НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
___________ О. І. Клесов
« 07 » грудня 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Асимптотичні властивості оцінок Коенкера - Бассетта в лінійній моделі регресії»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-71мп
Каптур Наталія Василівна ___________

Керівник:
проф., д. ф.-м. н., проф.
Іванов О. В. ___________

Рецензент:
Член-кор. НАНУ,
зав. відділом мат. методів дослідження операцій
Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ,
д. ф.-м. н., проф.
Кнопов П. С. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2018

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О. І. Клесов

« 30 » жовтня 2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Каптур Наталії Василівні

1. Тема дисертації «Асимптотичні властивості оцінок Коенкера–Бассетта в лінійній моделі регресії», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор,

затверджені наказом по університету від «01 » листопада 2018 р. № 4058-С.

2. Термін подання студентом дисертації 09 грудня 2018 р.

3. Об'єкт дослідження лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження та обмеженою відкритою опуклою параметричною множиною.

4. Предмет дослідження властивості слабкої консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Коенкера - Бассетта параметрів лінійної функції регресії.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) довести консистентність оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної функції регресії;

2) сформулювати теорему про μ – припустимість спектральної міри функції розподілу та центральну граничну теорему для зваженої векторної суми значень перетвореного гауссівського стаціонарного часового ряду;

3) довести теорему редукції;

4) довести асимптотичну нормальність оцінок Коенкера - Бассетта досліджуваної моделі.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 21 слайд.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) Н. В. Каптур. Консистентність квантильних оцінок у моделях лінійної регресії з дискретним часом. // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих учених з математики. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2018. – с. 15.

2) A. V. Ivanov, N. V. Kaptur, I. N. Savych. Consistency of the Koenker-Bassett estimator in linear regression model. // International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.– Kyiv. – 2018. – с. 31-32.

3) О. В. Іванов, Н. В. Каптур, І. М. Савич. Асимптотична нормальність квантильних оцінок у моделях регресії з сингулярним спектром шуму. // Сьома міжнародна науково-практична конференція. «Математика в сучасному технічному університеті». Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2018.

8. Дата видачі завдання 03 вересня 2018р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	03.09.2018-16.09.2018	виконано
2.	Доведення консистентності квантильних оцінок Коенкера-Бассетта параметрів лінійної функції регресії	17.09.2018-03.10.2018	виконано
3.	Формулювання теореми про μ – припустимість спектральної міри функції регресії та центральної граничної теореми для зваженої	04.10.2018-18.10.2018	виконано

	векторної суми значень перетвореного гауссівського стаціонарного часового ряду		
4.	Доведення теореми редукції	19.10.2018-07.11.2018	виконано
5.	Доведення асимптотичної нормальності оцінок Коенкера - Бассетта досліджуваної моделі	08.11.2018-25.11.2018	виконано
6.	Оформлення роботи	26.11.2018-09.12.2018	виконано

Студент Н. В. Каптур

Науковий керівник дисертації О. В. Іванов

Реферат

Магістерська дисертація: 56 сторінок, 21 слайд для проектора, 24 першоджерел.

Вивчаються асимптотичні властивості оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної моделі регресії з дискретним часом спостереження та випадковим шумом, який є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінки Коенкера - Бассетта параметрів функції регресії є консистентними та асимптотично нормальними.

Завданням роботи є отримання результатів про посилену слабку консистентність та асимптотичну нормальність оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної функції регресії. Об'єктом дослідження є лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження та обмеженою відкритою опуклою параметричною множиною. Предметом дослідження є властивості слабкої консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Коенкера - Бассетта параметрів лінійної функції регресії.

Для отримання вказаних результатів використано складні поняття теорії часових рядів та статистики часових рядів, а саме: локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, стаціонарний часовий ряд із сингулярною спектральною щільністю, спектральна міра функції регресії, припустимість сингулярної спектральної щільності стаціонарного часового ряду відносно цієї міри, розклади за поліномами Чебишова - Ерміта значень перетвореного гауссівського часового ряду та його коваріацій, центральна гранична теорема для зважених сум значень такого локального перетворення.

Вперше в лінійній моделі регресії з описаним стаціонарним часовим ря-

дом в якості шуму, що має сингулярний спектр, отримано слабку консистентність та асимптотичну нормальність оцінок Коенкера - Бассетта невідомих параметрів, причому коваріаційну матрицю граничного нормального розподілу записано хоча і в громіздкому, але явному вигляді. Це дозволяє використовувати оцінки Коенкера - Бассетта у випадку несиметричних похибок спостережень і визначає актуальність та важливість отриманих результатів для статистики часових рядів.

Ключові слова: лінійна модель регресії, функція регресії, випадковий шум, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка Коенкера - Бассетта, консистентність, сингулярна спектральна щільність, спектральна міра функції регресії, μ – припустимість, розклади за поліномом Чебишова - Ерміта, ранг Ерміта, асимптотична нормальність.

Abstract

Master degree thesis contains 56 pages, 21 slides for projector, 24 primary sources.

Asymptotic properties of Koenker - Bassett estimators of linear regression model parameters with discrete observation time and random noise being nonlinear local transformation of Gaussian stationary time series with singular spectrum.

The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise, under which the Koenker - Bassett estimators of regression model parameters are consistent and asymptotically normal.

The task of research is receiving results on enhanced weak consistency and asymptotic normality of Koenker - Bassett estimators of linear regression function parameters. Linear regression model with discrete observation time and bounded open convex parametric set is the object of the studying. Weak consistency and asymptotic normality properties of the Koenker - Bassett estimators of linear regression function parameters is the research subject.

For obtaining the thesis results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev - Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it‘s covariances, central limit theorem for weighted sums of the values of such a local transformation.

For the first time in linear regression model with described stationary time series as noise having singular spectrum, the weak consistency and asymptotic normality of unknown parameters Koenker - Bassett estimators are obtained and the covariance matrix of limiting normal distribution is written down though in a bulky but explicit form. It allows to use Koenker - Bassett estimators in the case of skewed observation errors and determines the relevance and importance of the results obtained for statistics of time series.

Key words: linear regression model, regression function, random noise, local transformation of Gaussian stationary time series, Koenker - Bassett estimators, consistency, singular spectral density, spectral measure of regression function, μ – admissibility, expansions by Chebyshev - Hermite polynomials, Hermite rank, asymptotic normality.

Зміст

Вступ

Регресійний аналіз – це важлива частина математичної та прикладної статистики. Розвиток регресійного аналізу стимулюється величезною кількістю задач у різних галузях природничих, технічних та соціальних наук, таких як геофізика, гідрологія, метерологія, теорія турбулентності, статистична теорія зв'язку, хімічна кінетика, економетрика, соціологія тощо.

У магістерській роботі розглядається лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому розумінні, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням стаціонарного гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною, щільністю (зокрема, ця щільність може відповідати сильно залежному часовому ряду). Вивчення часових рядів з несумовними коваріаційними функціями породжує складні ймовірнісні та статистичні задачі. З іншого боку, прикладні дослідження останніх дисятиріч підтвердили, що статистичні дані наукових галузей, перелічених вище, показують сильну залежність: див. монографію Дж. Берана та ін. [1], яка містить огляд та бібліографію з тематики сильної залежності.

В теорії статистичного оцінювання поважне місце займає оцінка квантильної регресії, або оцінка Коенкера-Бассетта (ОКБ) [2], яка означається з використанням непарної функції втрат та є оцінкою невідомого параметра квантиля спостережень. Теорія таких оцінок розвивалась у великій кількості робіт: див., наприклад, монографію Р. Коенкера [3] та дисертацію І.М. Савич [4], в якій можна знайти багато літературних посилань з даної тематики.

У роботі досліджується модель квантильної регресії фіксованого рівня $\beta \in (0,1)$. Спостереження у такій моделі можна записати у вигляді суми квантильної функції регресії та ″похибок″ спостережень, про функцію розподілу яких $F(x), x \in \mathbb{R}$, відомо, що $F(0) = \beta$ (див., наприклад, статтю

П.Ф. Тарасенка, А.В. Журавльова [5]. У магістерській дисертації зроблено припущення про рівність нулю середнього значення похибок спостережень. Таке припущення, взагалі кажучи, спрощує ідею квантильної регресії, але ми отримуємо можливість вивчати стандартні моделі регресії з несиметричними похибками спостережень і отримувати робастні ОКБ параметрів регресії, використовуючи функцію втрат Коенкера-Бассетта (див., наприклад, І.В. Орловський [6]). Зауважимо також, що ОКБ узагальнює оцінку найменших модулів у тому розумінні, що оцінка найменших модулів є оцінкою невідомого параметра медіани розподілених спостережень.

У статті О.В. Іванова [7] було отримано консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших модулів у моделі нелінійної регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень. У монографії О.В. Іванова, М.М. Леоненка [8] ці результати було узагальнено на випадок польової постановки задачі зі слабко залежним однорідним випадковим полем у якості шуму. У дисертації І.В. Орловського [6] було доведено консистентність та асимптотичну нормальність ОКБ в нелінійній моделі регресії з незалежими однаково розподіленими похибками спостережень. У дисертації І.М. Савич [4] ці результати було перенесено на моделі з неперервним часом спостереження та випадковим шумом, який є нелінійним локальним перетворенням стаціонарного гауссівського процесу з сингулярним спектром.

Магістерська дисертація спирається на [4] і містить нові технічні деталі, пов'язані з оцінюванням сум замість інтегралів та ускладненням запису спектральної щільності шуму та її згорток. Крім цього, припущення про лінійність моделі надало можливість отримати закінчені, спрощені формулювання тверджень з умовами, простішими для перевірки їх виконання та застосування, зважаючи на той факт, що переважна більшість математичих моделей функцій регресії лінійна за параметрами.

Магістерська дисертація складається з трьох розділів.

У першому розділі розглянуто модель спостережень та отримано теорему 1.1 та наслідок 1.1 про слабку консистентність ОКБ, причому швидкість збіжності до нуля відповідних імовірностей співпадає зі швидкістю збіжності до нуля коваріаційної функції гауссівського стаціонарного часового ряду, який входить в означення випадкового шуму.

Другий розділ містить допоміжні факти, потрібні, головним чином, для доведення асимптотичної нормальності ОКБ, а саме: наведено формули для спектральної щільності вказаного гаусівського стаціонарного часового ряду та його згорток, введено поняття спектральної міри μ функції регресії, μ – припустимості спектральної щільності часового ряду, рангу Ерміта інтегровної з квадратом за стандартною гауссівською щільністю функції, сформульовано центральну граничну теорему для зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром, яку доведено у роботі О.В. Іванова та ін. [9].

У третьому розділі доведено теорему 3.2 про асимптотичну нормальність ОКБ і виписано в явному вигляді коваріаційну матрицю граничного нормального розподілу. Цій теоремі передує теорема 3.1 (теорема редукції), яка зводить доведення асимптотичної нормальності ОКБ до застосування центральної граничної теореми другого розділу.

Результати першого розділу доповідались на VII Всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих учених з математики та International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman [10, 11].

Результати третього розділу сформульовані в матеріалах VII міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті» [12].

Результати магістерської роботи мають здебільшого теоретичний характер.

1 Консистентність оцінок Коенкера-Бассетта

Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j,\theta) + \varepsilon_j,\ j \in \overline{1,N}, \tag{1.1}$$

де $g(j,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{q} \theta_i g_i(j),\ \ j \geq 1,\ \ \theta = (\theta_1, ..., \theta_q) \subset \Theta \subset \mathbb{R}^q,\ \ \Theta$ – відкрита опукла обмежена множина. Відносно похибок спостережень ε_j припустимо наступне.

A1. $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, а саме: $\varepsilon_j = G(\xi_j),\ G(x),\ x \in \mathbb{R}$, – борелева функція така, що $E\varepsilon_0 = 0,\ E\varepsilon_0^2 < \infty$.

A2. Часовий ряд $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, визначено на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P),\ E\xi_0 = 0$, а його коваріаційну функцію задано виразом

$$B(j) = E\xi_j\xi_0 = \sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(j),\ j \in \mathbb{Z},\ r \geq 0, \tag{1.2}$$

причому $A_l > 0,\ \sum\limits_{l=0}^{r} A_l = 1,\ \ B_{\alpha_l,\chi_l}(j) = \frac{\cos(\chi_l j)}{(1+j^2)^{\alpha_l/2}}\ ,\ \ \alpha_l \in (0,1),\ \ l = \overline{0,r}$, $0 \leq \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < \pi$.

Позначимо $F(x),\ x \in \mathbb{R}$, функцію розподілу випадкової величини ε_0.

A3. $F(0) = \beta,\ \beta \in (0,1)$.

Введемо функцію втрат

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \geq 0, \\ (\beta - 1)x, & x < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Означення 1.1 *Квантильною оцінкою, або ОКБ, параматра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженнями (1.1) називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1,N}) \in \Theta^c$ такий, що*

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_N(\tau),\ Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(X_j - g(j,\tau)),$$

Θ^c *– замикання множини* Θ.

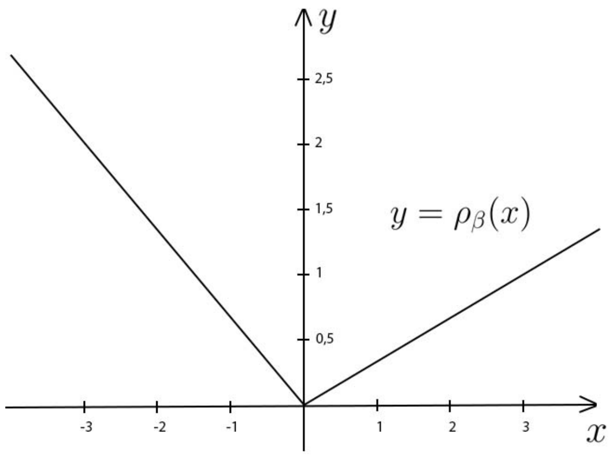

Рис. 1. Графік функції $y = \rho_{1/3}(x)$.

За введених умов оцінка $\hat{\theta}_N$ існує [13].

Позначимо

$$d_N^2 = \ diag \left(d_{iN}^2\right)_{i=1}^q, \ d_{iN}^2 = \sum_{j=1}^N g_i^2(j), \tag{1.4}$$

та припустимо, що є вірними наступні нерівності.

B1(i) $0 < \underline{c_i} \le \liminf_{N\to\infty} N^{-1/2} d_{iN} \le \limsup_{N\to\infty} N^{-1/2} d_{iN} \le \overline{c_i} < \infty, \ i = \overline{1,q}.$

Зробимо заміну змінних у функції регресії $u = N^{-1/2} d_N(\tau - \theta)$ та покладемо $h(j,u) = g(j, \theta + N^{1/2} d_N^{-1} u)$. Тоді множина Θ трансформується в множину $\overline{U}_N(\theta) = N^{-1/2} d_N(\Theta - \theta)$, а оцінка $\hat{\theta}_N$ – в оцінку $\overline{u}_N = N^{-1/2} d_N(\Theta - \theta)$.

Запишемо

$$Q_N^*(u) = Q_N(\theta + N^{1/2} d_N^{-1} u), \ u \in \overline{U}_N^c(\theta);$$

$$V(r) = \{u \in \mathbb{R}^q : ||u|| < r\}, \ r > 0;$$

$$\Phi_{kN}(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^N |h(j, u_1) - h(j, u_2)|^k, \ k = 1, 2;$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^+ + \varepsilon_j^-, \ \varepsilon_j^+ = \varepsilon_j \chi\{\varepsilon_j \le 0\}, \ \varepsilon_j^- = \varepsilon_j \chi\{\varepsilon_j < 0\};$$

$$I(N) = \left(I_{ik}(N)\right)_{i,k=1}^q, \ I_{ik}(N) = N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j) g_k(j).$$

Позначимо $\lambda_{min}(I(N))$ – найменше власне число матриці $I(N)$.

B1(ii). Для достатньо великих $N(N > N_0)$

$$\lambda_{min}(I(N)) \geq \underline{\lambda} > 0. \tag{1.5}$$

Отримаємо з умов **B1(i)** та **B1(ii)** корисні для нас нерівності. Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ та $N > N_0$ справджується $N^{-\frac{1}{2}} d_{iN} \geq \underline{c_i} - \varepsilon$, звідки

$$N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} \leq \frac{1}{\underline{c_i} - \varepsilon} \leq \max_{i \leq i \leq q} \Big(\frac{1}{\underline{c_i} - \varepsilon} \Big) = \frac{1}{\min \underline{c_i} - \varepsilon}, \; i = \overline{1, q}. \tag{1.6}$$

З іншого боку, $N^{-\frac{1}{2}} d_{iN} \leq \overline{c_i} + \varepsilon$, звідки

$$N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} \geq \frac{1}{\overline{c_i} + \varepsilon} \leq \min_{1 \leq i \leq q} \Big(\frac{1}{\overline{c_i} + \varepsilon} \Big) = \frac{1}{\max \overline{c_i} + \varepsilon}, \; i = \overline{1, q}. \tag{1.7}$$

Оцінимо величину

$$\begin{aligned} N^{-1} \Phi_{2N}(u_1, u_2) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{q} g_i(j) N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} (u_1^i - u_2^i) \Big)^2 = \\ = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{i,k=1}^{q} g_i(j) g_k(j) N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} (u_1^i - u_2^i) N^{\frac{1}{2}} d_{kN}^{-1} (u_1^k - u_2^k) \Big) = \\ = \sum_{i,k=1}^{q} \Big(N^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j) g_k(j) N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} (u_1^i - u_2^i) N^{\frac{1}{2}} d_{kN}^{-1} (u_1^k - u_2^k) \Big) \leq \\ \leq \sum_{i,k=1}^{q} N^{-\frac{1}{2}} d_{iN} N^{-\frac{1}{2}} d_{kN} N^{\frac{1}{2}} d_{iN}^{-1} N^{\frac{1}{2}} d_{kN}^{-1} |u_1^i - u_2^i| \, |u_1^k - u_2^k| = \\ = \Big(\sum_{i=1}^{q} |u_1^i - u_2^i| \Big)^2 \leq q ||u_1 - u_2||^2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Тоді

$$\sup_{u \in V^c(r)} N^{-1} \Phi_{2N}(u, 0) \leq q r^2. \tag{1.9}$$

Крім цього,

$$\sup_{||u_1 - u_2|| \leq \delta} N^{-1} \Phi_{1N}(u_1, u_2) \leq \sup_{||u_1 - u_2|| < \delta} \Big(N^{-1} \Phi_{2N}(u_1, u_2) \Big)^{1/2} \leq q^{1/2} \delta. \tag{1.10}$$

Маємо також за (1.5) для $N > N_0$

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) = \sum_{i,k=1}^{q}\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} g_i(j)g_k(j)(N^{1/2}d_{iN}^{-1}u_i)(N^{1/2}d_{kN}^{-1}u_k)\Big) \geq$$
$$\geq \underline{\lambda}||N^{\frac{1}{2}}d_N^{-1}u||^2 \geq \underline{\lambda}(\max\overline{c_i}+\varepsilon)^{-2}||u||^2. \qquad (1.11)$$

Таким чином, для довільно малого $r > 0$, для $N > N_0$ існує таке $\nu(r) > 0$, що

$$\inf_{||u||<r} N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) \geq \nu(r). \qquad (1.12)$$

У якості $\nu(r)$ можна, наприклад, взяти величину

$$\nu(r) = \underline{\lambda}(2\ \max\overline{c_i})^{-2}\ r^2. \qquad (1.13)$$

Сформулюємо властивоті функції втрат ρ_β, деякі з яких будуть використані в подальшому тексті [4, 6].

I. $\rho_\beta(ax) = a\rho_\beta(x),\ a \geq 0;$

II. $\rho_\beta(x) + \rho_\beta(-x) = |x|;$

III. $\underline{\beta}|x| \leq \rho_\beta(x) \leq \overline{\beta}|x|,$ де $\underline{\beta} = \beta\bigwedge(1-\beta),\ \overline{\beta} = \beta\bigvee(1-\beta);$

IV. $\rho_\beta(x+y) \leq \rho_\beta(x) + \rho_\beta(y);$

V. $|\rho_\beta(x) - \rho_\beta(y)| \leq \rho_\beta(x-y)\bigvee\rho_\beta(y-x) \leq \overline{\beta}|x-y|;$

VI. *Якщо* $E|\xi| < \infty,$ *то* $E\rho_\beta(\xi) = E\rho_{1-\beta}(-\xi);$

VII. *Якщо* $E\xi^2 < \infty,$ *то* $D\rho_\beta(\xi) = D\rho_{1-\beta}(-\xi).$

Оскільки $E\rho_\beta(\xi) = \beta E\xi^+ + (\beta-1)E\xi^-$, то у впипадку, коли $E\xi = E\xi^+ + E\xi^- = 0$, маємо $E\rho_\beta(\xi) = E\xi^+$. Зокрема, $E\rho_\beta(\varepsilon_0) = E\varepsilon_0^+$.

Наступна умова є умовою контрасту, тобто умовою розрізняння параметрів.

C1. Для довільного $r > 0$ існує $\triangle(r) > 0$ таке, що для $N > N_0$

$$\inf_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V^c(r)} N^{-1} E Q^*_N(u) \geq E\varepsilon_0^+ + \triangle(r), \tag{1.14}$$

Нехай $\alpha = \min\limits_{0 \leq l \leq r} \alpha_l$, де α_l – константи з умови **A2**.

Теорема 1.1 *За умов* **A1** – **A3**, **B1(i)** *та* **C1** *для довільного* $r > 0$

$$P\Big\{||\overline{u}_N|| \geq r\Big\} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty. \tag{1.15}$$

◀ Позначимо $\delta(u) = Q^*_N(u) - EQ^*_N(u)$. Тоді $\delta_N(0) = Q^*_N(0) - EQ^*_N(0) = Q_N(\theta) - EQ_N(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j) - NE\varepsilon_0^+$.

Переписуючи означення ОКБ для нормованої оцінки $\overline{u}_N$, отримуємо

$$Q^*_N(\overline{u}_N) = \min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta)} Q^*_N(u), \; Q^*_N(u) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta\Big(X_j - h(j,u)\Big),$$

$$Q^*_N(\overline{u}_N) \leq Q^*_N(0) = \delta_N(0) + NE\varepsilon_0^+ \;\; \textit{майже напевно (м. н.)}.$$

З використанням умови **C1** для $\gamma \in (0,1)$ маємо

$$\begin{aligned}
P\Big\{\{||\overline{u}_N|| \geq r\Big\} = P\Big\{||\overline{u}_N|| \geq r\} \bigcap \{Q^*_N(\overline{u}_N) \leq \delta_N(0) + NE\varepsilon_0^+\}\Big\} \leq \\
\leq P\Big\{\min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1} Q^*_N(u) \leq N^{-1}\delta_N(0) + E\varepsilon_0^+\Big\} \leq \\
\leq P\Big\{\min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1} Q^*_N(u) \leq N^{-1}\delta_N(0) + \\
+ \min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1} EQ^*_N(u) - \triangle(r)\Big\} \leq \\
\leq P\Big\{N^{-1}\delta_N(0) \geq (1-\gamma)\triangle(r)\Big\} + P\Big\{\min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1} Q^*_N(u) - \\
- \min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1} EQ^*_N(u) \leq -\gamma\triangle(r)\Big\} = P_1 + P_2.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Зауваважимо, що

$$\begin{aligned}
P_2 \leq P\Big\{\min_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}\delta_N(u) \leq -\gamma\triangle(r)\Big\} \leq \\
\leq P\Big\{\max_{u \in \overline{U}^c_N(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geq \gamma\triangle(r)\Big\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Завдяки умові **B1(i)** та обмеженості Θ, всі множини $\overline{U}_N^c(\theta)$ при $N > N_0$ потрапляють в деяку кулю $V(r_0)$ для деякого $r_0 > r$, тобто нерівність (1.17) можна продовжити наступним чином:

$$P_2 \leq P\Big\{\max_{u \in V^c(r_0)\setminus V^c(r)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geq \gamma\triangle(r)\Big\} \leq \\ \leq P\Big\{\max_{u \in V^c(r_0)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geq \gamma\triangle(r)\Big\}. \tag{1.18}$$

Оцінимо спочатку ймовірність P_1. За нерівністю Чебишова

$$P_1 \leq \frac{N^{-2}E\delta_N^2(0)}{(1-\gamma)^2\,\triangle^2(r)},$$

$$N^{-2}E\delta_N^2(0) = N^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\rho_\beta(\varepsilon_j) - NE\varepsilon_0^+\Big)^2 = \\ = N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}E\rho_\beta(\varepsilon_j)\rho_\beta(\varepsilon_k) - (NE\varepsilon_0^+)^2. \tag{1.19}$$

За властивістю III функції втрат ρ_β

$$E\rho_\beta^2(\varepsilon_0) \leq \overline{\beta}^2 E\varepsilon_0^2 = \varkappa_1 < \infty.$$

Тоді в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$, де $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ - стандартна гауссівська щільність, є вірним розклад

$$\rho_\beta(G(x)) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m}{m!}H_m(x),\ c_m = \int\limits_{\mathbb{R}}\rho_\beta(G(x))H_m(x)\varphi(x)dx,\ m \geq 0,$$

за поліномами Чебишова – Ерміта

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}\,e^{-x^2/2},\ m \geq 0,$$

причому $EH_m(\xi_j)H_n(\xi_k) = \delta_m^n m!B^m(j-k)$, δ_m^n – символ Кронекера, тобто $\delta_m^n = 1$ при $m = n$ та $\delta_m^n = 0$, якщо $m \neq n$. З цього випливає, що

$$E\rho_\beta(\varepsilon_j)\rho_\beta(\varepsilon_k) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!}B^m(j-k), \tag{1.20}$$

зокрема,

$$E\rho_\beta^2(\varepsilon_0) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!} \leq \varkappa_1.$$

Зауважимо, що $E\rho_\beta(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^+ = c_0$, та з (1.19), (1.20) маємо

$$N^{-2}E\delta_N^2(0) = N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!}B^m(j-k) - (E\varepsilon_0^+)^2\Big) =$$

$$= N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!}B^m(j-k)\Big) \leq \varkappa_1 N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}|B(j-k)|.$$

Оцінимо останню подвійну суму:

$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}|B(j-k)| = N^{-2}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}(N-|s|)|B(s)| =$$

$$= N^{-1}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}(1-\frac{|s|}{N})|B(s)| \leq 2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)|.$$

З інщого боку, при $s \neq 0$ за нашими умовами

$$|B(s)| \leq \sum_{l=0}^{r}A_l(1+s)^{-\alpha_l/2} \leq (1+s^2)^{-\alpha/2} \leq s^{-\alpha}.$$

Таким чином

$$2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)| = 2N^{-1} + 2N^{-1}\sum_{s=1}^{N}|B(s)| \leq 2N^{-1} + 2N^{-1}\sum_{s=1}^{N}s^{-\alpha} \leq$$

$$\leq 2N^{-1} + 2N^{-1}\int\limits_{0}^{N}s^{-\alpha}ds = 2N^{-1} + 2(1-\alpha)^{-1}N^{-\alpha}.$$

Отже, при $N \to \infty$

$$P_1 \leq \frac{2\varkappa_1}{(1-\gamma)^2\triangle^2(r)}\Big(N^{-1} + (1-\alpha)^{-1}N^{-\alpha}\Big) = O(N^{-\alpha}). \qquad (1.21)$$

Оцінимо тепер імовірність P_2, користуючись нерівністю (1.18). Нехай $F^{(1)}, ..., F^{(L)} \subset V^c(r_0)$ – замкнені множини, діаметри яких не перевищують значення $\delta > 0$, яке ми оберемо нижче, причому

$$\bigcup_{i=1}^{L}F^{(i)} = V^c(r_0). \qquad (1.22)$$

Зафіксуємо точки $u_i \in F^{(i)}$, $i = \overline{1, L}$. Тоді

$$P_2 \le P\Big\{ \sup_{u \in \bigcup\limits_{i=1}^{L} F^{(i)}} N^{-1}|\delta_N(u)| \ge \gamma\triangle(r) \Big\} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{L} P\Big\{ \sup_{u', u'' \in F^{(i)}} N^{-1}|\delta_N(u') - \delta_N(u'')| + N^{-1}|\delta_N(u_i)| \ge \gamma\triangle(r) \Big\}. \tag{1.23}$$

За властивістю V функції втрат ρ_β отримуємо

$$|\delta_N(u') - \delta_N(u'')| \le |Q_N^*(u') - Q_N^*(u'')| + E|Q_N^*(u') - Q_N^*(u'')| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{N} |\rho_\beta(X_j - h(j, u')) - \rho_\beta(X_j - h(j, u''))| +$$
$$+E \sum_{j=1}^{N} |\rho_\beta(X_j - h(j, u')) - \rho_\beta(X_j - h(j, u''))| \le 2\overline{\beta}\Phi_{1N}(u', u''). \tag{1.24}$$

З нерівності (1.10) випливає, що для $u', u'' \in F^{(i)}$

$$2\overline{\beta}\Phi_{1N}(u', u'') \le 2\overline{\beta} q^{\frac{1}{2}} \delta. \tag{1.25}$$

Таким чином, з (1.22) - (1.25) знаходимо, що

$$P_2 \le \sum_{i=1}^{L} P\Big\{ N^{-1}|\delta_N(u_i)| \ge \gamma\triangle(r) - 2\overline{\beta} q^{\frac{1}{2}} \delta \Big\}. \tag{1.26}$$

Оберемо величину $\delta > 0$ таким чином, щоб виконувалась наступна нерівність $\gamma\triangle(r) - 2\overline{\beta} q^{\frac{1}{2}} \delta := \varepsilon(r, \delta) > 0$ (зменшення δ призведе лише до зростання числа L), і оцінимо кожний доданок суми (1.26) окремо.

Маємо за нерівністю Чебишова

$$P\Big\{ N^{-1}|\delta_N(u_i)| \ge \varepsilon(r, \delta) \Big\} \le \varepsilon^{-2}(r, \delta) N^{-2} E\delta_N^2(u_i). \tag{1.27}$$

Позначимо $\triangle h(j, u_i) = h(j, u_i) - h(j, 0)$ і запишемо

$$\delta_N(u_i) = Q_N^*(u_i) - EQ_N^*(u_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)) - E\sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)),$$

$$E\delta_N^2(u_i) = \sum_{j,k=1}^{N} E\rho_\beta\Big(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)\Big)\rho_\beta\Big(\varepsilon_k - \triangle h(k,u_i)\Big) -$$

$$-\Big(E\sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i))\Big)^2.$$

Покладемо

$$\rho_\beta\Big(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)\Big) = Z(\varepsilon_j, j) = Z(G(\xi_j), j). \tag{1.28}$$

Оскільки для будь-якого $j \in \{1, ..., N\}$ за властивістю III функції ρ_β

$$EZ^2(\varepsilon_0, j) = E\rho_\beta^2\Big(\varepsilon_0 - \triangle h(j,u_i)\Big) \le \overline{\beta}^2\Big(E\varepsilon_0^2 + (\triangle h(j,u_i))^2\Big) < \infty, \tag{1.29}$$

то функцію $Z(G(\cdot), j)$ можна розкласти в ряд у просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ за поліномами Чебишова – Ерміта:

$$Z(G(x), j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(j,u_i)}{m!} H_m(x),\ c_0(j,u_i) = EZ(\varepsilon_0, j),$$

$$c_m(j,u_i) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\beta\Big(G(x) - \triangle h(j,u_i)\Big) H_m(x)\varphi(x)dx,\ m \ge 1.$$

Тоді користуючись попередніми міркуваннями, які дозволили отримати оцінку (1.21), та нерівністю (1.29), маємо при $N \to \infty$

$$N^{-2}E\delta_N^2(u_i) = N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m(j,u_i)c_m(k,u_i)}{m!}B^m(j-k) - c_0(j,u_i)c_0(k,u_i)\Big) =$$

$$= N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(j,u_i)c_m(k,u_i)}{m!}B^m(j-k)\Big) \le$$

$$\le N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,u_i)}{m!}|B^m(j-k)|\Big) \le$$

$$\le N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,u_i)}{m!}|B(j-k)|\Big) \le$$

$$\le N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N} EZ^2(\varepsilon_0, j)|B(j-k)| \le$$

$$\leq N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\overline{\beta}^2\Big(E\varepsilon_0^2+(\triangle h(j,u_i))^2\Big)|B(j-k)|=$$
$$=O(N^{-\alpha})+\overline{\beta}^2N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2|B(j-k)|. \tag{1.30}$$

Оцінимо останню суму, скориставшись нерівністю (1.9):

$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2|B(j-k)|=N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2N^{-1}\sum_{k=1}^{N}|B(j-k)|\leq$$
$$\leq N^{-1}\Phi_{2N}(u_i,0)N^{-1}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}|B(s)|\leq 2qr_0^2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)|=O(N^{-\alpha}) \tag{1.31}$$

при $N\to\infty$. З (1.26), (1.27), (1.30) та (1.31) отримуємо, що $P_2=O(N^{-\alpha})$, і теорему доведено. ■

Зауважимо, що за умови **B2(i)** справедливість для будь-якого $r>0$ співвідошення (1.15) та співвідношення

$$P\{||\hat{\theta}_N-\theta||\geq r\}=O(N^{-\alpha}) \textit{ при } N\to\infty \tag{1.32}$$

випливає одне з одного. Щоб впевнитись в цьому майже очевидному твердженні, скористаємось міркуваннями, які привели до нерівностей (1.6) та (1.7).

Нехай справедливе (1.15). Тоді маємо для довільного $r>0$

$$P\{||\hat{\theta}_N-\theta||\geq r\}=P\{||N^{-1/2}d_N^{-1}\Big(N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N-\theta)\Big)||\geq r\}\leq$$
$$\leq P\{||N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N-\theta)||\geq r(\min\underline{c}_i-\varepsilon)\}=O(N^{-\alpha}) \textit{ при } N\to\infty,$$

якщо обрати ε достатньо малим, тобто (1.32) виконується.

Нехай, навпаки, має місце (1.32). Тоді для довільного $r>0$

$$P\{||N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N-\theta)||\geq r\}\leq P\{||\hat{\theta}_N-\theta||\geq r(\max\overline{c}_i+\varepsilon)^{-1}\}=O(N^{-\alpha})$$

при $N\to\infty$, тобто справедливе (1.15).

Сформулюємо достатні умови виконання умови контрасту **C1**.

C2(i) $\sup\limits_{j\geq 1}\max\limits_{\tau_1,\tau_2\in\Theta^c}|g(j,\tau_1)-g(j,\tau_2)|=g_0<\infty;$

(ii) випадкова величина ε_0 має щільність $p(x)=F^{'}(x),\ x\in\mathbb{R}$, причому $\inf\limits_{|x|\leq g_0} p(x)=p_0>0.$

У роботі [6] доведено, що за умови **C2** для $g\in[0,g_0]$

$$E\rho_\beta(\varepsilon_0\pm g)-E\rho_\beta(\varepsilon_0)\geq\frac{1}{2}p_0g^2. \tag{1.33}$$

З нерівності (1.33) випливає, що

$$N^{-1}EQ_N(\theta+N^{1/2}d_N^{-1}u)\geq E\rho_\beta(\varepsilon_0)+\frac{1}{2}p_0N^{-1}\Phi_{2N}(u,0), \tag{1.34}$$

або для будь-якого $r>0$

$$\begin{aligned}\inf_{u\in U_N^c(\theta)\setminus V^c(r)}N^{-1}EQ_N^*(u)\geq E\varepsilon_0^+ +\frac{1}{2}p_0\inf_{||u||>r}\Phi_{2N}(u,0)\geq\\ \geq E\varepsilon_0^+ +\frac{1}{2}p_0\ \nu(r),\end{aligned} \tag{1.35}$$

де $\nu(r)$ виникає в нерівності (1.12) і задано виразом (1.13). Нагадаємо, що (1.12) отримано за припущенням **B1(ii)**. Таким чином, ми можемо сформулювати наступний наслідок доведеної теореми, який зручніше застосовувати.

Наслідок 1.1 *За умов* **A1**-**A3**, **B1(i)**,**B1(ii)** *та* **C2** *для довільного* $r>0$

$$P\{||\hat{\theta}_N-\theta||\geq r\}=O(N^{-\alpha})\ \textit{при}\ N\to\infty. \tag{1.36}$$

Приклад 1.1. Розглянемо в моделі спостережень (1.1) функцію регресії

$$g(j,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\Big(A_i\sin\varphi_i j+B_i\cos\varphi_i j\Big),\ j\geq 1, \tag{1.37}$$

де $\varphi_i,\ \ i=\overline{1,n},$ – відомі частоти гармонічних коливань, причому $0<\varphi_1<...<\varphi_n<\pi$. Вектор невідомих параметрів θ – це вектор невідомих амплітуд суми гармонічних коливань (1.37), а саме: $\theta=(A_1,B_1,A_2,B_2,...,A_n,B_n)$. Таким чином, в цьому прикладі $q=2n$, і ми маємо справу з вектором - градієнтом функції регресії

$$\bigtriangledown g(j)=(\sin\varphi_1 j,\cos\varphi_1 j,\sin\varphi_2 j,\cos\varphi_2 j,...,\sin\varphi_n j,\cos\varphi_n j),\ j\geq 1. \tag{1.38}$$

Перевіримо виконання умов теореми 1.1 та наслідку 1.1 щодо функції регресії $g(j,\theta)$. Оскільки $N^{-1}d_{iN}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$, $i = \overline{1,2n}$, то умову **B1(i)** виконано. Неважко зрозуміти, що з огляду на (1.38), $I_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{I}_{2n}$, де $\mathbb{I}_{2n}$ – одинична матриця $2n$ -го порядку, і умову **B1(ii)** також виконано. Варто зауважити, що

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) = \left\langle I_N N^{1/2} d_N^{-1} u, N^{1/2} d_N^{-1} u \right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} ||u||^2$$

рівномірно за $u \in V^c(r_0)$, де куля $V^c(r_0)$ містить всі множини $\overline{U}_N^c(\theta)$ (див. вище). Крім цього,

$$|g(j,\tau_1) - g(j,\tau_2)| \leq \sqrt{2n}||\tau_1 - \tau_2|| \leq \sqrt{2n}\, diam\, \Theta,$$

і умову **C2(i)** виконано з $g_0 = \sqrt{2n}\, diam\, \Theta$. Таким чином, за умови **C2(ii)** є вірною умова **C2**.

2 μ - припустимість спектральної щільності стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром

Нехай $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією, яка є неперервним аналогом коваріаційної функції стаціонарного часового ряду $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, розділу 1, тобто

$$B(t) = E\xi(t)\xi(0) = \sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(t),\ t \in \mathbb{R},\ r \geq 0, \tag{2.1}$$

де $A_l > 0,\ l = \overline{0,r},\ \sum\limits_{l=0}^{r} A_l = 1$,

$$B_{\alpha_l,\chi_l}(t) = \frac{\cos(\chi_l t)}{(1+t^2)^{\alpha_l/2}},\ \alpha_l \in (0,1),\ l = \overline{0,r},$$
$$0 \leq \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < \pi. \tag{2.2}$$

Модель коваріаційої функції (2.1),(2.2) було вперше розглянуто в роботі [14], тому що спектральну щільність, відповідну даній коваріаційній функції, можна записати в явному вигляді, причому її сингулярності, як ми побачимо, можуть знаходитись не тільки в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Коваріаційна функція (2.1),(2.2) використовувалась також у пізніших роботах $[4, 9, 15]$ та ін. .

Спектральна щільність $\tilde{f}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} A_l \tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

де для $l = \overline{0,r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda) = \frac{c_1(\alpha_l)}{2}\Big(K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda+\chi_l|)|\lambda+\chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}} + K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda-\chi_l|)|\lambda-\chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}}\Big), \tag{2.4}$$

$$c_1(\alpha)=\frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})},\ K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty s^{\nu-1}exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(s+\frac{1}{s}\Big)z\Big\}ds,\ z\geq 0,\ \nu\in\mathbb{R}.$$

Функція $K_\nu(z),\ z\geq 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν, або функцією Макдональда. Зауважимо, що

$$K_{-\nu}(z)=K_\nu(z)$$

і для $z\to 0$

$$K_\nu(z)\backsim\Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu},\ \nu>0.$$

В околах точок $\lambda=\pm\chi_l,\ l=\overline{0,r}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda)=\frac{c_2(\alpha_l)}{2}\Big[|\lambda+\chi_l|^{\alpha_l-1}(1-h_l(|\lambda+\chi_l|))+|\lambda-\chi_l|^{\alpha_l-1}(1-h_l(|\lambda-\chi_l|))\Big], \tag{2.5}$$

причому $c_2(\lambda)=(2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2})^{-1}$,

$$h_l(|\lambda|)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha_{l+1}}{2}}{\Gamma(\frac{3-\alpha_l}{2}}\Big|\frac{\lambda}{2}\Big|^{1-\alpha_l}+\frac{\Gamma(\frac{\alpha_{l+1}}{2}}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_l}{2}}\Big|\frac{\lambda}{2}\Big|^2+o(|\lambda|^2),\ \lambda\to 0,\ \ l=\overline{0,r},$$

див. Donoghue [16], с.293, та Anh et al. [14]. Таким чином, спектральна щільність (2.3) має $2r+2$ точки сингулярності, якщо $\chi_0\neq 0$, та $2r+1$ точку сингулярності, якщо $\chi_0=0$. Процес $\xi(t),\ t\in\mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\chi_0=0$.

Коваріаційна функція $B(j),\ j\in\mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду ξ_j, $j\in\mathbb{Z}$, розділу 1 має спектральне представлення

$$B(j)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda j}f(\lambda)d\lambda,\ j\in\mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

тобто $B(j),\ j\in\mathbb{Z}$, – послідовність коефіцієнтів Фур'є спектральної щільності

$$f(\lambda)=\sum_{l=0}^{r}A_lf_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]. \tag{2.7}$$

Зауважимо, що спектральна щільність (2.7) та спектральна щільність (2.3), що відповідає неперервному аналогу (2.1) коваріаційної функції $B(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [17]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2.8}$$

Оскільки функція Макдональда має властивість ([18], 8.451, 6)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}(1 + O(\frac{1}{z})), \ z \to +\infty, \ \nu \geq 0, \tag{2.9}$$

то ряд (2.8) збігається, і фунція $f(\lambda)$ означена коректно. Більше того ми можемо сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm\chi_l \in (-\pi, \pi), \ l = \overline{0, r}$.

Розглянемо функцію регресії лінійної моделі (1.1):

$$g(j, \theta) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i g_i(j), \ j = \overline{1, N}.$$

Нехай $\mathcal{B} - \sigma$ – алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо матричну міру $\mu_N(d\lambda)$ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B})$ з матрицею щільності

$$\Big(\mu_N^{kl}(\lambda)\Big)_{k,l=1}^{q} = \Big(g_N^k(\lambda)\overline{g_N^l(\lambda)}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(\lambda)|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^l(\lambda)|^2 d\lambda\Big)^{-1/2}\Big)_{k,l=1}^{q},$$

$$g_N^k(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} e^{i\lambda j} g_k(j), \ \lambda \in [-\pi, \pi], \ k = \overline{1, q}. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що $d_{kN}^2 = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(\lambda)|^2 d\lambda$.

B2. Послідовність мір $\mu_N(d\lambda)$ слабко збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda)$:

$$\mu_N \Longrightarrow \mu, \ N \to \infty. \tag{2.11}$$

Умова **B2** означає, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda)$ матриці $\mu(d\lambda)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, матриці $\mu(B), \ B \in \mathcal{B}$, невід'ємно визначені, причому $\mu([-\pi,\pi])$ – додатно визначена матриця. Крім цього, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda)\mu_N(d\lambda) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda)\mu(d\lambda),\ N\to\infty. \tag{2.12}$$

Означення 2.1 *[19, 20] Міра $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(j,\theta)$.*

За умов $\lim\limits_{N\to\infty} d_N^2 = \infty,\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} |g_i(j)| = o(d_N)$ при $N\to\infty,\ i=\overline{1,q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda)$ міри $\mu(d\lambda)$ можна визначити із співвідношень [20]

$$R^{kl}(h) = \lim_{N\to\infty} d_{kN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_k(j+h) g_l(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h}\mu^{kl}(d\lambda),\ k,l=\overline{1,q}, \tag{2.13}$$

які виконано при кожному $h\in\mathbb{Z}$.

Спектральна міра функції регресії грає важливу роль в отриманні властивості асимптотичної нормальності ОКБ.

Позначимо

$$J_N = \Big(J_{kl,N}\Big)_{k,l=1}^{N} = \Big(d_{kN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_k(j) g_l(j)\Big)_{k,l=1}^{q}. \tag{2.14}$$

Тоді з (2.10) при $a(\lambda)=1,\ \lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$J_N = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(d\lambda) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mu([-\pi,\pi]) = J,\ N\to\infty, \tag{2.15}$$

причому матриця J додатно визначена за означенням спектральної міри μ. Таким чином, і матриці $\varLambda_N = J_N^{-1}$ додатно визначені для $N > N_0$. Крім цього, $\lim\limits_{N\to\infty} \varLambda_N = \varLambda = J^{-1}$ також додатно визначена матриця.

З іншого боку, коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (2.12) може в деяких випадках також виконуватись. Дамо відповідне означення для спектральної щільності стаціонарного часового ряду $a(\lambda) = f(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$.

Означення 2.2 *[20] Спектральна щільність f називається μ – припустимою, якщо вона інтегровна за мірою μ, тобто всі елементи матриці $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\mu(d\lambda)$ скінченні, та для $a = f$ виконується(2.12).*

Далі нас буде цікавити властивість μ – припустимості спектральної щільності $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, яку задано формулою (2.8). Нехай для визначеності $\chi_0 = 0$, і ми розглядаємо множину індексів $I = \{\overline{-r, r}\}$. Покладемо $\lambda_{-l} = -\lambda_l,\ \lambda_l = \chi_l,\ l = \overline{1, r},\ \lambda_0 = \chi_0 = 0$. Спираючись на формули (2.4), (2.5) та (2.8), можна стверджувати існування такого достатньо великого числа $c_0 > 0$, що для всіх $c \geq 0$ знайдуться околи $V_l(c)$ точок $\lambda_l,\ l \in I$, для яких

$$\{\lambda \in [-\pi, \pi] : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{l \in I} V_l(c), \tag{2.16}$$

причому $V_l(c)$ у (2.16) не перетинаються та міри Лебега $m(V_l(c)) \to 0$ при $c \to \infty,\ l \in I$.

B3. Для $N > N_0$

$$d_{kN}^{-1} \max_{\lambda \in V_l(c_0)} |g_N^k(\lambda)| \leq h_{lk} < \infty,\ l \in I,\ k = \overline{1, q}. \tag{2.17}$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [9] для дискретного часу спостережень та спектральної щільності (2.8) і доводиться аналогічно.

Теорема 2.1 *Нехай виконуються умови* **A2**,**B2**,**B3** *та спектральна щільність f інтегровна за мірою μ. Тоді f є μ – припустимою функцією.*

У подальшому тексті роботи ми побачимо, що теорема 2.1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності ОКБ.

Нехай деяка функція $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є (див. розділ 1)

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\Psi)}{n!} H_n(x),\ C_n(\Psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) H_n(x) \varphi(x) dx,\ n \geq 0, \tag{2.18}$$

У формуванні центральної граничної теореми 2.1 (див. нижче) будемо вважати, що $C_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\varphi(x)dx = E\Psi(\varepsilon_0) = 0$.

Означення 2.3 *Функція* $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R},\ \varphi(x)dx)$ *має ранг Ерміта* m ($Hrank(\Psi) = m$)*, якщо або* $C_m(\Psi) \neq 0$ *та* $m = 1$*, або для деякго* $m \geq 2$

$$C_1(\Psi) = ... = C_{m-1}(\Psi) = 0,\ C_m(\Psi) \neq 0. \tag{2.19}$$

У сформульованій нижче центральній граничній теоремі для деякої випадкової векторної суми використано поняття ермітового рангу функції та присутні спектральні щільності, що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^r(j),\ r \in \mathbb{N}$, де $B(j),\ j \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, з 1-го розділу роботи.

Добре відомо, що коваріаційній функції $B^r(t),\ t \in \mathbb{R}, r \geq 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (2.1), відповідає r - та згортка

$$\tilde{f}^{*r}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - ... - \lambda_r) \prod_{i=2}^{r} \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 ... d\lambda_r,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.20}$$

спектральної щільності (2.3)-(2.5), розглянутого вище стаціонарного випадкового процесу $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$. Тоді за формулою Е. Хеннана (2.8) коваріаційній функції $B^r(j),\ j \in \mathbb{Z}$, відповідає спектральна щільність

$$f^{(r)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*r}(\lambda + 2\pi k),\ \lambda \in [-\pi, \pi],\ r \geq 2. \tag{2.21}$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, крім цього, сформулюємо для функції $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ наступну альтернативу.

Або **(i)** $Hrank(\Psi) = 1,\ \alpha > \frac{1}{2}$, або **(ii)** $Hrank(\Psi) = m,\ \alpha m > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l, \tag{2.22}$$

α_l – параметри коваріаційної функції (1.2) стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо, що для функції Ψ виконано умову **(i)**. У разі виконання умови **(ii)** подальші міркування аналогічні. Тоді коваріаційна функція $B(t),\ t \in \mathbb{Z}$, за формулами (2.1), (2.2) інтегровна з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t)dt,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

є обмеженою та неперервною функцією. Більш того, для будь-якого $r \geq 2$

$$\tilde{f}^{*r}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^r(t)dt \leq \frac{B^{r-2}(0)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B^2(t)dt < \infty, \tag{2.24}$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*r}$ неперервні та обмежені однією константою, якщо ми згадаємо, що за нашим припущенням $B(0) = 1$.

Зауважимо також, що з рівності

$$B^r(t) = \Big(\sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(t)\Big)^r,\ r \geq 2, \tag{2.25}$$

після підведення правої частини в r-й степінь видно, що спекральна щільність $\tilde{f}^{*r}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$. Але для таких функцій також справедлива асимптотична формула (2.9), і ряди (2.21) збігаються рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Для формулювання центральної граничної теореми, введемо ще одну умову, яка регулює зростання функцій $g_i(j),\ j \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,q}$, при зростанні об'єму вибірки N.

B4.

$$d_{iN}^{-1} \max_{1\leq j\leq N} |g_i(j)| \leq k^i N^{-1/2},\ i = \overline{1,q}. \tag{2.26}$$

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гаусівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [9].

Теорема 2.2 *Нехай виконано умови* **A1**,**A2**,**B2**,**B3** *та одну з наступних умов для функції* $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$:

(i) *$Hrank(\Psi) = 1$ та спектральна щільність f часового ряду $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, є μ – припустимою;*

(ii) *$Hrank(\Psi) = m$ та $m\alpha > 1$, де α задана формулою (2.22). Тоді випадковий вектор*

$$\zeta_N = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Psi(\xi_j) \bigtriangledown g(j),\ \bigtriangledown g(j) = \Big(g_1(j), ..., g_q(j)\Big)^T \tag{2.27}$$

асимптотично нормальний $N(0, \sigma)$ при $N \to \infty$, де

$$\sigma = 2\pi \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^2(\Psi)}{r!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda)\mu(d\lambda). \tag{2.28}$$

Приклад 2.1 (Продовження прикладу 1.1). Знайдемо спектральну міру μ умови **B2**, що відповідає функції регресії (1.37), або, іншими словами, вектор-функції (1.38). Використовуючи співвідношення (2.13), можна стверджувати, що міра μ є блочно діагональною (див., наприклад, [15]) з блоками

$$\begin{bmatrix} \delta_k & i\rho_k \\ -i\rho_k & \delta_k \end{bmatrix},\ k = \overline{1, n}, \tag{2.29}$$

де міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосередженів точках $\pm\varphi$, причому $\delta_k\{\pm\varphi\} = \frac{1}{2},\ \ \rho\{\pm\varphi\} = \pm\frac{1}{2}$, $k = \overline{1, n}$. З (2.29) випливає, що

$$\mu([-\pi, \pi]) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mathbb{I}_{2n}. \tag{2.30}$$

Крім цього, за формулами (2.14), (2.15) та прикладом 1.1

$$J_N = \Big(N^{\frac{1}{2}} d_{kN}^{-1} N^{\frac{1}{2}} d_{lN}^{-1} I_{kl}(N)\Big)_{k,l=1}^{N} = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(d\lambda) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = J = \mathbb{I}_{2n}. \tag{2.31}$$

Для виконання умови **B3** (див. формулу (2.17)), як показано, наприклад, у роботі [9] достатньо, щоб множини точок $S_f = \{\chi_l, l = \overline{0, r}\}$ та $S_g = \{\varphi_k, k = \overline{1, n}\}$ не перетинались:

$$S_f \bigcap S_g = \emptyset. \tag{2.32}$$

Якщо це так, то ми можемо застосувати теорему 2.1 і стверджувати, що спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, часового ряду ξ_j, $j \in \mathbb{Z}$, є μ – припустимою.

Зауважимо також, що для функції регресії (1.37) виконання нерівностей (2.26) умови **B4** є очевидним.

Якщо, крім умов **B2**–**B4** на функцію регресії (1.37), виконано решта умов теореми 2.2, то є вірною теорема 2.2. Запишемо для нашого прикладу коваріаційну матрицю (2.28) граничного нормального розподілу теореми 2.2. Враховуючи парність функції $f^{(r)}(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, та (2.29), знаходимо, що σ є блочно діагональною матрицею з блоками

$$\sigma_k = 2\pi \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^2(\Psi)}{r!} f^{(r)}(\varphi_k) \mathbb{I}_2, \ k = \overline{1, n}, \tag{2.33}$$

$\mathbb{I}_2$ – одинична матриця 2-го порядку, причому блоки, як ми бачимо, самі є діагональними матрицями 2-го порядку.

3 Асимптотична нормальність оцінки Коенкера–Бассетта

У цьому розділі доведемо теорему редукції 3.1, яка дозволяє звести розв'язання задачі про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта до застосування центральної граничної теореми 2.1 попереднього розділу з функцією Ψ, яка певним чином пов'язана з функцією G з умови **A1**.

Після цього ми отримуємо результат про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта як достатньо простий наслідок теорем 2.1 та 3.1.

Введемо потрібну нам умову.

A4. Випадкова величина ε_0 має щільність $p(x) = F'(x)$, для якої є вірними нерівності

$$|p(x) - p(0)| \le H|x|,\ x \in \mathbb{R},\ p(0) > 0, \tag{3.1}$$

де $H < \infty$ деяка константа.

Нехай l – довільний напрям у $\mathbb{R}^q$ та $\tau \in \Theta^c$. Знайдемо однобічну похідну за напрямом l функціонала оцінки Коенкера–Бассетта

$$Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta\Big(x_j - g(j,\tau)\Big).$$

Користуючись співвідношенням

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{Q_N(\tau + \lambda l) - Q_N(\tau)}{\lambda},$$

можна отримати дещо спрощену відповідь (див. позначення (2.27):

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \Big\langle \bigtriangledown g(j), l \Big\rangle \Big(\chi\{X_j < g(j,\tau)\} - \beta\Big) \text{ м.н.}, \tag{3.2}$$

де $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{q} x_i y_i$ – скалярний добуток двох векторів із $\mathbb{R}^q$.

Зауважимо, що в точці мінімуму $\hat{\theta}_N$ функціонала $Q_N(\tau)$ для будь-якого напряму в l виконується нерівність

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\hat{\theta}_N) \geq 0, \tag{3.3}$$

що випливає з означення оцінки Коенкера–Бассетта як точки мінімуму функціоналу $Q_N(\tau)$. Нерівність (3.3) буде використана у доведенні асимптотичної нормальності нашої оцінки.

Нехай $l^1, ...l^q$ додатні напрямки координатних вісей в $\mathbb{R}^q$. Введемо випадкові вектори $Q_N^{\pm}(\tau) = \Big(Q_{iN}^{\pm}(\tau)\Big)_{i=1}^{q}$,

$$Q_{iN}^{\pm}(\tau) = d_{iN}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial(\pm l^i)}\Big) Q_N(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j)\Big(\chi\{X_j < g(j,\tau)\} - \beta\Big). \tag{3.4}$$

Варто зауважити, що $Q_N^{+}(\tau) = -Q_N^{-}(\tau)$ м.н. для кожного τ, але, взагалі кажучи, $Q_N^{+}(\hat{\theta}_N) \neq -Q_N^{-}(\hat{\theta}_N)$. Зауважимо також, що вектори

$$Q_N^{\pm}(\theta) = \pm d_N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \bigtriangledown g(j)(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta),$$

насправді, не залежать від θ, але ми будемо користуватись введеними позначеннями. Розглянемо також математичні сподівання введених векторів $EQ_N^{\pm}(\tau)$ з координатами

$$EQ_{iN}^{\pm}(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j)\Big[F(g(j,\tau) - g(j,\theta)) - \beta\Big], i = \overline{1,q}, \tag{3.5}$$

причому $EQ_N^{\pm}(\theta) = 0$ за умовою **A3**.

Теорема 3.1 *Нехай виконано умови* **A1**-**A4**, **B2**-**B4** *та оцінка* $\hat{\theta}_N$ *є консистентною в сенсі теореми 1.1. Нехай також функція*

$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\}, x \in \mathbb{R},$$

задовольняє умові **(i)** *теореми 2.2. Тоді асимптотичний при* $N \to \infty$ *розподіл вектора* $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ *збігається з асимптотичним розподілом вектора* $-p^{-1}(0)\Lambda_N Q_N^{+}(\theta)$, *якщо останній існує.*

Доведення теореми 3.1 спирається на доведення декількох лем. В доведенні першої з них застосовано складний спосіб поділу параметричної множини на фрагменти, який винайдено П. Хьюбером [21, 22].

Позначимо

$$Q_N^{*\pm}(u) = Q_N^{\pm}(\theta + N^{1/2} d_N^{-1} u),$$
$$Z_N^{\pm}(\theta, u) = \frac{||Q_N^{*\pm}(u) - Q_N^{*\pm}(0) - EQ_N^{*\pm}(u)||}{1 + ||EQ_N^{*\pm}(u)||}. \tag{3.6}$$

Лема 3.1 *За умов теореми 3.1 для будь-яких $\varepsilon > 0$ та достатньо малих $r > 0$*

$$P\Big\{ \sup_{u \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_N^c(\theta)} Z_N^{\pm}(\theta, u) > \varepsilon \Big\} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.7}$$

◀ Будемо доводити лему для Z_N^+. Для спрощення доведення (3.6) візьмемо $r = 1$, а у якості множини під позначкою супремуму в (3.7) розглянемо куб

$$C_0 = \{u \in \mathbb{R}^q : ||u||_0 = |\max_{1 \le i \le q} |u_i| \le 1\},$$

який містить замкнену кулю $V^c(1)$.

Покриємо куб C_0 кубами $C_{(1)}, ..., C_{(n_0)}$, де $n_0 = \mathrm{O}(\ln N)$, наступним чином. Зафіксуємо число $p \in (0, 1)$ і розглянемо концентричну сім'ю множин

$$C^{(l)} = \{u : ||u||_0 \in [(1-p)^{l+1}, (1-p)^l]\}, l = \overline{0, l_0 - 1},$$

$$C^{(l_0)} = \{u : ||u||_0 \le (1-p)^{l_0}\}.$$

Покриємо кожну множину $C^{(l)}$ однаковими кубами зі стороною $a_l = (1-p)^l - (1-p)^{l+1} = p(1-p)^l$ та пронумеруємо ці куби. Вони і утворюють потрібне покриття

$$C_{(1)}, ..., C_{(n_0 - 1)}, C_{(n_0)} := C^{(l_0)}.$$

Визначимо $l_0 = l_0(N)$ з умови

$$(1-p)^{\tilde{l}_0} = N^{-\gamma}, l_0 = [\tilde{l}_0], \gamma \in (\frac{1}{2}, 1) - \textit{деяке число.}$$

Зазначимо, що $||\cdot||_0$ – відстань від $C_{(s)}$ до 0 є $r(s) = (1-p)N^{-\gamma l/\tilde{l}_0}$, та діаметр $C_{(s)}$ дорівнює $a(s) = pN^{-\gamma l/\tilde{l}_0} = a_l$ для деякого $l = l(s)$, $s = \overline{1, n_0 - 1}$, тобто коли куб $C_{(s)}$ є елементом покриття множини $C^{(l)}$. Більше того, кількість кубів $C_{(s)}$ покриття кожної множини $C^{(l)}$ можна зробити незалежною від l і N. Тоді з того, що $l_0 = \mathrm{O}(\ln N)$, випливає, що $n_0 = \mathrm{O}(\ln N)$ також. Таким чином

$$P\Big\{\sup_{u\in C_0} Z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\Big\} \le \sum_{s=1}^{n_0} P\Big\{\sup_{u\in C_{(s)}} Z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\Big\}. \tag{3.8}$$

Оцінимо кожний доданок правої частини нерівності (3.8) окремо. Розглянемо відображення $u \longrightarrow EQ_N^{*+}(u)$. Кожний елемент матриці похідних $D_N(u)$ цього відображення має вигляд (див. (3.5) та позначення 1-го розділу)

$$\begin{gathered} D_N^{il}(u) = \frac{\partial}{\partial u_l} EQ_{iN}^{*+}(u) = \\ = N^{1/2} d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j) g_l(j) p\Big(h(j, u) - h(j, 0)\Big). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Зауважимо, що (див. розділ 1)

$$\begin{gathered} N^{-1}\Phi_{2N}(u, 0) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Big(h(j, u) - h(j, 0)\Big)^2 = \\ = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{q} g_i(j) N^{1/2} d_{iN}^{-1} u_i\Big)^2 \le q||u|^2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Тоді за умов **A4**, **B3** з використанням (3.10) отримуємо

$$\begin{gathered} |N^{-1/2} D_N^{il}(u) - p(0) J_{il,N}| = d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \Big| \sum_{j=1}^{N} g_i(j) g_l(j) \Big(p\Big(h(j, u) - h(j, 0)\Big) - p(0)\Big)\Big| \le \\ \le H N^{1/2} d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{N} g_i^2(j) g_l^2(j)\Big)^{1/2} \Big(N^{-1}\Phi_{2N}(u, 0)\Big)^{1/2} \le \\ \le H N^{1/2} d_{iN}^{-1} \max_{1\le j\le N} |g_i(j)| q^{1/2} ||u|| \le q^{1/2} (k^i)^{1/2} H ||u||. \end{gathered} \tag{3.11}$$

За формулою Тейлора

$$N^{-1/2}EQ_{iN}^{*+}(u) = \sum_{l=1}^{q} N^{-1/2}D_N^{il}(u^{(i)})u_l, \ ||u^{(i)}|| \leq ||u||, i = \overline{1,q}. \tag{3.12}$$

Розглянемо матрицю

$$H_N = \Big(N^{-1/2}D_N^{il}(u^{(i)})\Big)_{i,l=1}^{q}. \tag{3.13}$$

Тоді, як ми довели в (3.11)

$$H_N = p(0)J_N + M_N, \tag{3.14}$$

де M_N – матриця з елементами $M_N^{il} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0, i, l = \overline{1,q}$, причому остання збіжність рівномірна за N. Маємо далі

$$H_N^T H_N = p^2(0)J_N^2 + p(0)(M_N^T J_N + J_N M_N^T) + M_N^T M_N.$$

За властивістю власних чисел суми симетричних матриць ([23] , с.101-103)

$$|\lambda_{min}(H_N^T H_N) - p^2(0)\lambda_{min}(J_N^2)| \leq$$
$$\leq q\Big(p(0) \max_{1\leq i,l\leq q} |(M_N^T J_N + J_N M_N^T)_{il}| + \max_{1\leq i,l\leq q} |(M_N^T M_N)_{il}|\Big) = O(||u||),$$

Тобто за умови **B2** матриця $H_N^T H_N$ додатно визначена рівномірно за $N > N_0$ для достатньо малих u (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що для $u \in C_0$), і для деякого $k_0 > 0$

$$||N^{-1/2}Q_N^{*+}(u)|| = \sqrt{< H_N^T H_N u, u >} \geq k_0||u||_0. \tag{3.15}$$

Нехай $s \neq n_0$ та $v \in C_{(s)}$ - довільна точка. Тоді з (3.6) а (3,15) випливає, що

$$\sup_{u\in C_{(s)}} Z_N^+(\theta, u) \leq \Big(\sup_{u\in C_{(s)}} M_{1N}^{(s)}(u,v) + \sup_{u\in C_{(s)}} M_{2N}^{(s)}(u,v) + L_N^{(s)}(\theta, v)\Big)\cdot$$
$$\cdot(1 + k_0 N^{1/2} r(s))^{-1}, \tag{3.16}$$

де

$$M_{1N}^{(s)}(u,v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \ \triangledown g(j)\Big(\chi\{X_j < h(j,u)\}\chi\{X_j < h(j,v)\}\Big)\Big|\Big|,$$

$$M_{2N}^{(s)}(u,v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\triangledown g(j)\Big(F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big) - F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big)\Big)\Big|\Big|,$$

$$L_N^{(s)}(v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\triangledown g(j)\Big[\Big(\chi\{X_j < h(j,v)\} - \beta\Big) - \Big(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta\Big) - \\ -\Big(F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big) - \beta\Big)\Big]\Big|\Big|. \qquad (3.17)$$

Відповідно до умови **A4** та нерівності (1.8)

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u,v) \le q||u-v||^2, \qquad (3.18)$$

маємо

$$N^{-1/2}M_{2N}^{(s)}(u,v) \le N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big|g_i(j)\Big|\cdot \\ \cdot\Big|F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big) - F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big)\Big|\Big)^2\Big)^{1/2} \le \\ \le p_0\sqrt{q}N^{-1/2}\Phi_{2N}(u,v) \le p_0 q a(s). \qquad (3.19)$$

Для оцінювання $M_{1N}^{(s)}(u,v)$ скористаємося нерівністю

$$\Big|\chi\{X_j < h(j,u)\} - \chi\{X_j < h(j,v)\}\Big| = \\ = \Big|\chi_u(j) - \chi_v(j)\Big| \le \chi\{\inf_{u\in C_{(s)}}(h(j,u)-h(j,0)) \le \varepsilon_j \le \\ \le \sup_{u\in C_{(s)}}(h(j,u)-h(j,0))\} := \chi_s(j). \qquad (3.20)$$

Тоді за умови **B4**

$$N^{-1/2}M_{1N}^{(s)}(u,v) \le N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N} g_i(j)\Big(\chi_u(j) - \chi_v(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \le \\ \le N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big|g_i(j)\Big|\chi_s(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\leq N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q}\Big(\max_{1\leq j\leq N}\Big|g_i(j)\Big|d_{iN}^{-1}\Big)^2\Big)^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_s(j)\leq$$
$$\leq ||k||N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\chi_s(j),\,||k||=\Big(\sum_{i=1}^{q}(k^i)^2\Big)^{1/2}. \qquad (3.21)$$

Маємо далі

$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\leq p_0N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\sup_{u_1,u_2\in C_s}|h(j,u_1)-h(j,u_2)|\leq p_0||k||a(s). \quad (3.22)$$

Збираючи отримані оцінки, знаходимо

$$P_1=P\Big\{\Big(\sup_{u\in C_{(s)}}M_{1N}^{(s)}(u,v)+\sup_{u\in C_{(s)}}M_{2N}^{(s)}(u,v)\Big)\Big(1+k_0N^{1/2}r(s)\Big)^{-1}>\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\leq$$
$$\leq P\Big\{\frac{||k||}{k_0}\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\chi_s(j)-N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\Big)\geq$$
$$\geq\frac{\varepsilon}{2}r(s)-\Big(\frac{p_0q}{k_0}+\frac{p_0||k||^2}{k_0}a(s)\Big)\Big\}. \qquad (3.23)$$

Величина

$$\frac{\varepsilon}{2}r(s)-\Big(\frac{p_0q}{k_0}+\frac{p_0||k||^2}{k_0}\Big)a(s)=\Big(\frac{\varepsilon}{2}(1-p)-\Big(\frac{p_0q}{k_0}+\frac{p_0||k||^2}{k_0}\Big)p\Big)N^{-\gamma l/\tilde{l}_0}>0,$$

якщо обрати число p достатньо малим, і ми можемо оцінити ймовірність (3.23), скориставшись нерівністю Чебишова:

$$P_1\leq\frac{||k||^2/k_0^2}{\Big(\frac{\varepsilon}{2}(1-p)-\Big(\frac{p_0q}{k_0}+\frac{p_0||k||^2}{k_0}p\Big)^2}N^{-2+2\gamma l/\tilde{l}_0}\sum_{j,j'=1}^{N}cov(\chi_s(j),\chi_s(j')) \quad (3.24)$$

Аналогічно [4] отримуємо

$$N^{-2}\sum_{j,j'=1}^{N}cov(\chi_s(j)\chi_s(j'))\leq N^{-2}\sum_{j,j'=1}^{N}E\chi_s(j)|B(j-j')|=$$

$$= N^{-1}\sum_{j=1}^{N} E\chi_s(j)\Big(N^{-1}\sum_{j'=1}^{N}|B(j-j')|\Big) \le$$

$$\le \Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} E\chi_s(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=-N}^{N}|B(j')|\Big) \le$$

$$\le 2\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} E\chi_s(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}|B(j')|\Big).$$

Для першої суми останнього добутку використаємо оцінку (3.22), а для другої суми маємо

$$N^{-1}\sum_{j=0}^{N}|B(j)| \le N^{-1} + N^{-1}\sum_{j=1}^{N} j^{-\alpha} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N\to\infty, \tag{3.25}$$

де α означено в (2.22). Разом із (3.24) це дає оцінку

$$P_1 = O(N^{\gamma l \tilde{l}_0^{-1}-\alpha}), \tag{3.26}$$

причому права частина (3.26) збігається до нуля зі степеневою швидкістю при $\alpha > \gamma$.

Позначимо

$$\begin{aligned} L_i(j) &= g_i(j)\Big(\chi\{X_j < h(j,v)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big) = \\ &= g_i(j)\Big(\chi\{\varepsilon_j < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big), i = \overline{1,q}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Тоді в формулі (3.17)

$$\begin{aligned} L_N^{(s)}(v) &= \Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)\Big)^2\Big)^{1/2}, \\ P_2 &= P\Big\{L_N^{(s)}(v)\Big(1 + k_0 N^{1/2} r(s)\Big)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \le \\ &\le \frac{4}{k_0^2\varepsilon^2 r^2(s) N} E\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)\Big)^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Оцінимо $E\sum\limits_{j=1}^{N} d_{iN}^{-2}\Big(\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)\Big)^2, i = \overline{1,q}$. Нехай $C_{(s)}$ належить покриттю множини $C^{(l)}$. Позначимо $M := \bigcup\limits_{k=l}^{l_0} C^k$. Тоді аналогічно (3.20)

$$|\chi\{\varepsilon_j < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}| \leq$$
$$\leq \chi\Big\{\inf_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)) \leq \varepsilon_j \leq \sup_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0))\Big\} := \chi_M(j),$$
$$EL_i^2(j) \leq g_i^2(j)E\chi_M(j) =$$
$$= g_i^2(j)\Big[F\Big(\sup_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)\Big) - F\Big(\inf_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)\Big)\Big] \leq \tag{3.29}$$
$$\leq p_0 g_i^2(j)\Big(\sup_{v\in M} h(j,v) - \inf_{v\in M} h(j,v)\Big) \leq$$
$$\leq p_0 g_i^2(j) \sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1) - h(j,v_2)\Big|.$$

Розглянемо розвинення у просторі $L_2(\Omega)$

$$L_i(j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(j,v)}{m!} H_m(\xi_j),$$

$$c_m(j,v) = g_i(j)\int_{\mathbb{R}}(\chi\{G(x) < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{G(x) < 0\})H_m(x)\varphi(x)dx,$$

$$m \geq 0,\ EL_i(j) = c_0(j,v).$$

Оскільки

$$E(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)^2 = \sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(L_i(j), L_i(j^{'})\Big),$$

$$cov\Big(L_i(j), L_i(j^{'})\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m(j,v)c_m(j^{'},v)}{m!} B^m(j - j^{'}),$$

З огляду на (3.28) отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(j,v)}{m!} = DL_i(j) \leq EL_i^2(j) \leq$$
$$\leq p_0 g_i^2(j) \sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1) - h(j,v_2)\Big|,$$

$$\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(L_i(j), L_i(j')\Big) \le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j,j'=1}^{N} \frac{c_m^2(j,v)}{m!}\Big|B(j-j')\Big|^m \le$$

$$\le \sum_{j,j'=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,v)}{m!}\Big)\Big|B(j-j')\Big| \le$$

$$\le p_0\sum_{j,j'=1}^{N} g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|\Big|B(j-j')\Big| \le$$

$$\le 2p_0N\sum_{j=1}^{N} g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|\Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}\Big|B(j')\Big|\Big).$$

З іншого боку, за умови **B4**

$$E\sum_{j=1}^{N} g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} g_i^2(j)\sum_{i=1}^{q}\Big|g_i(j)\Big|N^{1/2}d_{iN}^{-1}\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|\Big|v_1-v_2\Big|\Big|_0 \le$$

$$\le 2\Big(a(s)+r(s)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{q}k^i\Big)d_{iN}^2,$$

тобто для деякої константи $k_1 < \infty$

$$E\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j)-EL_i(j)\Big)^2\Big) \le k_1\Big(a(s)+r(s)\Big)N^{1-\alpha}. \qquad (3.30)$$

Таким чином, з (3.28) та (3.30) випливає, що ймовірність

$$P_2 \le \frac{4k_1}{k_0^2\varepsilon^2}\frac{a(s)+r(s)}{r^2(s)}N^{-\alpha} = \frac{4k_1}{k_0^2\varepsilon^2(1-p)^2}N^{\gamma l\tilde{l}_0^{-1}-\alpha}. \qquad (3.31)$$

прямує до нуля при $N\to\infty$ зі степеневою швидкістю, якщо $\alpha > \gamma$.

Отже, нерівності (3.16), (3.26) та (3.31) показують, що для $s=\overline{1,n_0-1}$ (нагадуємо, що $n_0 = O(\ln N)$) та для деякого $l = l(s) < l_0$ при $N\to\infty$

$$P\Big\{\sup_{u\in C_{(s)}} z_N^+(\theta,u) > \varepsilon\Big\} = O\Big(N^{\gamma l\tilde{l}_0^{-1}-\alpha}\Big). \qquad (3.32)$$

Залишилось розглянути впадок, коли $s = n_0$. З (3.6) випливає, що

$$P\Big\{\sup_{u\in C_{(n_0)}} z_N^+(\theta,u) > \varepsilon\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} \Big|\Big|Q_N^{*+}(u) - Q_N^{*+}(0) - EQ_N^{*+}(u)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\}. \tag{3.33}$$

Запишемо вираз під знаком норми в формулі (3.33) як $\nu(u) - E\nu(u)$, де

$$\nu(u) = d_N^{-1}\sum_{j=1}^N \bigtriangledown g(j)\Big(\chi\{X_j < h(j,u)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big),$$

$$E\nu(u) = d_N^{-1}\sum_{j=1}^N \bigtriangledown g(j)\Big(F\Big(h(j,u) - h(j,0)\Big) - \beta\Big).$$

Послідовно отримуємо (див. формулу (3.10))

$$||E\nu(u)|| = \Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N g_i(j)\Big(F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big)-\beta\Big)^2\Big)^{1/2} \le$$
$$\le p_0\Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N \Big|g_i(j)\Big|\Big|h(j,u)-h(j,0)\Big|\Big)^2\Big)^{1/2} \le$$
$$\le p_0 q^{1/2}N^{1/2}\Big(N^{-1}\Phi_{2N}(u,0)\Big)^{1/2} \le$$
$$\le p_0 q N^{1/2}||u|| \le k_2 N^{1/2-\gamma l_0 \tilde{l}_0^{-1}}. \tag{3.34}$$

Якщо $\gamma > 1/2$, то для достатньо великих N показник степеня в (3.34) від'ємний. Це означає, що залишилось оцінити ймовірність $(\varepsilon' < \varepsilon)$

$$P_3 = P\Big\{\sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} ||\nu(u)|| > \varepsilon'\Big\}.$$

Запишемо

$$||\nu(u)|| = \Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N g_i(j)\Big(\chi\{\varepsilon_j < h(j,u)-h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j<0\}\Big)\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{3.35}$$

Як і раніше, знаходимо

$$\Big|\chi\{\varepsilon_j < h(j,u)-h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j<0\}\Big| \le$$
$$\le \chi\Big\{\inf_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}(h(j,u)-h(j,0)) \le \varepsilon_j \le \sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}(h(j,u)-h(j,0))\Big\} := \chi_{n_0}(j).$$

Продовжуючи (3.35), отримуємо

$$||\nu(u)|| = \Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}|g_i(j)|\chi_{n_0}(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q}\Big(N^{1/2}d_{iN}^{-1}\max_{1\leq j\leq N}|g_i(j)|\Big)^2\Big)^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j) \leq$$

$$\leq ||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j).$$

Це означає, що

$$P_3 = P\Big\{||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j) > \varepsilon^{'}\Big\}. \tag{3.36}$$

Аналогічно до оцінки (3.22) знаходимо

$$N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}E\chi_{n_0}(j) \leq p_0||k||N^{1/2}a(n_0) = k_3N^{1/2-\gamma l_0/\tilde{l}_0}. \tag{3.37}$$

Тоді ми можемо записати для $\varepsilon^{''} < \varepsilon^{'}$

$$P_3 = P\Big\{||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\Big(\chi_{n_0}(j) - E\chi_{n_0}(j)\Big) > \varepsilon^{''}\Big\} \leq$$

$$\leq (\varepsilon^{''})^{-2}||k||N^{-1}\sum_{j,j^{'}=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j^{'})\Big).$$

Оскільки існує розвинення в просторі $L_2(\Omega)$

$$\chi_{n_0}(j) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m(j)}{m!}H_m(\xi_j),$$

$$\tilde{c}_m(j) = \int_{\mathbb{R}}\chi\Big\{\inf_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}(h(j,u) - h(j,0)) \leq G(x) \leq$$

$$\leq \sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}(h(j,u) - h(j,0))\Big\}H_m(x)\varphi(x)dx, \ m \geq 0,$$

$$E\chi_{n_0}(j) = \tilde{c}_0(j),$$

то

$$cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j^{'})\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m(j)\tilde{c}_m(j^{'})}{m!}B^m(j - j^{'}),$$

$$
\begin{aligned}
&N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j),\chi_{n_0}(j')\Big)\le\\
&\le N^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j,j'=1}^{N}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!}|B(j-j')|^m\le\\
&\le N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!}|B(j-j')|\Big),\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!}=D\chi_{n_0}(j)\le E\chi_{n_0}(j).
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

З огляду на (3.38) ми можемо записати

$$
N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j),\chi_{n_0}(j')\Big)\le N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N}E\chi_{n_0}(j)|B(j-j')|\le
$$

$$
\le N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_{n_0}(j)\sum_{j'=-N}^{N}|B(j')|=2\Big(\sum_{j=1}^{N}E\chi_{n_0}(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}|B(j')|\Big).
$$

До першої суми застосуємо оцінку (3.37), а до другої – оцінку (3.25). Тоді остаточно

$$
P_3\le kN^{1-\gamma l_0/\tilde{l}_0-\alpha}. \tag{3.39}
$$

Ця величина збігається до нуля при $N\to\infty$ зі степеневою швидкістю, завдяки нерівності $\alpha+\gamma>1$. ■

Лема 3.2 *За умов теореми 3.1 для будь-якого* $\varepsilon>0$

$$
P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{\pm}(\theta)+EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big|>\varepsilon\Big\}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{3.40}
$$

де

$$
EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)=EQ_N^{\pm}(\tau)\Big|_{\tau=\hat{\theta}_N}. \tag{3.41}
$$

◀ Для нормованої оцінки Коенкера – Бассетта (див. розділ 1) $\bar{u}_N=N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N-\theta)$ та достатно малих $r>0$

$$
P\Big\{z_N^{\pm}(\theta,\bar{u}_N)>\varepsilon\Big\}=P\Big\{\frac{||Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N)-Q_N^{*\pm}(0)-EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)||}{1+||EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)||}>\varepsilon\Big\}=
$$

$$
=P_1+P_2,
$$

де

$$P_1 = P\Big\{z_N^{\pm}(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, ||\bar{u}_N|| \le r\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\sup_{u \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_N^c(\theta)} z_N^{\pm}(\theta, u) > \varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

за лемою 3.1 . З іншого боку,

$$P_2 = P\Big\{z_N^{\pm}(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, ||\bar{u}_N|| > r\Big\} \le P\Big\{||\bar{u}_N|| > r\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

за умови теореми 3.1 . Оскільки $Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N) = Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)$, то ми довели, що

$$P\Big\{\frac{||Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) - Q_N^{\pm}(\theta) - EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)||}{1 + ||EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)||} > \varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.42}$$

З (3.42) та нерівностей $Q_{iN}^{\pm}(\hat{\theta}_N) \ge 0$ (див. (3.3)), так само, як в [4], отримуємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{\pm}(\theta) + EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > \Big(1 + \Big|\Big|EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big|\Big)\varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.43}$$

Далі аналогічно [4] доводиться обмежеість за ймовірністю послідовності випадкових величин $||EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)||$ у тому розумінні, що для довільного малого $\varepsilon > 0$ та довільного великого $M > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > M\Big\} \le \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon), \tag{3.44}$$

де константу $C(\varepsilon) < \infty$ можна записати в явному вигляді, а $o_N(\varepsilon) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тоді з урахуванням (3.43) та (3.44) маємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > \frac{1 + ||EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)||}{1 + M}\varepsilon, \Big|\Big|EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| \le M\} +$$
$$+ P\Big\{\Big|\Big|EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > M\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > \Big(1 + \Big|\Big|EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big|\Big)\frac{\varepsilon}{1 + M}\Big\} +$$
$$+ \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon). \tag{3.45}$$

У мажоранті (3.45) 1-й та 3-й доданки прямують до нуля при $N \to \infty$, а 2-й доданок можна зробити як завгодно малим вибором числа M. ■

Лема 3.3 *За умов теореми 3.1 для будь-якого* $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.46}$$

◀ Якщо величина $\bar{u}_N = N^{-1/2} d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ є малою, то з теореми 1.1, нерівності (3.15) та обмеженості за ймовірністю випадкового вектора $EQ_N^+(\hat{\theta}_N)$ (див. попередню лему) випливає, що вектор $N^{1/2}\bar{u}_N = d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ також обмежений за ймовірністю в тому сенсі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують числа $M_0 = M_0(\varepsilon)$, $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такі, що для довільних $M > M_0$, $N > N_0$

$$P\{N^{1/2}||\bar{u}_N|| > M\} < \varepsilon. \tag{3.47}$$

Використовуючи позначення (3.9), (3.13), співвідношення (3.12), (3.41) отримуємо

$$N^{-1/2} EQ_N^+(\hat{\theta}_N) = N^{-1/2} EQ_N^{*+}(\bar{u}_N) = H_N \bar{u}_N,$$

$$EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta} - \theta) = (H_N - p(0)J_N) N^{1/2} \bar{u}_N,$$

де матриця $H_N = \Big(N^{-1/2} D_N^{il}(u^{(i)})\Big)_{i,l=1}^{q}$, $||u^{(i)}|| \le ||\bar{u}_N||, i = \overline{1,q}$, означена, як і раніше, тільки детерміновані аргументи замінені на випадкові.

Співвідношення (3.11), (3.12) показують, що

$$\Big|\Big|EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| \le k_4 \Big|\Big|\bar{u}_N\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big|. \tag{3.48}$$

Збіжність (3.46) випливає тепер із консистентності оцінки Коенкера – Бассетта, обмеженості за ймовірністю вектора $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ та (3.48) (див. [4]).
■

Тепер ми можемо довести теорему редукції 3.1 .

◀ Запишемо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N Q_N^+(\theta) + d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\} \le$$

$$\le P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N \Big(Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\Big)\Big|\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} +$$

$$+P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} =$$

$$= P_1 + P_2.$$

З умов теореми та (3.40) випливає, що $P_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Так само, з умов теореми та (3.46) отримуємо, що $P_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Результат теореми 3.1 є наслідком відомого факту, доведення якого для випадкових величин міститься, наприклад, в [24], стор. 117-118. Цей факт є вірним для випадкових векторів також, і ми його наводимо нижче.

Нехай $\{(\xi_N, \eta_N), N \geq 1\}$ - послідовність пар випадкових векторів, для яких виконано наступні припущення:

1. $||\xi_N - \eta_N|| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0$;

2. $\eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{d} \eta$.

Тоді $\eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{d} \eta$. Застосування цього твердження доводить теорему 3.1 . ■

Теорема 3.2 *Нехай виконано умови теореми 3.1. Тоді нормована оцінка Коенкера – Бассетта* $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ *при* $N \to \infty$ *асимптотично нормальна* $N(0, K)$ *з коваріаційною матрицею*

$$K = \frac{2\pi}{p^2(0)}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda)\Big)^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j^2(\Psi)}{j!}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda)\mu(d\lambda)\Big)\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda)\Big)^{-1}. \quad (3.49)$$

◀ Оскільки ми знаходимось в умовах теореми 3.1, то розподіл $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \to \infty$ співпадає з асимптотичним розподілом вектора

$$\gamma_N = p^{-1}(0)\Lambda_N d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Psi(\xi_j) \bigtriangledown g(j),$$
$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\},\ x \in \mathbb{R}. \quad (3.50)$$

Оскільки $E\gamma_N = 0$, а коваріаційна матриця вектора γ_N

$$E\gamma_N\gamma_N^T = p^{-2}(0)\Lambda_N(E\zeta_N\zeta_N^T)\Lambda_N,$$

де ζ_N - вектор, означений рівністю (2.27), то за теоремою 2.1

$$E\zeta_N\zeta_N^T \xrightarrow[N\to\infty]{} 2\pi\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j^2(\Psi)}{j!}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda)\mu(d\lambda). \quad (3.51)$$

Із тексту 2-го розділу також випливає, що

$$\Lambda_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda)\Big)^{-1}. \tag{3.52}$$

Ще одне посилання на теорему 2.1 повністю доводить теорему. ■

Приклад 3.1 (продовження прикладів 1.1 та 2.1). Оскільки в прикладі 2.1 було показано, що функція регресії (1.37) задовольняє умови **B2** – **B4** (умову **B3** за припущенням (2.32)), то ми можемо записати граничну коваріаційну матрицю K, задану формулою (3.49), граничного нормального розподілу нормованої ОКБ $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. З (2.30) випливає, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mathbb{I}_{2n}$. Тоді, враховуючи (2.33), ми можемо стверджувати, що матриця K є блочно - діагональною матрицею з блоками

$$\mathrm{K}_i = \frac{2\pi}{p^2(0)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j^2(\Psi)}{j!} f^{(j)}(\varphi_i)\mathbb{I}_2,\ i = \overline{1,n}. \tag{3.53}$$

В нашому прикладі $N^{1/2}d_N^{-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sqrt{2}\ \mathbb{I}_{2n}$. Крім цього, $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta) = (N^{1/2}d_N^{-1})d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. Це означає, що граничний нормальний розподіл вектора $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta)$ має коваріаційну матрицю $\tilde{\mathrm{K}}$ з блоками $\tilde{\mathrm{K}}_i = 2\mathrm{K}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Приклад 3.2. Нехай $\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$, – функція розподілу стандартної випадкової величини $N(0,1)$, якою і є будь-яке значення часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, зокрема, ε_0. Тоді за лемою Смірнова $\Phi(\varepsilon_0)$ є випадковим числом, тобто рівномірно розподіленою на відрізку $[0,1]$ випадковою величиною. Позначемо $F_{\chi_r^2}$ функцію розподілу хі-квадрат випадкової величини з r ступенями волі. Тоді часовий ряд $\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j)),\ j \in \mathbb{Z}$, має маргинальні χ_r^2 – розподіли. Центруємо $\tilde{\varepsilon}_j$:

$$\varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}_j - E\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j)) - r,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{3.54}$$

тобто

$$G(x) = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(x)) - r,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.55}$$

Отримуємо $F(x) = P\{\varepsilon_0 < x\} = P\{\chi_r^2 < x + r\}$, та

$$F(0) = F_{\chi_r^2}(r) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} \int\limits_0^r x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx =$$
$$= \frac{1}{F(\frac{r}{2})} \int\limits_0^{r/2} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x} dx = \frac{\gamma(\frac{r}{2}, \frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} = \beta, \tag{3.56}$$

де $\gamma(\alpha, x) = \int\limits_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – неповна гамма-функція.

Якщо r – парне число, то за формулою 8.352 [18]

$$\beta = 1 - e^{-\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{r^k}{2^k k!},\ r = 2l,\ l \geq 1. \tag{3.57}$$

Число β в (3.57) є ірраціональним, зокрема, воно не дорівнює $\frac{1}{2}$.

Щільність випадкової величини ε_0

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} (x + r)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x+r}{2}},\ x \geq -r, \tag{3.58}$$

неперервно диференційовна при при $r \geq 4$, а її похідна обмежена, і тому умову **A4** виконано при $r \geq 4$ з

$$p(0) = \frac{r^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}. \tag{3.59}$$

В цьому прикладі

$$\chi\{G(x) < 0\} = \chi\{F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(x)) < r\} = \chi\{\Phi(x) < F_{\chi_r^2}(r)\} = \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$
$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\} = \beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$

та 1-й коефіцієнт Фур'є розкладу функції $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, за поліномами Чебишова–Ерміта

$$C_1(\Psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}\Big) H_1(x) \varphi(x) dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} x \varphi(x) dx \neq 0.$$

Таким чином, $Hrank(\Psi) = 1$. З іншого боку,

$$C_0(\Psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}\Big)\varphi(x)dx =$$

$$= \beta - \int\limits_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} \varphi(x)dx = \beta - \Phi\Big(\Phi^{-1}(\beta)\Big) = 0.$$

Сенс прикладу 3.2 полягає в тому, що ми отримуємо можливість оцінювати параметри регресії у випадку несиметричних похибок спостережень, використовуючи оцінки Коенкера–Бассетта.

Висновки

У магістерській роботі отримано посилену властивість слабкої консистентності та асимптотичну нормальність ОКБ в лінійній моделі регресії з нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним часовим рядом з сингулярним спектром в якості випадкового шуму. Припускається, що параметрична множина, що містить невідоме істинне значення параметра, є обмеженою відкритою опуклою множиною евклідового простору.

Отримані результати дозволяють використовувати ОКБ в моделях регресії з несиметричними похибками спостережень.

Природним напрямом продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу ОКБ, щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивченій у роботі.

Список використаних джерел

[1] J. Beran, Y. Fenf, S. Ghosh, R. Kulik. *Long-memory Processes.Probabilistic Properties and Statistical Methods.* // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2013. — 884 p.

[2] G. Bassett, R. Koenker. *Regression quantile.* // Econometrica. — 1978. — Vol.46. — P. 33-50.

[3] R. Koenker. *Quantile Regression.* // Cambridge University Press. — 2005. — 349 p.

[4] І. М. Савич. *Асимптотичні властивості оцінок Коенкера-Бассетта параметра нелінійної регресії з сильно залежним випадковим шумом.* // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського", КНУ ім. Тараса Шевченка. — Київ. — 2017. — 144 с.

[5] П. Ф. Тарасенко, А. В. Журавлёв. *Оценивание параметров нелинейной модели квантильной регрессии знаковым методом.* // Томский гос. ун-т, ОПИТНЦ. — 2005. — с. 258-266. — Режим доступу: http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/54927/1/39.pdf

[6] І. В. Орловський. *Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії.* // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". — Київ. — 2006. — 156 с.

[7] А. В. Иванов. *О состоятельности и асимптотической нормальности оценки наименьших модулей.* // УМЖ. — 1984. — т. 36, № 3. — с. 267-272.

[8] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko. *Statistical Analysis of Random Fields.* // Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad.Publ. — 1989. — P. 244.

[9] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savich. *Limit theorems for weighted non-linear transformations of gaussian processes with singular spectra.* // Ann. Probab. — 2013. — Vol.41, № 2. — P. 1088-1114.

[10] Н. В. Каптур. *Консистентність квантильних оцінок у моделях лінійної регресії з дискретним часом.* // VII Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих учених з математики. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". — Київ. — 2018. — 15 с.

[11] A. V. Ivanov, N. V. Kaptur, I. N. Savych. *Consistency of the Koenker-Bassett estimator in linear regression model.* // International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. — Kyiv. — 2018. — P. 31-32.

[12] О. В. Іванов, Н. В. Каптур, І. М. Савич *Асимптотична нормальність квантильних оцінок у моделях регресії з сингулярним спектром шуму.* // Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". — Київ. — 2018.

[13] J. Pfanzagl. *On the measurability and consistency of minimum contrast estimates.* // Metrica, 14. — 1969. — P. 249-272.

[14] V. V. Anh, V. P. Knopova, N. N. Leonenko. *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence.* // Australian and NZ J. of Statistics. — 2004. — 46. — P. 275–296.

[15] Б. М. Жураковський. *Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом.* // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". — Київ. — 2016. — 146 с.

[16] W. J. Donoghue. *Distribution and Fourier Transforms.* // Academic Press, New York. — 1969. — 327 p.

[17] Э. Хеннан. *Многомерные временные ряды.* // М.: Мир. — 1974. — 576 с.

[18] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* // М.: ГИФМЛ. – Издание 4-е. — 1963. — 1100 с.

[19] U. Grenander. *On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance.* // Ann. Math. Statist. — 1954. — Vol. 25, 2. — P. 252-272.

[20] И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов. *Гауссовские случайные процессы.* // М.: Наука. — 1970. — 384 с.

[21] П. Хьюбер. *Робастность в статистике* . // М.: Мир. — Москва. — 1984. — 304 с.

[22] P.J. Huber. *The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions.* // Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. Berkeley: Unif. Clif. Press. — 1967. — Vol.1. — P. 221-233.

[23] J. H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem.* // Oxford: Clarendon Press. — 1962. — 662 p.

[24] С. Р. Рао. *Линейные статистические методы и их применения.* // М.: Наука. — 1968. — 548 с.