**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ______________

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ Клесов О.І.

«07» грудня 2018 р.

# Магістерська дисертація

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Дослідження асимптотичної поведінки деяких багатовимірних дифузій»**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-71мп
Попік Наталія Вікторівна ___________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пилипенко А.Ю. ___________

Рецензент:
с.н.с., д.ф.-м.н., зав. відділом тектонофізики
Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України
Арясова О.В. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2018 року

**Національний технічний університет України**
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансовва математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

________ Клесов О.І.

«30» жовтня 2018 р.

**ЗАВДАННЯ**
**на магістерську дисертацію студенту**

Попік Наталії Вікторівни

1. Тема дисертації «Дослідження асимптотичної поведінки деяких багатовимірних дифузій», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Пилипенко А.Ю., затверджені наказом по університету від «01» листопада 2018 р. № 4058-с

2. Термін подання студентом дисертації: 10.12.2018 р.

3. Об'єкт дослідження: стохастичні диференціальні рівняння

4. Предмет дослідження: знаходження точного порядку $r(t)$, зростання модуля розв′язків стохастичного диференціального рівняння в багатовимірному просторі

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись з теорією про асимптотичну поведінку розв′язків стохастичних диференціальних рівнянь в одновимірному просторі.

2) Знайти стохастичні диференціальні рівняння для радіусу $r(t)$ та кута $\varphi(t)$ двовимірної дифузії.

3) Дослідити поведінку $r(t)$ при $t \to \infty$.

4) Дослідити асимптотику зростання $r(t)$ при $t \to \infty$.

5) Перевірка умов стабілізації кута $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 12 слайдів

7. Дата видачі завдання: 30.10.2018

Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання магістерської дисертації | Термін виконання етапів магістерської дисертації | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1 | Ознайомлення з теорією про асимптотичну поведінку розв′язків стохастичних диференціальних рівнянь в одновимірному просторі. | 03.09.2018-28.09.2018 | виконано |
| 2 | Знаходження стохастичних диференціальних рівнянь для радіусу $r(t)$ та кута $\varphi(t)$ двовимірної дифузії. | 28.09.2018-12.10.2018 | виконано |
| 3 | Дослідження поведінки $r(t)$ при $t \to \infty$. | 12.10.2018-26.10.2018 | виконано |
| 4 | Дослідження асимптотики зростання $r(t)$ при $t \to \infty$. | 26.10.2018-05.11.2018 | виконано |
| 5 | Перевірка умов стабілізації кута $\varphi(t)$. | 05.11.2018-15.11.2018 | виконано |
| 6 | Підготовка магістерської дисертації. | 15.11.2018-10.12.2018 | виконано |

Студент Попік Н.В.

Науковий керівник дисертації Пилипенко А.Ю.

# Реферат

Магістерська дисертація: 27 сторінок, 12 посилань

В магістерській дисертації виконується дослідження асимптотичної поведінки розв′язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами поліноміального типу.

Метою роботи є знаходження точного порядку зростання норми розв′язку $r(t)$ та умов стабілізації полярного кута $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

**Ключові слова:** стохастичне диференціальне рівняння, точний порядок зростання розв′язків стохастичного диференціального рівняння.

# Abstract

Master's thesis: 27 pages, 12 links

In the master's dissertation, the asymptotic behavior of solutions of multidimensional stochastic differential equations with power type coefficients are investigated.
The purpose of the work is to find the exact order of the growth of the norm of the solution $r(t)$ and conditions of stabilization for the polar angle $\varphi(t)$ with $t \to \infty$.



**Key words:** stochastic differential equation, exact order of growth of solutions of stochastic differential equation.

# Зміст

# Вступ

Дослідження властивостей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь є важливою задачею теорії випадкових процесів. Особливе значення має вивчення асимптотичних властивостей розв′язків при $t \to \infty$. Такими задачами займались багато математиків, наприклад, Гіхман Й.І., Скороход А.В., Хасьмінський Р.З., Da Prato G., Zabczyk J. та багато інших. При цьому розрізняють два принципово різних режима. При одному система стабілізується при великих значеннях часу, а при другому збігається до нескінченності.

Задачі стабілізації, існування стаціонарного розподілу, швидкості збіжності до стаціонарного розподілу є добре вивченими, дивись наприклад: [1], [2], [3], [4].

Друга задача про дослідження асимптотичної поведінки розбіжних систем досліджена менше. Одним з перших результатів про знаходження умов, коли розв′язок стохастичних диференціальних рівнянь прямує до нескінченності майже напевно було одержано Гіхманом Й.І., Скороходом А.В. [5]. Вони довели, що розв′язки стохастичних диференціальних рівнянь вигляду:

$$dx(t) = a\big(x(t)\big)dt + b\big(x(t)\big)dw(t),$$

де $a, b$ - ліпшицеві функції, $b(x) \neq 0,\ x \in R$ або збіжні до нескінченності майже напевно, або майже напевно осцилюють. Тобто

Або $\mathrm{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = \infty\right) = 1,$ **(1)**

або $\mathrm{P}\left(\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} x(t) = +\infty\right) = \mathrm{P}\left(\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} x(t) = -\infty\right) = \mathrm{P}\left(\sup\limits_{t>0} x(t) = +\infty\right) = \mathrm{P}\left(\inf\limits_{t>0} x(t) = -\infty\right) = 1.$ **(2)**

Більш того, в [5] був знайдений явний критерій, коли виконується (1) або (2).

Припустимо тепер, що виконується (1). Природним питанням є вивчення швидкості зростання $x(t)$ при $t \to \infty$. Наприклад, цікаво дослідити, чи існує детермінована функція $f(t)$ така, що $x(t) \approx f(t)$ при $t \to \infty$. В монографії [4] наведено достатні умови, коли майже напевно маємо еквівалентність $x(t) \approx y(t), t \to \infty$, де $y(t)$ − розв′язок рівняння $\dfrac{dy(t)}{dt} = a\big(y(t)\big)$. Тобто випадковий шум має малий ефект на швидкість зростання $x(t)$.

Узагальнення цього результату було одержано Келлером Г. та ін. [6], а також у працях Булдигіна В.В., Клесова О.І., Штайнебаха Й.Г. [7]. У статті Булдигіна В.В., Тимошенко О.А. [8] розглядалась подібна задача для стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтом зсуву та дифузії, які залежать від часу, а саме було розглянуто рівняння

$$g(t,x)=\varphi(t)g(x),\ \sigma(t,x)=\theta(t)\sigma(x).$$

Припускалось, що $g$, $\varphi$ та $\sigma$ - неперервні додатні функції, $\theta$ - неперервна функція.

Також Тимошенко О.А. [9] розглядала задачу про дослідження стохастичних рівнянь із знакозмінним коефіцієнтом зсуву. Було знайдено умови, за яких рівняння

$$d\eta(t)=g(\eta(t))\varphi(t)dt+\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t),\ t\ge 0,\ \eta(0)\equiv b, b>0$$

має розв'язок такий, що $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1$ майже напевно на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}$,

де $\mu$ - розв′язок звичайного диференціального рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівнянню при $\sigma=0$.

Випадок, коли випадкові збурення породжуються самоподібними випадковими процесами розглядали Пилипенко А.Ю. , Проске Ф. [9].

В багатовимірному випадку задачі еквівалентності розв′язків стохастичного диференціального рівняння та звичайного диференціального рівняння майже не розглядались. Виключенням є роботи Новака І. Г., Станжицького О.М., Самойленка А.М. [11] та Булдигіна В.В., Коваля В.О. [12].

У відповідних роботах вивчались збурення багатовимірних лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$dx(t)=A(t)x(t)dt$$

та порівнювались із розв′язками стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy(t)=\left(A(t)y(t)+f(t,y(t))\right)dt+b(t,y(t))dw(t).$$

В роботи [11] були наведені умови, при яких якщо кожному розв′язку стохастичного диференціального рівняння $y(0,y_0)=y_0$ можна поставити у відповідність розв′язок звичайного диференціального рівняння $x(t,y_0)$ з початковими даними $x(0, y_0) = y_0$ такий, що $\lim_{t\to\infty} E\left|y(t, y_0) - x(t, y_0)\right|^2 = 0$ і майже напевно $\lim_{t\to\infty}\left|y(t, \mathrm{y}_0) - x(t, y_0)\right| = 0$.

В магістерській дисертації досліджено асимптотику розв′язку стохастичного диференціального рівняння в загальному вигляді. Було досліджено асимптотичну поведінку розв′язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами поліноміального типу. Було знайдено точний порядок зростання норми розв′язку $r(t)$ та достатні умови стабілізації полярного кута $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

# Розділ 1
## Теоретичні відомості

В даному розділі ми наведемо основні означення та теореми теорії стохастичних диференціальних рівнянь, а саме вінерівский процес, інтеграл та формула Іто, теорема про існування та єдиність розв′язків стохастичного диференціального рівняння, їх властивості, тощо.

### 1.1 Вінерівський процес

Означення1

Гауссівський випадковий процес $w(t), t \geq 0$ називається вінеровим процесом або броуніським рухом, якщо

1) $\mathrm{E}w(t) = 0,\ t \geq 0$

2) $\operatorname{cov}(w(s), w(t)) = \min(s,t), s,t \geq 0$

Властивості

1. $w(t), t \geq 0$ має неперервну по $t$ модифікацію

2. $w(t) \sim N(0,t)$

$w(0) = 0$ майже напевно $\mathrm{E}w(0) = 0,\ Dw(0) = t$

3.(Однорідність приростів)

Процес $w(t), t \geq 0$ є процесом з однорідними приростами тобто для будь-яких $t, s \geq 0$ випадкова величина $w(t+s) - w(t)$ має такий же розподіл, що й $w(s) - w(0) = w(s) \sim N(0,s)$

4.(Незалежність приростів)

Процес $w(t), t \geq 0$ має незалежні прирости, тобто для будь-яких $n \geq 0\ \ 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ випадкової величини $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), w(t_3) - w(t_2), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ незалежні в сукупності

5. $\forall t \geq 0\ \ \mathrm{P}(\exists w'(t)) = 0$

Вінерівський процес недиференційовний майже напевно.

## 1.2 Інтеграл Іто

Нехай $F_t$ - потік $\sigma-$алгебр, тобто

$\forall t_1 \le t_2 : F_{t_1} \subset F_{t_2}$

Вінерівський процес $w(t), t \ge 0$ узгоджений з потоком $F_t$ (або $w(t) \in F_t$ - вінеровим процесом ), якщо:

1) $\forall t \ge 0 : w(t)$ - вимірна відносно $F_t$

2) $\forall t \ge 0, s \ge 0$: прирости $(w(t+s) - w(t))$ незалежні від $F_t$.

Позначимо через $\Im_0$ клас процесів вигляду:

$\xi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 1_{t \in (t_k, t_{k+1}]}$, де

$\alpha_k$ обмежена випадкова величина, яка вимірна відносно $F_{t_k}$.

<u>Означення 2</u>

Нехай $\xi(t) \in \Im_0$, $\xi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 1_{t \in (t_k, t_{k+1}]}$. Інтегралом Іто $\int_0^T \xi(t) dw(t)$ називається випадкова величина $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left( w(t_{k+1}) - w(t_k) \right)$.

<u>Властивості</u>

1) Якщо $\xi_1(t), \xi_2(t) \in \Im_0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ то

$$\int_0^T \left( a_1 \xi_1(t) + a_2 \xi_2(t) \right) dw(t) = a_1 \int_0^T \xi_1(t) dw(t) + a_2 \int_0^T \xi_2(t) dw(t)$$

2) $\mathrm{E} \int_0^T \xi(t) dw(t) = 0$

3) $\mathrm{E} \left( \int_0^T \xi(s) dw(s) \right)^2 = \mathrm{E} \int_o^T \xi^2(s) ds$

4) $\mathrm{E} \left( \int_0^T \xi_1(t) dw(t) \int_0^T \xi_2(t) dw(t) \right) = \int_0^T \mathrm{E} \left( \xi_1(t) \cdot \xi_2(t) \right) dt = \mathrm{E} \int_0^T \xi_1(t) \cdot \xi_2(t) dt$

Ця властивість означає, що інтеграл Іто зберігає норму. Отже, за неперервністю інтеграл Іто можна продовжити за неперервністю на замикання $\Im_0$ в $L_2$. Це замикання позначають $\Im_2$. Продовження інтегралу позначатимемо $\int_0^T \xi(t) dw(t)$. Для нього 1)-4) також виконуються.

5) Нехай $\xi(t)\in\Im_2$, $0\le t\le T$. Тоді $\int_0^t \xi(s)dw(s)=\int_0^T \xi(s)1_{s\in[0,t]}dw(s)$

6) Локальність

Нехай $\xi(t),\eta(t)\in\Im_2$, $\xi(t)=\eta(t)$, $t\in[o,T]$, $w\in A$, де $A$- деяка вимірна множина. Тоді $\int_0^T \xi(t)dw(t)=\int_0^T \eta(t)dw(t)$ для майже всіх $w\in A$.

## 1.3 Формула Іто

<u>Означення 3</u>

$F_t$ - вимірний процес $\xi(t)$, $t\in[o,T]$ має стохастичний диференціал $d\xi(t)=a(t)dt+b(t)dw(t)$,

якщо

$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t a(s)ds+\int_0^t b(s)dw(s)$, $t\in[o,T]$ майже напевно та інтеграли є коректно визначеними.

**Теорема 1.1**

*Нехай* $\{w_j(t),t\in[0,T]\}$, $j=\overline{1,m}$ *незалежні вінерові процеси. Припустимо, що*

$$d\xi_i(t)=a_i(t)dt+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(t)dw_j(t),t\in[0,T],i=\overline{1,n}$$

*(тобто* $\xi_i(t)=\xi_i(0)+\int_0^t a_i(s)ds+\sum_j\int_0^t b_i(s)dw_j(s)$*)*

*Нехай* $f=f(t,x_1,\ldots,x_n)$ *неперервно диференційована по* $t$ *та двічі неперервно по всіх* $x$. *Нехай* $\xi(t)=(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$.

*Тоді*

$$df(t,\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))=f_t'(t,\xi(t))dt+\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}'(t,\xi(t))d\xi_i(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}''(t,\xi(t))\cdot\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(t)b_{jk}(t)dt.$$

## 1.4 Стохастичні диференціальні рівняння та їх властивості

Означення 4

Нехай $a = a(t,x)$, $b = b(t,x)$ - вимірні функції. $F_t$ - вимірний процес $\xi(t)$, $t \in [o,T]$ називається розв′язком стохастичного диференціального рівняння

$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))dw(t)$

з початковою умовою $\xi(0) = \xi_0$, якщо

$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t b(s,\xi(s))dw(s)$, $t \in [o,T]$ майже напевно,

де всі інтеграли коректно визначені.

**Теорема 1.2** (існування та єдиність розв′язку)

*Нехай* $\xi_0 \in L_2(\Omega, F_0, \mathrm{P})$. *Припустимо, що* $a(t,x)$ *та* $b(t,x)$ *задовільняють наступним умовам:*

*1) умову Ліпшиця за* $x$*, тобто*

$\exists L \ \ \forall t \in (0,T)$ *та* $\forall x_1, x_2 \in R$:

$|a(t,x_1) - a(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$

$|b(t,x_1) - b(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$

*2) умову лінійного зросту за* $x$:

$\exists c \ \ \forall t \in (0,T)$ *та* $\forall x$:

$|a(t,x)| \le c(1+|x|)$

$|b(t,x)| \le c(1+|x|)$

*Тоді існує розв'язок рівняння*

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t b(s,\xi(s))dw(s). \qquad \mathbf{(3)}$$

*При цьому* $\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]} \xi^2(t) < \infty$. *Більш того, якщо* $\eta(t), t \in [0,T]$ *розв'язок рівняння (1) такий, що* $\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]} \eta^2(t) < \infty$, *то* $\mathrm{P}(\xi(t) = \eta(t), t \in [0,T]) = 1$.

**Теорема 1.3** [5]

*Нехай* $a < x < b$, $\sigma(x) > 0$ *при* $x \in [a,b]$, *а* $u(x)$ *тотожньо не дорівнює константі* $\frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x) + a(x)u'(x) = 0$

*на відрізку* $[a,b]$.

*Тоді* $p_a(x,b)$ - *ймовірність того, що* $\xi_x(t)$ *потрапить в точку* $a$ *раніше, ніж в точку* $b$ *дорівнює* $p_a(x,b)=\dfrac{u(x)-u(b)}{u(a)-u(b)}$

**Теорема 1.4** [5]

*Нехай* $\xi(t)$ *є розв'язком рівняння*

$d\xi(t)=a(\xi(t))dt+\sigma(\xi(t))dw(t),$

*коефіцієнти якого задовільняють наступним умовам:*

*1)* $a(x)$ *та* $\sigma(x)$ *такі, що* $\mathrm{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=+\infty\right)=1$

*2)* $\exists$ *зростаюча двічі неперервно диференційована функція* $f(x)$, *для якої*

$f(x)\to+\infty$ *при* $x\to+\infty$, $lim\left[a(x)f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)\sigma^2(x)\right]=C>0$ *та*

$f'(x)\sigma(x)$ *обмежена.*

*Тоді* $\mathrm{P}\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(\xi(t))}{t}=C\right\}=1.$

<u>Наслідок 1</u>

Якщо коефіцієнти $a(x)$ та $\sigma(x)$ такі, що $\mathrm{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=+\infty\right)=1$ і виконується :

1) $x^{-\alpha}a(x)\to C$, $C=const$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sigma^2(x)}{x^{1+\alpha}}=0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sigma(x)}{x^{\alpha}}=0$

то $\mathrm{P}\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\xi(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}}=\left(C(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}=1\Leftrightarrow\ r(t)\sim\left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t\to\infty$ майже напевно.

**Теорема Леві**

*Нехай* $\{M(t),t\in[0,T]\}$ - *неперервний мартингал,* $M(0)=0$, *квадратична характеристика якого дорівнює* $t$ *майже напевно. Тоді* $\{M(t),t\in[0,T]\}$ *є вінеровим процесом.*

З теореми Леві маємо такий наслідок

**Теорема 1.6**

*Якщо* $\{w_1(t)\},\ldots,\{w_m(t)\}$ *- незалежні* $F_t$ *вінерові процеси* $\{\alpha_k(t)\}_{k=\overline{1,m}}$ , $F_t$*-потік* $\sigma-$*алгебр,* $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2(t)=1$*майже напевно,* $t\in[0,T]$*, то*

$B(t)=\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \alpha_k(s)dw_k(s)$*- вінеровий процес.*

# Розділ 2

## Основна частина

### §1 Постановка задачі

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{array}{l} dx_1(t) = ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt + br^{\beta}(t)dw_1(t) \\ dx_2(t) = ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt + br^{\beta}(t)dw_2(t) \end{array},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(4)}$$

де $x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t),\ x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t),\ r(t) = \sqrt{x_1^{\,2}(t) + x_2^{\,2}(t)}$ **(5)**

$x_1(0) = x_1,\ x_2(0) = x_2,\ \mathrm{X} = (x_1, x_2) \neq 0$

$w_1,\ w_2$ - незалежні вінерові процеси, задані на одному ймовірнісному просторі. Оскільки коефіцієнти рівняння задовольняють умову Ліпшиця скрізь, крім початку координат, то існує єдиний розв′язок (1), визначений до моменту потрапляння в 0.

Основними задачами, які розглядаються в дипломній роботі є наступні:

а) знаходження умов, що забезпечують не потрапляння розв′язку в 0 майже напевно $\mathrm{P}(\exists t \geq 0 : r(t) = 0) = 0$;

б) знаходження умов, що забезпечують $\mathrm{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = +\infty\right) = 1;$ **(6)**

в) знаходження порядку точного зростання $r(t)$ при $t \to \infty$, якщо виконується (6);

г) знаходження умов при яких кут стабілізується при $t \to \infty$ майже напевно, тобто умов, що забезпечують $\mathrm{P}\left(\exists \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\right) = 1.$

Основними результатами даної роботи є наступні теореми:

**Теорема 2.1**

*Якщо* $\alpha \leq 1,\ \alpha - 2\beta + 1 > 0$, *то* $\mathrm{P}\left(\inf\limits_{t\geq 0} r(t) > 0\right) = 1$ *та* $\mathrm{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = +\infty\right) = 1.$

**Теорема 2.2**

*Нехай* $0 \leq \beta < \alpha < 1$. *Тоді* $r(t) \sim \left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, t \to +\infty$ *майже напевно та* $\mathrm{P}\left(\exists \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\right) = 1.$

# §2 Дослідження радіусу

## 2.1 Стохастичне диференціальне рівняння для $r(t)$

Для розв′язку задачі спочатку знайдемо стохастичний диференціал процесу $r(t)=\sqrt{x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)}$

Застосуємо багатовимірну формулу Іто:

$$df(t,x_1,x_2)=f_t'(t,x_1,x_2)dt+f_{x_1}'(t,x_1,x_2)dx_1+f_{x_2}'(t,x_1,x_2)dx_2+\frac{1}{2}f_{x_1x_1}''(t,x_1,x_2)dx_1dx_1+$$

$$+\frac{1}{2}f_{x_2x_2}''(t,x_1,x_2)dx_2dx_2+\frac{1}{2}f_{x_1x_2}''(t,x_1,x_2)dx_1dx_2+\frac{1}{2}f_{x_2x_1}''(t,x_1,x_2)dx_2dx_1$$

Обчислимо частинні похідні

$$r_t'=0,\ r_{x_1}'=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}},\ r_{x_2}'=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}},\ r_{x_1x_1}''=\frac{x_2^2}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)^3}},\ r_{x_2x_2}''=\frac{x_1^2}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)^3}},$$

$$r_{x_1x_2}''=-\frac{x_1x_2}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)^3}}.$$

Тоді

$$dr(t)=\frac{x_1(t)}{\sqrt{x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)}}dx_1(t)+\frac{x_2(t)}{\sqrt{x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)}}dx_2(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{x_2^2(t)}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)\right)^3}}dx_1(t)dx_1(t)+\frac{1}{2}\frac{x_1^2(t)}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)\right)^3}}dx_2(t)dx_2(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x_1(t)x_2(t)}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}(t)+x_2^{\,2}(t)\right)^3}}\right)dx_1(t)dx_2(t)$$

Відмітимо, що

$$dx_1(t)dx_1(t)=\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)=$$

$$=b^2r^{2\beta}(t)dt.$$

$$dx_1(t)dx_2(t)=\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)=$$

$$=0.$$

$$dx_2(t)dx_2(t)=\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)=$$
$$=b^2r^{2\beta}(t)dt.$$

Звідси, стохастичний диференціал матиме вигляд

$$dr(t)=\frac{r(t)\cos\varphi(t)}{r(t)}\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)+\frac{r(t)\sin\varphi(t)}{r(t)}\cdot$$
$$\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{r^2(t)\sin^2\varphi(t)}{r^3(t)}b^2r^{2\beta}(t)dt+\frac{1}{2}\frac{r^2(t)\cos^2\varphi(t)}{r^3(t)}b^2r^{2\beta}(t)dt=$$
$$=ar^{\alpha}(t)\cos^2\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)\cos\varphi(t)dw_1(t)+$$
$$+ar^{\alpha}(t)\sin^2\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)\sin\varphi(t)dw_2(t)+$$
$$+\frac{1}{2}b^2r^{2\beta-1}(t)dt=\left(ar^{\alpha}(t)+\frac{1}{2}b^2r^{2\beta-1}(t)\right)dt+$$
$$+br^{\beta}(t)\cos\varphi(t)dw_1(t)+br^{\beta}(t)\sin\varphi(t)dw_2(t).$$

Отже,

$$dr(t)=\left(ar^{\alpha}(t)+\frac{1}{2}b^2r^{2\beta-1}(t)\right)dt+br^{\beta}(t)\cos\varphi(t)dw_1(t)+br^{\beta}(t)\sin\varphi(t)dw_2(t) \quad \textbf{(7)}$$

Нехай $B(t)=\int_0^t\cos\varphi(s)dw_1(s)+\int_0^t\sin\varphi(s)dw_2(s)$ **(8)**

Тоді за теоремою 1.6 $B(t)$ - вінеровий процес і маємо

$$dr(t)=\left(ar^{\alpha}(t)+\frac{1}{2}b^2r^{2\beta-1}(t)\right)dt+br^{\beta}(t)dB(t). \quad \textbf{(9)}$$

## 2.2 Доведення теореми 2.1

Для вивчення поведінки $r(t)$ при $t\to\infty$ скористаємось Теоремою 1.3. Знайдемо шкалу $s(x)$ для розв'язку стохастичного диференціального рівняння (7)

$$s(x)=\int_1^x\exp\left\{-\int_1^y\frac{2a(z)}{\sigma^2(z)}dz\right\}dy, \quad \textbf{(10)}$$

де $a(z)=az^{\alpha}+\frac{1}{2}b^2z^{2\beta-1}$, $\sigma(z)=bz^{\beta}$.

Звідси $s(x)=\int\limits_1^x \exp\left\{-\int\limits_1^y \frac{2az^{\alpha}+b^2z^{2\beta-1}}{b^2z^{2\beta}}dz\right\}dy$.

Знайдемо спочатку розв′язок інтегралу

$$\int\limits_1^y \frac{2az^{\alpha}+b^2z^{2\beta-1}}{b^2z^{2\beta}}dz=\int\limits_1^y \frac{2a}{b^2}z^{\alpha-2\beta}dz+\int\limits_1^y \frac{1}{z}dz=\frac{2a}{b^2}\int\limits_1^y z^{\alpha-2\beta}dz+\ln|z|\Big|_1^y=\frac{2a}{b^2}\int\limits_1^y z^{\alpha-2\beta}dz+\ln|y|.$$

Обчислимо перший доданок інтегралу:

$$\frac{2a}{b^2}\int\limits_1^y z^{\alpha-2\beta}dz=\frac{2a}{b^2}\begin{cases}\dfrac{z^{\alpha-2\beta+1}}{\alpha-2\beta+1}\Big|_1^y, \alpha-2\beta\neq-1\\ \ln|z|\Big|_1^y, \alpha-2\beta=-1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2a}{b^2}\dfrac{y^{\alpha-2\beta+1}}{\alpha-2\beta+1}-\dfrac{1}{\alpha-2\beta+1}, \alpha-2\beta\neq-1\\ \dfrac{2a}{b^2}\ln|y|, \alpha-2\beta=-1\end{cases}.$$

Розглянемо два випадки:

1) $\alpha-2\beta=-1$

$$\int\limits_1^y \frac{2az^{\alpha}+b^2z^{2\beta-1}}{b^2z^{2\beta}}dz=\frac{2a}{b^2}\ln|y|+\ln|y|$$

Тоді

$$s(x)=\int\limits_1^x \exp\left\{-\frac{2a}{b^2}\ln|y|-\ln|y|\right\}dy=\int\limits_1^x e^{-\ln|y|\left(\frac{2a}{b^2}+1\right)}dy=\int\limits_1^x y^{-\left(\frac{2a}{b^2}+1\right)}dy=$$

$$=\frac{y^{-\frac{2a}{b^2}}}{-\frac{2a}{b^2}}\Big|_1^x=\frac{x^{-\frac{2a}{b^2}}}{-\frac{2a}{b^2}}-\frac{1}{-\frac{2a}{b^2}}=-\frac{b^2}{2a}\left(x^{-\frac{2a}{b^2}}-1\right).$$

Оскільки $a>0$, то $\lim\limits_{x\to0^+}s(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}s(x)=0$. Отже за теоремою 4 (див теор. відомості) $P\left(\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=+\infty\right)=1$ та $P\left(\inf\limits_{t\geq0}r(t)>0\right)=1$.

2) $\alpha-2\beta>-1$

$$\int\limits_1^y \frac{2az^{\alpha}+b^2z^{2\beta-1}}{b^2z^{2\beta}}dz=\frac{2a}{b^2}\frac{y^{\alpha-2\beta+1}}{\alpha-2\beta+1}-\frac{1}{\alpha-2\beta+1}+\ln|y|.$$

Тоді

$$s(x)=\int\limits_1^x \exp\left\{-\frac{2a}{b^2}\frac{y^{\alpha-2\beta+1}}{\alpha-2\beta+1}+\frac{1}{\alpha-2\beta+1}-\ln|y|\right\}dy=\int\limits_1^x \frac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}\left(1-y^{\alpha-2\beta+1}\right)}}{y}dy.$$

Знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}s(x)=\lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x \frac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}\left(1-y^{\alpha-2\beta+1}\right)}}{y}dy=\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}\left(1-y^{\alpha-2\beta+1}\right)}}{y}dy.$$

Позначимо $C = \alpha - 2\beta + 1$.

Тоді $\dfrac{e^{\frac{2a}{b^2 C}\left(1-y^C\right)}}{y} \le e^{\frac{2a}{b^2 C}\left(1-y^C\right)}$, $y \ge 1$.

Оскільки $C > 0$ за припущенням теореми 2.1, то $\lim\limits_{y\to\infty} y e^{\frac{2a}{b^2 C}\left(1-y^C\right)} = 0$. Тому

знайдеться $y_0 > 0$ таке, що $\dfrac{e^{\frac{2a}{b^2 C}\left(1-y^C\right)}}{y} \le \dfrac{1}{y^2}$, $y \ge y_0$.

Добре відомо, що $\int\limits_{y_0}^{\infty} \dfrac{dy}{y^2} < \infty$. Отже $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{2a}{b^2 C}\left(1-y^C\right)}}{y} dy < \infty.$

Таким чином, ми довели, що $\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = C_1 < \infty$ у випадку, коли $\alpha - 2\beta + 1 > 0$ **(11)**

Дослідимо поведінку $s(x)$ при $x \to 0^+$.

Маємо $\dfrac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}\left(1-y^{\alpha-2\beta+1}\right)}}{y} \sim \dfrac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}}}{y}$, $y \to 0^+$.

Оскільки $\int\limits_{1}^{0} \dfrac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}}}{y} dy$ розбіжний, то за ознакою порівняння інтегралів

$\int\limits_{1}^{0} \dfrac{e^{\frac{2a}{b^2(\alpha-2\beta+1)}\left(1-y^{\alpha-2\beta+1}\right)}}{y} dy$ теж розбіжний.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = -\infty$. **(12)**

З (11) та (12) випливає, що $P\left(\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = +\infty\right) = 1$ та $P\left(\inf\limits_{t\ge 0} r(t) > 0\right) = 1$.

Теорему 2.1 доведено.

### 2.3 Дослідження асимптотики зростання $r(t)$ при $t \to \infty$

В цьому розділі ми доведемо формулу $P\left(r(t) \sim \left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, t \to +\infty\right) = 1.$ **(13)**

Доведення.

Для доведення використаємо наслідок 1 з теореми 1.4.

Перевіримо чи виконуються умови наслідку:

1) $x^{-\alpha} a(x) \to C$, $C = const$

$a(x) = ax^{\alpha} + \dfrac{1}{2} b^2 x^{2\beta-1}$

Тоді $x^{-\alpha}\left(ax^{\alpha} + \dfrac{1}{2} b^2 x^{2\beta-1}\right) = a + \dfrac{1}{2} b^2 x^{2\beta-\alpha-1}$

$x^{2\beta-\alpha-1} \to 0$, $x \to \infty$, оскільки $\begin{cases} \alpha < 1 \\ 2\beta - \alpha - 1 < 0 \end{cases}$

Отже, $b^2 x^{2\beta-\alpha-1} \to 0$, $x \to \infty$.

Маємо $x^{-\alpha} a(x) = a = const.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sigma^2(x)}{x^{1+\alpha}} = 0$

$\sigma(x) = bx^{\beta}$

$\dfrac{\sigma^2(x)}{x^{1+\alpha}} = \dfrac{b^2 x^{2\beta}}{x^{1+\alpha}} = b^2 x^{2\beta-\alpha-1}$

Оскільки $\alpha - 2\beta + 1 > 0$, тоді $x^{2\beta-\alpha-1} \to 0$, $x \to \infty$.

Отже, $b^2 x^{2\beta-\alpha-1} \to 0$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sigma(x)}{x^{\alpha}} = 0$

$\dfrac{\sigma(x)}{x^{\alpha}} = \dfrac{bx^{\beta}}{x^{\alpha}} = bx^{\beta-\alpha}$

Оскільки $\alpha < 1$, $2\beta < \alpha + 1$, $2\beta < 2\alpha$

Тоді $\beta < \alpha < 1$, отже $x^{\beta-\alpha} \to 0$, $x \to \infty$.

Маємо $bx^{\beta-\alpha} \to 0$, $x \to \infty$.

Оскільки виконуються умови наслідку 1, отже $r(t) \sim \left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t \to \infty$ майже напевно і формулу (13) доведено.

# §3 Дослідження поведінки $\varphi(t)$

## 3.1 Стохастичне диференціальне рівняння для $\varphi(t)$

Для дослідження поведінки $\varphi(t)$ при $t\to\infty$ спочатку знайдемо стохастичний диференціал процесу $\varphi(t)=arctg\dfrac{x_2(t)}{x_1(t)}$.

Застосуємо багатовимірну формулу Іто:

$$df(t,x_1,x_2)=f_t'(t,x_1,x_2)dt+f_{x_1}'(t,x_1,x_2)dx_1+f_{x_2}'(t,x_1,x_2)dx_2+\frac{1}{2}f_{x_1x_1}''(t,x_1,x_2)dx_1dx_1+$$
$$+\frac{1}{2}f_{x_2x_2}''(t,x_1,x_2)dx_2dx_2+\frac{1}{2}f_{x_1x_2}''(t,x_1,x_2)dx_1dx_2+\frac{1}{2}f_{x_2x_1}''(t,x_1,x_2)dx_2dx_1$$

Для $\varphi(t)$ знайдемо частинні похідні

$$\varphi_t'=0,\ \varphi_{x_1}'(t)=-\frac{x_2(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)},\ \varphi_{x_2}'(t)=\frac{x_1(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)},$$
$$\varphi_{x_1x_1}''(t)=\frac{2x_1(t)x_2(t)}{\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)^2},\ \varphi_{x_2x_2}''(t)=-\frac{2x_1(t)x_2(t)}{\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)^2}.$$

Тоді за формулою Іто

$$dr(t)=-\frac{x_2(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)}dx_1(t)+\frac{x_1(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)}dx_2(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{2x_1(t)x_2(t)}{\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)^2}dx_1(t)dx_1(t)+\frac{1}{2}\left(-\frac{2x_1(t)x_2(t)}{\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)^2}\right)dx_2(t)dx_2(t)$$

Відмітимо, що

$$dx_1(t)dx_1(t)=\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)=$$
$$=b^2r^{2\beta}(t)dt$$
$$dx_2(t)dx_2(t)=\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)\cdot\left(ar^{\alpha}(t)\sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)=$$
$$=b^2r^{2\beta}(t)dt$$

Тоді

$$d\varphi(t)=-\frac{r(t)sin\varphi(t)}{r^2(t)}\left(ar^{\alpha}(t)cos\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_1(t)\right)+$$

$$+\frac{r(t)cos\varphi(t)}{r^2(t)}\left(ar^{\alpha}(t)sin\varphi(t)dt+br^{\beta}(t)dw_2(t)\right)+\frac{r^2(t)sin\varphi(t)cos\varphi(t)}{r^4(t)}b^2r^{2\beta}(t)dt+$$

$$+\left(-\frac{r^2(t)sin\varphi(t)cos\varphi(t)}{r^4(t)}\right)b^2r^{2\beta}(t)dt=-\frac{ar^{\alpha}(t)sin\varphi(t)cos\varphi(t)}{r(t)}dt+$$

$$+\frac{ar^{\alpha}(t)sin\varphi(t)cos\varphi(t)}{r(t)}dt-\frac{br^{\beta}(t)sin\varphi(t)}{r(t)}dw_1(t)+\frac{br^{\beta}(t)cos\varphi(t)}{r(t)}dw_2(t)=$$

$$=\frac{br^{\beta}(t)cos\varphi(t)}{r(t)}dw_2(t)-\frac{br^{\beta}(t)sin\varphi(t)}{r(t)}dw_1(t)=$$

$$=\frac{br^{\beta}(t)}{r(t)}\left(cos\varphi(t)dw_2(t)-sin\varphi(t)dw_1(t)\right)=br^{\beta-1}(t)\left(cos\varphi(t)dw_2(t)-sin\varphi(t)dw_1(t)\right).$$

Отже,

$$d\varphi(t)=br^{\beta-1}(t)\left(cos\varphi(t)dw_2(t)-sin\varphi(t)dw_1(t)\right).$$

Нехай

$$\tilde{B}(t)=\int_0^t\cos\varphi(s)dw_2(s)+\int_0^t\sin\varphi(s)dw_1(s)$$

Тоді за теоремою Леві $\tilde{B}(t)$ - вінеровий процес

Таким чином

$$d\varphi(t)=br^{\beta-1}(t)d\tilde{B}(t).$$

## 3.2 Стабілізація $\varphi(t)$

Метою цього підрозділу є доведення другої частини теореми 2.2, тобто перевірка існування границі $\varphi(t)$ при $t\to\infty$.

Ця границя майже напевно існує тоді й тільки тоді, коли майже напевно збігається інтеграл $\int_1^{\infty}\left(r^{\beta-1}(t)\right)^2dt<\infty$.

Далі будемо припускати, що виконуються умови теореми 1, тобто $\beta<\alpha<1$

З §2 п. 2.3 ми знайшли, що $r(t)\sim\left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t\to\infty$.

Доведемо, що $\int_1^\infty \left(r^{\beta-1}(t)\right)^2 dt < \infty$

Інтеграли $\int_1^\infty \left(r^{\beta-1}(t)\right)^2 dt$ та $\int_1^\infty \left(\left(\left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\beta-1}\right)^2 dt$ збіжні та розбіжні одночасно.

$$\int_1^\infty \left(\left(\left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\beta-1}\right)^2 dt = \int_1^\infty \left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{2(\beta-1)}{1-\alpha}} dt.$$

Цей інтеграл збіжний, коли $\frac{2(\beta-1)}{1-\alpha} < -1$, тобто $2\beta - 2 < -1 + \alpha \Leftrightarrow 2\beta < \alpha + 1.$

Оскільки $\beta < \alpha < 1$ маємо $2\beta < 2\alpha = \alpha + \alpha < \alpha + 1$.

Отже, $2\beta < \alpha + 1$ і значить інтеграл $\int_1^\infty \left(a(1-\alpha)t\right)^{\frac{2(\beta-1)}{1-\alpha}} dt$ збіжний. Звідси випливає збіжність майже напевно $\int_1^\infty \left(r^{\beta-1}(t)\right)^2 dt$. Маємо $\mathrm{P}\left(\exists \lim_{t\to\infty} \varphi(t)\right) = 1.$

Теорему 2.2 доведено.

# Висновки

В роботі виконувалось  дослідження асимптотичної поведінки розв′язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами поліноміального типу.

Було  знайдено точний порядок зростання норми розв′язку $r(t)$ та  достатні умови стабілізації полярного кута $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

## Список використаних джерел


[1] *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – Наука, 1969.

[2] *Meyn, Sean P., and Richard L. Tweedie.* Markov chains and stochastic stability. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] *Kulik, A.* (2017). Ergodic Behavior of Markov Processes: With Applications to Limit Theorems (Vol. 67). Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

[4] *Da Prato, G., Zabczyk, J., & Zabczyk, J.* (1996). Ergodicity for infinite dimensional systems (Vol. 229). Cambridge University Press.

[5] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наук. думка, 1968. —354 с.

[6] *Keller G., Kersting G., Rosler U.* On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Z. Wahrsch. Geb. — 1984. — **68**. — P. 163—184.

[7] *Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.* PRV властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2004. — № 72. —С. 63—78.

[8] *Булдигін В.В., Тимошенко О.А.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008. — № 6. — С. 27—32.

[9]*Тимошенко О.А.* Точний порядок зростання розвʹязків стохастичних диференціальних рівнянь із знакозмінним коефіцієнтом зсуву// Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2009. — № 8. — С. 145—151.

[10] *Pilipenko A., Proske F.* On perturbations of an ode with non-lipschitz coeficients by a small self-similar noise // Statistics&Probability Letters. -2018 – 32 – C. 62-73

[11] *Новак, І. Г., А. М. Самойленко, and О. М. Станжицький.* "Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь." *Український математичний журнал* // Т. 63 – 2011 - №8 – С.1103-1127.

[12] *Булдигін В.В., Коваль В.О.* "Про асимптотичну властивість розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь в $R^d$." *Український математичний журнал* // Т. 52 – 2000- №9 – С. 1166-1175.