = \\ &= \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T \left(E\varepsilon^2(t)\varepsilon^2(s) - B^2(0) \right) dt ds = \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T (m_4(t, t, s, s) - B^2(0)) dt ds. \end{aligned}$$

Використовуючи (2.1), (2.2), можемо записати

$$\begin{aligned} m_4(t, t, s, s) &= s_4(t, t, s, s) + m_2(t, t)m_2(s, s) + 2m_2(t, s)m_2(t, s) = \\ &= s_4(t, t, s, s) + B^2(0) + 2B^2(t - s). \end{aligned}$$

Тоді остання нерівність приймає вигляд

$$J_T^{(\rho)} \leq \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T (s_4(t, t, s, s) + 2B^2(t-s)) dt ds = \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T s_4(t, t, s, s) dt ds +$$

$$+ \frac{2}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s) dt ds = P_1 + P_2.$$

Розглянемо P_2 .

$$P_2 \leq \frac{2}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_{-t}^t B^2(u) du dt \leq \frac{2}{\rho^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(u) du \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

оскільки з умов **H1-H2** випливає, що $B \in L_2(\mathbb{R})$.

Застосовуючи до P_1 (2.3), будемо мати

$$P_1 = \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T s_4(t-s, t-s, 0, 0) dt ds =$$

$$= \frac{1}{\rho^2 T^2} \int_0^T \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\lambda_1(t-s) + \lambda_2(t-s) + \lambda_3 \cdot 0)} f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \right) dt ds =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)(t-s)} dt ds \right) f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3. \quad (2.5)$$

Знайдемо окремо інтеграл

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T e^{i\lambda(t-s)} dt ds &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T e^{i\lambda t} e^{-i\lambda s} dt ds = \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T e^{i\lambda t} dt \right|^2 = \\
&= \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T \cos \lambda t dt + i \int_0^T \sin \lambda t dt \right|^2 = \frac{1}{T^2} \left| \frac{\sin \lambda T}{\lambda} + i \frac{1 - \cos \lambda T}{\lambda} \right|^2 = \\
&= \frac{1}{\lambda^2 T^2} \left(\sin^2 \lambda T + (1 - \cos \lambda T)^2 \right) = \frac{1}{\lambda^2 T^2} 4 \sin^2 \frac{\lambda T}{2} = \frac{4}{\lambda^2 T^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2},
\end{aligned}$$

тобто

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T e^{i\lambda(t-s)} dt ds = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda T}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 T} = \frac{2\pi}{T} \Phi_T^{(2)}(\lambda), \quad (2.6)$$

де $\Phi_T^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda T}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 T}$ називається ядром Фейєра.

Тоді (2.5) приймає вигляд

$$P_1 = \frac{2\pi}{\rho^2 T} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(2)}(\lambda_1 + \lambda_2) f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3.$$

Зробимо заміну змінної $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_3$ в останньому інтегралі

$$P_1 = \frac{2\pi}{\rho^2 T} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(2)}(\lambda) f_4(\lambda - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda d\lambda_2 d\lambda_3 =$$

$$= \frac{2\pi}{\rho^2 T} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_4(\lambda - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Phi_T^{(2)}(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi}{\rho^2 T} \int_{\mathbb{R}} f_4^*(\lambda) \Phi_T^{(2)}(\lambda) d\lambda.$$

Із (1.5) випливає, що

$$f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = d_4 \widehat{a}(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \widehat{a}(\lambda_1) \widehat{a}(\lambda_2) \widehat{a}(\lambda_3),$$

є неперервною функцією.

Щоб скористатися властивістю інтеграла, що містить ядро Фейєра, покажемо, що функція $f_4^*(\lambda)$ є абсолютно інтегрованою

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_4^*(\lambda)| d\lambda &\leq \int_{\mathbb{R}^3} f_4(\lambda - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda d\lambda_2 d\lambda_3 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d_4 |\widehat{a}(-\lambda - \lambda_3)| |\widehat{a}(\lambda)| |\widehat{a}(\lambda_2)| |\widehat{a}(\lambda_3)| d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \leq \\ &\leq |d_4| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{a}(\lambda)| \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{a}(\lambda)| d\lambda \right)^3 < \infty, \end{aligned}$$

оскільки $\widehat{a} \in L_1(\mathbb{R})$ неперервна і, відповідно, обмежена.

Таким чином,

$$\int_{\mathbb{R}} f_4^*(\lambda) \Phi_T^{(2)}(\lambda) d\lambda \rightarrow f_4^*(0) = \int_{\mathbb{R}^2} f_4(-\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3, \quad T \rightarrow \infty,$$

враховуючи, що

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f_4(-\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3)| d\lambda_2 d\lambda_3 &= d_4 \int_{\mathbb{R}^2} |a(-\lambda_3) a(-\lambda_2) a(\lambda_2) a(\lambda_3)| d\lambda = \\
&= d_4 \left(\int_{\mathbb{R}} |a(\lambda, -\lambda)| d\lambda \right)^2 = \frac{d_4}{d_2^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda, \theta)| d\lambda \right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Останнє означає, що

$$P_1 \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Із (2.4) та (2.7) випливає, що

$$J_T^{(\rho)} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

що і треба було довести.

Лему 1 доведено. □

Наступне твердження є сформульоване в наших термінах Теорема 5.1, стор. 234 [21].

Твердження 2. *Нехай випадковий процес ε задовольняє умови **H1**, **H2** та*

$$Q_T = \int_0^T \int_0^T (\varepsilon(t)\varepsilon(s) - E\varepsilon(t)\varepsilon(s)) b(t-s) dt ds.$$

Припустимо, що спектральна щільність $f \in L_p(\mathbb{R})$, $\widehat{b} \in L_q(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, де $\widehat{b}$ — перетворення Фур'є функції b , причому $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$.

Тоді

$$T^{-1/2}Q_T \Rightarrow N(0, \sigma^2), T \rightarrow \infty,$$

де

$$\sigma^2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \widehat{b}^2(\lambda) f^2(\lambda) d\lambda + \frac{d_4}{d_2^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{b}(\lambda) f(\lambda) d\lambda \right)^2,$$

де d_2, d_4 задано (1.4).

2.3. Додаткові відомості

Твердження 3. Якщо $y \in L_2(\mathbb{R})$, а $\widetilde{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{-i\omega t} dt$ — перетворення Фур'є функції $y(\omega)$, тоді $\widetilde{y} \in L_2(\mathbb{R})$ і

$$\|y\|_{L_2} = \|\widetilde{y}\|_{L_2},$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{y}(t)|^2 dt.$$

Твердження 4. Маємо $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$ — простір лінійних неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Скалярний добуток для функцій $f(x), g(x)$ означимо наступним чином: $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$, тоді виконується нерівність:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

Твердження 5. Нехай $f(n), n \in \mathbb{N}$ — вимірна функція на просторі з мірою (X, F, μ) , що приймають значення в $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і задовольняють умови:

- послідовність функцій $f(n), n \in \mathbb{N}$ поточно збігається до функції f на всій множині X ;
- існує функція $g \in L_1(X)$, така що:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq g(x).$$

Тоді $f \in L_1(X)$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

при чому виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

2.4. Оцінка для періодограми залишків

Позначимо

$$g_T(\lambda, \alpha) = \int_0^T e^{-i\lambda t} g(t, \alpha) dt, \quad s_T(\lambda, \alpha) = g_T(\lambda, \alpha_0) - g_T(\lambda, \alpha),$$

$$\varepsilon_T(\lambda) = \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt, \quad I_T^\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} |\varepsilon_T(\lambda)|^2.$$

Розпишемо періодограму залишків

$$\begin{aligned} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) &= \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda t} dt \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda t} dt \int_0^T \overline{(X(s) - g(s, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda s}} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda t} dt \int_0^T (X(s) - g(s, \hat{\alpha}_T)) e^{i\lambda s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T))(X(s) - g(s, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T (g(t, \alpha_0) - g(t, \hat{\alpha}_T))(g(s, \alpha_0) - g(s, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T (g(t, \alpha_0) - g(t, \hat{\alpha}_T)) \varepsilon(s) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T (g(s, \alpha_0) - g(s, \hat{\alpha}_T)) \varepsilon(t) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t) \varepsilon(s) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds = \\
&= \frac{1}{2\pi T} s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} + \frac{1}{2\pi T} s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \overline{\varepsilon_T(\lambda)} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi T} \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \varepsilon_T(\lambda) + \frac{1}{2\pi T} \varepsilon_T(\lambda) \overline{\varepsilon_T(\lambda)} = \\
&= \frac{1}{2\pi T} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 + \frac{1}{\pi T} \operatorname{Re}\{\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}\} + \frac{1}{2\pi T} \varepsilon_T(\lambda) \overline{\varepsilon_T(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Нехай $\varphi = \varphi(\lambda, \theta)$, $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$, — деяка вимірنا за Лебегом за змінною λ при кожному фіксованому θ вагова функція. Маємо

$$J_T(\varphi, \hat{\alpha}_T) = \int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda + \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \varphi(\lambda, \theta) d\lambda = \\
& = J_T^\varepsilon(\varphi) + J_T^{(1)}(\varphi) + J_T^{(2)}(\varphi).
\end{aligned}$$

Припустимо, що

$$\varphi(\lambda, \theta) \geq 0, \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta^c} \varphi(\lambda, \theta) = c(\varphi) < \infty. \quad (2.8)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
|J_T^{(1)}(\varphi)| & \leq \frac{1}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{Re}\{(\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)})\} \varphi(\lambda, \Theta)| d\lambda \leq \\
& \leq \frac{c(\varphi)}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} 2|\{(\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)})\}| d\lambda \leq \\
& \leq 2c(\varphi) \left(\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 d\lambda \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Використовуючи тотожність Планшереля (твердження 3) та умову

R2:

$$|J_T^{(1)}(\varphi)| \leq 2c(\varphi) \left(\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 d\lambda \right)^{1/2} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2c(\varphi) \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) d\lambda \right)^{1/2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (g(t, \hat{\alpha}_T) - g(t, \alpha_0))^2 dt \right)^{1/2} = \\
&= 2c(\varphi) \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} (T^{-1} \Phi_T(\alpha_0, \hat{\alpha}_T))^{1/2} \leq \\
&\leq 2c_0 c(\varphi) \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} \| \hat{\alpha}_T - \alpha_0 \| .
\end{aligned}$$

Враховуючи умови **H1**, **H2**, **R1** та лему 1, отримуємо

$$\sup_{\theta \in \Theta^c} |J_T^{(1)}(\varphi)| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Завдяки (2.8), тотожності Планшереля та **R2**

$$\begin{aligned}
J_T^{(2)}(\varphi) &\leq c(\varphi) \left(\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq c(\varphi) (T^{-1} \Phi_T(\alpha_0, \hat{\alpha}_T))^{1/2} \leq \\
&\leq c(\varphi) T^{-1} \Phi_T(\alpha_0, \hat{\alpha}_T) \leq c_0^2 c(\varphi) \| \hat{\alpha}_T - \alpha_0 \|,
\end{aligned}$$

а тому, враховуючи **R1**,

$$\sup_{\theta \in \Theta^c} J_T^{(2)}(\varphi) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Лема 2. Якщо виконано умови **H1**, **H2**, а парна вагова функція $\varphi(\lambda, \theta)$ така, що $f(\cdot, \theta_0)\varphi(\cdot, \theta) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta^c$, то при $T \rightarrow \infty$

$$J_T^\varepsilon(\varphi) \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda, \quad \theta \in \Theta^c. \quad (2.11)$$

Доведення. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} J_T^\varepsilon(\varphi) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - EI_T^\varepsilon(\lambda)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (EI_T^\varepsilon(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda. \end{aligned}$$

Для доведення (2.11) достатньо довести

$$\int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - EI_T^\varepsilon(\lambda)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} (EI_T^\varepsilon(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

Розглянемо

$$EI_T^\varepsilon(\lambda) = E \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t) \varepsilon(s) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds = \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T B(t-s) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, \theta_0) e^{i\omega(t-s)} e^{-i\lambda(t-s)} d\omega \right) dt ds = \\
&= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T \int_0^T e^{i(\omega-\lambda)(t-s)} dt ds \right) f(\omega, \theta_0) d\omega.
\end{aligned}$$

Згідно з (2.6)

$$EI_T^\varepsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, \theta_0) \Phi_T^{(2)}(\lambda - \omega) d\omega.$$

З останнього та властивостей ядра Фейєра $\Phi_T^{(2)}(\lambda)$ випливає, що

$$E \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda, \quad T \rightarrow \infty,$$

оскільки $f(\cdot, \theta_0) \varphi(\cdot, \theta) \in L_1(\mathbb{R})$, а тому (2.13) доведено.

Для доведення (2.12), покажемо, що

$$E \left(\int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - EI_T^\varepsilon(\lambda)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda \right)^2 \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Запишемо,

$$\begin{aligned}
&E \left(\int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - EI_T^\varepsilon(\lambda)) \varphi(\lambda, \theta) d\lambda \right)^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (EI_T^\varepsilon(\lambda) I_T^\theta(\omega) - EI_T^\varepsilon(\lambda) EI_T^\varepsilon(\omega)) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[0,T]^4} (E\varepsilon(t)\varepsilon(s)\varepsilon(u)\varepsilon(v) - E\varepsilon(t)E\varepsilon(s)E\varepsilon(u)E\varepsilon(v)) \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv \right) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega.
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.2) та властивість **Н1**, будемо мати

$$\begin{aligned}
&E\varepsilon(t)\varepsilon(s)\varepsilon(u)\varepsilon(v) - E\varepsilon(t)\varepsilon(s)E\varepsilon(u)\varepsilon(v) = m_4(t, s, u, v) - m_2(t, s)m_2(u, v) = \\
&= s_4(t, s, u, v) + m_2(t, s)m_2(u, v) + m_2(t, u)m_2(s, v) + \\
&\quad + m_2(t, v)m_2(s, u) - m_2(t, s)m_2(u, v) = \\
&= s_4(t, s, u, v) + B(t - u)B(s - v) + B(t - v)B(s - u).
\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{[0,T]^4} s_4(t, s, u, v) e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv = \\
&= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{[0,T]^4} s_4(t - v, s - v, u - v, 0) e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{[0,T]^4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{i(\lambda_1(t-v) + \lambda_2(s-v) + \lambda_3(u-v))} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-i\lambda(t-s) - i\omega(u-v)} \right) dt ds du dv = \\
&= \frac{2\pi}{T} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3 T} \int_{[0,T]^4} e^{i[(\lambda_1 - \lambda)t + (\lambda_2 + \lambda)s + (\lambda_3 - \omega)u + (\omega - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)v]} dt ds du dv \right) \times \\
&\quad \times f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = \\
&= \frac{2\pi}{T} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(4)}(\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 + \lambda, \lambda_3 - \omega) f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3,
\end{aligned}$$

де $\Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3)$ є наступним ядром

$$\Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 T} \int_{[0,T]^4} e^{i(t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 - t_4(u_1 + u_2 + u_3))} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
P_3 &= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[0,T]^4} s_4(t, s, u, v) e^{-i\lambda(t-s) - i\omega(u-v)} dt ds du dv \right) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega = \\
&= \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(4)}(\lambda_1 - \lambda; \lambda_2 + \lambda; \lambda_3 - \omega) f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \times \\
&\quad \times \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega = \frac{2\pi}{T} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3) G_1(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3,
\end{aligned}$$

де $G_1(u_1, u_2, u_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_4(u_1 + \lambda, u_2 - \lambda, u_3 + \omega) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega$. Використовуючи властивості ядра $\Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3)$, властивості функції $G_1(u_1, u_2, u_3)$ та, зокрема,

$$\begin{aligned}
|G_1(0, 0, 0)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda, -\lambda, \omega) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta)| d\lambda d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_4 |a(\lambda) a(-\lambda) a(\omega) a(-\omega) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta)| d\lambda d\omega = \\
&= \frac{d_4}{d_2^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |d_2 \cdot a(\lambda) a(-\lambda) \varphi(\lambda, \theta)| d\lambda \right)^2 = \frac{d_4}{d_2^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta)| d\lambda \right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Можемо зробити висновок, що

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3) G_1(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \rightarrow G_1(0, 0, 0),$$

а тому

$$P_3 = O(T^{-1}) \quad (2.15)$$

За аналогією,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{[0, T]^4} B(t-u) B(s-v) e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv = \\ & = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{[0, T]^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_1, \theta_0) f(\lambda_2, \theta_0) e^{i\lambda_1(t-u)+i\lambda_2(s-v)} d\lambda_1 d\lambda_2 \right) \times \\ & \quad \times e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv = \\ & = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[0, T]^4} e^{i(t(\lambda_1-\lambda)+s(\lambda_2+\lambda)+u(-\lambda_1-\omega)+v(\omega-\lambda_2))} dt ds du dv \right) \times \\ & \quad \times f(\lambda_1, \theta_0) f(\lambda_2, \theta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ & = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T^{(4)}(\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 + \lambda, -\lambda_1 - \omega) f(\lambda_2, \theta_0) d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned}$$

а тому

$$\begin{aligned}
P_4 &= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[0,T]^4} B(t-u)B(s-v)e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv \right) \times \\
&\quad \times \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega = \\
&= \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_T^{(4)}(\lambda_1 - \lambda; \lambda_2 + \lambda; -\lambda_1 - \omega) f(\lambda_1, \theta_0) f(\lambda_2, \theta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 \right) \times \\
&\quad \times \varphi(\lambda, \theta) \varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3) G_2(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3,
\end{aligned}$$

де

$$G_2(u_1, u_2, u_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1 + \lambda, \theta_0) f(u_2 - \lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(-u_1 - u_3 - \lambda, \theta) d\lambda.$$

Використовуючи властивості ядра $\Phi_T^{(4)}(u_1, u_2, u_3)$ та той факт, що

$$|G_2(0, 0, 0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda, \theta_0)| f(-\lambda, \theta_0) \varphi(\lambda, \theta) \varphi(-\lambda, \theta) d\lambda \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda, \theta_0)\varphi(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(-\lambda, \theta_0)\varphi(-\lambda, \theta)|^2 d\lambda} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda, \theta_0)\varphi(\lambda, \theta)|^2 d\lambda < \infty,
\end{aligned}$$

отримуємо, що

$$P_4 = O(T^{-1}). \quad (2.16)$$

Повторюючи міркування для P_4 , можна показати, що

$$\begin{aligned}
P_5 &= \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[0, T]^4} B(t-v)B(s-u)e^{-i\lambda(t-s)-i\omega(u-v)} dt ds du dv \right) \times \\
&\quad \times \varphi(\lambda, \theta)\varphi(\omega, \theta) d\lambda d\omega = O(T^{-1}).
\end{aligned} \quad (2.17)$$

З (2.15) - (2.17) випливає (2.14), а отже і (2.12).

Лему 2 доведено. □

Наслідок 1. Якщо $\varphi(\lambda, \theta) = \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta)}$, то за умови **R1** - **R3**

$$U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) \xrightarrow{P} U(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta) + \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} \right) \omega(\lambda) d\lambda, \quad \theta \in \Theta^c.$$

Розглянемо функцію контрасту Уїтла

$$K(\theta_0, \theta) = U(\theta) - U(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} - 1 - \ln \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \geq 0,$$

причому $K(\theta_0, \theta) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\theta = \theta_0$.

Лема 3. *Якщо виконано умови **H1**, **H2**, **R1** - **R4**, то*

$$\sup_{\theta \in \Theta^c} |U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta)| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Доведення. Нехай $\{\theta_j, j = \overline{1, N_\delta}\}$ — δ -сітка множини Θ^c .

Зафіксуємо $\theta \in \Theta^c$, тоді існує $j \in \{1, \dots, N_\delta\}$ таке, що $|\theta_j - \theta| < \delta$.

Таким чином,

$$|U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta)| = |U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) + U(\theta_j) + U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| \leq$$

$$\leq |U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) + U(\theta_j)| + |U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_T(\theta_1, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_1) - (U_T(\theta_2, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_2))| + \max_{1 \leq j \leq N_\delta} |U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)|.$$

Зафіксуємо довільне $\rho \geq 0$. Тоді

$$\mathbb{P}\{\sup_{\theta \in \Theta^c} |U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta)| \geq \rho\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_T(\theta_1, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_1) - (U_T(\theta_2, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_2))| \geq \rho\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) + U(\theta_j) + U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| \geq \rho\} \leq$$

$$\leq \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_T(\theta_1, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_1) - (U_T(\theta_2, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_2))| +$$

$$+ \max_{1 \leq j \leq N_\delta} |U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| = P_6 + P_7.$$

З наслідку 1 випливає, що при $T \rightarrow \infty$

$$P_7 = \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq N_\delta} |U_T(\theta_j, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| \geq \frac{\rho}{2}\right\} \rightarrow 0.$$

Для першого доданку

$$P_6 = \mathbb{P}\left\{\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta_1) + \frac{I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}{f(\lambda, \theta_1)} \right) \omega(\lambda) d\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta_1) + \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_1)} \right) \omega(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta_2) + \frac{I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda + \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta_2) + \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \right| \geq \rho \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \theta_2) + \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \Big| \geq \frac{\rho}{2} \Big\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \right| + \right. \\
& + \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \right| \geq \frac{\rho}{2} \Big\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(I_T^\varepsilon(\lambda) + \frac{1}{\pi T} \operatorname{Re} \{ \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2\pi T} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \right) \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \right| + \right. \\
& + \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda, \theta_2)} \right) \omega(\lambda) d\lambda \right| \geq \frac{\rho}{2} \Big\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \left(\frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) d\lambda \right| + \right. \\
& + \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \left(\frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) d\lambda \right| + \\
& \quad \left. + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} \left| J^{(1)} \left(\frac{\omega}{f} \right) \right| + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} J^{(2)} \left(\frac{\omega}{f} \right) \geq \frac{\rho}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

За умовою **R4** (i) та лемою 2

$$\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \left(\frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) d\lambda \right| \leq \eta(\delta) \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda,$$

де

$$\eta(\delta) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \frac{v(\lambda)}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{v(\lambda)}{f(\lambda, \theta_2)} \right| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

Крім того, за лемою 2 і умовою **R4** (ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda = V, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Помітимо також, що

$$\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \left(\frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_1)} - \frac{\omega(\lambda)}{f(\lambda, \theta_2)} \right) d\lambda \right| \leq V\eta(\delta),$$

де $\eta(\delta)$ задано (2.18), а V задано (2.19).

З останнього випливає, що вибором δ можна зробити так, що

$$V\eta(\delta) \leq \frac{\rho}{8}.$$

Таким чином

$$P_6 \leq \mathbb{P} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda - V \right| + 2V\eta(\delta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} \left| J^{(1)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \right| + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} J^{(2)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \geq \frac{\rho}{2} \Big\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda - V \right| + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} \left| J^{(1)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \right| + 2 \sup_{\theta \in \Theta^c} J^{(2)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \geq \frac{\rho}{4} \right\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda - V \right| \geq \frac{\rho}{12} \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sup_{\theta \in \Theta^c} \left| J^{(1)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \right| \geq \frac{\rho}{24} \right\} + \\
& + \mathbb{P} \left\{ \sup_{\theta \in \Theta^c} J^{(2)}\left(\frac{\omega}{f}\right) \geq \frac{\rho}{24} \right\} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

при $T \rightarrow \infty$, завдяки (2.19), (2.9) та (2.10).

Лему 3 доведено. □

2.5. Цілі функції та поліноми Левітана

Введемо деякі позначення. Цілі Функції $f(z)$ називають *цілими функціями експоненціального типу*, якщо при будь-якому z вони задовільняють нерівність

$$|f(z)| \leq A e^{B|x|}, \quad (2.20)$$

де числа A, B не залежать від z [27].

Точна нижня грань значень константи B , при яких має місце нерівність (2.20) називається *точною нижньою гранню типу функції $f(z)$* .

Даний тип функцій знаходиться за формулою [27]

$$\varsigma = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|}.$$

Нерівність

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

з достатньо великим коефіцієнтом A_ε виконується для будь-якого z .

Сукупність усіх цілих функцій експоненціального типу, які менші за σ позначимо E_σ .

Позначимо через W_σ сукупність усіх цілих функцій $f(z)$ експоненціального типу, які менші за σ , для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Двома вченими Вінером і Пеллі було доведено, що клас W_σ співпадає з множиною функцій $f(z)$, які можуть бути представлені у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} \varphi(u) du,$$

де $\varphi(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

Домовимося позначати через B_σ сукупність усіх цілих функцій $f(z) \leq \sigma$ експоненціального типу для яких $\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty$. Прикладом функції із B_σ є

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} d\omega(u),$$

де $\omega(u)$ — функція обмеженої варіації [27]. До класу B_σ також належать суми

$$\sum_k c_k e^{i\alpha_k z}, \quad (-\sigma \leq \alpha_k \leq \sigma), \quad \text{де} \quad \sum_k |c_k| < \infty$$

і інтеграли

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} c(u) du, \quad \text{де} \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} c(u) du < \infty.$$

Також в доведеннях деяких тверджень ми будемо використовувати поліноми Левітана. Б.М. Левітан довів достатньо складну теорему про те, що для кожної цілої функції $f(z)$ експоненціального типу [27], яка є обмеженою на дійсній осі, можна побудувати нескінченну послідовність періодичних геометричних сум $S_n = S_n(f; z)$, які обмежені на дійсній осі тією ж самою константою, що і $f(z)$, яка збігається до $f(z)$ рівномірно в кожній скінченній частині комплексної площини [27]. За допомогою цієї теореми багато властивостей періодичних геометричних сум переносяться на довільні цілі функції експоненціального типу, які обмежені на дійсній осі. Б.М. Левітан будує вищезгадані суми наступним чином.

Нехай $f(z) \in B_\sigma$. Покладемо $h = \frac{\sigma}{n}$, де n — натуральне число і

$$E_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \left(\frac{2 \sin \frac{hu}{2}}{hu} \right)^2 f(u) du \quad (-\infty < x < \infty),$$

тоді

$$S_n(f, z) = \sum_{h=-n}^n h E_h(kh) e^{ikhz}.$$

Позначимо через W_σ^r ($\sigma \geq 0, r = 0, 1, 2, \dots$) сукупність всіх цілих функцій $f(z) \leq \sigma$ експоненціального типу, для яких

$$\frac{f(x)}{|x - i|^{2r+1}} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Таким чином $B_\sigma \subset W_\sigma^{(0)}$ і $W_\sigma^{(r)} \subset W_\sigma^{(r+1)}$

Покладемо

$$E_h^r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \left(\frac{2 \sin \frac{hu}{2}}{hu} \right)^{2r+2} f(u) du \quad (-\infty < x < \infty),$$

тим самим узагальнюючи функцію $E_h(x)$. Дійсно,

$$f(z) \left(\frac{2 \sin \frac{hu}{2}}{hu} \right)^{2r+2} = f_h(z) \leq \sigma + h(r-1)$$

є цілою функцією експоненціального типу, яка на дійсній осі належить як L^2 , так і L .

Тепер покладемо $S_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-n-r}^{n+r} h E_h^{(r)}(kh) e^{ikhz}$ — це узагальнений поліном Левітана [27].

РОЗДІЛ 3

Асимптотичні властивості оцінки Уїтла

3.1. Консистентність

Розглянемо наступну теорему, яка розкриє властивість консистентності оцінки параметра.

Теорема 1. *За умов **H1, H2, R1 - R4** о.м.к. $\hat{\theta}_T$ є слабо консистентною оцінкою параметра θ_0 , тобто $\hat{\theta}_T \xrightarrow{P} \theta, T \rightarrow \infty$.*

Доведення. Згідно з означенням для будь-якого $\rho > 0$ виконується наступне

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{\|\hat{\theta}_T - \theta_0\| \geq \rho\} &= \mathbb{P}\{\|\hat{\theta}_T - \theta_0\| \geq \rho; U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) \leq U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T)\} \leq \\
 &\leq \mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta - \theta_0\| \geq \rho} \left(U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) \right) \leq 0\right\} = \\
 &= \mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta - \theta_0\| \geq \rho} \left(U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) + U(\theta_0) + U(\theta) - U(\theta_0) \right) \leq 0\right\} = \\
 &= \mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta - \theta_0\| \geq \rho} \left[U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - (U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_0)) + K(\theta, \theta_0) \right] \leq 0\right\} \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}\left[U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)-(U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0))\right]+\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta,\theta_0)\leq 0\right\}=$$

$$= \mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}\left[U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)-(U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0))\right]\leq -\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta)\right\}=$$

$$= \mathbb{P}\left\{-\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}\left[U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)-(U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0))\right]\geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta)\right\}\leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}-\left[U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)-(U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0))\right]\geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta)\right\}\leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}\left|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)-(U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0))\right|\geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta)\right\}\leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)\right|+\left|U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_0)\right|\geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta)\right\}\rightarrow 0,$$

завдяки наслідку 1, лемі 2, та тому факту, що $\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}K(\theta_0,\theta) > 0$, при $\rho > 0$.

Теорему 1 доведено. □

Отже, на даному етапі доведено, що оцінка контрасту Уїтла, яку ми вибрали в якості оцінки для істинного значення параметра в заданій моделі регресії (1.1) є консистентною. Це говорить про те, що в ситуації, коли дійсне значення параметра невідоме, вибрана нами оцінка є досить ефективною. При прогнозуванні майбутньої ситуації, оцінка, яка володіє властивістю консистентності є досить важливою, але при деяких ситуаціях цього не достатньо. Тому необхідно довести, що дана оцінка володіє властивістю асимптотичної нормальності. Ці дві властивості з великою ймовірністю гарантують, що вибрана оцінка контрасту Уїтла є максимально наближена до істинного значення параметра і її можна використовувати при подальшому прогнозуванні, якщо істинне значення параметра невідоме.

3.2. Асимптотична нормальність

Наступні умови стосуються властивостей о.н.к. $\hat{\alpha}_T$ і функції регресії $g(t, \alpha)$.

S1. Нормована о.н.к. $T^{1/2}(\hat{\alpha}_T - \alpha_0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальна $N(0, s)$.

Позначимо $g'(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha)$,

$$\Phi'_T(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^T (g'(t, \alpha_1) - g'(t, \alpha_2))^2 dt.$$

S2. Функція $g(t, \alpha)$ неперервно диференційовна по $t \geq 0$ для будь-якого $\alpha \in A^c$ і

$$T^{-1} \Phi'_T(\alpha_1, \alpha_2) \leq (c'_0)^2 \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in A^c,$$

де c_0' — константа.

Нехай $g_i(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(t, \alpha)$, $g_{ij}(t, \alpha) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} g(t, \alpha)$.

S3. Функція $g(t, \alpha)$ двічі неперервно диференційовна по $\alpha \in A^c$ для будь-якого $t \geq 0$, причому

(i) $\sup_{t \geq 0, \alpha \in A^c} |g(t, \alpha)| \leq \bar{c}$ — умова обмеженості;

(ii) $T^{-1} \int_0^T g_i^2(t, \alpha) dt \leq \bar{c}_i(\alpha) < \infty, i = \overline{1, q}, \alpha \in A$; $\bar{c}_i(\alpha)$ — вектор, який містить лише константи;

(iii) $\sup_{\alpha \in A^c} T^{-1} \int_0^T g_{ij}^2(t, \alpha) dt \leq \bar{c}_{ij} < \infty$; $i, j = \overline{1, q}$, а $\bar{c}_{ij}$ — числа, які містяться у матриці.

Функцію $f(\lambda, \theta)$ будемо вважати двічі неперервно диференційовною по $\theta \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ за винятком, можливо, скінченного числа точок $\Lambda = \{\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_r\}$.

Позначимо $f_i(\lambda, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\lambda, \theta)$, $f_{ij}(\lambda, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\lambda, \theta)$. Припустимо далі, що в подальших умовах функції $f_i \omega, f_i f_j \omega, f_i f_j v, f_{ij} \omega, f_{ij} v$, де $i, j = \overline{1, m}$, при кожному фіксованому $\theta \in \Theta^c$ можуть бути продовжені за неперервністю до функцій, означених на $\mathbb{R}$. Для останніх застосуємо аналогічні позначення.

S4.

(i) $\frac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} \omega(\lambda), i = \overline{1, m}$, — обмежені і рівномірно неперервні по λ при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$. Крім цього, $\frac{|f_i(\lambda, \theta)|}{f(\lambda, \theta)} \omega(\lambda) \leq Z_2(\lambda), \theta \in \Theta$, для майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ і $Z_2(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$;

(ii) $\frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} \omega(\lambda), \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f(\lambda, \theta)} \omega(\lambda)$ неперервні по $\theta \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}$, причому $\frac{|f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)|}{f^2(\lambda, \theta)} + \frac{|f_{ij}(\lambda, \theta)|}{f(\lambda, \theta)} \leq a_{ij}(\lambda), \theta \in \Theta^c, \lambda \in \mathbb{R}$ та $a_{ij}(\cdot) \omega(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}), i, j = \overline{1, m}$;

- (iii) $\frac{f_i(\lambda, \theta)f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}\omega(\lambda), \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}\omega(\lambda), i, j = \overline{1, m},$ — обмежені за сукупністю змінних $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$ функції;
- (iv) $f(\lambda, \theta_0) \in L_p(\mathbb{R}^1), \frac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}\omega(\lambda) \in L_q(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}), i = 1, \dots, m, \theta \in \Theta,$ для деяких p, q таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$
- (v) $T^{1/2} \int_{\mathbb{R}} (ET_T(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \frac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}\omega(\lambda) d\lambda \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty,$ для всіх $i = 1, \dots, m, \theta \in \Theta.$

S5. Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$ така, що

- (i) $\frac{f_i(\lambda, \theta)f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}v(\lambda), \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}v(\lambda), i, j = \overline{1, m},$ — рівномірно неперевні в $\mathbb{R} \times \Theta^c;$
- (ii) $f(\cdot, \theta) \frac{\omega(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \theta \in \Theta;$
- (iii) $\frac{f_i(\cdot, \theta)f_j(\cdot, \theta)}{f^2(\cdot, \theta)}\omega(\cdot), \frac{f_{ij}(\cdot, \theta)}{f(\cdot, \theta)}\omega(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \theta \in \Theta.$

Умова **S5(ii)** зовнішньо збігається з умовою **R4(ii)**, але при цьому функція v повинна задовольняти різні умови **S5(i)** і **R4(i)**, і тому, взагалі кажучи, функції v в цих двох умовах можуть бути різними.

S6. $\frac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}\omega(\lambda), i = \overline{1, m},$ — функції обмеженої варіації по $\lambda \in \mathbb{R}.$

S7. $\frac{f_i(\cdot, \theta)}{f(\cdot, \theta)}\omega(\cdot) \in L_k(\mathbb{R})$ для всіх натуральних $k \geq 1, i = \overline{1, m}, \theta \in \Theta.$

очевидно, достатніми умовами виконання **S7** є обмеженість функцій $\frac{f_i(\lambda, \theta)}{f(\lambda, \theta)}\omega(\lambda), i = \overline{1, m},$ по λ і належність $L_1\mathbb{R}$ при кожному фіксованому $\theta \in \Theta.$

Введемо дві матриці, які будуть фігурувати у формулюванні наступної теореми:

$$W_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \omega(\lambda) d\lambda,$$

$$W_2(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) \omega^2(\lambda) d\lambda,$$

$$V(\theta) = 2\pi \cdot \frac{d_4}{d_2^2} \int_{\mathbb{R}^1} \omega(\lambda) \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) d\lambda \int_{\mathbb{R}^1} \omega(\lambda) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta) d\lambda.$$

Введені матриці мають розмірність $[m \times m]$.

S8. Матриці $W_1(\theta)$, $W_2(\theta)$, $V(\theta)$ додатно визначені для $\theta \in \Theta$.

Основним результатом даної дипломної роботи є наступна теорема.

Теорема 2. За умов **H1, H2, R1-R4** та **S1-S8** нормована о.м.к.

$T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальна з нульовим середнім та ковараційною матрицею

$$W(\theta) = W_1^{-1}(\theta_0)(W_2(\theta_0) + V(\theta_0))W_1^{-1}(\theta_0).$$

Перед тим, як довести **теорему 2** розглянемо кілька допоміжних лем, необхідних для доведення теореми.

Позначимо

$$\Delta_T(\varphi) = T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Лема 4. Якщо виконано умови **H1**, **H2**, **R1** - **R2**, **S1** - **S3**, а $\varphi(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ — рівномірно неперервна обмежена функція, то

$$\Delta_T(\varphi) \xrightarrow{P} 0.$$

Доведення. Нехай B_σ — сукупність усіх цілих функцій $b(\lambda)$ експоненціального типу $0 \leq \sigma < \infty$, таких, що $c(b) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |b(\lambda)| < \infty$; $\delta > 0$ — довільне число. Тоді існує функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$, де $\sigma = \sigma(\delta)$, (детальніше, див. [27]) така, що

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda) - \varphi_\sigma(\lambda)| < \delta.$$

Крім того, для функції φ_σ існує послідовність поліномів Левітана (детальніше, див. [27])

$$T_n(\varphi_\sigma; \lambda) = \sum_{j=-n}^n c_j^{(n)} e^{ij \frac{\sigma}{n} \lambda}, n \geq 1,$$

така, що для будь-якого $\Lambda > 0$ існує $n_0 = n_0(\delta, \Lambda)$, що для $n \geq n_0$

$$\sup_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\varphi_\sigma - T_n(\varphi_\sigma; \lambda)| \leq \delta.$$

Запишемо

$$\Delta_T(\varphi) = \Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma) + \Delta_T(\varphi_\sigma - T_n) + \Delta_T(T_n),$$

$$\begin{aligned}
|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| &= |T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} (\varphi(\lambda) - \varphi_\sigma(\lambda)) d\lambda| < \\
&< |\delta T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} d\lambda| \leq \delta T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}| d\lambda \leq \\
&\leq \delta T^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(|s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \right)^{1/2} = \\
&= 2\pi\delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} \Phi_T^{1/2}(\alpha_0, \alpha_T) \leq \\
&\leq 2\pi c_0 \delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\|.
\end{aligned}$$

Для будь-якого $\rho > 0$, за умови **R2**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| \geq \rho\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{2\pi c_0 \delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\| \geq \rho\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\left\{2\pi c_0 \delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\| \geq \rho\right\} \cap \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cap \left\{ \left\{ T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt < B(0) + 1 \right\} \cup \left\{ T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt > B(0) + 1 \right\} \right\} \leq \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ 2\pi c_0 \delta (B(0) + 1) T^{1/2} \|\widehat{\alpha}_T - \alpha_0\| \geq \rho \right\} + \mathbb{P} \left\{ T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt - B(0) > 1 \right\} = \\
& = \mathbb{P} \left\{ T^{1/2} \|\widehat{\alpha}_T - \alpha_0\| \geq \frac{\rho}{2\pi c_0 \delta (B(0) + 1)^{1/2}} \right\} + \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2(t) - B(0)) dt > 1 \right\} = \\
& = P_8 + P_9.
\end{aligned}$$

З леми 1 випливає, що $P_9 \rightarrow 0$. При фіксованому $\rho > 0$, завдяки умові **S1**, число δ можна обрати таким, щоб ймовірність P_8 була меншою за наперед задане число.

Оскільки функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$ і відповідні члени послідовності поліномів Левітана T_n обмежені однією і тією ж константою (детальніше, див. [27]), будемо мати

$$\begin{aligned}
& |\Delta(\varphi_\sigma - T_n)| \leq \delta T^{1/2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \widehat{\alpha}_T)}| d\lambda + \\
& + 2c(\varphi_\sigma) T^{-1/2} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \widehat{\alpha}_T)}| d\lambda = D_1 + D_2.
\end{aligned}$$

Для першого доданку D_1

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}| d\lambda &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}| d\lambda \leq \\ &\leq \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon_T^2(t) dt \right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\|, \end{aligned}$$

який оцінюється аналогічно $|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)|$. Далі отримаємо

$$\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} = \frac{1}{i\lambda} \left[e^{i\lambda T} (g(T, \alpha_0) - g(T, \hat{\alpha}_T)) - (g(0, \alpha_0) - g(0, \hat{\alpha}_T)) - \overline{s'_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \right],$$

$$\text{де } \overline{s'_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} = \int_0^T e^{-i\lambda t} (g'(t, \alpha_0) - g'(t, \hat{\alpha}_T)) dt.$$

За умов леми 4 та нерівності Коші-Шварца

$$\begin{aligned} &T^{-1/2} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}| d\lambda \leq \\ &\leq T^{-1/2} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} |\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \\ &\leq T^{-1/2} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(3 \int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} \frac{1}{\lambda^2} (|g(T, \alpha_0) - g(T, \hat{\alpha}_T)|^2 + |g(0, \alpha_0) - g(0, \hat{\alpha}_T)|^2 + |s'_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2) d\lambda \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} 3^{1/2} \left(8\bar{c}^2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]} \frac{d\lambda}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\Lambda^2} \Phi_T'(\alpha_0, \hat{\alpha}_T) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(4\sqrt{6\pi\bar{c}}\Lambda^{-1/2} + 2\sqrt{3}\pi\bar{c}_0'\Lambda^{-1}T^{1/2}\|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\| \right) \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Таким чином, для будь-якого фіксованого $\rho > 0$, аналогічно ймовірності P_3 , ймовірність $P_5 = \mathbb{P}\{D_2 \geq \rho\}$ при $T > T_0$ можна зробити меншою за наперед задане число, вибором величини Λ .

Розглянемо

$$\Delta_T(T_n) = T^{-1/2} \sum_{j=-n}^n c_j^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} e^{ij\frac{\sigma}{n}\lambda} d\lambda,$$

$$\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} e^{ij\frac{\sigma}{n}\lambda} = \int_{j\frac{\sigma}{n}}^{T+j\frac{\sigma}{n}} e^{i\lambda t} (g(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0) - g(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T)) dt, \quad j = \overline{-n, n}.$$

Це означає, що

$$\Delta_T(T_n) = 2\pi \sum_{j=1}^n c_j^{(n)} T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) (g(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0) - g(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T)) dt +$$

$$+2\pi \sum_{j=-n}^0 c_j^{(n)} T^{-1/2} \int_0^{T+j\frac{\sigma}{n}} \varepsilon(t) \left(g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T\right) \right) dt.$$

Для $j > 0$ розглянемо величину

$$\begin{aligned} & T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) \left(g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) \right) dt = \\ &= \sum_{i=1}^q T^{-1} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) dt \times T^{1/2} (\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^q T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) g_{ik}\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_T^*\right) dt (\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}) (\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0}) = I_{1T} + I_{2T}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$T^{1/2} (\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}) \Rightarrow N(0, S_{ii}), \quad T \rightarrow \infty,$$

за умови **S1**. Крім цього,

$$\begin{aligned} & E \left(T^{-1} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) dt \right)^2 = \\ &= T^{-2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T B(t-s) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) g_i\left(s - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) dt ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s) dt ds \right)^{1/2} T^{-1} \int_0^T g_i^2(t, \alpha_0) dt,$$

де $B(t), t \in \mathbb{R}$, — коваріаційна функція процесу ε . Оскільки завдяки умовам **H1-H2**

$$T^{-1} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s) dt ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta_0) d\lambda < \infty,$$

то разом із умовою **S3(ii)** це означає, що сума $I_{1T} \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$.

Для загального члена суми I_{2T} маємо

$$\begin{aligned} & T^{-1/2} \left| \int_{\frac{j\sigma}{n}}^T \varepsilon(t) g_{ik}(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_T^*) dt \right| |\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}| |\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0}| \leq \\ & \leq c_{ik}^{-1/2} \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right)^{1/2} |T^{1/2}(\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0})| |\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0}| \xrightarrow{P} 0 \end{aligned}$$

за умов теореми, тобто $I_{2T} \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$. Для $j \leq 0$, міркування аналогічні, і

$$\Delta_T(T_n) \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty.$$

Лему 4 доведено. □

Розглянемо наступну лему, результат якої будемо використовувати

при доведенні теореми 2.

Лема 5. *Нехай функція $\varphi(\lambda, \theta)\omega(\lambda)$ неперервна по $\theta \in \Theta^c$ при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{R}$, причому*

$$|\varphi(\lambda, \theta)| \leq \varphi(\lambda), \quad \theta \in \Theta^c, \quad \text{і} \quad \varphi(\cdot)\omega(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тоді якщо $\theta_T^ \xrightarrow{P} \theta_0$, то*

$$I(\theta_T^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*)\omega(\lambda)d\lambda \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0)\omega(\lambda)d\lambda = I(\theta_0).$$

Доведення. Інтеграл $I(\theta)$, де $\theta \in \Theta^c$, є неперервною функцією за теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

Розглянемо подальші міркування процесу доведення леми. Для довільного $\rho > 0$ і $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ знайдемо таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|I(\theta) - I(\theta_0)| < \varepsilon$ при $\|\theta - \theta_0\| < \delta$. Тоді

$$\mathbb{P}\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \rho\} = P_{10} + P_{11},$$

де

$$P_{10} = \mathbb{P}\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \frac{\rho}{2}, \|\theta_T^* - \theta_0\| < \delta\} = 0,$$

завдяки вибору ε .

$$P_{11} = \mathbb{P}\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \frac{\rho}{2}, \|\theta_T^* - \theta_0\| \geq \delta\} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty.$$

Лемі 5 доведено. □

Лема 6. Якщо виконано умови **H1**, **H2**, **R1**, **R2** і

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta^c} |\varphi(\lambda, \theta)| = c(\varphi) < \infty,$$

то

$$T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} d\lambda \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

$$T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)| d\lambda \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Доведення. Доведення двох співвідношень леми є аналогічним доведенню (2.9) і (2.10). □

Лема 7. Нехай існує парна додатна функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що

(i) $\varphi(\lambda, \theta)v(\lambda)$ рівномірно неперервна в $\mathbb{R} \times \Theta^c$;

(ii) $f(\cdot, \theta) \frac{\omega(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$;

і, крім цього,

(iii) $\varphi(\cdot, \theta)f(\cdot, \theta)\omega(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$.

Тоді якщо $\theta_T^* \xrightarrow{P} \theta_0$ і виконано умову **H1** і **H2**, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) I_T^{\varepsilon}(\lambda) \omega(\lambda) d\lambda \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0) f(\lambda, \theta_0) \omega(\lambda) d\lambda, \quad T \rightarrow \infty.$$

Доведення. Запишемо

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) I_T^\varepsilon(\lambda) \omega(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\lambda, \theta_T^*) - \varphi(\lambda, \theta_0)) v(\lambda) I_T^\varepsilon(\lambda) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0) I_T^\varepsilon(\lambda) \omega(\lambda) d\lambda = I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

За лемою 2 та (iii)

$$I_4 \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0) f(\lambda, \theta_0) \omega(\lambda) d\lambda, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

З іншого боку, для будь-якого $r > 0$ за умови (i) існує таке $\delta = \delta(r)$, що для $\|\theta_T^* - \theta_0\| < \delta$

$$|I_3| \leq r \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda, \quad (3.2)$$

за умови (ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \frac{\omega(\lambda)}{v(\lambda)} d\lambda. \quad (3.3)$$

Співвідношення (3.1) - (3.3) доводять лему.

Лему 7 доведено. $\square$

З урахуванням результатів вищевказаних лем, розпочнемо процес доведення теореми 2.

Доведення. За означенням о.м.к. $\hat{\theta}_T$, формально використовуючи фор-

мулу Тейлора, отримаємо

$$0 = \nabla_{\theta} U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) = \nabla_{\theta} U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) + \nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T)(\hat{\theta}_T - \theta_0), \quad (3.4)$$

де ∇_{θ} — стовпчик вектор-градієнт, ∇'_{θ} — рядок вектор-градієнт. Оскільки векторної формули Тейлора не існує, рівність (3.4) розуміємо по координатно, а саме, кожен рядок векторної рівності (3.4) залежить від стовпчика випадкового вектора θ_T^* , такого, що $\|\theta_T^* - \theta_0\| \leq \|\hat{\theta}_T - \theta_0\|$.

З (3.4), у свою чергу, формально маємо

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0) = (\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T))^{-1}(-T^{1/2} \nabla_{\theta} U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T)).$$

Оскільки за умови **R3** впливає можливість диференціювання під знаком інтегралів у формулі (1.8), то

$$\begin{aligned} -T^{1/2} \nabla_{\theta} U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) &= -T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_0) + \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_0)} \right) I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \right) \omega(\lambda) d\lambda = \\ &= T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) - \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) \omega(\lambda) d\lambda = \\ &= T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T^{\varepsilon}(\lambda) - \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) \omega(\lambda) d\lambda + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2\pi)^{-1} t^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \operatorname{Re} \{ \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \} + |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \right) \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda = \\
& = A_T^{(1)} + A_T^{(2)} + A_T^{(3)}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_T^*) + \nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_T^*)} \right) I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \right) \omega(\lambda) d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*)}{f(\lambda, \theta_T^*)} - \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*) \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*)}{f^2(\lambda, \theta_T^*)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*) \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*)}{f^3(\lambda, \theta_T^*)} - \frac{\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_T^*)}{f^2(\lambda, \theta_T^*)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. (I_T^{\varepsilon}(\lambda) + (\pi T)^{-1} \operatorname{Re} \{ \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \} + (2\pi T)^{-1} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2) \right\} \omega(\lambda) d\lambda = \\
&= B_T^{(1)} + B_T^{(2)} + B_T^{(3)} + B_T^{(4)}, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

де доданки $B_T^{(3)}$ і $B_T^{(4)}$ містять у своєму записі величини $\operatorname{Re} \{ \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \}$ і $|s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2$ відповідно.

З огляду на першу частину умови **S4(i)** візьмемо в лемі 4 функції

$\varphi(\lambda) = \varphi_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} \omega(\lambda), i = \overline{1, m}$. тоді в формулі (3.5) $A_T^{(2)} \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$.

Розглянемо в сумі (3.5) доданок $A_T^{(3)} = (a_{iT}^{(3)})_{i=1}^m$,

$$a_{iT}^{(3)} = (2\pi)^{-1} T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \varphi_i(\lambda) d\lambda,$$

де $\varphi_i(\lambda)$ такі, як раніше.

За умов **R1, R2, S1, S4(i)** $A_T^{(3)} \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$, тому що

$$|a_{iT}^{(3)}| \leq c(\varphi_i) T^{-1/2} \Phi_T(\alpha_0, \hat{\alpha}_T) \leq$$

$$\leq c(\varphi_i) c_0^2 \|T^{1/2}(\hat{\alpha}_T - \alpha_0)\| \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\| \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty.$$

Розглянемо поведінку доданків $B_T^{(1)} - B_T^{(4)}$ у формулі (3.6).

Якщо виконано умови **R1** і **S4(ii)**, то при $T \rightarrow \infty$

$$B_T^{(1)} \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} - \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0) \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) \omega(\lambda) d\lambda. \quad (3.7)$$

Для отримання цього факту візьмемо в лемі 5

$$\varphi(\lambda, \theta) = \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f(\lambda, \theta)}, \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Якщо виконано умови леми 6 і **S4(iii)**, то $B_T^{(3)} \xrightarrow{P} 0, B_T^{(4)} \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$.

Для того, щоб у цьому переконатися, візьмемо у лемі 6

$$\varphi(\lambda, \theta) = \varphi_{ij}(\lambda, \theta) = \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} \omega(\lambda), \quad \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}, \quad i, j = \overline{1, m}$$

За умов **R1** і **S5**

$$B_T^{(2)} \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0) \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} - \frac{\nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \right) \omega(\lambda) d\lambda, \quad (3.8)$$

якщо взяти в лемі 7 в умовах (i) та (iii)

$$\varphi(\lambda, \theta) = \varphi_{ij}(\lambda, \theta) = \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}, \quad \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} \quad i, j = \overline{1, m}$$

Таким чином, якщо виконано умови **R1, R2, S4(ii), N4(iii), S5**, то

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} \nabla'_{\theta} U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T) &\xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0) \nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_0) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_0) \omega(\lambda) d\lambda = W_1(\theta_0), \end{aligned} \quad (3.9)$$

тому що $W_1(\theta_0)$ є сумою правих частин (3.7) та (3.8).

Із отриманих фактів випливає, що для доведення даної теореми потрібно вивчити асимптотичну поведінку вектора $A_T^{(1)}$ з (3.5):

$$A_T^{(1)} = T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T^{\varepsilon}(\lambda) - \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) \omega(\lambda) d\lambda =$$

$$\begin{aligned}
&= T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda = \\
&= T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (I_T^\varepsilon(\lambda) - EI_T^\varepsilon(\lambda)) \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda + \\
&+ T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (EI_T^\varepsilon(\lambda) - f(\lambda, \theta_0)) \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda = J_T^{(3)} + J_T^{(4)}.
\end{aligned}$$

З умови **S4**(v) випливає, що

$$J_T^{(4)} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
J_T^{(3)} &= T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T \int_0^T (\varepsilon(t)\varepsilon(s) - E\varepsilon(t)\varepsilon(s)) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds \right) \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda = \\
&= T^{1/2} \int_0^T \int_0^T (\varepsilon(t)\varepsilon(s) - E\varepsilon(t)\varepsilon(s)) \Psi(t-s) dt ds,
\end{aligned}$$

де

$$\Psi(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(t-s)} \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda) d\lambda.$$

Помітимо, що перетворення Фур'є функції Ψ має вигляд

$$\widehat{\Psi}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega(\lambda).$$

З умов **H1**, **H2** та **S4(iv)** випливає, що процес ε та функція $\widehat{\Psi}$ задовольняють умовам твердження 2, а тому

$$J_T^{(3)} \Rightarrow N(0, W_2(\theta_0) + V(\theta_0)), \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Оскільки, σ^2 з твердження 2 буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Psi}^2(\lambda) f(\lambda, \theta_0) d\lambda + \frac{d_4}{d_2^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\Psi}(\lambda) f(\lambda, \theta_0) d\lambda \right)^2 = \\ & = \sigma^2 = 4\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\nabla_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \cdot \frac{\nabla'_{\theta} f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \omega^2(\lambda) f^2(\lambda, \theta_0) d\lambda + \\ & + 2\pi \frac{d_4}{d_2^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nabla'_{\theta} f(\lambda_1, \theta_0)}{f^2(\lambda_1, \theta_0)} \omega(\lambda_1) f(\lambda_1, \theta_0) d\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{\nabla'_{\theta} f(\lambda_2, \theta_0)}{f^2(\lambda_2, \theta_0)} \omega(\lambda_2) f(\lambda_2, \theta_0) d\lambda = \\ & = 4\pi \int_{\mathbb{R}} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_0) \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda, \theta_0) \omega^2(\lambda) d\lambda + \\ & + 2\pi \frac{d_4}{d_2^2} \int_{\mathbb{R}} \nabla_{\theta} \ln f(\lambda_1, \theta_0) \omega(\lambda_1) \int_{\mathbb{R}} \nabla'_{\theta} \ln f(\lambda_2, \theta_0) \omega(\lambda_2) d\lambda = W_2(\theta_0) + V(\theta_0). \end{aligned}$$

З (3.9) - (3.11) випливає твердження теореми.

□

ВИСНОВКИ

В магістерській дисертації було отримано достатні умови консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Уїтла параметра спектральної щільності випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. При цьому, відносно випадкового шуму припускалося, що він є лінійним стаціонарним випадковим процесом, який не обов'язково є гауссівським. Відмова від гауссовості шуму призвела до значного ускладнення та потреби використання, зокрема, спектральних щільностей старших порядків.

Результати роботи дають можливість розширити клас математичних моделей до яких може бути застосована дана теорія на моделі регресії з лінійним негауссівським випадковим шумом.

Природнім продовженням дослідження є узагальнення отриманих результатів на інші поля контрастів, наприклад, поле контрастів Ібрагімова.

Список використаних джерел

- [1] Ivanov A.V., Leonenko N.N. Statistical analysis of random fields. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1989. - 244 p.
- [2] Ivanov A.V. Asymptotic theory of nonlinear regression. - Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., - 1997. 327 p.
- [3] Whittle P. Hypothesis testing in time series. New York: Hafner, - 1951.
- [4] Whittle P. Estimation and information in stationary time series. Ark.mat. - № 2, - 1953.
- [5] Hannan E.J. Multiple Time Series. New York: Springer, - 1970.
- [6] Hannan E.J. The asymptotic theory of linear time series models. J. Appl. Probab., - № 10, - 1973. - P. 130–145.
- [7] Dunsmuir W., Hannan E.J. Vector linear time series models. Adv. Appl. Probab., № 8, - 1976. P. 339–360.
- [8] Guyon X. Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice. Biometrika, - № 69, - 1982. - P. 95–102.
- [9] Rosenblatt M.R. Stationary Sequences and Random Fields, Birkhäuser, Boston - 1985.
- [10] Fox R., Taqqu M.S. Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. Ann. Statist., 2, - № 14, - 1986. P. 517 – 532.

- [11] Dahlhaus R. Efficient parameter estimation for self-similar processes. Ann. Statist., 17, - 1989. - P. 1749 – 1766.
- [12] Heyde C., Gay R. On asymptotic quasi-likelihood stochastic process. Stochast.Process.Appl., - № 31, - 1989. P. 223 – 236.
- [13] Giraitis L., Surgailis D. A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittle estimate. Probab.Theory Relat.Fields, - № 86, - 1990. P. 87 – 104.
- [14] Heyde C., Gay R. Smoothed periodogram asymptotic and estimation for processes and fields with possible long-range dependence. Stochast.Process.Appl., - № 45, - 1993. - P. 169 – 182.
- [15] Giraitis L., Taqqu M.S. Whittle estimator for finite-variance non-Gaussian time series with long memory. Ann. Statist., 1, - № 27, - 1999. - P. 178 – 203.
- [16] Gao J., Anh N.N., Heyde C. C., Tieng Q. Parameter estimation of stochastic processes with long-range dependence and intermittency. J.Time Ser.Anal., - № 22, - 2001. - P. 517 – 535.
- [17] Gao J. Modelling long-range-dependent Gaussian processes with application in continuous-time financial models. J.Appl.Probab., - № 41, - 2004. P. 467 – 485.
- [18] Leonenko N.N., Sakhno L.M. On the Whittle estimators for some classes of continuous-parameter random processes and fields. Statistics and Probability Letters., 76. - 2006. P.781 – 795.

- [19] Сахно Л.М. Асимптотичні та спектральні методи для статистичного оцінювання випадкових процесів та полів: Дис....д-ра фіз.-мат.наук. - Київ, - 2012.
- [20] Іванов О.В., Приходько В.В. Про оцінку Уїтла параметра спектральної щільності випадкового шуму в моделі нелінійної регресії. *Укр.мат.журн.*, том 67, 2015. - С.1050-1067.
- [21] Avram F., Leonenko N., Sakhno L. On a szego type limit theorem, the Holder-Young-Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields. EDP Sciences, 2010. - 234 p.
- [22] Anh V.V., Leonenko N.N., Sakhno L.M. On a class of minimum contrast estimators for fractional stochastic processes and fields.: J. Statist.Planning and Inference - № 123, 2004. - P. 161 - 185.
- [23] Бенткус Р. Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса. *Лит.мат.сб.*- 1, №12, 1972. С.55 - 71.
- [24] Bentkus R. Asymptotic normality of an estimate of the spectral function. *Litovsk. Mat. Sb.*, 12(3), - 1972. P.5 — 18.
- [25] Bentkus R. On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process. *Liet. Mat.Rink.*, 12(1), - 1972. С. 55 — 71.
- [26] Bentkus R., Rutkauskas R. On the asymptotics of the first two moments of second order spectral estimators. *Litovsk. Mat. Sb.*, 13(1), - 1973. С. 29 — 45.

[27] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. *Наука*, 1965. - 408 с.