НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК_______________

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
____________ Клесов.О.І.
«07» грудня 2018р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: **Умови на тейлорівські коефіцієнти функцій з класу Гарді**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-71мп
Остапчук Руслана Володимирівна _______________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович _______________

Рецензент:
Провідний науковий співробітник ІМ НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Сердюк Анатолій Сергійович _______________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _______________

Київ – 2018

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 Математика («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Клесов.О.І.
«30» __жовтня__ 2018р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Остапчук Руслані Володимирівні

1. Тема дисертації «Умови на тейлорівські коефіцієнти функцій з класу Гарді», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затвердженні наказом по університету від «01» листопада 2018р. № 4058-с
2. Термін подання студентом дисертації 10 грудня 2018р.
3. Об’єкт дослідження степеневі ряди та одновимірні ряди Фур’є.
4. Предмет дослідження властивості коефіцієнтів степеневого ряду та коефіцієнтів рядів Фур’є.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
   1) довести теорему про умови на коефіцієнти степеневого ряду при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора функції з класу Гарді;

2) встановити асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції, представленої рядом Фур'є з комплексними коефіцієнтами, які задовольняють умови Фоміна.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 20 слайдів
7. Орієнтовний перелік публікацій:

Микитюк Р.В. Про тейлорівські коефіцієнти функцій класу Гарді, Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018 р., Тези доповідей, Київ, с.25.

8. Дата видачі завдання: 30 жовтня 2018р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури	3.09.18-16.09.18	виконано
2.	Доведення теореми, про умови на коефіцієнти степеневого ряду при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора функції з класу Гарді	17.09.18-14.10.18	виконано
3.	Встановлення асимптотичної формули для інтеграла від модуля функції, представленої рядом Фур'є з комплексними коефіцієнтами, які задовольняють умови Фоміна	15.10.18-18.11.18	виконано

4.	Оформлення результатів	19.11.18-9.12.18	виконано

Студент Р.В. Остапчук

Науковий керівник дисертації П.В. Задерей

Реферат

Магістерська дисертація: 52 сторінки, 20 слайдів презентації, 20 першоджерел.

Дослідження, представлені в даній магістерській дисертації, присвячені знаходженню умов на тейлорівські коефіцієнти функцій з класу Гарді.

Метою даної роботи є дослідження умов на коефіцієнти степеневих рядів при виконанні яких функції представлені даними рядами будуть належати класу Гарді, а також встановлення асимптотичної формули для інтеграла від модуля функції заданої степеневим рядом на одиничному колі.

Об'єктом дослідження є одновимірні ряди Фур'є та степеневі ряди.

Дисертація носить теоретичне значення, її результати можуть використовуватися при одержані інших результатів що стосуються рядів Тейлора з класів Гарді.

Ключові слова: коефіцієнти тригонометричних і степеневих рядів, умови інтегровності, аналітична функція, клас функцій Гарді.

Abstract

Master digree thesis contains: 52 pages, 20 slide presentations, 19 primary sources.

The studies presented in this master's thesis are devoted to finding the conditions for the Taylor-type coefficients of the Gardy class functions.

The purpose of this work is to study the conditions for the coefficients of power series in the performance of which the functions represented by these series will belong to the Hardy class, as well as the establishment of an asymptotic formula for the integral from the function module given by the Fourier series.

The object of the study is one-dimensional Fourier series and power series.

The thesis is of theoretical significance, its results can be used for obtaining other results concerning the Taylor series from the Garde classes.

Key words: coefficients of trigonometric and power series, integrability conditions, analytic function, class of functions of Hardy.

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{C}$ - множина комплексних функцій;

$\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел;

$\forall$ - квантор загальності, «для будь-якого»;

$\exists$ - квантор існування, «існує»;

$[a]$ - ціла частина числа a, що не перевищує a;

$\{a_k\} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ - послідовність дійсних чисел;

$\Delta a_k := a_k - a_{k+1}, k = 0,1,2,...$;

$\Delta^2 a_k := \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}, k = 0,1,2,...;$

L_p - простір сумовних в p-тому степені 2π-періодичних функцій;

$\|f\|_p$ - норма функцій f в просторі L_p;

H^p - клас Гарді, аналітичних в одиничному крузі функцій;

$S-T$ - множина послідовностей, які задовольняють умови Сідона-Теляковського;

$S-T^*$ - множина послідовностей, які задовольняють узагальнені умови Сідона-Теляковського.

Вступ

У даній роботі розглядаються тригонометричні ряди, зокрема ряди Фур'є та степеневі ряди і їх зв'язок. Теорія тригонометричних рядів грає важливу роль в розвитку теорії функцій і є достатньо розвиненою областю математичного аналізу, але все ж, містить ряд не розв'язаних задач. Однією з яких є задача, про умови на коефіцієнти ряду, при виконанні яких функція представлена цим рядом буде належати класу сумовних функцій, а також умови на коефіцієнти степеневого ряду, для того щоб функція належала класу Гарді. Ці дві задачі взаємопов'язані.

Також, в ряді питань теорії тригонометричних рядів, або теорії наближення функцій тригонометричними поліномами є потреба в асимптотичних формулах для інтеграла від модуля функції, представленої рядом Фур'є, а не тільки оцінки, хоча й вони часто використовуються в підсумовуванні рядів.

Дана магістерська дисертація складається із 3-х розділів.

Перший розділ присвячений огляду літератури та умовам на коефіцієнти тригонометричного ряду при виконанні яких даний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції.

В другому розділі розглядаються функції класу Гарді, декілька їх прикладів та показано, що коли коефіцієнти степеневого ряду задовольняють умови Фоміна, то функція представлена цим рядом належить класу Гарді, а також показано, що функція буде належати класу Гарді, якщо умови Фоміна замінити на умови типу Сідона-Теляковського.

Третій розділ присвячений знаходженню асимптотичної формули для інтеграла від модуля функції заданої рядом Фур'є, коефіцієнти якого є комплексними коефіцієнтами. Зауважимо, що вперше таку асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції представленої рядом Фур'є саме з комплексними коефіцієнтами встановив П.В. Задерей та його учні, скориставшись умовою типу Сідона-Теляковського для коефіцієнтів ряду. В даній роботі, умови Сідона-Теляковського замінені на умови Фоміна і встановлена аналогічна формула.

Результати 2-го розділу доповідалися на VII всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики [20].

РОЗДІЛ 1
Огляд літератури та умови інтегровності тригонометричних рядів

В даному розділі приведемо необхідні означення, які будемо використовувати в подальшому, а також огляд літератури який стосується знаходження умов на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний ряд буде рядом Фур'є функції з класів L_p і встановленню оцінок інтегралів від модулів функцій, заданих тригонометричними рядами.

Розглянемо L_p, $1 \le p < \infty$, множину 2π-періодичних сумовних в p-тому степені функцій f із скінченною нормою

$$\| f \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Ряд вигляду

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

де $a_0, a_1, b_1 ...$ - коефіцієнти даного ряду, є деякими дійсними числами, називають тригонометричним рядом.

Важливою, але складною задачею теорії тригонометричних рядів є задача про знаходження умов на коефіцієнти $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, ...$ ряду (1.1) при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є функції з простору L_1.

Тригонометричний ряд (1.1) буде рядом Фур'є, якщо існує функція $f \in L_1$ така, що коефіцієнти даного ряду будуть обчислюватися за наступними формулами Фур'є:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \; k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \; k = 1, 2, ...$$

Згідно з прийнятою термінологією в теорії тригонометричних рядів під терміном «інтегровність тригонометричного ряду» розуміють «інтегровність суми тригонометричного ряду», а умови на коефіцієнти ряду, які забезпечують інтегровність суми даного ряду, називають умовами інтегровності.

Зазвичай, ряди

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx, \tag{1.3}$$

де a_k, b_k - коефіцієнти є дійсними числами, досліджують окремо, оскільки умови інтегровності рядів (1.2), (1.3) різні. Для рядів вигляду (1.2) з косинусів доведення теорем більш прості на відміну від доведення для рядів по синусах (1.3).

Запишемо декілька означень, які будемо використовувати.

Послідовність $\{a_k\}$ називається нуль-послідовність, якщо

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0. \tag{1.4}$$

Послідовність $\{a_k\}$ називається послідовністю обмеженої варіації, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta a_k\right|<\infty. \tag{1.5}$$

Послідовність $\{a_k\}$ називається випуклою, якщо

$$\Delta^2 a_k=\Delta(\Delta a_k)\geq 0,$$

де $\Delta a_k=a_k-a_{k+1}$, для будь-якого $k=0,1,2,...$

Послідовність $\{a_k\}$ називається квазівипуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2 a_k\right|<\infty.$$

Позначення $a_k\downarrow 0$ будемо використовувати для нуль-послідовностей, які монотонно прямують до 0.

Розглянемо, також, умови на коефіцієнти при яких ряди (1.2) і (1.3) збігаються.

Теорема 1.1. [1] Якщо $a_k \downarrow 0$, тоді ряд (1.2) збігається майже скрізь, крім можливо точок $x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2\pi)$; для довільного $\delta > 0$ він збігається рівномірно при $\delta \le x \le 2\pi - \delta$.

Якщо $b_k \downarrow 0$, то ряд (1.3) збігається скрізь; для довільного $\delta > 0$ він збігається рівномірно при $\delta \le x \le 2\pi - \delta$.

Повернемося до поставленої задачі, а саме до знаходження умов на числа $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, ...$ при яких ряди (1.2) і (1.3) будуть рядами Фур'є для функцій з класів L_p.

Ця задача виникає при розв'язуванні мішаних задач для гіперболічних рівнянь методом відокремлення змінних Фур'є [6], оскільки розв'язки отримують у вигляді тригонометричних рядів і потрібно розуміти, які умови потрібно накласти на коефіцієнти $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots$, щоб ряди вигляду (1.2) і (1.3) були рядами Фур'є.

Дуже легко ця задача розв'язується в просторі L_2, завдяки відомому твердженню Рісса-Фішера.

Теорема 1.2. [7] Для того, щоб ряди (1.2) і (1.3) були рядами Фур'є функцій з класу L_2 необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) < \infty .$$

Нажаль, таких простих умов на коефіцієнти a_k і b_k при виконанні яких дані ряди (1.2) і (1.3) будуть рядами Фур'є сумовних функцій в L_1 немає.

Вперше така задача була поставлена В. Юнгом [8] і було встановлено, що ряд (1.2) вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

буде рядом Фур'є, якщо послідовність $\left\{ a_k \right\}$ є випуклою, тобто

$$\Delta^2 a_k \ge 0, \forall k = 0, 1, 2, ...$$

де $\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) = \Delta(a_k - a_{k+1}) = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$

А для ряду з синусів (1.3) коефіцієнти якого монотонно прямують до 0, умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty \tag{1.6}$$

є необхідною і достатньою умовою для інтегровності ряду (1.3).

Відмітимо, що для ряду з косинусів (1.2), коефіцієнти якого монотонно прямують до 0, умова (1.6) є достатньою, але не є необхідною для інтегровності ряду [1].

Тобто, з того, що ряд (1.3) коефіцієнти якого прямують до 0 є рядом Фур'є, випливає що ряд (1.2) також є рядом Фур'є.

Продовжив вивчати цю задачу А.М. Коломогоров [9] і узагальнив результати В.Юнга [8] для ряду з косинусів, змінивши умову випуклості на умову квазівипуклості

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \Delta^2 a_{k-1} \right| < \infty ,$$

тобто якщо для послідовності $\{a_k\}$ виконується умова (1.4) і послідовність квазівипукла, то ряд (1.2) є рядом Фур'є деякої функції з L_1, причому справедлива нерівність

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \le \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \Delta^2 a_{k-1} \right| < \infty .$$

Трохи пізніше С.О. Теляковський [13] одержав твердження для ряду з синусів (1.3), коефіцієнти якого також задовольняють умову (1.4) і утворюють квазівипуклу послідовність. Для того, щоб ряд (1.3) був рядом Фур'є деякої функції з L_1 необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty . \tag{1.7}$$

Якщо цей ряд збігається, то справедлива наступна оцінка

$$\left| \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right| dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right| \le C \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \Delta^2 a_{k-1} \right|$$

Тут і далі, C - абсолютна константа, можливо не одна і та ж в різних формулах.

Також, в [13] було встановлено, що умову (1.7) не можна замінити на умову (1.6).

Того ж року, але вже в іншій своїй роботі [15], С.О. Теляковський отримав наступні результати.

Теорема 1.3. [15]. Нехай коефіцієнти $\{a_k\}$ ряду (1.2) мають такі властивості:

1) $a_k \to 0$, при $k \to \infty$; (1.8)

2) збігаються ряди:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty, \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{l} \left(\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l} \right) \right| < \infty. \tag{1.10}$$

Тоді ряд (1.2) є рядом Фур'є і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{l} \left(\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l} \right) \right| \right). \tag{1.11}$$

Теорема 1.4. [15].Нехай коефіцієнти b_k ряду (1.3) задовольняють умови (1.8)-(1.10) (покладемо $a_0 = 0$). Тоді ряд (1.3) буде рядом Фур'є тоді і тільки тоді, коли збігається ряд (1.7).

Якщо ряд (1.7) збігається то справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right| dx \le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{l} \left(\Delta b_{k-l} - \Delta b_{k+l} \right) \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right) \tag{1.12}$$

Далі результат А.М. Колмогорова узагальнювався. Накладалися все більш загальні умови на коефіцієнти a_k, при яких ряд (1.2) залишався рядом Фур'є. Але ці умови ставали все більш громіздкими.

С. Сідон [10] встановив, що ряд (1.2) буде рядом Фур'є інтегровної функції, якщо його коефіцієнти a_k можна представити у вигляді

$$a_k = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{p_m}{m} \sum_{i=k}^{m} a_i, \; k = 1, 2, ... \tag{1.13}$$

де $|a_i|<1$ і $\sum_{m=1}^{\infty}|p_m|<\infty$.

Сідоном було доведено, що цих умов достатньо для того, щоб ряд (1.2) був рядом Фур'є.

Умови (1.13) називають умовами Сідона.

Пізніше, в 1973 р. С.О. Теляковський [4] в своїй роботі розглядав умови на послідовність $\{a_k\}$ більш загальні, ніж квазівипуклість але і разом з тим достатньо прості.

Ці умови полягають в наступному:

$$a_k \to 0, \text{ при } k \to \infty; \tag{1.14}$$

існують такі числа A_k, що

$$A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty \tag{1.15}$$

$$\text{і } |\Delta a_k| \le A_k \text{ для всіх } k. \tag{1.16}$$

З (1.5) випливає наступне

$$kA_k \to 0, \text{ при } k \to \infty. \tag{1.17}$$

(В якості чисел A_k можуть бути взяті, наприклад, $A_k = \max_{m \ge k}|\Delta a_m|$).

Для умов (1.14)-(1.16), С.А. Теляковский отримав наступні теореми про інтегровність рядів.

Теорема 1.5. [4] Якщо коефіцієнти ряду (1.2) задовольняють умови (1.14)-(1.16) то цей тригонометричний ряд є рядом Фур'є і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\right|dx \le C\sum_{k=0}^{\infty}A_k, \tag{1.18}$$

де C - константа.

Терема 1.6. [4] Якщо коефіцієнти ряду (1.3) задовольняють умови (1.14)-(1.16), тоді для ряду (1.3), рівномірно відносно $q=1,2,...$ справедливо оцінка

$$\int_{\frac{\pi}{q+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\right|dx = \sum_{k=1}^{q}\frac{|b_k|}{k} + O\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right), \tag{1.19}$$

а якщо ще разом з цим виконується наступна умова (1.7)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}<\infty,$$

то і ряд (1.3) з синусів також є рядом Фур'є.

Крім того, С.А. Теляковський довів еквівалентність умов (1.14)-(1.16) умові Сідона (1.13), це можна перевірити наступним чином [4]:

Якщо маємо рівність (1.13), то $\Delta a_k = a_k\sum_{m=k}^{\infty}\frac{p_m}{m}$, і поклавши $A_k=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{|p_m|}{m}$, бачимо, що виконуються умови (1.14)-(1.16). Навпаки, якщо послідовність $\{a_k\}$ задовольняє умови (1.14)-(1.16), то покладемо $\alpha_k=\frac{\Delta a_k}{A_k}$ і $p_k=k\left(A_k-A_{k+1}\right)$. Тоді $|a_k|\le 1$ і за допомогою (1.17) знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|p_k|=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(A_k-A_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k<\infty,$$

а

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sum_{m=i}^{\infty}\frac{p_m}{m}=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{p_m}{m}\sum_{i=k}^{m}\alpha_i,$$

тобто a_k можна представити за допомогою формули (1.13).

Умови (1.14)-(1.16) називаються умовами Сідона-Теляковського інтегровності тригонометричних рядів (1.2) і (1.3), а множину послідовностей, яка задовольняє цим умовам позначають через $S-T$.

В роботі [11] було визначено клас $S-T^*$ - клас послідовностей, які задовольняють умови типу Сідона-Теляковського, тобто

$$a_k\to 0,\ \ |\Delta a_k|\le A_k \text{ для всіх } k\ge 0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k|<\infty \qquad (1.20)$$

Отримані С.О. Теляковським умови, були узагальнені Г.А. Фоміним [5] у 1978 році. Він вказав нові ознаки на коефіцієнти рядів (1.2) і (1.3), які стверджували, що ці ряди є рядами Фур’є функцій з класу L_1.

У своїй роботі [5] він довів два наступних твердження.

Теорема 1.7. [5] Якщо існує дійсне число $p>1$, таке що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\Delta a_n|^p+|\Delta a_{n+1}|^p+\dots}{n}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty, \tag{1.21}$$

то ряд (1.2) з косинусів є рядом Фур'є.

Теорема 1.8. [5] Умови (1.15) і (1.16) є достатніми для того, щоб ряд (1.3) з синусів був рядом Фур'є.

Після праць, що були розглянуті вище, ще багато різних математиків займалися цією проблемою, було розглянуто безліч класів різних послідовностей, розширено вище згадані класи, але разом з тим, вони ставали все менш зручні для застосування.

Світ не стоїть на місці і питанням інтегровності тригонометричних рядів займаються й досі, намагаються знайти зручні у застосуванні в окремих випадках, а також найзагальніші умови на коефіцієнти тригонометричних рядів (1.2) і (1.3) при виконанні яких ці ряди будуть рядами Фур'є функцій з класу L_1.

РОЗДІЛ 2

Класи Гарді і деякі їх властивості

В даному розділі магістерської роботи введемо означення класів функцій Гарді, розглянемо декілька прикладів таких функцій, відмітимо зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами, розглянемо умови на коефіцієнти степеневого ряду, при яких функція представлена даним степеневим рядом належить класу Гарді.

Позначимо через D одиничний круг в комплексній площині $\mathbb{C}$:

$$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}, \tag{2.1}$$

а через T - коло одиничного радіуса:

$$T=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}. \tag{2.2}$$

Запишемо означення аналітичної функції.

Якщо функція аналітична в точці, то це означає що вона аналітична в деякому околі цієї точки.

Якщо функція диференційовна в кожній точці області, то вона є аналітичною в цій області.

Будемо говорити, що функція $f(z)$, аналітична в D, належить класу Гарді H^p, $p>0$, якщо

$$\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^p dt<\infty. \tag{2.3}$$

Розглянемо ще один клас функцій - N. Нехай $\ln^+ a$ означає $\ln a$, якщо $a\geq1$ і 0, якщо $a<1$. Очевидно, що $|\ln a|=2\ln^+ a-\ln a$, $\ln^+ ab\leq\ln^+ a+\ln^+ b$ і $e^{\ln^+ a}=1+a$.

Кажуть, що функція $f(z)$, аналітична в D, належить класу N якщо

$$\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{it}\right)\right|dt<\infty.$$

Зрозуміло, що якщо функція $f(z)$ належить класу H^p, то її добуток на будь-яку обмежену аналітичну функцію також буде належати класу H^p.

Далі при $0<\delta<p$ маємо [3]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^{\delta}dt<1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^{p}dt.$$

Звідси слідує, що якщо $f(z)$ належить класу H^p, то вона також належить класу H^δ, тобто $H^p\subset H^\delta$ при $0<\delta<p$.

Враховуючи, що середнє геометричне

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(1+\left|f\left(re^{it}\right)\right|\right)dt,$$

не більше середнього арифметичного

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\left|f\left(re^{it}\right)\right|\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},\ \forall p>0,$$

маємо, що клас H^p належить класу N, тобто

$$H^p\subset N.$$

Розглянемо деякі приклади функцій з класів H^p [3].

2.1 Приклади функцій з класів H^p

1. Приклад необмеженої функції, що належить всім класам H^p, $(p>0)$ [3].

Розглянемо необмежену, аналітичну в одиничному крузі функцію

$$w_1(z)=\ln\frac{1}{1-z}.$$

Покажемо, що вона належить класу H^p.

Оскільки

$$\left|\ln\frac{1}{1-re^{it}}\right|\le\left|\ln\left|1-re^{it}\right|\right|+\left|\arg\left(1-re^{it}\right)\right|<\left|\ln\left|1-re^{it}\right|\right|+\pi$$

і виконується наступна нерівність

$$\left|a+b\right|^{p}\le 2^{p}\left|a\right|^{p}+2^{p}\left|b\right|^{p},$$

то маємо наступне

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\frac{1}{1-re^{it}}\right|^{p}dt\le 2^{p}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|1-re^{it}\right|\right|^{p}dt+2^{p}\pi^{p}.$$

Далі

$$e>\left|1-re^{it}\right|\ge 2\sqrt{r}\sin\frac{|t|}{2}>\frac{2}{\pi}\sqrt{r}\,|t|\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi}|t|,$$

при $r>\frac{1}{2}$, відповідно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|1-re^{it}\right|\right|^{p}dt\le 1+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\ln^{+}\frac{1}{\left|1-re^{it}\right|}\right\}^{p}dt\le 1+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\ln^{+}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}|t|}\right\}^{p}dt,$$

тобто

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\frac{1}{1-re^{it}}\right|^{p}dt\le 2^{p}+\left(2\pi\right)^{p}+2^{p}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\ln^{+}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}t}\right\}^{p}dt<\infty .$$

2. Приклад функції з класу H^{p}, що не належить класу H^{δ}, при $\delta>p$ [3].
Такою буде наступна функція

$$w_2(z)=\left(1-z\right)^{-\frac{1}{p}}\left[-z\ln\left(1-z\right)\right]^{-\frac{1+\varepsilon}{p}},\varepsilon>0 .$$

Розглянемо функцію

$$w_2(r)=\left(1-r\right)^{-\frac{1}{p}}\left[-r\ln\left(1-r\right)\right]^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}>\frac{c}{\left(1-r\right)^{\frac{1}{\delta}}},$$

$\forall\, c$, при $\delta>p$ і r, що прямує до 1, тому що,

$$\lim_{r\to 1}\frac{\left[-r\ln(1-r)\right]^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}}{(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta}}}=+\infty .$$

Тобто звідси випливає, що $w_2(z)$ не може належати класу H^{δ}, при $\delta>p$.

Оцінимо інтеграл

$$I(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|1-re^{it}\right|^{-1}\left|\ln\left(1-re^{it}\right)\right|^{-(1+\varepsilon)}dt$$

для всіх r, що прямують до 1.

Нехай $r\geq\cos\alpha$, де $0<\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(1+\varepsilon)}$.

Тоді $r\geq\cos\alpha>\sqrt{1-\alpha^2}>1-\alpha$

і при $0\leq t\leq\alpha$ справджується нерівність

$$\left|1-re^{it}\right|=\sqrt{\left(1-r\right)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}<\alpha\sqrt{2}<e^{-(1+\varepsilon)};$$

з іншої сторони

$$\left|1-re^{it}\right|>\frac{2}{\pi}\sqrt{rt}\geq\frac{2t}{\pi}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Користуючись тим, що функція $x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}$ зростає разом з x на інтервалі $\left(0,e^{-(1+\varepsilon)}\right)$, отримаємо

$$\int_0^{\alpha}\left|1-re^{it}\right|^{-1}\left|\ln\left(1-re^{it}\right)\right|^{-(1+\varepsilon)}dt<\int_0^{\alpha}\left|1-re^{it}\right|^{-1}\left|\ln\left|1-re^{it}\right|\right|^{-(1+\varepsilon)}dt<$$

$$<\frac{\pi}{2\sqrt{\cos\alpha}}\int_0^{\frac{2\alpha}{\pi}\cos\alpha}\frac{dx}{x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}}=\frac{\pi}{2\varepsilon\sqrt{\cos\alpha}}\left(\ln\frac{1}{\frac{2\alpha}{\pi}\cos\alpha}\right)^{-\varepsilon}.$$

Далі, помітивши, що при $r\geq\cos\alpha$ і $\alpha\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

$$\left|1-re^{it}\right|>\frac{2\alpha}{\pi}\sqrt{\cos\alpha}\ \text{ і }\ \left|\arg\left(1-re^{it}\right)\right|\geq arctg(\cos\alpha)=\beta,$$

знаходимо

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\left|1-re^{it}\right|^{-1}\left|\ln\left(1-re^{it}\right)\right|^{-(1+\varepsilon)}dt\leq\left(\frac{2\alpha}{\pi}\sqrt{\cos\alpha}\right)^{-1}\beta^{-(1+\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Якщо, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi$, маємо $\left|1 - re^{it}\right| > \sqrt{1+\cos^2\alpha}$, і тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|1 - re^{it}\right|^{-1} \left|\ln\left(1 - re^{it}\right)\right|^{-(1+\varepsilon)} dt \le \frac{\left(\ln\sqrt{1+\cos^2\alpha}\right)^{-(1+\varepsilon)}}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $I(r) \le c(\alpha)$, де α - не залежить від r.

Помітимо тепер, що $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|w_2\left(re^{it}\right)\right|^p dt = r^{-(1+\varepsilon)} I(r)$, і відповідно, $w_2(z)$ належить до класу H^p.

2.2 Зв'язок степеневих рядів з рядами Фур'є

Нехай маємо функцію $f(z)$ з класу Гарді H^p $\left(f(\cdot) \in H^p\right)$.

Рядом Тейлора цієї функції $f(z)$ є степеневий ряд виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in D, \; c_k \in \mathbb{C}, \tag{2.4}$$

де c_k - коефіцієнти степеневого ряду.

Відомо [12], що якщо функція $f(z) \in H^p$, то вона має на одиничному колі T (2.2) певні граничні значення по недотичних шляхах, які утворюють функцію $f(e^{it})$, причому $f(e^{it}) \in L_p$. Це випливає з включення $H^p \subset N$ та тверджень [12, гл IX, §3].

Далі, відмітимо зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами [1].

Нехай

$$c_k = a_k - ib_k, \tag{2.5}$$

$$z = re^{it} = r\left(\cos t + i\sin t\right),$$

$$z^k = r^k\left(\cos kt + i\sin kt\right), \tag{2.6}$$

тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(a_k - b_k\right)\left(\cos kt + i\sin kt\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left(\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) + i\left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt \right) \right). \qquad (2.7)$$

Розглянемо наступні два ряди окремо:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \qquad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt \right) \qquad (2.9)$$

Маємо, що дійсна частина ряду (2.7) вигляду (2.8) аналогічна з рядом (1.1) тобто є тригонометричним рядом, а уявна частина ряду (2.7) вигляду (2.9) називається зазвичай рядом, *спряженим* до ряду (1.1).

Оскільки, ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ зображає аналітичну функцію всередині круга D, тобто при $z = re^{it}$, де $0 \le r < 1,\ 0 \le t \le 2\pi$, тому дійсна і уявна частина цього ряду

$$u(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) r^k$$

і

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt \right) r^k$$

є спряженими гармонічними функціями.

Розглянемо наступне твердження.

Теорема 2.1 [1]. Для того щоб ряди (2.8) і (2.9) були обидва рядами Фур’є необхідно і достатньо, щоб функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, де $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = a_k - ib_k$ належала класу Гарді H^1.

Задача звелася до встановлення умов на коефіцієнти c_k степеневого ряду (2.4), при виконанні яких даний ряд є рядом Тейлора функції $f(z)$ з класу Гарді H^1.

Відома [3] теорема Юнга-Хаусдорфа про коефіцієнти Фур’є функції дійсної змінної з класу L_p.

Теорема 2.2 [3]. 1) Якщо ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{\frac{p}{p-1}}$ збігається при $p\geq 2$, то тригонометричний ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikt}$ буде рядом Фур'є функції з класу L_p, причому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^p\,dx\leq\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{p-1},\ \varphi(x)\in L_p.$$

2) Якщо $\varphi(x)\in L_p$, при $1<p\leq 2$ і $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikt}$ - її ряд Фур'є, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{\frac{p}{p-1}}\leq\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Виходячи з цієї теореми маємо наступну теорему Юнга-Хаусдорфа для функцій з класу H^p.

Теорема 2.3 [3]. 1) Якщо ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{\frac{p}{p-1}}$ збігається, при $p\geq 2$, то функція $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ належить класу H^p.

2) Якщо функція $f(z)$ належить класу H^p, при $1<p\leq 2$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{\frac{p}{p-1}}$ збігається.

Далі будемо розглядати окремі випадки.

У випадку для функцій $f(z)$ з класу H^2 ми маємо наступний критерій:

Теорема 2.4 [3]. Для того, щоб функція вигляду

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

належала класу H^2, необхідно і достатньо, щоб ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2$ збігався.

Виникає питання, які умови потрібно накласти на коефіцієнти c_k для того, щоб функція $f(z)$ належала класу H^1. Нажаль таких простих умов як у випадку для класу H^2 немає. Натомість відомі наступні.

Теорема 2.5 [3]. Для того, щоб функція

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

належала класу H^1, необхідно і достатньо, щоб числа c_k були комплексними коефіцієнтами Фур'є функції спряжена до якої буде також сумовною.

2.3 Деякі умови належності аналітичних функцій класу Гарді

Метою даної роботи є дослідження умов на коефіцієнти c_k степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

при виконання яких даний ряд є рядом Тейлора функції $f(z)$ з класу Гарді H^1.

Нехай $\{a_k\}$ - збіжна до 0 послідовність чисел, тобто $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$.

Кажуть, що $\{a_k\}$ задовольняє умови Г.О. Фоміна [5], якщо існує таке дійсне число $p>1$, таке що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\Delta a_n|^p+|\Delta a_{n+1}|^p+\ldots}{n}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty. \qquad (2.10)$$

Розглянемо дві наступні теореми [5] .

Теорема 2.6. [5] Якщо виконуються умови Фоміна (2.10) то ряд (1.2) з косинусів є рядом Фур'є.

Теорема 2.7. [5] Умови (1.15) і (1.16) є достатніми для того, щоб ряд (1.3) з синусів був рядом Фур'є.

Також дуже важливим є наступне твердження.

Теорема 2.8. [5] Якщо для деякого $p > 1$ виконується умова (2.10), то ряд (1.2) є рядом Фур'є, а ряд (1.3) по синусах при виконання умови (2.10) тоді і тільки тоді буде рядом Фур'є, коли виконується умова (1.20).

Проаналізувавши вище зазначене, вдалося довести наступну теорему.

Теорема 2.9. Нехай коефіцієнти c_k ряду виду (2.4) такі, що $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ і задовольняють умови Фоміна (2.10). Для того, щоб ряд (2.4) був рядом Тейлора-Маклорена деякої функції $f(z) \in H^1$ необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k+1} < \infty . \tag{2.11}$$

Перш ніж перейти до доведення даної теореми, сформулюємо наступне твердження.

Теорема 2.10 [1] Степеневий ряд, за допомогою якого представлена функція $f(z)$ належить класу H^1 тоді і тільки тоді коли його дійсна і уявна частина при $z = e^{it}$ і співвідношенню (2.5) є рядами Фур'є, тобто ряди (2.8) і (2.9) вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt \right)$$

– ряди Фур'є.

Доведення (теореми 2.9).

Необхідність. Нехай ряд вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ де c_k задовольняють умови Фоміна (2.10) є рядом Тейлора-Маклорена функції $f(z) \in H^1$. Встановимо, що тоді $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k+1}$ збігається.

За теоремою 2.10 [1], ряди вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_k\cos kt + a_k\sin kt\right)$$

– ряди Фур'є.

Отже, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$ і $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kt$ що є складовими рядів (2.8) і (2.9) – ряди Фур'є, тоді з попереднього твердження зрозуміло, що для коефіцієнтів a_k і b_k, які задовольняють умови Фоміна, виконуються умови

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k} < \infty$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k} < \infty,$$

де b_k і a_k - коефіцієнти при синусах в рядах (2.8), (2.9) відповідно.

Так як $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k} < \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k} < \infty$ звідси слідує, що збігається також ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k| + |b_k|}{k} < \infty.$$

Оскільки ми поклали, що $c_k = a_k - ib_k$ то $|c_k| = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}$ звідси випливає, що

$$|a_k| \le |c_k|,$$

$$|b_k| \le |c_k|,$$

тобто маємо наступну нерівність

$$|a_k| + |b_k| \le 2|c_k|, \text{ або } \frac{|a_k| + |b_k|}{2} \le |c_k|. \tag{2.12}$$

З іншої сторони

$$|c_k| = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}} \le \sqrt{a_k^{\ 2} + 2a_k b_k + b_k^{\ 2}} = \sqrt{\left(a_k + b_k\right)^2} = |a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k|$$

тобто

$$|c_k| \le |a_k| + |b_k|. \tag{2.13}$$

Отже, з (2.12) і (2.13) отримали наступну подвійну нерівність:

$$\frac{|a_k|+|b_k|}{2} \le |c_k| \le |a_k|+|b_k|.$$

Розглянувши праву частину нерівності, тобто нерівність (2.13) маємо що ряд

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+1}$ збігається.

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай c_k задовольняють умови Фоміна (2.10) і збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}<\infty.$$

Доведемо, що функція $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ належить класу H^1.

Оскільки збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}<\infty$, то використовуючи умову (2.12) маємо що також збігається ряд виду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}<\infty$.

Отже, збігаються ряди $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}<\infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}<\infty$.

Тобто, ряди $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kt$ і $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kt$ що є складовими рядів (2.8) і (2.9) – ряди Фур'є.

Звідси випливає, що ряди (2.8) і (2.9) є рядами Фур'є, і за теоремою 2.10 [1], яка згадана вище, маємо що функція представлена степеневим рядом виду $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ належить класу Гарді H^1.

Доведено достатність і теорему в цілому.

Зауваження. Умова (2.11) є необхідною для належності $f(z)\in H^1$, навіть без використання умов Фоміна (2.10), що слідує з наступної теореми.

Теорема 2.11 (Гарді, Літтлвуд) [2]. Якщо $\Phi(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots\in H^1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k+1}\le\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(e^{it})\right|dt.$$

Помітимо [5], що з умов Сідона-Теляковського (1.14)-(1.16) слідує умова Фоміна (2.10) для всіх $p>1$. Дійсно, будь-якого $p>1$ з умов (1.14)-(1.16) маємо

$$\sum_{s=1}^{\infty}2^s\Delta_s^{(p)}\le\sum_{s=1}^{\infty}2^s A_{2^{s-1}},$$

останній ряд збігається за теоремою Коші, оскільки збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k, \quad \text{і} \quad A_k\downarrow 0.$$

Лема 1.1. [5]. Для кожного фіксованого числа $p>1$ умова (2.10) Фоміна еквівалентна умові

$$\sum_{s=1}^{\infty}2^s\Delta_s^{(p)}<\infty. \qquad (2.14)$$

Застосовуючи вищеприведену лему 1.1. отримаємо нерівність (2.10). Обернене твердження не вірне, тобто умова (2.14), а значить і умова (2.10), може виконуватися тоді коли умови (1.14)-(1.16) не виконуються.

Звідси випливає, що теореми Фоміна [5] узагальнюють результати С.О. Теляковського пов'язані з умовами (1.14)-(1.16).

Звідси, маємо наступне твердження.

Наслідок. В теоремі 2.9 умови Фоміна можна замінити на умови типу Сідона-Теляковського.

РОЗДІЛ 3

Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є

В ряді питань теорії тригонометричних рядів, або теорії наближення функції тригонометричними поліномами потрібні асимптотичні формули для інтеграла

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)\right|dt, \tag{3.1}$$

а не оцінки (1.11) і (1.12), хоча й вони часто використовуються в теорії підсумовування рядів.

В 1971 році такі формули отримав Теляковський [17], для дійсних коефіцієнтів ряду (1.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right).$$

Теорема 3.1. Нехай коефіцієнти ряду (1.1) прямують до 0, збігаються ряди

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\Delta a_k\right|+\left|\Delta b_k\right|\right),$$

$$B(a)=\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{l}\left(\Delta a_{k-l}-\Delta a_{k+l}\right)\right|,$$

$$B(b)=\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{l}\left(\Delta b_{k-l}-\Delta b_{k+l}\right)\right|$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|b_k\right|}{k}<\infty.$$

Тоді для інтеграла (3.1) рівномірно відносно $m=0,1,2,...$ справедлива оцінка

$$I=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}+2\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\left|b_k\right|}{k}+O\left(V+T_m\right), \tag{3.2}$$

де $\xi_k = \left(\xi(b_k); \sqrt{\left(a_{m-k} - a_{m+k}\right)^2 + \left(b_{m-k} - b_{m+k}\right)^2} \right)$,

а функція $\xi(t,u) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|t|, |u| \le |t|, \\ |t| \arcsin\left|\dfrac{t}{u}\right| + \sqrt{u^2 - t^2}, |u| > |t|. \end{cases}$

Перепишемо ряд виду (1.1) наступним чином

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Вперше, асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є із комплексними коефіцієнтами довели Задерей П.В. разом із своїми учнями.

Теорема 3.2. [18]. Якщо коефіцієнти ряду (3.3) задовольняють умови $S - T^*$ (1.15), а також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty,$$

то для інтеграла

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt \tag{3.4}$$

рівномірно відносно $m = 0,1,2,...$ справедлива асимптотична рівність

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \left(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}| \right) \Im_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{c_k}{k} + O\left(T_m(A)\right), \tag{3.5}$$

де

$$\Im_{m,k}(c) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{\left(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}| \right)^2} \sin^2 t dt},$$

$$T_m(A) := \sum_{k=0}^{m} (k+1) |\Delta A_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} (k - m + 1) |\Delta A_k|$$

$$\Delta A_k = A_k - A_{k+1}.$$

В даному розділі магістерської дисертації запишемо аналогічну асимптотичну формулу, для випадку, коли комплексні коефіцієнти Фур’є задовольняють умову

$$c_k \to 0, k \to \infty, \tag{3.6}$$

а також умову Г.О. Фоміна:

існує таке дійсне число $p > 1$ таке що

$$F_\nu(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left|\Delta c_k\right|^p + \left|\Delta c_{k+1}\right|^p + \ldots}{k+1} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.7}$$

Теорема 3.3. Якщо коефіцієнти ряду (3.3) задовольняють умови (3.6), (3.7) і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty,$$

то для інтеграла (3.4) рівномірно відносно $m = 0,1,2,\ldots$ справедлива асимптотична рівність

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \left(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}| \right) \Im_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{c_k}{k} + O\left(F_{p,m}(c) \right), \tag{3.8}$$

де

$$\Im_{m,k}(c) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{\left(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}| \right)^2} \sin^2 t dt}, \tag{3.9}$$

$$F_{p,m}(c) = F_p(c) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\infty} \left| \Delta c_{m+k} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.10}$$

Доведення. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\mu = \left[\frac{m}{3} \right]$, $\nu = m - \mu$

Введемо такі позначення:

$$\alpha_k = \begin{cases} c_k, k = 0,1,2,\ldots,m-1 \\ 0, k \ge m \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\alpha'_k=\begin{cases} c_k, k=0,1,2,...,\mu \\ \dfrac{\nu-k}{\nu-\mu}c_k, k=\mu+1,...,\nu-1 \\ 0, k\ge\nu \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\alpha''_k=\begin{cases} \alpha_{m-k}-\alpha'_{m-k}, k=0,1,2,...,m \\ 0, k\ge m+1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Тоді $\alpha_k=\alpha'_k+\alpha''_{m-k}$ і для ряду (3.3) справедливі рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{ikt}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha'_k+\alpha''_{m-k}\right)e^{ikt}+\sum_{k=m}^{\infty}c_k e^{ikt}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha'_k+e^{imt}\alpha''_k+e^{imt}c_{k+m}\right)\cos kt+i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha'_k-e^{imt}\alpha''_k+e^{imt}c_{k+m}\right)\sin kt. \tag{3.14}$$

Спочатку оцінимо інтеграли від рядів по косинусах.

Лема 3.1. Якщо послідовність $\{c_k\}$, $c_k\in\mathbb{C}$, задовольняє умови (3.6), (3.7) то

$$I_1=\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_k\cos kt\right|dt\le K\cdot F_p(c), \tag{3.15}$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{m+k}\cos kt\right|dt\le K\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta c_{m+l}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.16}$$

$$I_3=\left|\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha'_k+e^{imt}\alpha''_k\right)\cos kt\right|dt\le K\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{m-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.17}$$

де, α'_k і α'' визначені рівностями (3.12) і (3.13), K - стала, можливо не одна і таж в різних формулах.

Доведення леми 3.1. Спочатку покажемо, що справедлива нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta c_k\right|\le K\cdot F_p(c). \tag{3.18}$$

Дійсно, запишемо суму $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta c_k\right|$ у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta c_k\right|=\left|\Delta c_0\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|,$$

а далі скористаємось нерівністю Гельдера [1].

Нерівність Гельдера: нехай задані числа (комплексні) $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$ і дійсні числа $p, q \in (1; +\infty)$, що визначаються наступною рівністю $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i \cdot y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отже, справедлива нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta c_k\right| \le \left|\Delta c_0\right| + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} 1^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left|\Delta c_0\right| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{q}}\left(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le K\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(\frac{1}{2^k}\sum_{l=2^k}^{\infty}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Внаслідок теореми Коші, про одночасну збіжність рядів $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ і $\sum_{l=0}^{\infty} 2^l b_{2^l}$, $b_k \downarrow 0$, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta c_k\right| \le K\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нерівність (3.18) встановлена.

Проведемо перетворення Абеля [1] в сумі під інтегралом в (3.15). Будемо мати

$$I_1 = \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(D_k(t) - D_{k-1}(t)\right)\right| dt = \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta c_k D_k(t)\right| dt,$$

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\cos lt = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Тому,

$$I_1 \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left|\Delta c_0\right| dt + \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta c_k D_k(t)\right| dt = \frac{\pi}{2}\left|\Delta c_0\right| + \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\Delta c_l D_l(t)\right| dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}|\Delta c_0| + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \left| \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \Delta c_l D_l(t) \right| dt + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\pi} \left| \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \Delta c_l D_l(t) \right| dt =: \frac{\pi}{2}|\Delta c_0| + I_1' + I_2'' \qquad (3.19)$$

Для оцінки I_1' скористаємось тим, що $|D_l(t)| \le l+1$.

Тоді

$$I_1' \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} |\Delta c_l| = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta c_k| \le KF_p(c). \qquad (3.20)$$

Для оцінки інтеграла I_2'' запишемо його у вигляді

$$I_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \left| \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \Delta c_l \sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t \right| dt .$$

Використовуючи нерівність Гільберта, одержимо

$$I_2'' \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \frac{dt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \left| \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \Delta c_l \sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Покажемо, що

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \le K \cdot 2^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)} .$$

Оскільки $\sin\frac{x}{2} \ge \frac{x}{\pi}, 0 < x < \pi$, то

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\frac{\pi}{2^k}}^{\pi} \frac{dx}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^p x^p} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{2^{k(p-1)}}{\pi^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \le K \cdot 2^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)} .$$

Скориставшись теоремою Хаусдорфа-Юнга [2]

$$2\left(\int_0^{\pi}\left|\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\Delta c_l\sin(2l+1)t\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\le K\left(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тому

$$I_1'\le K\sum_{k=0}^{\infty}2^{\frac{k}{q}}\left(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=K\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left(\frac{1}{2^k}\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le K\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left(\frac{1}{2^k}\sum_{l=2^k}^{\infty}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

а згідно теореми Коші

$$I_1'\le K\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta c_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=K\cdot F_p(c). \qquad (3.21)$$

З співвідношень (3.19), (3.20) і (3.21) слідує (3.15).

Очевидно, що із збіжності ряду (3.7) випливає збіжність величини

$$F_{p,m}(c):=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta c_{l+m}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Повторивши всі міркування, які були використані при оцінці I_1 одержимо нерівність (3.16).

Ясно, що

$$I_3\le\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k'\cos kt\right|dt+\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k''\cos kt\right|dt=:I_3'+I_3''. \qquad (3.22)$$

Для оцінки інтеграла I_3' скористаємось співвідношенням (3.15). Будемо мати

$$I_3'\le K\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta\alpha_l'\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.23)$$

Оскільки

$$\Delta\alpha_k'=\begin{cases}\Delta\alpha_k,k=0,1,2,...,\mu-1\\ \dfrac{\nu-k}{\nu-\mu}\Delta\alpha_k-\dfrac{1}{\nu-\mu}\alpha_{k+1},k=\mu,\mu+1,...,\nu-1,\\ 0,k\ge\nu\end{cases}$$

то використовуючи нерівність Міньковського [1] одержимо.

Нерівність Міньковського: нехай задані числа (комплексні) $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$ і дійсне число $p \in (1; +\infty)$. Тоді справедлива нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

На основы цієї нерівності одержимо оцінку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\infty} |\Delta\alpha_l'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=0}^{\mu-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\mu-1} |\Delta\alpha_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\nu-1} |\Delta\alpha_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \sum_{k=\mu}^{\nu-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\nu-1} \frac{1}{\nu-\mu} |\alpha_{l+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так як ,

$$|\alpha_{l+1}|^p = \left| \sum_{j=l+1}^{\nu} \Delta\alpha_j \right|^p \le \sum_{j=l+1}^{\nu} |\Delta\alpha_j|^p \le \sum_{j=k}^{\nu-1} |\Delta\alpha_j|^p,$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\infty} |\Delta\alpha_l'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{m-1} |\Delta\alpha_l|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.24}$$

і звідси на основі (3.23), маємо

$$I_3' \le K \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{m-1} |\Delta\alpha_l|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.25}$$

Аналогічними міркуваннями встановлюється нерівність

$$I_3'' \le K \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\infty} |\Delta\alpha_l'|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.26}$$

Із співвідношень (3.22), (3.25) і (3.26) слідує нерівність (3.17).

Лема 3.1. доведена.

Покладемо

$$F_{p,m}(c) = F_p(c) + F'_{p,m}(c).$$

Позначимо,

$$B_{m,k}(t)=\alpha'_k+e^{imt}(c_{k+m}-\alpha''_k), k=1,2,\dots\ B_{m,0}(t)=0\,. \tag{3.27}$$

Очевидно, що

$$\left|I-\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}B_{m,k}(t)\sin kt\right|dt\right|\le K\cdot F_{p,m}(c)\,. \tag{3.28}$$

Оскільки

$$\sin kt=\frac{\cos\frac{2k-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_{m,k}(t)\sin kt=-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t \tag{3.29}$$

і $\forall t$, в наслідок (3.24) і аналогічної оцінки для $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\alpha''_k\right|$, має місце нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|\le\left|c_m\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\Delta\alpha'_k\right|+\Delta\left|c_{m+k}\right|+\left|\Delta\alpha''_k\right|\right)\le K\cdot F_{p,m}(c)\,. \tag{3.30}$$

бо

$$\left|c_m\right|=\left|\sum_{k=m}^{\infty}\Delta c_k\right|\le\sum_{k=m}^{\infty}\left|\Delta c_k\right|\le K\cdot F_{p,m}(c)\,.$$

З рівності (3.29) і обмеженості функції $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}$, а також оцінки (3.30), слідує, що

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}B_{m,k}(t)\sin kt\right|dt-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\right|\le K\cdot F_{p,m}(c) \tag{3.31}$$

Визначимо парні функції

$$\varphi_k(t)=\begin{cases} 0, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ \cos(2k+1)t, \dfrac{\pi}{2(2k+1)}\le t\le \pi-\dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, \pi-\dfrac{\pi}{2(2k+1)}\le t\le \pi. \end{cases} \qquad (3.32)$$

$$\psi_k(t)=\begin{cases} \cos(2k+1)t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, \dfrac{\pi}{2(2k+1)}\le t\le \pi. \end{cases}$$

Ясно, що $\forall t\in[-\pi;\pi]$, $\cos\dfrac{2k+1}{2}t=\varphi_k\left(\dfrac{t}{2}\right)+\psi_k\left(\dfrac{t}{2}\right)$ та

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\cdot\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\varphi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(2t)\varphi_k(t)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\le\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(2t)\varphi_k(t)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}. \qquad (3.33)$$

Використавши (3.27), будемо мати

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}B_{m,k}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}\le 2\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\alpha_k'\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t}+2\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta c_{m+k}\varphi_k(t)\right|\cdot\frac{dt}{t}+2\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\alpha_k''\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t}.$$

Лема 3.2. Якщо функції $\varphi_k(t), k=0,1,...$ визначені рівностями (3.32), а послідовність $\{a_k\}, a_k\in\mathbb{C}, k=0,1,...$ задовольняє умови Фоміна (3.6), (3.7), а також збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{|a_k|}{k}<\infty$ то справедлива оцінка

$$\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\varphi_k(t)\right|\cdot\frac{dt}{t}\le K\cdot F_{p,m}(a). \qquad (3.34)$$

Ця лема слідує з леми 3 [17] і теореми 3 [4].

Оскільки $c_k\to 0, k\to\infty$, то $\forall k\in\mathbb{N}$

$$|c_k|=\left|\sum_{l=k}^{\infty}\Delta c_l\right|\le\sum_{l=k}^{\infty}|\Delta c_l|\le K\cdot F_p(c).$$

З цієї оцінки і леми 3.2, одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}B_{m,k}(2t)\varphi_k\left(t\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\le K\cdot F_{p,m}(c). \qquad (3.35)$$

Тому з (3.33) та (3.35), матимемо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\cdot\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\right|\le K\cdot F_{p,m}(c) \qquad (3.36)$$

А з (3.28), (3.33) і (3.36) знайдемо, що

$$\left|I-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\right|\le K\cdot F_{p,m}(c). \qquad (3.37)$$

Покажемо тепер, що

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|\right)\cdot\Im_{m,k}(c)-2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}\right|\le K\cdot F_{p,m}(c).$$

(3.34)

Для цього визначимо функцію $\mu_k(t)$:

$$\mu_k(t)=\begin{cases}1,|t|\le\dfrac{\pi}{k+1},\\ 0,|t|>\dfrac{\pi}{k+1},\end{cases}$$

$k=0,1,2,\ldots$.

Тоді $\left|\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)-\mu_k(t)\right|\le\frac{2k+1}{2}|t|$, при $|t|\le\frac{\pi}{k+1}$, а $\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)=\mu_k(t)$ при $|t|>\frac{\pi}{k+1}$.

Використавши (3.30), знайдемо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)\right|\cdot\frac{dt}{|t|}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|\cdot\left|\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)-\mu_k\left(t\right)\right|\frac{dt}{|t|}\le\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta c_k|\frac{2k+1}{2}\int_{-\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k+1}}dt\le K\cdot F_p(c). \qquad (3.39)$$

Для оцінки інтеграла $\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)\right|\frac{dt}{t}$ розіб'ємо проміжок інтегрування на ряд частин. Для цього покладемо

$$m_1=\left[\sqrt{m}\,\right]+1, \tag{3.40}$$

і розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m_1}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)\right|\frac{dt}{t}=\sum_{l=1}^{m_1-1}\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)\right|\frac{dt}{t}. \tag{3.41}$$

Для $t\in\left(\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right)$, згідно означення функції $\mu_k(t)$, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)=\sum_{k=0}^{l-1}\Delta B_{m,k}(t)=-B_{m,l}(t), \tag{3.42}$$

тому

$$\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(t\right)\right|\frac{dt}{t}=\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}\left|B_l(t)\right|dt. \tag{3.43}$$

Крім того,

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}\left|B_{m,l}(t)\right|dt-\frac{l}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}\left|B_{m,l}(t)\right|dt\right|\le\max_t\left|B_{m,l}(t)\right|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}\right|dt\le\frac{1}{l^2}\max_t\left|B_{m,l}(t)\right|.$$

Звідси, згідно з (3.30)

$$\left|B_{m,l}(t)\right|\le\sum_{k=l}^{\infty}\left|B_{m,k}(t)\right|\le K\cdot F_{p,m}(c), \tag{3.44}$$

тому

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}\left|B_{m,l}(t)\right|dt-\frac{l}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}\left|B_{m,l}(t)\right|dt\right|\le K\frac{1}{l^2}F_{p,m}(c). \tag{3.45}$$

Функція $B_{m,l}(t)$ має період $\frac{2\pi}{m}$, а у відрізок $\left[\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right]$ повністю вкладається $\left[\frac{\pi m}{l(l+1)2\pi}\right]$ відрізків довжиною $\frac{2\pi}{m}$.

Розгяленмо наступне твердження [18] .

Лема 3.3. [18]. Нехай $a,b\in\mathbb{C}$. Тоді справедлива рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|a+be^{it}\right|dt=4\left(|a|+|b|\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|a|\cdot|b|}{\left(|a|+|b|\right)^{2}}\sin^{2}tdt}\,. \tag{3.46}$$

Оскільки, згідно (3.44)

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|B_{l}(t)\right|dt-\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}\frac{1}{t}\left|B_{m,l}(t)\right|dt\right|\le\max_{t}\left|B_{m,l}(t)\right|\frac{2\pi}{m}\le\frac{K}{m}F_{p,m}(c),$$

а на основі леми 3.3.

$$\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}\left|B_{m,l}(t)\right|dt=\frac{1}{m}\int_{0}^{2\pi}\left|\alpha_{l}'+c_{m+l}e^{it}-\alpha_{l}''e^{it}\right|dt=$$

$$=\frac{4}{m}\left(|\alpha'|+|c_{m+l}-\alpha''|\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|\alpha'|\cdot|c_{m+l}-\alpha''|}{\left(|\alpha'|+|c_{m+l}-\alpha''|\right)^{2}}\sin^{2}tdt} \tag{3.47}$$

Позначимо, $\bar{E}_{l}(m):=2\left(|\alpha'|+|c_{m+l}-\alpha''|\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|\alpha'|\cdot|c_{m+l}-\alpha''|}{\left(|\alpha'|+|c_{m+l}-\alpha''|\right)^{2}}\sin^{2}tdt}$, будемо мати

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|B_{m,l}(t)\right|dt-\frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\bar{E}_{l}(m)\right|\le\frac{K}{m}F_{p,m}(c).$$

А звідси, враховуючи, що

$$\bar{E}_{l}(m)\le KF_{p,m}(c) \tag{3.48}$$

та $\left|\frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]-\frac{1}{l^{2}}\right|\le K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^{3}}\right)$ будемо мати

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \left|B_{m,l}(t)\right| dt - \frac{1}{l^2}\bar{E}_l(m)\right| \le K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^3}\right)F_{p,m}(c). \quad (3.49)$$

Тому з (3.43), (3.45) і (3.49) слідує нерівність

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi l}\bar{E}_l(m)\right| \le K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^3}\right)F_{p,m}(c). \quad (3.50)$$

Враховуючи співвідношення (3.41) і (3.50) знайдемо

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m_1-1}\frac{1}{l}\bar{E}_l(m)\right| \le K\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^2}\right) \le KF_{p,m}(c). \quad (3.51)$$

Тепер розглянемо інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{j_0}\int_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t} + \int_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}, \quad (3.52)$$

де j_0 - найбільше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m}\left(2j_0+1\right) \le \frac{\pi}{m_1}, 2j_0+1 \le \sqrt{m}. \quad (3.53)$$

Візьмемо точку $\frac{\pi}{l}, l \in \mathbb{N}$, яка належить проміжку $\left[\frac{\pi(2j-1)}{m}, \frac{\pi(2j+1)}{m}\right]$. Тоді має місце оцінка

$$\left|\int_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(\frac{\pi}{l})\right|\frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(\frac{\pi}{l})\right|\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \int_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\right|\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi}\right| dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\right|\left|\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| dt. \quad (3.54)$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi}\right|\le\frac{m}{\pi\left(2j+1\right)}-\frac{m}{\pi\left(2j-1\right)}=\frac{2m}{\pi\left(4j^2-1\right)},$$

то на основі оцінок (3.30) будемо мати

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\right|\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi}\right|dt\le\frac{2m}{\pi\left(4j^2-1\right)}\frac{2\pi}{m}KF_{p,m}(c)\le\frac{K}{j^2}F_{p,m}(c). \qquad (3.55)$$

Згідно з означенням функції $\mu_k(t), \mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)=0$ для всіх k таких, що $\frac{\pi}{k+1}<\frac{\pi}{m}(2j-1)$, або $\frac{\pi}{k+1}>\frac{\pi}{m}(2j+1)$. Якщо $\frac{\pi}{m}(2j-1)<\frac{\pi}{k+1}<\frac{\pi}{m}(2j+1)$, то $\left|\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right|\le 1$.

Очевидно, що для таких k

$$\frac{m}{2j+1}<k<\frac{m}{2j-1}. \qquad (3.56)$$

Суму по всіх k, що задовольняють нерівність (3.56) будемо позначати через $\sum\limits_{k}{}_{j}$.

Тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|\left|\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right|dt\le\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k}{}_{j}\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|dt=\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{m}}\sum_{k}{}_{j}\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|dt. \qquad (3.57)$$

Згідно означення функції $\mu_k(t)$ і леми 3.3 будемо мати

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right|dt=\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\left|B_{m,l}(t)\right|dt=\frac{2}{m}\bar{E}_l(m). \qquad (3.58)$$

На основі співвідношень (3.54)-(3.57) одержуємо, що $\forall l\in\mathbb{N}$, таких, що

$$\frac{\pi}{m}(2j-1)\le\frac{\pi}{l}\le\frac{\pi}{m}(2j+1) \qquad (3.59)$$

справедлива оцінка

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{2}{\pi}\frac{l}{m}\bar{E}_l(m)\right|\le\frac{K}{j^2}F_{p,m}(c)+\frac{l}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}}\sum_k{}_j\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|dt. \qquad (3.60)$$

На відрізку $\left[\frac{\pi}{m}(2j-1),\frac{\pi}{m}(2j+1)\right]$ містяться $\tau=\left[\frac{m}{2j+1}\right]-\left[\frac{m}{2j-1}\right]$ точок виду $\frac{\pi}{l}$.

Додамо нерівності (3.60) для всіх l, що задовольняють умову(3.59) і поділимо на число доданків. При цьому одержимо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{2}{\pi m\tau}\sum_l l\bar{E}_l(m)\right|\le\frac{K}{j^2}F_{p,m}(c)+m\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}}\sum_k{}_j\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|dt, \qquad (3.61)$$

де $\sum\limits_l$ означає підсумовування по тих l для яких виконується нерівність (3.59).

Для $j<j_0$, де $2j_0+1\le\sqrt{m}$, справедлива нерівність

$$\left|\frac{1}{\tau}-\frac{4j^2-1}{2m}\right|\le\frac{1}{\frac{m}{2j-1}-1-\frac{m}{2j+1}}-\frac{1}{\frac{2m}{4j^2-1}}\le\frac{1}{\left(\frac{2m}{4j^2-1}-1\right)\frac{2m}{4j^2-1}}\le$$

$$\le\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{2m}{4j^2-1}\frac{2m}{4j^2-1}}\le2\left(\frac{4j^2-1}{2m}\right)^2\le K\frac{j^4}{m^2}. \qquad (3.62)$$

Для всіх l, що задовольняють співвідношення (3.59) має місце оцінка

$$\left|\frac{4j^2-1}{m^2}-\frac{1}{l^2}\right|\le\left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m}-\frac{2j-1}{m}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m}+\frac{2j+1}{m}\right|\le\frac{4j}{m^2}. \qquad (3.63)$$

З (3.62) і (3.63), а також співвідношення $\frac{m}{2j+1}\le l\le\frac{m}{2j-1}$, будемо мати

$$\left|\frac{1}{m\tau}-\frac{1}{2l}\right|\le\frac{l}{m}\left|\frac{1}{\tau}-\frac{4j^2-1}{2m}\right|+\frac{l}{2}\left(\frac{4j^2-1}{m^2}-\frac{1}{ml}\right)\le K\frac{l}{m}\frac{j^4}{m^2}+\frac{l}{2}\frac{4j^2-1}{m^2}-\frac{1}{2l}\le$$

$$\le K\frac{j^3}{m^2}+\frac{l}{2}\left|\frac{4j^2-1}{m^2}-\frac{1}{l^2}\right|\le K\left(\frac{j^3}{m^2}+\frac{1}{m}\right).$$

Оскільки $\tau \le K\dfrac{m}{j^2}$, то

$$\left|\frac{2}{\pi m\tau}\sum_l l\bar{E}_l(m)-\frac{1}{\pi}\sum_l \frac{1}{l}\bar{E}_l(m)\right|\le K\left(\frac{j^3}{m^2}+\frac{1}{m}\right)\tau \max_l \bar{E}_l(m)\le K\left(\frac{j^3}{m^2}+\frac{1}{j^2}\right)\max_l \bar{E}_l(m)$$

(3.64)

З (3.61), враховуючи (3.64) і (3.50) знайдемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\sum_{l=\left[\frac{m}{2j+1}\right]+1}^{\left[\frac{m}{2j-1}\right]}\frac{1}{l}\bar{E}_l(m)\right|\le K\left(\frac{j}{m}+\frac{1}{j^2}\right)F_{p,m}(c)+m\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}}\sum_k {}_j\left|\Delta B_k(t)\right|dt.$$

(3.65)

Для інтеграла

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0-1)}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}$$

з (3.52), внаслідок (3.30) справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0-1)}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}\le\frac{m}{\pi\left(2j_0-1\right)}\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0-1)}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_k(t)\right|\frac{dt}{t}\le\frac{Km}{\pi\left(2j_0-1\right)}F_{p,m}(c).$$

(3.66)

Із співвідношень (3.65), (3.66) і (3.52) знайдемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\sum_{l=\left[\frac{m}{2j_0+1}\right]+1}^{m}\frac{1}{l}\bar{E}_l(m)\right|\le K\sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{j}{m}+\frac{1}{j^2}\right)F_{p,m}(c)+m\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}}\sum_{j=1}^{j_0}\sum_k {}_j\left|\Delta B_{m,k}(t)\right|dt$$

. (3.67)

Оскільки $\left[\dfrac{m}{2j_0+1}\right]-m_1\le K$ (внаслідок вибору чисел j_0 і m_1), то користуючись оцінкою (3.48) знайдемо, що

$$\sum_{l=m_1}^{\left[\frac{m}{2j_0+1}\right]} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m) \le KF_{p,m}(c). \tag{3.68}$$

На основі вибору j_0 справедлива оцінка

$$\sum_{j=1}^{j_0} \left(\frac{j}{m} + \frac{1}{j^2} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{j_0} j + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^2} \le K. \tag{3.69}$$

Якщо в подвійній сумі $\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k} {}_j$ поміняємо порядок сумування, то для кожного k в сумі по j буде тільки один доданок. Тому $\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k} {}_j \left| \Delta B_{m,k}(t) \right| \le \sum_{k=0}^{m} \left| \Delta B_{m,k}(t) \right|$, а внаслідок (3.56)

$$m \int_0^{\frac{\pi}{m}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k} {}_j \left| \Delta B_{m,k}(t) \right| dt \le KF_{p,m}(c). \tag{3.70}$$

З (3.67)-(3.70) слідує

$$\left| \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{m,k}(t) \mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=m_1}^{m} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m) \right| \le KF_{p,m}(c). \tag{3.71}$$

А з (3.51) і (3.71) будемо мати

$$\left| \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{m,k}(t) \mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m) \right| \le KF_{p,m}(c). \tag{3.72}$$

Згідно означення $\alpha_l, \alpha_l', \alpha_l''$ і співвідношення (3.47) маємо для всіх $l = 1, 2, ..., \left[\frac{m}{3} \right]$.

$$\bar{E}_l(m) = 2\left(|c_l| + |c_{l+m} - c_{m-l}| \right) \Im_{m,k}(c) =: A_l(m). \tag{3.73}$$

Крім того, з оцінки (3.48) і аналогічної їй оцінки $A_l(m) \le KF_{p,m}(c)$ знайдемо, що

$$\sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m) \le KF_{p,m}(c), \quad \sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l} A_l(m) \le KF_{p,m}(c). \tag{3.74}$$

На основі співвідношень (3.72)-(3.74) одержуємо нерівність

$$\left|\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}A_l(m)\right|\le KF_{p,m}(c). \qquad (3.75)$$

Для інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{m}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}$, внаслідок (3.42) і(3.43), будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{m,k}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\sum_{l=m}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{l}\left|B_{m,l}(t)\right|dt, \qquad (3.76)$$

але для $l\ge m$ $B_{m,l}=c_{m+l}e^{imt}$, тому

$$\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{l}\left|B_{m,l}(t)\right|dt=\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{|c_{m+l}|}{l}dt=|c_{m+l}|\ln\frac{l+1}{l}.$$

Оскільки при $l\ge m$

$$\ln\frac{l+1}{l}=\frac{1}{l}+O\left(\frac{1}{l^2}\right)=\frac{1}{m+l}+O\left(\frac{m}{l^2}\right), \qquad (3.77)$$

рівномірно відносно m, то з (3.76) і (3.77) знайдемо

$$\left|\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}B_{m,k}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}A_l(m)-\sum_{l=2m+1}^{\infty}\frac{|c|}{l}\right|\le KF_{p,m}(c).$$

Для від’ємних t справедлива аналогічна нерівність. Теорема повністю доведена.

Висновки

У магістерській дисертації розглядалися тригонометричні ряди, а саме ряди Фур'є та степеневі ряди. Були дослідженні умови на коефіцієнти рядів Фур'є при виконані яких функція представлена даним рядом буде належати класу сумовних функцій. А також, був розглянутий клас функцій Гарді та встановлені умови на коефіцієнти степеневого ряду при виконанні яких функція представлена цим рядом належить класу Гарді.

Вдалося, також, встановити асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції представленої степеневим рядом на одиничному колі, для комплексних коефіцієнтів, що задовольняють умови Фоміна.

Результати даної роботи можуть використовуватися при одержанні інших результатів, що стосуються рядів Тейлора якими представлені функції з класів Гарді.

Список використаних джерел

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. Т.1. – М.: Мир, 1965. – 615с.
3. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 337с.
4. Теляковский С.А. Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов. – 1973. – 14, №3. – с.317-328.
5. Фомин Г.А. Об одном классе тригонометрических рядов //Мат. Заметки. – 1978. – 23, №2. – с.213-222.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 400с.
7. Патонсон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 481с.
8. Young W.H. On the Fourier series of bounded functions, Proc. London Math. Soc. (2), 12, №1 (1973), 41-70
9. Колмогоров А.Н. Sur l'ordre de grandeuer des coefficients de la serie de Fourier-Lebesque, Bull. Acad. polon. sci. (A), sci. math. (1923), 83-86.
10. Sidon S Hinreichende Begingungen für den Fourier – Charakter einer trigonometrischen Reihe, J. London Math. Soc., 14, №2(1939), 158-160.
11. Garrett J.W., Rees C.S., Stanojević Č.V. L^1 - convergence of Fourier series with coefficients of bounded variation // Proc. Amer. Math.Soc. – 1980. – 80. – 423-430.
12. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 630с.
13. Теляковский С.А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – 63, №3. – с.426-444.
14. Задерей П.В., Веремій М.А., Гаєвський М.В. Оцінка інтеграла від модуля степеневого ряду на одиничному колі //Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції м. Ворохта, 22-25 лютого 2017р. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу».

15. Теляковский С.А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1964. – 28, №6. – С.1209-1236.
16. Ефимов А.В. Оценка интеграла от модуля многочлена одиничной окружности // Успехи мат. наук. – 1980.-Т.15, №4. – С.215-218.
17. Теляковский С.А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – Т.109. – с. 65-97.
18. Задерей П.В., Веремій М.А., Гаєвський М.В. Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції заданої рядом Фур'є // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. - 2017. - Вип. 1. - С. 10-17.
19. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. Т.2. – М.: Мир, 1965. – 615с.

Особисті публікації

20. Микитюк Р.В. Про тейлорівські коефіцієнти функцій класу Гарді, Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018 р., Тези доповідей, Київ, с.25.