

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

# МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали  
VII Міжнародної  
науково-практичної конференції  
*Київ, 27—28 грудня 2018 року*

Київ  
2019

**УДК 51(082)**

**МЗ4**

**Матеріали** VII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2018 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2019. — 280 с. — Укр., рос., англ., білорус.

**Материалы** VII Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 29—30 декабря 2018 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2019. — 280 с. — Укр., рус., англ., белорус.

**Proceedings** of Seventh International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2018. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu.V., 2019. 280 pp.

**ISBN 978-617-7721-12-2**

**Оргкомітет** VII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Україна) (голова)  
Проф. Н. О. Вірченко (Україна)  
Проф. О. В. Іванов (Україна)  
Доц. О. О. Диховичний (Україна)  
Доц. В. О. Гайдей (Україна) (секретар)

**Оргкомитет** VII Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»:

Проф. О. И. Клесов (Украина) (председатель)  
Проф. Н. А. Вирченко (Украина)  
Проф. А. В. Иванов (Украина)  
Доц. А. А. Дыховичный (Украина)  
Доц. В. А. Гайдей (Украина) (секретарь)

УДК 51(082)

*Матеріали подано в авторській редакції*

**ISBN 978-617-7721-12-2**

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019



# ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

# Average method for the stochastic non-autonomous random oscillating systems of fourth order

O. V. Borysenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

olga\_borisenko@ukr.net

The asymptotic behavior of a non-autonomous oscillating system described by a differential equation of the fourth order with small non-linear periodical external perturbations of “white noise”, non-centered and centered “Poisson noise” types is studied. Each term of external perturbations has own order of a small parameter  $\varepsilon$ .

The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of the small parameter in each term of external perturbations is studied. The non-resonance and resonance cases are considered.

**Key words:** asymptotic behavior, non-autonomous oscillating system, stochastic differential equation, non-resonance case, resonance, periodical disturbances.

Studying of oscillation processes has a great importance in different areas of mechanics, physics, technics, and economics. As examples of the oscillation systems we can consider vibration of constructions and mechanisms, electromagnetic oscillations in radio-technology and optics, auto-oscillation in control systems, sound and ultra-sound vibrations. It worth to mention that oscillatory models in finance are studied in Chen and Islam (2005) and in Ye and Huang (2008).

The non-autonomous oscillating systems of the fours order under the action of “white noise”, centered and non-centered Poisson type noises perturbations are studied in O. D. Borysenko and O. V. Borysenko (2016, 2017). It is considered the behavior, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , of the oscillating system driven by stochastic differential equation

$$\begin{aligned} & x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \\ & = \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(s)) + f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(s)) \end{aligned} \quad (1)$$

with non-random initial conditions

$$x(0) = x_0^{(1)}, x'(0) = x_0^{(2)}, x''(0) = x_0^{(3)}, x'''(0) = x_0^{(4)},$$

where  $\varepsilon > 0$  is a small parameter,  $f_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), x''(t), x'''(t))$  is a random function such that

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(s, \mathbf{x}(s)) ds &= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i(\mu_i s, \mathbf{x}(s)) dw_i(s) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} s, \mathbf{x}(s), z) \tilde{v}_1(ds, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} s, \mathbf{x}(s), z) \tilde{v}_2(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = \overline{0, m+2}; f_i, i = \overline{0, m+2}$  are non-random functions periodic on  $\mu_i t, i = \overline{0, m+2}$  with period  $2\pi$ ;  $w_i(t), i = \overline{1, m}$  are independent one-dimensional Wiener processes;

$$\tilde{\nu}_i(dt, dy) = \nu_i(dt, dy) - \Pi_i(dy)dt, E\nu_i(dt, dy) = \Pi_i(dy)dt, i = \overline{1, 2};$$

$\nu_i(dt, dy), i = \overline{1, 2}$  are the independent Poisson measures independent on  $w_i(t), i = \overline{1, m}; \Pi_i(A), i = \overline{1, 2}$  are a finite measures on Borel sets in  $\mathbb{R}$ .

It is studied the asymptotic behavior of the oscillating system (1), as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , in the case when there exist stable harmonic oscillations at the system under condition  $\varepsilon = 0$ . Under this condition corresponding characteristic equation has a form:

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

The following cases were considered previously:

1) (Borysenko & Borysenko, 2016)

$$b_1 > 0, b_3 > 0, b_1b_2 > b_3, b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1}), b_1^2b_4 = b_3(b_1b_2 - b_3).$$

In this case the characteristic equation has roots

$$\lambda_1 = -\eta_1, \lambda_2 = -\eta_2, \lambda_{3,4} = \pm i\omega,$$

where

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left( b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left( b_2 - \frac{b_3}{b_1} \right)} \right), \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

2) (Borysenko & Borysenko, 2017)

$$b_1 > 0, b_3 > 0, b_4 > \frac{b_1b_3}{4}, b_1^2b_4 = b_3(b_1b_2 - b_3).$$

In this case the characteristic equation has roots

$$\lambda_1 = -\eta + i\nu, \lambda_2 = -\eta - i\nu, \lambda_{3,4} = \pm i\omega,$$

where

$$\eta = \frac{b_1}{2}, \nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1(4b_4 - b_1b_3)}{b_3}}, \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, i = \overline{1, 3}, \\ dy_4(t) &= \left[ -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}(t)) + \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, \mathbf{y}(t)) + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, \mathbf{y}(t), z) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, \mathbf{y}(t)) dw_i(t) + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, \mathbf{y}(t), z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, \mathbf{y}(t), z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_4(t))$ ,  $\mathbf{b} = (b_4, b_3, b_2, b_1)$ ,  $y_i(0) = x_0^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}(t))$  — is an inner product of vectors  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{y}(t)$ .

We will study the following case:

$$b_1 = 0, b_3 = 0, b_2 > 0, b_4 > 0, b_2^2 > 4b_4.$$

Characteristic equation has roots

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,$$

where

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left( b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_4} \right), \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left( b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_4} \right).$$

If  $\varepsilon = 0$  then the equation (1) has general solution in the form

$$x(t) = A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \sin \omega_1 t + A_{21} \cos \omega_2 t + A_{22} \sin \omega_2 t.$$

Let us denote

$$A(t) = (A_{11}(t), A_{12}(t), A_{21}(t), A_{22}(t)), \Phi(t) = (\cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos \omega_2 t, \sin \omega_2 t),$$

and let us consider the following representation of the solution  $\mathbf{y}(t)$  to the system (2):

$$y_i(t) = \left( A(t) \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \Phi(t) \right), i = \overline{1, 4}.$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to

$$(A_{11}(t), A_{12}(t), A_{21}(t), A_{22}(t))$$

and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$dA(t) = \Theta(\omega_1 t, \omega_2 t) dH(t),$$

where

$$\begin{aligned} \Theta(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left( \frac{\sin \phi_1}{\omega_1}, -\frac{\cos \phi_1}{\omega_1}, -\frac{\sin \phi_2}{\omega_2}, \frac{\cos \phi_2}{\omega_2} \right), \\ dH(t) &= \left[ \varepsilon^{k_0} \tilde{f}_0(\mu_0 t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t, z) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \tilde{f}_i(\mu_i t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t, z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t, z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned}$$

where  $\tilde{f}_i(\mu_i t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t)$ ,  $i = \overline{0, m}$  are obtained from  $f_i(\mu_i t, \mathbf{y}(t))$ ,  $i = \overline{0, m}$  and  $\tilde{f}_i(\mu_i t, A(t), \omega_1 t, \omega_2 t, z)$ ,  $i = m+1, m+2$  are obtained from  $f_i(\mu_i t, \mathbf{y}(t), z)$ ,  $i = m+1, m+2$  using (3).

**Theorem.** Let  $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2, t \in [0, t_0], k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, k_{m+2})$ .

Let us suppose, that functions  $f_j, j = \overline{0, m+2}$  bounded and satisfy Lipschitz condition on  $y_i, i = \overline{1, 4}$ . If given below matrix  $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$  is non-negative definite, then:

1. Let  $\mu_j = \frac{p_j^{(1)}}{q_j^{(1)}}\omega_1 = \frac{p_j^{(2)}}{q_j^{(2)}}\omega_2$  for all  $j = \overline{0, m+2}$ , where  $p_j^{(i)}$  and  $q_j^{(i)}$  are

some relatively prime integers,  $i = 1, 2, j = \overline{0, m+2}$ . If  $k_0 = 2k_i = k_{m+2}, i = 1, m+1$ , then the stochastic process  $A_\varepsilon(t) = A(t / \varepsilon^k)$  weakly converges, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to the stochastic process

$$\bar{A}(t) = (\bar{A}_{11}(t), \bar{A}_{12}(t), \bar{A}_{21}(t), \bar{A}_{22}(t))$$

which is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \bar{A}(0) = (A_{11}(0), A_{12}(0), A_{21}(0), A_{22}(0)), \quad (4)$$

where

$$\bar{\alpha}(A) = \frac{1}{8\pi^3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{\sigma_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(\psi, A, \phi_1, \phi_2) \Theta(\phi_1, \phi_2) e^{-i(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\psi)} d\phi_1 d\phi_2 d\psi + \\ + \sum_{\sigma_{m+2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{m+2}(\psi, A, \phi_1, \phi_2, z) \Theta(\phi_1, \phi_2) e^{-i(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\psi)} \Pi_2(dz) d\phi_1 d\phi_2 d\psi \end{array} \right],$$

$$\bar{\sigma}^2(A) = \bar{B}(A) = \frac{1}{8\pi^3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_j^2(\psi, A, \phi_1, \phi_2) \Theta^T(\phi_1, \phi_2) \Theta(\phi_1, \phi_2) e^{-i(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\psi)} d\phi_1 d\phi_2 d\psi + \\ + \sum_{\sigma_{m+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{m+1}^2(\psi, A, \phi_1, \phi_2, z) \Theta^T(\phi_1, \phi_2) \Theta(\phi_1, \phi_2) e^{-i(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\psi)} \Pi_1(dz) d\phi_1 d\phi_2 d\psi \end{array} \right],$$

where  $\Sigma_{\sigma_j}$  means summation over all negative, positive and equal zero integers

$n_1, n_2, n_3$  such, that

$$n_1 p_j^{(2)} q_j^{(1)} + n_2 p_j^{(1)} q_j^{(2)} + n_3 p_j^{(1)} p_j^{(2)} = 0, j = \overline{0, m+2};$$

$$A = (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22});$$

$$\hat{f}_j(\psi, A, \phi_1, \phi_2) = \tilde{f}_j(\psi, 0, 0, A, \phi_1, \phi_2), j = \overline{0, m},$$

$$\hat{f}_i(\psi, A, \phi_1, \phi_2, z) = \tilde{f}_i(\psi, 0, 0, A, \phi_1, \phi_2, z), i = m+1, m+2;$$

$\Theta^T(\phi_1, \phi_2)$  is the vector transpose to the vector  $\Theta(\phi_1, \phi_2)$ ;

$$\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = \overline{1, 4}),$$

$\bar{w}_i(t), i = \overline{1, 4}$  are independent one-dimensional Wiener processes.

2. Let  $k_0 = 2k_i = k_{m+2}, i = \overline{1, m+1}$ . If  $\mu_j = p_j^{(1)}\omega_1 / q_j^{(1)}$  for some  $j = \overline{0, m+2}$ , where  $p_j^{(1)}, q_j^{(1)}$  are some relatively prime integers, and

$\mu_j \neq p_j^{(2)\omega_2} / q_j^{(2)}$  for any relatively prime integers  $p_j^{(2)}$  and  $q_j^{(2)}$ , then for such  $j$  we must put  $n_2 = 0$  in sum  $\Sigma_{\sigma_j}$  and take summation over all  $n_1$  and  $n_3$  such, that

$$n_1 q_j^{(1)} + n_3 p_j^{(1)} = 0.$$

If  $\mu_j = p_j^{(2)\omega_2} / q_j^{(2)}$  for some  $j = \overline{0, m+2}$ , where  $p_j^{(2)}, q_j^{(2)}$  are some relatively prime integers, and  $\mu_j \neq p_j^{(1)\omega_1} / q_j^{(1)}$  for any relatively prime integers  $p_j^{(1)}$  and  $q_j^{(1)}$ , then for such  $j$  we must put  $n_1 = 0$  in sum  $\Sigma_{\sigma_j}$  and take summation overall  $n_2$  and  $n_3$  such, that

$$n_2 q_j^{(2)} + n_3 p_j^{(2)} = 0.$$

3. Let  $k_0 = 2k_i = k_{m+2}, i = 1, m+1$ . If  $\mu_j \neq p_j^{(i)\omega_i} / q_j^{(i)}, i = 1, 2$  for some  $j = \overline{0, m+2}$ , where  $p_j^{(i)}, q_j^{(i)}, i = 1, 2$  are any relatively prime integers, and  $\omega_1 = p\omega / q$  for some relatively prime integers  $p$  and  $q$ , then for such  $j$  we must put  $n_3 = 0$  in sum  $\Sigma_{\sigma_j}$  and take summation over all  $n_1$  and  $n_2$  such, that

$$n_1 q + n_2 p = 0.$$

4. Let  $k_0 = 2k_i = k_{m+2}, i = 1, m+1$ . If  $\mu_j \neq p_j^{(i)\omega_i} / q_j^{(i)}, i = 1, 2$  for some  $j = \overline{0, m+2}$ , where  $p_j^{(i)}, q_j^{(i)}, i = 1, 2$  are any relatively prime integers, and  $\omega_1 \neq p\omega_2 / q$  for any relatively prime integers  $p$  and  $q$ , then for such  $j$  we must put  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  in sum  $\Sigma_{\sigma_j}$ .

5. If  $k < k_0$  then in the averaging equation (4) we must put  $\tilde{f}_0 \equiv 0$ ; if  $k < 2k_i$  for some  $i = 1, m$ , then in the averaging equation (4) we must put  $\tilde{f}_i \equiv 0$  for such  $i$ ; if  $k < 2k_{m+1}$  then in the averaging equation (4) we must put  $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$ ; if  $k < k_{m+2}$  then in the averaging equation (4) we must put  $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$ .

## References

- Borysenko, O. D., & Borysenko, O. V. (2016). Non-autonomous fourth order random oscillating systems under the action of external periodical disturbances. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, (4), 9–14.
- Borysenko, O. D., & Borysenko, O. V. (2017). Investigation of non-autonomous fourth order random oscillating systems in the case of complex roots of characteristic equation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, (3), 9–12.
- Chen, P., & Islam, S. M. (2005). *Optimal control models in finance*. Boston, MA: Springer.
- Ye, C. & Huang, J. P. (2008). Non-classical oscillator model for persistent fluctuations in stock markets. *Physica A*, 387(5–6), 1255–1263.



# A note on some identities involving Mersenne numbers

T. Goy, R. Zatorsky

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine  
tarasgoy@yahoo.com, romazatorsky@gmail.com

In this paper, we derive new families of the Mersenne identities with binomial coefficients. These identities can be used to develop new identities of Mersenne numbers.

**Keywords:** Mersenne sequence, Mersenne number, binomial coefficient.

**1. Mersenne numbers.** A *Mersenne number*, denoted by  $M_n$ , is a number of the form

$$M_n = 2^n - 1, \quad (1)$$

where  $n$  is a nonnegative number. The *Mersenne sequence*  $\{M_n\}_{n \geq 0}$  can be defined recursively as follows

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 1, \quad M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}, \quad (2)$$

for  $n \geq 2$  (sequence A000930 in On-Line Encyclopedia of Integer Sequences; (Sloane, 2018)). The first fifteen terms of the Mersenne sequence are

0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, ...

Note that there are Mersenne numbers prime and not prime and the search for Mersenne primes is an active field in number theory and computer science. It is now known that for  $M_n$  to be prime,  $n$  must be a prime  $p$ , though not all  $M_p$  are prime.

Many authors studied the Mersenne sequence and its generalizations; see, for example, Catarino, Campos and Vasco (2016), Daşdemir (2019), Goy (2018), Ochalik and Włoch (2018), Zatorsky and Goy (2016) and the references given therein.

For instance, Catarino et al. (2016) established some identities for the common factors of Mersenne numbers and Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, and presented some results with matrices involving Mersenne numbers such as the generating matrix, tridiagonal matrices and circulant matrices. Goy (2018) obtained new identities for Mersenne numbers with binomial coefficients. Ochalik and Włoch (2018) studied generalized Mersenne numbers, their properties, matrix generators and some combinatorial interpretations. Daşdemir (2019) extended the Mersenne numbers to their terms with negative subscripts and derived many identities for new forms of these numbers, including Gelin-Cesaro identity, d'Ocagne's identity, and some sum formulas.

For more information on classical and alternative approaches to the Mersenne numbers see (Jaroma, 2007).

**2. Binomial Mersenne identities.** In this section, we derived some identities involving Mersenne numbers and binomial coefficients.

**Proposition 1.** For all integers  $n \geq 2$  and  $k \geq 1$ , the following formulas hold:

$$M_{kn-1} = (-2)^{k-1} M_{n-1}^k + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i-1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i, \quad (3)$$

$$M_{kn} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i} M_n^{k-i} M_{n-1}^i, \quad (4)$$

where  $\binom{k}{i}$  is the binomial coefficient.

**Proof.** We will prove (3) and (4) using induction on  $k$ . Clearly, these formulas work when  $k = 1$ . Now suppose they are true for  $k = s$ , we show that they are true for  $k = s + 1$ . Let us first prove (3). Using formula (Ochalik & Włoch, 2018)

$$M_{p+q} = M_{p+1} M_q - 2M_p M_{q-1} \quad (5)$$

and well-known binomial identity

$$\binom{s}{i} + \binom{s}{i-1} = \binom{s+1}{i}, \quad (6)$$

we obtain

$$\begin{aligned} M_{(s+1)n-1} &= M_{(sn-1)+n} = M_{sn} M_n - 2M_{sn-1} M_{n-1} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i} M_{n-1}^i \right) \cdot M_n \\ &\quad - 2 \left( (-2)^{s-1} M_{n-1}^s + \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i-1} M_n^{s-i} M_{n-1}^i \right) \cdot M_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &\quad + (-2)^s M_{n-1}^{s+1} - 2 \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i-1} M_n^{s-i} M_{n-1}^{i+1} \\ &= M_s M_n^{s+1} + \sum_{i=1}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &\quad + (-2)^s M_{n-1}^{s+1} - 2 \sum_{i=1}^{s-1} \binom{s}{i-1} (-2)^{i-1} M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &= (-2)^s M_{n-1}^{s+1} + M_s M_n^{s+1} + \sum_{i=1}^{s-1} \left( \binom{s}{i} + \binom{s}{i-1} \right) (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \end{aligned}$$

$$= (-2)^s M_{n-1}^{s+1} + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s+1}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i.$$

Therefore, by induction, Formula (3) works for all positive integers  $s$ .  
Now, we prove Formula (4). Using (2)–(6), we obtain

$$\begin{aligned} M_{(s+1)n} &= M_{(sn-1)+(n+1)} = M_{sn} M_{n+1} - 2M_{sn-1} M_n \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i} M_{n-1}^i \cdot (3M_n - 2M_{n-1}) \\ &\quad - 2 \left( (-2)^{s-1} M_{n-1}^s + \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i-1} M_n^{s-i} M_{n-1}^i \right) \cdot M_n \\ &= 3 \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i - 2 \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i} M_{n-1}^{i+1} \\ &\quad + (-2)^s M_{n-1}^s M_n - 2 \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i-1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &= 3 \binom{s}{s-1} (-2)^{s-1} M_1 M_n^2 M_{n-1}^{s-1} + 3 \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^s \binom{s}{i-1} (-2)^{i-1} M_{s-i+1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^{i+1} + (-2)^s M_{n-1}^s M_n \\ &\quad - 2 \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i-1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &= 3s(-2)^{s-1} M_n^2 M_{n-1}^{s-1} + \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s}{i} (-2)^i M_{s-i+1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^s \binom{s}{i-1} (-2)^i M_{s-i+1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i + (-2)^s M_{n-1}^s M_n \\ &= M_{s+1} M_n^{s+1} + \sum_{i=1}^s \left( \binom{s}{i} + \binom{s}{i-1} \right) (-2)^i M_{s-i+1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i \\ &= \sum_{i=0}^s \binom{s+1}{i} (-2)^i M_{s-i+1} M_n^{s-i+1} M_{n-1}^i. \end{aligned}$$

Therefore, by induction, Formula (4) is true for all positive integers  $s$ .

**Proposition 3.** For all integers  $n \geq 2$ ,  $k \geq 0$ , and  $0 < r < k$ , the following formula hold:

$$M_{kn+r} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i+r} M_n^{k-i} M_{n-1}^i. \quad (7)$$

**Proof.** We use the induction on  $r$ . By (2)–(4), if  $r = 1$ , then we have

$$\begin{aligned} M_{kn+1} &= 2M_{kn} - 3M_{kn-1} \\ &= 2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &\quad - 3(-2)^{k-1} M_{n-1}^k - 3 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i-1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &= 2 \binom{k}{k-1} (-2)^{k-1} M_1 M_n M_{n-1}^{k-1} + 2 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &\quad - 3(-2)^{k-1} M_{n-1}^k - 3 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i-1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &= (-2)^k k M_n M_{n-1}^{k-1} - 3(-2)^{k-1} M_{n-1}^k \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (-2)^i (2M_{k-i} - 3M_{k-1-i}) M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i+1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i. \end{aligned} \quad (7)$$

Suppose that Formula (7) is true for  $r = s$  and proved it for  $r = s + 1$ . Using (5) for  $p = kn$ ,  $q = s + 1$ , and (7), we then obtain

$$\begin{aligned} M_{kn+(s+1)} &= M_{kn+1} M_{s+1} - 2M_{kn} M_s \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i+1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \cdot M_{s+1} - 2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \cdot M_s \\ &= (-2)^k M_1 M_{n-1}^k M_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-2)^i (M_{s+1} M_{k-i+1} - 2M_s M_{k-i}) M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &= (-2)^k M_{n-1}^k M_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-2)^i M_{s+k-i+1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-2)^i M_{k-i+s+1} M_n^{k-i} M_{n-1}^i. \end{aligned}$$

So, by induction, the statement is true for all integers  $n \geq 2$ ,  $k \geq 0$ , and  $0 < r < k$ .

### References

- Bravo, J. J., & Gómez, C. A. (2016). Mersenne  $k$ -Fibonacci numbers. *Glasnik matematički*, 51(2), 307–319.
- Catarino, P., Campos, H., & Vasco, P. (2016). On the Mersenne sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 46, 37–53.
- Daşdemir, A. (2019). Mersene, Jacobstahl, and Jacobstahl-Lucas numbers with negative subscripts. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 88(1), 142–156
- Goy, T. (2018). On new identities for Mersenne numbers. *Applied Mathematics E-Notes*, 18, 100–105.
- Jaroma, J. H., & Reddy, K. N. (2007). Classical and alternative approaches to the Mersenne and Fermat numbers. *American Mathematical Monthly*, 114(8), 677–687.
- Ochalik, P., & Włoch, A. (2018). On generalized Mersenne numbers, their interpretations and matrix generators. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A.*, 72(1), 69–76.
- Sloane, N. J. A. (2018). The On-line Encyclopedia of integer sequences. <http://oeis.org>.
- Zatorsky, R., & Goy, T. (2016). Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences. *Journal of Integer Sequences*, 19, Article 16.2.2.

# Bifurcation analysis for a triple inverted pendulum

V. V. Kovalchuk

*State University infrastructure and technologies, Kyiv, Ukraine*

[kovaltchukvv@ukr.net](mailto:kovaltchukvv@ukr.net)

This paper will cover the classical bifurcations in phase space of the triple inverted pendulum with a follower force in terms of equilibria and periodic orbits. The qualitative changes in the behavior of the system when changing the essential parameters of the pendulum are investigated. The mechanism of loss of stability of the vertical position of equilibrium is investigated. A stable limit cycle for a pendulum is shown.

**Keywords:** inverted pendulum, bifurcation analysis, divergent bifurcation, Hopf bifurcation, follower force.

In scientific fields as diverse as mechanics, electronics, chemistry, theoretical of ecology etc., there is the application of what is referred to as bifurcation analysis. This method is a way to gain deep insights into the fundamental properties of dynamical systems, explore the general behavior of the corresponding decision as a whole, and also determine the range of parameters by which the system behaves stably (Tsumoto, Ueta, Yoshinaga, & Kawakami, 2012).

Bifurcation theory refers to the study of qualitative changes to the state of a system as a parameter is varied. It can be applied to steady state systems, or to dynamical systems and can be understood best at the level of a mathematical model. Continuous dynamical systems that involve differential equations mostly contain parameters. Applied interest are the cases, when a minor change in the system parameter can have a significant impact on the solution. By controlling the parameters, to avoid bifurcations, you can construct robust dynamic systems against unpredictable variations of parameters (Fujimoto & Aihara, 2015). The main question of this paper is: How to predict qualitative changes in system's behavior (bifurcations) occurring at equilibrium points?

Examples of bifurcation phenomena are the divergence loss of stability, the transition from a stable equilibrium state to oscillatory motion or from the regular fluctuations to a chaotic state. An appropriate analysis of the behavior of the system is considered on the example of an inverted trilinear pendulum, the leading end of which is the tracking force  $\vec{P}$ . The lower end  $O$  is attached to a viscoelastic hinge. The upper end of the pendulum is attached to a horizontal spring of stiffness  $c$ .

We denote by  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$  and  $\varphi_3 = \varphi_3(t)$  the deviation of the lower, middle and upper rods, respectively, from the upright position at time  $t \in \mathbb{R}$ . This are generalized coordinates of the investigated mechanical system. The parameters of the lower link ( $m_1$  — the mass of point  $A_1$ ,  $l_1$  — the length of the rod  $OA_1$ ,  $c_1$  — the stiffness of the lower spring) is taken as the base and we use to de-dimension all other parameters. Dimensionless values will be denoted by an overbar ( $\bar{c}$ ,  $\bar{P}$  etc.).

Euler-Lagrange equations of second kind can be determined, one for each generalized coordinate (i.e. degree of freedom of the system):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

where  $T$  — is the kinetic energy of the investigated pendulum in generalized coordinates.

In matrix form and using the definition  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  this yields:

$$M(\varphi) \cdot \ddot{\phi} = F(\varphi, \dot{\phi}). \quad (1)$$

We believe that with the passage of time, the triple pendulum carries a plane-parallel motion and undergoes small oscillations about the vertical axis. In this situation the non-linear equations (1) of motion of the system can be linearized relative to

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0.$$

The determination of the state of stability of the pendulum is based upon a careful examination of the eigenvalues associated with the matrix of system of linearized differential equations. Critical cases of Lyapunov's theory of stability will be obtained if one eigenvalue is zero or a pair of eigenvalues is purely imaginary. In the first case, the mechanism of loss of stability of the position of the equilibrium of the pendulum is determined by a divergent bifurcation (Bautin, 1984), when two other positions of equilibrium are born (or annihilated).

Another bifurcation that may occur in the investigated system is the so-called Andronov-Hopf bifurcation, which in the majority of cases is simply called the Hopf bifurcation. In order for this bifurcation to occur, two eigenvalues must form a purely imaginary complex pair (then, when the real parts of those eigenvalues are equal to zero). In this case, a periodic solution, a limit cycle, is born that inherits the stability properties that the equilibrium state had before the occurrence of the bifurcation. If a stable point becomes unstable, while a stable boundary cycle is born, then the Hopf bifurcation is called supercritical. When an unstable limit cycle is born, while the state of equilibrium becomes stable, they we have Hopf's subcritical bifurcation. One can calculate the so-called Lyapunov exponent to determine the type of Hopf bifurcation (Bautin, 1984).

Fig. 1 shows a stable limit cycle for a three-link inverted pendulum, when the orientations parameter of the follower force  $k = 0,25$  and dimensionless essential system parameters are  $\bar{c} = 0,4, \bar{P} = 1,1$  (the representative point of the system belongs to the domain  $D(4,2)$ ). In the transition of the representative point of the system from the domain  $D(6,0)$  of asymptotic stability to domain  $D(4,2)$  on the boundary  $P_f(\bar{c})$  (*critical flutter* load), the vertical position of the equilibrium of the pendulum loses its stability. Loss of stability in this case is due to the Hopf bifurcation — the birth of a stable limit cycle. Here  $D(6,0)$  is the domain of the plane of the essen-

tial parameters of the pendulum, where all 6 eigenvalues have a negative real part. In the domain  $D(4,2)$  we have  $\text{Re } \lambda_s < 0$  ( $s=1,2,3,4$ ) and  $\text{Re } \lambda_{5,6} > 0$ .

The starting point  $S$  on the Fig. 1 corresponds to the initial conditions  $[t_0 = 0, \varphi_{10} = 0.1, \dot{\varphi}_{10} = 0.15, \varphi_{20} = 0.2, \dot{\varphi}_{20} = 0, \varphi_{30} = 0, 2, \dot{\varphi}_{30} = 0]$ .

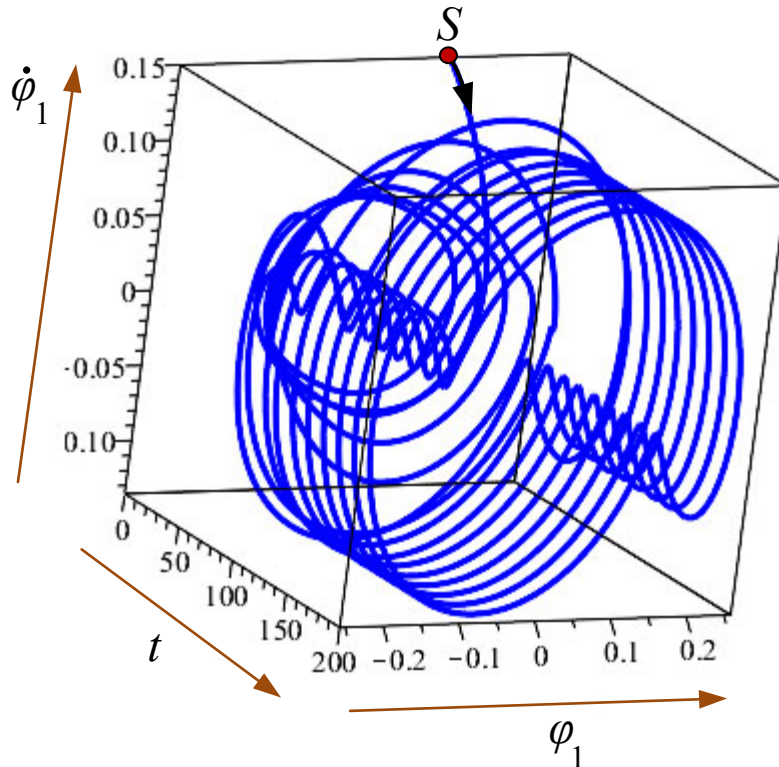


Fig. 1. The phase trajectory in three dimensions when  $(\bar{c}, \bar{P}) \in D(4,2)$  (a stable limit cycle)

In the depicted example, the limit cycle has become the stable attractor of the system, while the equilibrium state is unstable.

Take a dimensionless parameter  $\bar{c} = 0,7$  and  $\bar{P} = 1,4$ . The eigenvalues of the matrix of the linearized model of the system (1) are:

$$\left[ \lambda_{1,2} = -2.37 \pm 1.28 i, \quad \lambda_{3,4} = -0.02 \pm 0.73 i, \quad \lambda_5 = -1.00, \quad \lambda_6 = 0.09 \right].$$

Since  $\text{Re } \lambda_6 > 0$  the representative point of the system is located in the domain  $D(5,1)$ . Therefore, the vertical equilibrium state of pendulum is unstable. Accordingly, the asymptotic-stability boundary  $\bar{P} = P_f$  (*critical divergence load*) we have phenomenon “loss of stability due to divergent bifurcation”. The graphs  $\varphi_1(t)$  and



$\varphi_3(t)$  in Fig. 2 show that in the phase space of the pendulum we have a steady state of equilibrium, which is not located at the origin of coordinates.

The behavior of the solutions of equation (1) near the asymptotic stability boundaries in the first approximation determines the mechanisms whereby the pendulum loses stability in equilibrium positions.

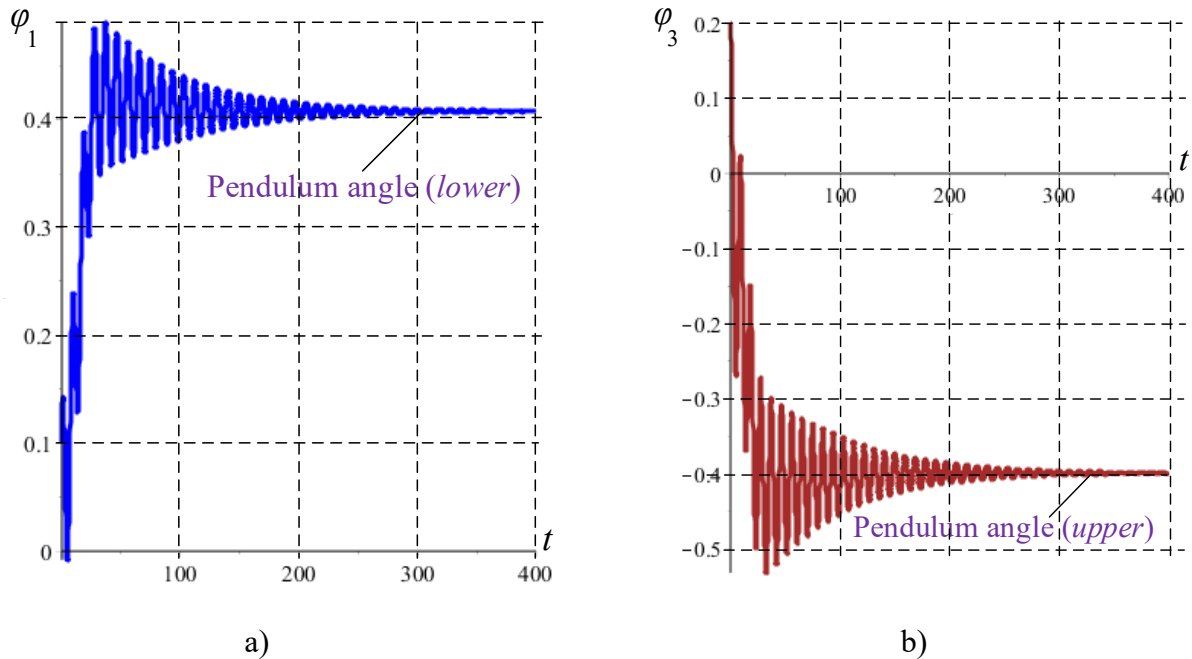


Fig. 2. The phase trajectory on the plane when  $(\bar{c}, \bar{P}) \in D(5, 1)$

A bifurcation analysis performed for an inverted triangular pendulum with tracking force has shown that minor changes in the essential parameters of the pendulum can lead to significant qualitative changes in the phase space of this pendulum. Investigation of bifurcations, depending on the parameters of the system, allows us to analyze the mechanism of loss of stability of the vertical equilibrium position. In addition, bifurcation analysis allows us to determine the range of parameters over which the system behaves in a stable manner, the general behavior of the solution in the large and transition mechanisms of dynamic responses.

### References

- Bautin, N. N. (1984). *Behavior of dynamical systems near boundary of stability*. Moscow: Nauka.
- Fujimoto, K., & Aihara, K. (2015). Bifurcation avoidance control of stable periodic points using the maximum local Lyapunov exponent. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 6(1), 2–14. <http://dx.doi.org/10.1587/nolta.6.2>
- Tsumoto, K., Ueta, T., Yoshinaga, T., & Kawakami, H. (2012). Bifurcation analyses of nonlinear dynamical systems: From theory to numerical computations. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 3(4), 458–476. <http://dx.doi.org/10.1587/nolta.3.458>

# The solution of one contact problem of elasticity theory

I. F. Kurbyko

*Vladimir state university, Vladimir, Russia*

levizov@rambler.ru

The analytical method of the solution of one singular integro-differential equation, which is a mathematical model of a contact task of the elasticity theory about the transfer of pressure from a stamp with curvilinear plan on linearly deformable base strengthened by a layer, is presented. The results are presented in the form of analytical expressions allowing to find the distribution of contact pressure along the area of contact considering the frictional force and the function describing a stamp base profile.

**Keywords:** singular integro-differential equation, contact pressure, task's eigenfunctions, elastic layer.

The solution of the integral equations describing the mechanics of contact interaction of elastic bodies draws an attention of researchers of the modern elasticity theory (see, in particular, works of authors Dzhokadze, Haribegashvili and Shavlakadze (2018), Mkhitar-yan and Melik-Adamayan (2016), Semyonov (2007) and the bibliography which is available there). The relevance of this theory is defined by its numerous applications to the assessment of the wear of engineering constructions; to the practical usage of composites, bedded structures and designs from them. In this regard there are tasks of development of computational methods of contact stresses on demarcations of elastic layers.

The present work studies the contact problem about pressing of a rigid stamp in the elastic base strengthened by a layer that can correspond to a physical model of contact interaction of screw couple in the presence of a covering is studied (Kurbyko & Marusov, 1994). The problem is described by the system of the singular integro-differential equations containing three unknown components of a stresses' tensor:  $p(x, t)$  — contact pressure under a stamp;  $q(x, t)$  — rated stress;  $\tau(x, t)$  — tangential stress. As well as in case of an axisymmetric contact task, it is supposed that these functions depend on polar coordinate  $x$ , and frictional force and a wear cause their time dependence  $t \geq 0$ . The method of Fourier transforms allows to allocate one solving equation of rather unknown function from this system:

$$H[p(x, t)] = -k_1 V \int_0^t \Gamma[k_2 p(x, t)] dt + \Gamma[f(x)]. \quad (1)$$

Integro-differential operators  $H$  and  $\Gamma$  are described in the monograph (Pelekh, Maksimuk, & Korovaychuk, 1988). There  $p(x, t)$  is required contact pressure;  $V$  — moving speed of a stamp;  $f(x)$  — the function describing a stamp base profile;  $|x| < a$ , where  $a$  — contact spot radius;  $k_2$  — friction coefficient. The mass  $W$  of remote material at a wear is considered to proportional work of frictional force with a constant of proportionality  $k_1$ . In the present work the technique of the solution of the equation (1) is given, the numerical analysis of dependence of  $W$  and  $p(x, t)$  from time  $t$ , thickness of a layer  $2h$ , and elastic characteristics  $(E, \nu)$  and  $(E_1, \nu_1)$  is carried

out. Here  $E$  and  $E_1$  — Young's modulus;  $\nu$  and  $\nu_1$  — Poisson's coefficient, respectively, layer and base. Calculations are executed within the Kirchhoff-Love classical theory. The following designations are used:

$$\alpha = \frac{\pi E_1}{2(1 - \nu_1^2)}; D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^3)}; \Lambda' = \frac{5}{3} hG',$$

where  $G'$  — covering material rigidity modulus. As a matter of convenience, the quantities are entered:

$$x' = \frac{x}{a}; t' = t \cdot \frac{\alpha k_1 k_2 V}{a}; f'(x') = f(x) / a; p(x, t) = p(x', t') \cdot \alpha.$$

The solution of the equation (1) (contact pressure) is presented in the form:

$$p(x, t) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x') \cdot \exp(-\alpha_{2k} t'); t \geq 0; |x'| < 1 \quad (2)$$

The unknown eigenfunctions of a problem  $\varphi_{2k}(x')$  corresponding to eigenvalues  $\alpha_{2k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) are in a type of a row on orthogonal polynomials of Chebyshev of the second kind  $u_{2m}(x)$ :

$$\varphi_{2k}(x') = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k d_k (1 - (x')^2)^{7/2} u_{2m}(x) \quad (3)$$

Then we come to an algebraic generalized task to eigenvalues which eigen vectors are  $(a_m^k)_{m=0,1,\dots}$ . Coefficients  $d_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) are derived from a linear equation system which right parts depend on function  $f(x)$ . In the assumption that the covering works only for a bend, that is within the Kirchhoff-Love classical theory, from (1) at  $G' \rightarrow \infty$  we receive the equation:

$$\int_{-1}^1 p(\varsigma, 0) \frac{d\varsigma}{\varsigma - x} = -\frac{D}{\alpha a^3} \int_{-1}^1 \frac{d^4 f(\varsigma)}{d\varsigma^4} \cdot \frac{d\varsigma}{\varsigma - x} - \frac{d}{dx} f(x). \quad (4)$$

It follows from the equation (4) that calculation of a covering for the classical theory is justified if the base of a stamp is described by a polynomial, not below the fourth degree of  $x$ , otherwise, elastic characteristics ( $E, \nu$ ) and ( $E_1, \nu_1$ ) won't affect the value of contact pressure in (4). Therefore, the calculations below are carried out for a case

$f(x) = \mu \frac{x^4}{a^3}$ . According to formulas (2)–(3) expressions for calculation of contact pressure are received:

$$p'(x', t') = d_0(1 - x'^2)^{7/2}(a_0^0 + 4x'^2 - 1) \exp(-\alpha_0 t') + \\ + d_1(1 - x'^2)^{7/2}(a_0^1 + 1 - 4x'^2) \exp(-\alpha_2 t') + \dots \quad (5)$$

For the mass of worn-out material of a covering the formula is received:

$$W = \alpha a^2 \frac{\pi}{2} \left[ d_0 a_0^0 \frac{1}{\alpha_0} (1 - \exp(-\alpha_0 t')) + d_1 a_0^1 \frac{1}{\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t')) + \dots \right] \quad (6)$$

The numerical analysis of calculations using formula (5) on the example of data ( $h / a = 0,1; E / E_1 = 0,5; \nu_1 = \nu_2; \mu = 1$ ) showed that eventually the contact pressure  $p(0, t) = \alpha p'(0; t')$  decreases. It corresponds to positive eigenvalues in formula (5). In particular  $p'(0; 0) = 3,8547; p'(0; 1) = 2,1234$ . At  $t' = 10$  the function  $p'(x'; t')$  in the center of a spot of contact is almost equal to zero. For ( $h / a = 0,01; E / E_1 = 0,5$ ) it is received  $p'_{\max} = p'(0; 0) = 3,8810$ . So, with the decrease of thickness of a covering the contact pressure increases. Eventually the mass of worn-out material of the covering (6) grows. Removing from the center of the area of contact, the contact pressure decreases as shown by the calculations:

$$p'(0, 05; 1) = 2,0285; p'(0, 10; 1) = 1,7523; p'(0, 15; 1) = 1,3201;$$

$$p'(0, 20; 1) = 0,7714; p'(0, 25; 1) = 0,1564$$

Except the thickness of a layer and elastic characteristics of a layer and the base, the value of contact pressure and the time of the wear-out of material of a covering are influenced significantly by the function  $f(x)$ , describing a stamp base profile (more precisely — by its derivatives). For the arbitrary function  $f(x)$  the eigenfunctions of the problem  $\varphi_0(x'), \varphi_2(x'), \dots$  are defined to constant factors  $d_0, d_2, \dots$  respectively. At the fixed function  $f(x)$  the formula (5) gives the unique solution of the problem. If the function  $f(x)$  represents a polynomial, then the parameters necessary for creation of a system (from which  $d_0, d_2, \dots$  are derived) are calculated using the easiest way. The frictional force also affects on contact pressure through time parameter

$$t' = t \cdot \frac{\alpha k_1 k_2 V}{a}.$$

On the other hand, calculations without the frictional force become considerably simpler.

### References

- Dzhokadze, O. M., Haribegashvili, S. S., & Shavlakadze, N. N. (2018) Approximate and exact solutions of the singular integro-differential equation, bound to the contact problem of elasticity theory. *Applied Mathematics and Mechanics*, 82(1), 114–124.
- Kurbyko, I. F., & Marusov, V. A. (1994) Physical Model of Carving Contact with the Interlayer. In *Collection of Scientific Works “The Automated machine systems and robotization of production”* (pp. 112–119). Tula: TGTU.
- Mkhitarian, S. M., & Melik-Adamayan, P. E. (2016) On a class of contact problems of elasticity theory, solvable by the integral equation’s method. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, 69(4), 3–19.
- Pelesh, B. L., Maksimuk, A. V., & Korovaychuk, I. M. (1988) Contact tasks for layered elements of constructions and bodies with coverings. Kyiv: Naukova Dumka.
- Semyonov, D. L. (2007) Solutions of elasticity theory problems used for assessment of contact durability and rigidity of car details. *Works of Odessa National Polytechnical University*, (1), 13–18.

# Machine learning algorithm for star-sky segments identification

O. V. Semeniv

*Space Research Institute NASU & SSAU Kyiv, Ukraine*

*Svitla Systems, Inc., Kyiv, Ukraine*

*Thermo Fisher Scientific, Inc., Santa Clara, USA*

[oleg.semeniv@gmail.com](mailto:oleg.semeniv@gmail.com)

In the article the problem of star-sky segments identification based on star sensor images processing is conducted. A description of the star-sky segments rough identification algorithm for the celestial sphere sectors estimation with star sensor data is presented. In the article the preliminary processing of the collected images that permits to identify the value of the registered star objects is described. The algorithm of information systematization to improve the recognition speed is produced. It is based on dividing the processed image into four parts, evaluating the largest registered star object, turning the image counterclockwise around its center, so that the largest star object will be in the first part, determining the angle of rotation. After the data pre-processing, the count of registered star objects is calculated in each part of the image. The collected information is used to build support vector machine model.

**Key words:** star sensor, stars sky, identification, classification.

Star sensors are sensitive instruments for accurate determination of the spacecraft position in space [3, 4, 10]. The newest devices allow to carry out the three-axis satellites orientation by recognizing the observed part of the star-sky [1, 3–5, 7–11, 13]. The orientation is determined based on measurements, such as detected stars, their position and brightness (the part of the star-sky is identified) and the correlation of the received data with the sensor position on the apparatus. The latest generation of star self-contained astro-orientation sensors based on CCD detectors is part of most modern navigation systems for spacecraft. The further development of star sensors is aimed at the use of sensitive sensors with active pixels, which are significantly energy-efficient, cheap and compact. Independent sensors of astro-orientation are mainly equipped with two operational modes [3, 4]. The first one is designed for cases of complete absence of a priori information about the location of the device in space. In such cases, based on the image processing and comparison with the basic navigational star-sky catalogue and the so-called device “zero” position on a spacecraft platform orientation estimation is carried out. After determining the initial position, the star sensor is switched to the “tracking” mode, that is, the identification of the star-sky segments and the analysis of the magnitude of the changes from the previous observation. The main purpose of the star-sky recognition is to establish links between the data of the sensor observation and the navigational star catalog. Most of the existing star-sky recognition approaches use direct search algorithms [1, 3, 7–9, 11, 12] in the on-board database. However, the decrease in the onboard memory usage and the increase of the identification performance without accuracy loss, leads to further search in the development of star-sky identification algorithms.

In the research, the SKYMAP Master Star Catalog [12], created at NASA's Goddard Space Flight Center, was used to support identification model. The main

version of the catalog contains information of star objects that correspond to ranges of visual brightness from 9 magnitudes or more. For computer simulation of star-sky, was modified main catalogue with filtration algorithm, considering the minimum sensor sensitivity threshold.

The star-sky segments identification problem was considered as a problem of pattern recognition [1, 3, 5, 8, 10]. The number of “star markers” in the sensor field of view and the stars brightness (magnitude) are key for achieving high recognition accuracy. The guiding stars must be uniformly distributed over the entire map of the star-sky. In general, star segments recognition on the obtained images is carried out by highlighting the features combinations of each segment (position of stars and star magnitude).

The star-sky was divided into several segments  $j = 1, \dots, J$  to simulate a star sensor image. For each segment was constructed the set of images  $i = 1, \dots, I$  with considering possible rotations around the center. Let sensor with a field of view  $8^\circ \cdot 8^\circ$  measure by CCD matrix and write into board memory the information of the illuminated pixels and the registered intensity. The pixel address is stored in units of the photodetector plane coordinate system. The image can be represented by a two-dimensional matrix of  $1002 \times 1004$  elements. After that, the search of intensity mass centers of the stars is provided, and then the definition of the stars-image area on the photodetector plane is calculated. After that, the registered star object magnitude is determined. For recognition performance increase the resulting image rotation is performed according to the next scheme:

- a) the image is divided into four parts;
- b) the largest registered star object is estimated;
- c) the image is rotated counterclockwise around its center, so that the largest star object is in the first part (in case if there are several identical objects of the same size in different parts of the image, the rotation is made based on size and parts order);
- d) the angle of rotation  $\gamma$ ,  $\gamma = \{90, 180, 270\}$  is determined (the rotational displacement of the image is formed).

After that, the registered star objects are counted in each part of the image. Thus, four vectors are formed. Each of the vectors consists of four components

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij}^1 \\ \mathbf{x}_{ij}^2 \\ \mathbf{x}_{ij}^3 \\ \mathbf{x}_{ij}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ij}^{11} & x_{ij}^{12} & x_{ij}^{13} & x_{ij}^{14} \\ x_{ij}^{21} & x_{ij}^{22} & x_{ij}^{23} & x_{ij}^{24} \\ x_{ij}^{31} & x_{ij}^{32} & x_{ij}^{33} & x_{ij}^{34} \\ x_{ij}^{41} & x_{ij}^{42} & x_{ij}^{43} & x_{ij}^{44} \end{pmatrix},$$

where  $x_{ij}^{11}, x_{ij}^{21}, x_{ij}^{31}, x_{ij}^{41}$  — the number of objects occupying a  $s_1 \leq 2$  pixels (for simplicity further magnitude);  $x_{ij}^{12}, x_{ij}^{22}, x_{ij}^{32}, x_{ij}^{42}$  — number of objects with star magnitude  $2 < s_2 \leq 4$ ;  $x_{ij}^{13}, x_{ij}^{23}, x_{ij}^{33}, x_{ij}^{43}$  — number of objects with magnitude  $4 < s_3 \leq 6$ ;  $x_{ij}^{14}, x_{ij}^{24}, x_{ij}^{34}, x_{ij}^{44}$  — number of objects with a magnitude  $s_4 > 6$ . If objects are absent

the value is set to 0. Then a generalizing vector-matrix  $\mathbf{x}_{ij}$  of the objects characteristics on the image is formed. Considering the procedure of learning from the paper [6] and using the input information of a subset as learning matrix-vectors  $\mathbf{x}_{nj}$ , the star-sky segments identification model was constructed. The testing was carried out on the whole data set  $\mathbf{x}_{ij}$  with accounting star sensor image deviations on the navigation catalog. Simulation and testing were carried out in the Matlab environment with support of the libsvm library [2]. The developed schema of star sensor image processing for feature extraction was implemented as a preprocessor, also star-sky simulation was carried out on constructed navigation catalogue. All modules were realized in optimal mode to get effective functions interaction with software and library. After model training, its accuracy of coordinates determination was tested based on random star-sky segments selection.

The results of identification accuracy testing were 87.7%. It can be increased by considering more variants of images of each segment and a slight changing of exactable error. It was investigated that the exactable error must be less then  $\varepsilon \leq 0.02$  degrees. Obviously, for the on-board star-sky segments identification algorithm implementation, it is necessary to create a computer simulator star-sky with accounting the satellite motions. Such development will allow to more accurately test the model accuracy, its stability and increase the algorithm reliability.

**Conclusions.** The solution of the problem of the star-sky segments identification with star sensor and machine learning technique was proposed. The algorithm of the star-sky segments rough identification algorithm for the celestial sphere sectors estimation with star sensor data was presented. For data processing performance increase and generating more stable identification model the schema of star-sky segments simulation with accounting image rotation was proposed. The algorithm of segments identification, tests and the program pilot version were developed. The efficiency and reliable operation of the on-board algorithm can be achieved by creation of the star-sky computer simulator with accounting the spacecrafts motions. In the course of the research, it was established that the acceptable level of star-sky images center coordinates estimated error against the on-board navigation catalogue must be in the range  $\varepsilon \leq 0.02$  degrees. The reconstructed machine learning model on the simulated datasets gave accuracy 87.7%.

### References

1. Bardwell, G. (1995). On-board artificial neural network multi-star identification system for 3-axis attitude determination. *Acta Astronautica*, 35, 753–761.
2. Chang, C. C., Lin, C. J. (2013). LIBSVM: a library for support vector machines. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, 27(1), <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/papers/libsvm.pdf>.
3. Flewelling, B. R., & Mortari, D. (2011). Information theoretic weighting for robust star centroiding. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 58(2), 241–259.

4. Grassi, M., Degtyarev, A. A., Ovchinnikov, M. Yu., & Perrotta, A. (2005). Testing and calibration of a miniature solar sensor prototype developed on the APS-technology. Preprint. №94. Moscow: IPM M.V. Keldysh RAS.
5. Guangjun, Z., Wei, X., & Jiang, J. (2008). Full-sky autonomous star identification based on radial and cyclic features of star pattern. *Image Vision Computing*, 26, 891–897.
6. Hsu, C. W., & Lin, C. J. (2002). A comparison of methods for multi-class support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(2), 415–425.
7. Liu, X., Zhou, Z., Zhang, Z., Liu, D., & Zhang, X. (2017). Improvement of star identification based on star trace in star images. *Measurement*, 105, 158–163.
8. Mortari, D. (1997). Search-less algorithm for star pattern recognition. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 45(2), 179–194.
9. Mortari, D., Samaan, M. A., & Bruccoleri, C. (2004). The pyramid star identification technique. *Navigation*, 51, 171–183.
10. Myers, J. R., Sande, C. B., Miller, A. C., Warren, W. H. Jr., & Tracewell, D. A. (2002). SKY2000 Catalog, Version 4. *SAO/NASA ADS Astronomy*. <http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=V/109>
11. Nabivach, V. E., Opanasenko, V. N., Semeniv, O. V., & Yatsenko, V.O. (2011). An algorithm of determination for spacecraft orientation with the use of star sensor. *Space science and technology*, 17(1), 84–89.
12. Samaan, M. A., Mortari, D., & Junkins, J. L. (2006). Nondimensional star identification for uncalibrated star cameras. *Journal of Astronautic Science*, 54, 95–111.
13. Zhao, Y., Wei, X., Li, J., & Wang, G. (2016). Star identification algorithm based on KL transformation and star walk formation. *IEEE Sens. J.*, 16(13), 5202–5210.



# Simulation of plasto-elastic waves in structures under dynamic loads

**T. A. Shtefan, A. V. Zasovenko**

*Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine*  
[tayana2000@rambler.ru](mailto:tayana2000@rambler.ru), [zasov77@gmail.com](mailto:zasov77@gmail.com)

The paper generalization of a net-characteristic method and the iterative approach, with specification of a kind of contact by Newton-Kantorovich's method is carried out. By means of the developed generalization research of beam cooperation with the various bases under the influence of the concentrated and distributed non-stationary loading is conducted. Solution to the wave problem of the action of mobile loading with different speed on a beam made of resilient and resiliently plastic material has been obtained.

**Keywords:** dynamic load, plasto-elastic waves, a net-characteristic method.

In the general case we consider a system of two differential equations of the second order in partial derivatives for two dependent variables  $U_i$  and two independent variables  $x$  and  $t$  (Chou & Mortimer, 1967):

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} - \frac{1}{C_i^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} U_j + \beta_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x}) \equiv f_i, \quad i = 1, 2.$$

Where  $C_i, \alpha_{ij}$  and  $\beta_{ij}$  are continuous functions. We limit ourselves to the consideration of continuous functions. For those areas of the plane in which the first partial derivatives are continuous, we can write:

$$\begin{aligned} d \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dt \quad (i = 1, 2.) \\ d \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dt \quad (i = 1, 2.) \end{aligned}$$

For the numerical calculations, the present system of equations describing the elastic deformation of the beams in dimensionless form (Засовенко & Мастиновский, 2004)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{t}^2} = F_1 \left( \psi - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \tilde{R}(\xi, \tilde{t}) - \tilde{q}(\xi, \tilde{t}) + \tilde{P}, \end{cases}$$

where  $C_1 = 1$ ;  $C_2 = \frac{c_S}{c_b}$ ;  $\left( c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, c_S = \sqrt{\frac{kG}{\rho}} \right)$ ;  $F = \frac{kGSL^2}{EJ}$ .

For convenience, the main network uses the characteristics of the first family (Fig. 1a). In fact, this is necessary because the characteristics

$$\frac{d\xi}{d\tilde{t}} = \pm C_2$$

have a steeper tilt. Moreover, to investigate the unsteady reaction of the beam on the action of the distributed load  $\xi$ , the net area covers the entire strip  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\tilde{t} \geq 0$ . The values of unknown variables  $\psi$ ,  $\psi_{\tilde{t}}$ ,  $\psi_{\xi}$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_{\tilde{t}}$ ,  $\tilde{w}_{\xi}$  at the nodal points 1 of a typical internal element of the grid (Fig. 1 b) are calculated on the basis of the usual difference form of the four characteristic equations and two equations of generality if their respective values in the neighboring nodes 2, 3 and 4 are known from previous calculations.

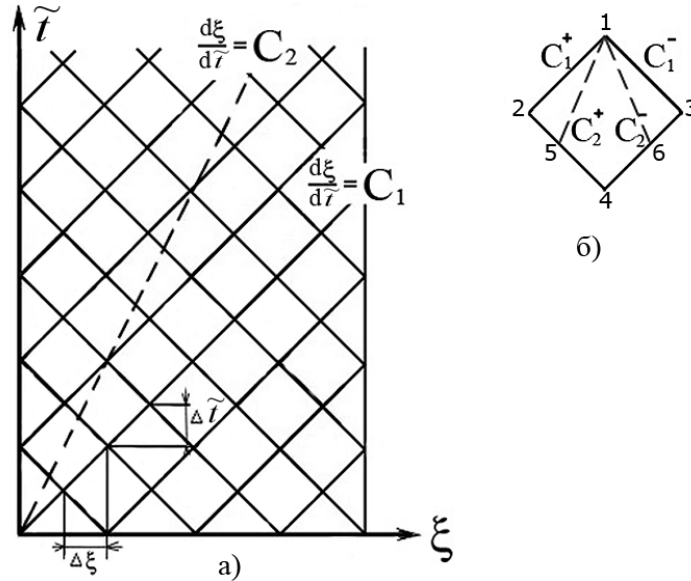


Fig. 1. Characteristics of settlement networks

In the nodal points on the left boundary line ( $\xi = 0$ ) two characteristics  $C_1^+$  and  $C_2^+$  are absent. If the two values we are looking for are given in the boundary conditions, then the remaining four equations are enough to find the last four unknowns. Values of dependent variables in non-regular nodes 5 and 6 are found using linear interpolation according to known data in regular nodes 2, 4 and 4, 3, respectively. Similarly, unknowns on the right border ( $\xi = L$ ) are calculated using the characteristics  $C_1^+$  and  $C_2^+$ .

It turned out that deformation of a load moving with supersonic velocity leads to a smoother change in the shape of the beam in contrast to the case of motion with subsonic velocity. The distribution of the subsonic load corresponds to the characteristic feature in the form of “wave” of the material, which leads to a load, and a number of other differences.

The investigation of wave processes in plasto-elastic core structures was carried out. The problems which are based on two assumptions are considered when considering plastic deformations: the problem of propagation of waves in an ideal plasto-elastic beam, and the problem of loading the impact type on a plasto-elastic beam

with strengthening. Graphs are given, for dimensionless values of length and time, with marked areas of plastic deformation for both assumptions (Мастиновский & Засовенко, 2008).

#### References

- Chou, P. C., & Mortimer, R. W. (1967). Solution of one-dimensional elastic wave problems by the method of characteristics. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3), 745–750.
- Засовенко, А. В., & Мастиновский, Ю. В. (2004). Нестационарные деформирования балки конечной длины, лежащей на упругом основании. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*, (1), 105—107.
- Мастиновский, Ю. В., & Засовенко, А. В. (2008). Нестационарное деформирование упруго-вязкопластической балки. *Вестник двигателестроения*, (1), 147—150.

# Построение сетевого графика технологического комплекса

Т. В. Авдеева, Ф. Э. Абисое

Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина  
avdeeva.tetyana@gmail.com, fiyinabisoye@gmail.com

В работе рассматривается примерный вариант сетевого графика, связанный с задачей нахождения критического пути.

**Ключевые слова:** сеть, сетевой график, критический путь.

Для планирования сложных технологических комплексов можно предложить простую модель сетевого графика, которая позволяет упростить поэтапное планирование. При этом определяется максимальное (критическое) время, затрачиваемое на выполнение всего комплекса технологических задач.

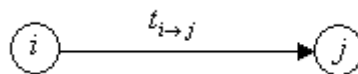
Рассмотрим одноцелевые модели, т. е. модели характеризующиеся одним исходным событием, с которого начинается весь процесс производства, и одним завершающим событием (служащим конечным пунктом некоторого процесса). *Сетью* называют связанный ориентированный граф без ориентированных циклов, для которого имеется один источник (начало технологического процесса) и один сток (конец технологического процесса).

*Сетевой график* — это графическая модель, для которой полный комплекс технологических процессов разделяется на отдельные виды работ, начальный и окончательный этапы которых характеризуются завершенными событиями. Работа по сетевому графику — это определенный процесс, предшествующий реализации некоторого события.

Для формирования сетевого графика рассмотрим некоторый технологический комплекс, который включает в себя несколько технологических операций. Предположим, что нам известно время выполнения каждой отдельной операции. Для удобства, начало и конец операции назовем узлами (событиями) технологического комплекса, при этом каждую операцию представим как переход от одного узла к другому. Узлы технологического комплекса удобно нумеровать натуральными числами от 1 до  $n$ . Операцию перехода от  $i$ -го узла к  $j$ -му узлу будем обозначать символом  $i \rightarrow j$ . Символ  $i \rightarrow j$  назовем *шифром* операции. Время выполнения операции  $i \rightarrow j$  будем обозначать символом  $t_{i \rightarrow j}$ . Время начала операции  $i \rightarrow j$  обозначим символом  $t_i$ , а время окончания операции — символом  $t_j$ .

События на графике изображаются кружочками с присвоенными номерами, причем в конце обязательна расшифровка соответствия «номер—событие». Начальному узлу технологического комплекса (источник) присваиваем номер 1, а конечному узлу (сток) — номер  $n$ . Работа на графике, как правило, изображается стрелкой произвольной длины, которая соединяет два события (два

кружка), при этом стрелки должны быть направлены слева направо. Начало стрелки соответствует начальному узлу операции, конец стрелки — завершающему. Продолжительность  $t_{i \rightarrow j}$  операции будем писать над стрелкой:



В результате получим сеть, которую называют *сетевым графиком* технологического комплекса.

Заметим, что в сетевом графике не должно быть «тупиков» и «хвостов», т. е. событий из которых не выходит ни одной стрелки; и событий, в которые не входит ни одна стрелка (кроме исходного и завершающего события). В сетевом графике также не должны присутствовать замкнутые ориентированные контуры. События кодируют в соответствии с последовательностью работ во времени после окончательного построения сетевого графика. Работы кодируют таким образом, чтобы номер начального события был меньше номера конечного.

В сетевом графике любая непрерывная последовательность от исходного до завершающего события обозначается термином *путь* (Майника, 1981), при этом продолжительность (длина) любого пути определяется суммой продолжительности составляющих его операций (Аршинов & Эпштейн, 2002).

Сетевой график, продолжительность пути которого максимальна, называют *критическим*, а работы, к нему относящиеся, — критическими событиями. Критический путь определяет максимальный срок выполнения всего комплекса. События, относящиеся к критическому пути, не имеют запасов времени. Критический путь принято изображать на сети двойной, утолщённой линией или линией другого цвета. Виды работ, не относящиеся к критическим событиям, т.е. не находящиеся на критическом пути, имеют «резерв времени».

**Постановка задачи.** Построим сетевой график и найдем критическое время и критический путь всего технологического комплекса, при условии, что известно время выполнения каждой отдельной операции.

Пусть последовательность выполнения операций и их продолжительность в часах задана следующей таблицей:

№ п.п.	Шифр операции $i \rightarrow j$	Продолжительность операции $t_{i \rightarrow j}$
1.	1 → 2	3
2.	1 → 3	7
3.	1 → 4	4
4.	2 → 3	5
5.	2 → 5	9
6.	3 → 5	7
7.	3 → 6	6
8.	3 → 7	5
9.	4 → 3	5
10.	4 → 6	8

№ п.п.	Шифр операции $i \rightarrow j$	Продолжительность операции $t_{i \rightarrow j}$
11.	4 → 7	7
12.	5 → 8	6
13.	6 → 8	7
14.	6 → 9	4
15.	6 → 10	14
16.	7 → 9	6
17.	8 → 10	11
18.	9 → 10	12

Сначала построим эскиз упорядоченного по этапам сетевого графика. При этом нужно придерживаться некоторых правил.

Кружок, соответствующий источнику (под номером 1), располагается левее всех остальных кружков. Источник считаем этапом с номером 1.

Каждый последующий этап изображаем правее предыдущего, причем узлы одного этапа располагаем на одной вертикали.

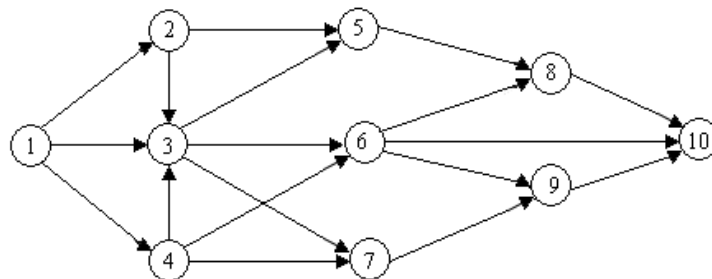
Каждый последующий этап формируем из узлов, которые не имеют входящих стрелок при умозрительном удалении узлов с выходящими из них стрелками всех предыдущих этапов.

Кружки добавляем в эскиз сетевого графика последовательно, согласно этапам, без повторений. Пронумеровываем кружки числами от 1 до  $n$ .

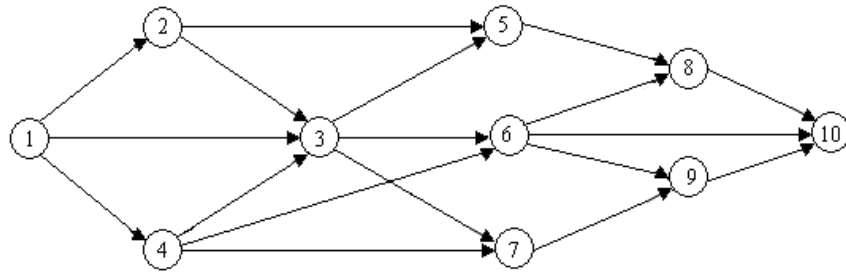
Кружки соединяем стрелками в соответствии с шифрами операций. Над стрелками фиксируем время выполнения  $t_{i \rightarrow j}$ .

Сток считаем конечным этапом.

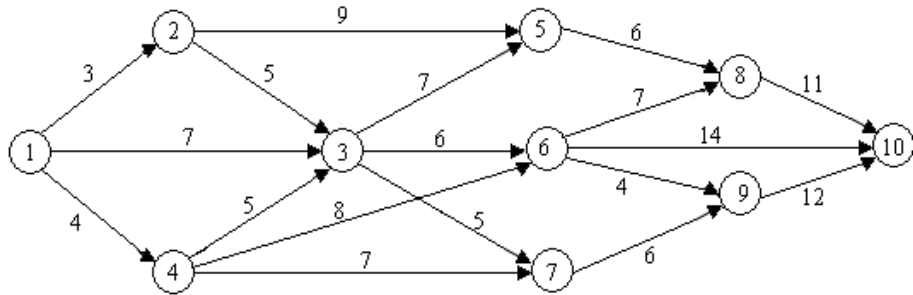
Проверяем построенную сеть на корректность.



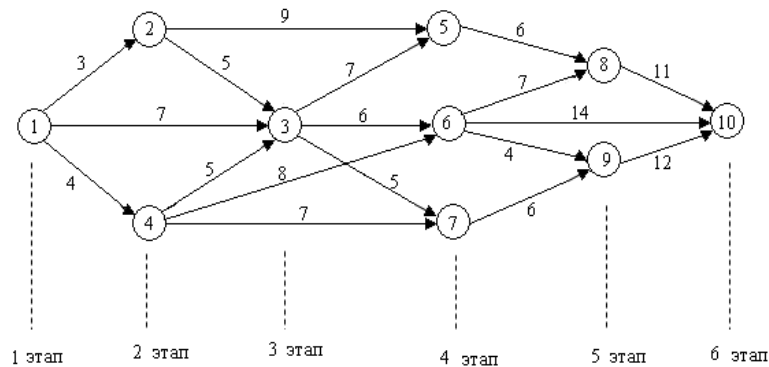
Поскольку событие 3 идет после событий 2 и 4 (входящие стрелки), то нужно его вынести в отдельный этап. Таким образом, устраняется несоответствие 3-му пункту правил создания сетевых графиков.



Расставляем время как веса ребер графа:



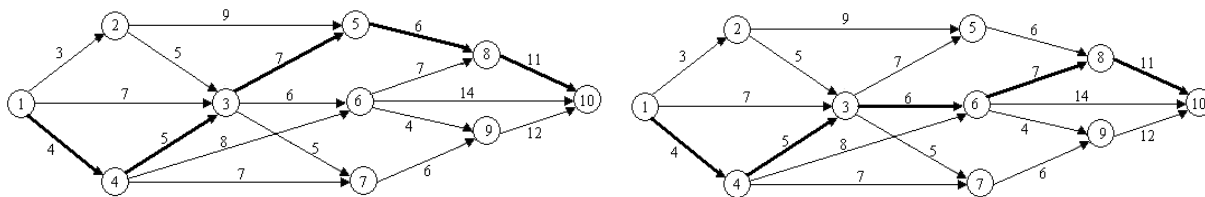
Выделяем этапы технологического процесса:



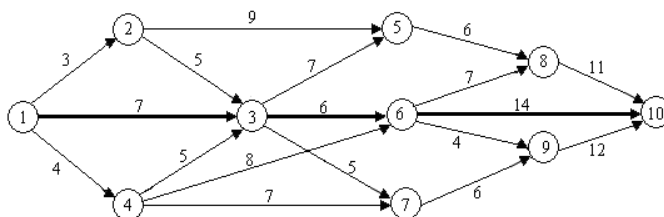
Из рисунка вытекает, что сетевой график содержит 6 этапов. Находим все возможные пути из истока в сток и суммируем их длины:

№ п.п.	Путь 1 → ... → 10	Длина пути	Сумма	max путь	min путь
1.	1 → 2 → 3 → 5 → 8 → 10	3+5+7+6+11	32		
2.	1 → 2 → 3 → 6 → 8 → 10	3+5+6+7+11	32		
3.	1 → 2 → 3 → 6 → 9 → 10	3+5+6+4+12	30		
4.	1 → 2 → 3 → 6 → 10	3+5+6+14	28		
5.	1 → 3 → 5 → 8 → 10	7+7+6+11	31		
6.	1 → 3 → 6 → 8 → 10	7+6+7+11	31		
7.	1 → 3 → 6 → 9 → 10	7+6+4+12	29		
8.	1 → 3 → 6 → 10	7+6+14	27		27
9.	1 → 3 → 7 → 9 → 10	7+5+6+12	30		
10.	1 → 4 → 3 → 5 → 8 → 10	4+5+7+6+11	33	33	
11.	1 → 4 → 3 → 6 → 8 → 10	4+5+6+7+11	33	33	
12.	1 → 4 → 3 → 6 → 10	4+5+6+14	29		
13.	1 → 4 → 3 → 6 → 9 → 10	4+5+6+4+12	31		
14.	1 → 4 → 3 → 7 → 9 → 10	4+5+5+6+12	32		
15.	1 → 4 → 7 → 9 → 10	4+7+6+12	29		

Таким образом,  $T_{kp} = 33$  часа. Данный сетевой график имеет два критических пути:  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$  и  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ . Для каждого критического пути критическое время одно и то же.



Кратчайший путь, ведущий от источника сети к стоку  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 10$  имеет длину  $T_{\min} = 27$ .



Можно сделать вывод, что реализация данного технологического комплекса займет минимум 27 единиц времени, что позволит планировать общие затраты времени. При этом методом перебора путей графа, без применения специальных алгоритмов, можно добиться снижения затрат времени на каждом из этапов технологического комплекса. Благодаря сетевому графику экономию временных затрат можно учитывать на каждом из этапов.

Для нахождения *минимального* пути на графе можно использовать готовые алгоритмы. Например, алгоритм Дейкстры — алгоритм поиска кратчайших путей в графе, или более общий по сравнению с алгоритмом Дейкстры, алгоритм Флойда. В Интернете можно найти готовые программы на Pascale, C#, C++ или можно работать в программе ProGraph.

Для нахождения критических (наибольшей длины) путей, в общем случае, таких удобных алгоритмов нет, поскольку решение этой задачи относится к известной NP-полной задаче. В частном случае, можно воспользоваться алгоритмом Флойда с изменением min на max.

Данный подход важен для менеджеров технологических комплексов, планировщиков крупных технологичных процессов, а также удобно применять его при решении бизнес-задач. Довольно часто этот подход используется при распараллеливании задач.

#### Список литературы

- Аршинов, М. А., & Эпштейн, Г. Л. (2002). *Задачи оптимизации на сетях и графах*. Москва: МИИТ. [http://library.miit.ru/methodics/22\\_08\\_2012/00-89307.pdf](http://library.miit.ru/methodics/22_08_2012/00-89307.pdf)  
 Майника, Э. (1981). *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах*. Москва: Мир.



# Застосування методу динамічного програмування до оптимального розподілу інвестицій

Т. В. Авдєєва

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
[avdeeva.tetyana@gmail.com](mailto:avdeeva.tetyana@gmail.com)

Розглядається метод динамічного програмування на прикладі задачі оптимального інвестування підприємств.

**Ключові слова:** оптимізація, найбільший прибуток, принцип оптимальності Белмана, рівняння Белмана.

В умовах ринкової економіки питання про пошук ефективного фінансування або оптимального інвестування є найбільш актуальними. Стабільне й ефективне функціонування сучасного концерну підприємств у ринкових умовах неможливе без взаємоузгодження основних напрямів та цілей його діяльності з відповідними положеннями інвестиційної стратегії. Як відомо, «... если не использовать наилучшим образом то, чем мы располагаем сейчас, то и в дальнейшем не удастся наилучшим образом распорядиться тем, что мы могли бы иметь» (Лопатников, 1987). Оптимальне керування характеризують такими властивостями, що, незалежно від початкового стану, на будь-якому кроці функціонування управління наступний етап управління треба вибрати оптимальним чином відносно стану, до якого прийде система в кінці цього кроку.

Метод динамічного програмування (*dynamic programming*) використовують для аналізу та дослідження оптимального управління динамічними системами на основі мінімізації (максимізації) сумарних (або інтегральних) функціоналів якості замкнених систем управління (Перестюк & Станжицький, 2004). Необхідну умову оптимальності Р. Белмана застосовують для широкого класу задач аналізу та оптимізації. Словосполучення «динамічне програмування» вперше використано в 1940-х рр. Річардом Белманом для опису процесу знаходження рішення задачі, де відповідь однієї задачі може бути отримана тільки після рішення задачі, «попередньої». У 1953 р він уточнив це означення з урахуванням сучасних вимог. Внесок Белмана в динамічне програмування увічнений в назві «рівняння Белмана», центрального результату теорії динамічного програмування, який дозволяє переформулювати оптимізаційну задачу в рекурсивної формі.

**Постановка задачі оптимального керування.** Розгляньмо деякий керований процес, що розвивається з часом, тобто такий, на розвиток якого можна впливати рішеннями, що приймаються на певних етапах (*тут керування полягає в перерозподілі коштів*). Припускаємо, що процес перерозподілу грошей розпадається (природно або штучно) на  $N$  кроків (етапів).

Нехай стан процесу наприкінці  $k$ -го кроку описує  $m$ -вектор

$$x_{n+1} = g_n(x_n, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Цей вектор називають *вектором стану* процесу або вектором фазових координат. Множину всіх станів, у яких може перебувати процес на кінець  $k$ -го

кроку, позначаємо через  $X_k$ . Початковий стан процесу  $x_0$  може бути заданий окремо або вказана множина  $X_0$  початкових станів (Ашманов & Тимохов, 1991).

Розвиток процесу полягає в послідовному переході з одного стану в інший. Якщо процес перебуває у стані  $x_n$ , то його стан  $x_{n+1}$  на наступному кроці визначає не тільки вектор  $J_n(x_0, y_1, \dots, y_n)$  але й рішення (тобто керування)  $J_{n+1}$ , яке прийняте на  $n + 1$ -му кроці:

$$x_{n+1} = g_n(x_n, y_{n+1}).$$

У будь-якій економічній задачі розв'язок на кожному кроці не може бути абсолютно довільним, його вибирають з деякої множини  $U$  можливих рішень (варіантів рішень), причому будь-яку послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , допустимих розв'язків називають *стратегією*.

Ефективність процесу управління характеризують цільовою функцією прибутку, значення якої залежить від стану системи та застосованого керування. Таким чином, розвиток процесу управління впродовж всього періоду, що розглядається, можна описати послідовністю станів

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N,$$

де значення  $x_n \in X_n$ .

Для опису  $N$ -крокового процесу кожній стратегії ставиться в відповідність деяка оцінка — значення оціночної функції. Варіюючи стратегію, ми отримуємо різні стани процесу після  $N$  кроків, що оцінюються, використовуючи деякий критерій ефективності процесу (прибуток, фондівіддачу, продуктивність або витрати, собівартість, втрати тощо) через цільову функцію  $Z$ :

$$J_N(x_0, y_1^*, \dots, y_N^*) = \max_{y_1, \dots, y_N} J_N(x_0, y_1, \dots, y_N).$$

Принцип оптимальності Белмана стверджує, що на послідовності оптимальних керувань  $y_1^*, \dots, y_N^*$  досягає максимуму кожна з функцій

$$f_n(x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots, y_N) = h_n(x_{n-1}, y_n) + h_{n+1}(x_n, y_{n+1}) + \dots + h_N(x_{N-1}, y_N), \\ n = 1, 2, \dots, N.$$

Якщо позначити

$$\phi_n(x_{n-1}) = \max_{y_1, \dots, y_N} f_n(x_{n-1}, y_n, \dots, y_N),$$

то з принципу оптимальності Белмана отримуємо, що функція  $\phi_n(x_{n-1})$  справджує наступне рівняння (функціонали Белмана):

$$\phi_n(x_{n-1}) = \max_{y_n} \left[ \phi_{n+1}(g_n(x_{n-1}, y_n)) + h_n(x_{n-1}, y_n) \right], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Розв'язок рівнянь Белмана дозволяє знайти не лише послідовність оптимальних керування, а й прорахувати оптимальне значення функції прибутку. На

практиці, у розглянутих рекурентних співвідношеннях  $\phi_n(x_{n-1})$  варто починати обчислення з останнього етапу і потім пересуватися назад до етапу 1. Такий метод обчислень відомий як *алгоритм зворотної прогонки*.

**Задача.** Скласти план ефективного розподілу 4 млн. умовних одиниць поміж трьома підприємствами  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , який дозволить отримати найбільший прибуток, за умови, що в кожне з підприємств можна вкласти як усі гроші так й не вкласти жодної копійки, але всі 4 млн. потрібно інвестувати. Прибуток кожного підприємства (у відсотках) задається таблицею:

Розмір інвестицій	Прибуток підприємства, %		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
0	0	0	0
1	25	20	21
2	22	16	23
3	21	20	20
4	20	15	19

Позначимо через  $h_i$  — прибуток підприємства  $\Pi_i$ . Зрозуміло, що прибуток підприємства залежить від вкладень в підприємство та відсоткової віддачі, тобто

$$h_i = \frac{C \cdot \Pi_i}{100\%},$$

де  $C$  — обсяг інвестування. Тепер розширюємо таблицю прибутків, з урахуванням обсягу інвестування:

	Прибуток підприємства, %			Прибуток підприємства (з врахуванням обсягу інвестицій)		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
0	0	0	0	0	0	0
1	25	20	21	0,25	0,2	0,21
2	22	16	23	0,44	0,32	0,46
3	21	20	20	0,63	0,6	0,6
4	20	15	19	0,8	0,6	0,76

Позначаємо через  $y_i$  обсяг реального інвестування, що відповідає підприємству  $\Pi_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

Процес інвестування розбиваємо на етапи: на першому етапі виділяємо  $y_1$  грошей підприємству  $\Pi_1$ , на другому — інвестуємо  $y_2$  підприємству  $\Pi_2$ , а на третьому етапі підприємству  $\Pi_3$  виділяємо  $y_3$ . Уважаємо станом системи  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) ту частину грошей, що залишаються після  $i$ -го етапу. Оскільки

потрібно розподілити 4 млн., то  $x_0 = 4$  (всі гроші, що потребують інвестуванню). Взагалі

$$x_n = x_{n-1} - y_n,$$

тобто

$$x_1 = x_0 - y_1, x_2 = x_1 - y_2, x_3 = x_2 - y_3.$$

Оскільки після третього етапу, нерозподілених грошей не повинно лишатися, то  $x_3 = 0$ , тому  $y_3 = x_2$ . Для розрахунків скористаймося рівняннями Белмана для трьох підприємств.

Запускаємо алгоритм зворотної прогонки.

$$\phi_3(x_2) = \max_{y_3=0,1,2,3,4} h_3(y_3), x_2 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad (1)$$

$$\phi_2(x_1) = \max_{y_2=0,1,2,3,4} [\phi_3(x_1 - y_2) + h_2(y_2)], x_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

$$\phi_1(x_0) = \max_{y_1=0,1,2,3,4} [\phi_2(x_0 - y_1) + h_1(y_1)], x_0 = 4. \quad (3)$$

Позначаємо значення управлінь  $y_1, y_2, y_3$ , на яких досягаються максимуми у співвідношеннях (1)—(2), відповідно через  $y_1^*, y_2^*, y_3^*$ . Обчислення функцій  $\phi_n(x_{n-1})$  зручно представити у вигляді таблиць:

$$\phi_3(x_2) = \max_{y_3=0,1,2,3,4} h_3(y_3), x_2 = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$x_2$	$y_3$					$\phi_3(x_2)$	$y_3^*$
	0	1	2	3	4		
0	0					0	0
1		0,21				0,21	1
2			0,46			0,46	2
3				0,6		0,6	3
4					0,76	0,76	4

$$\phi_2(x_1) = \max_{y_2=0,1,2,3,4} [\phi_3(x_1 - y_2) + h_2(y_2)]$$

$x_1$	$y_2$					$\phi_2(x_1)$	$y_2^*$
	0	1	2	3	4		
0	0+0=0					0	0
1	0+0,21=0,21	0,2+0=0,2				0,21	0
2	0+0,46=0,46	0,2+0,21=0,41	0,32+0=0,32			0,46	0
3	0+0,6=0,6	0,2+0,46=0,66	0,32+0,21=0,53	0,6+0=0,6		0,66	1
4	0+0,76=0,76	0,2+0,6=0,8	0,32+0,46=0,78	0,6+0,21=0,81	0,6+0=0	0,81	3

$$\phi_1(x_0) = \max_{y_1=0,1,2,3,4} [\phi_2(x_0 - y_1) + h_1(y_1)]$$

$x_0$	$y_1$					$\phi_1(x_0)$	$y_1^*$
	0	1	2	3	4		
4	0+0,81	0,25+0,66=0,91	0,44+0,46=0,9	0,63+0,21=0,84	0,8+0=0,8	0,91	1

Отже, максимальний прибуток дорівнює 0,91 млн. у.о., причому

$$y_1^* = 1, \phi_1(x_0) = \phi_1(1),$$

$$x_1 = x_0 - y_1^* = 4 - 1 = 3, \phi_2(x_1) = \phi_2(3) = 0,66, y_2^* = 1,$$

$$x_2 = x_1 - y_2^* = 3 - 1 = 2, \phi_3(x_2) = \phi_3(2) = 0,46, y_3^* = 2.$$

**Висновок задачі:** інвестування 4 млн. у.о. оптимально провести так:

Підприємству  $\Pi_1$  — інвестуємо 1 млн, підприємству  $\Pi_2$  також 1 млн., а в  $\Pi_3$  потрібно інвестувати 2 млн. При цьому максимальний прибуток буде становити 0,91 млн. у.о.

У даній роботі розглянута задача оптимального керування на прикладі визначення методики ефективного розподілу інвестицій.

### Список літератури

- Ашманов, С. А., & Тимохов, А. В. (1991). *Теория оптимизации в задачах*. Москва: Наука.  
Лопатников, Л. И. (1987). *Экономико-математический словарь*. Москва: Наука.  
Перестюк, М. О., & Станжицький, О. М. (2004). *Екстремальні задачі: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ Київський університет.

# Квазиоптимальное торможение вращений гиростата с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением

Л. Д. Акуленко<sup>1</sup>, Т. А. Козаченко<sup>2</sup>, Д. Д. Лещенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
Одесса, Украина*

[gavrikov@ipmnet.ru](mailto:gavrikov@ipmnet.ru), [kushpil.t.a@gmail.com](mailto:kushpil.t.a@gmail.com), [leshchenko\\_d@ukr.net](mailto:leshchenko_d@ukr.net)

Аналитически и численно исследована задача квазиоптимального по быстрейшему торможению вращений динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и с вязкоупругим элементом в среде с сопротивлением. Исследована усредненная система уравнений.

**Ключевые слова:** твердое тело, момент, квазиоптимальное торможение.

Анализ объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Получены результаты для систем, содержащих квазитвердые тела. Эти модели предполагают, что их движение близко движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей определяется на основе асимптотических методов нелинейной механики. Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях углового движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела.

Рассматриваются управляемые вращательные движения динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (Черноусько, 1968; Черноусько, 1973). Кроме того, к телу, находящемуся в среде с сопротивлением, прикреплена с помощью вязкоупругого демпфера подвижная масса.

На основании подхода (Акуленко, 1987) приближенные уравнения Эйлера управляемых вращений в связанной с телом системе координат записываются в виде

$$\dot{\mathbf{G}} + \omega \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^p + \mathbf{M}^v + \mathbf{M}^r. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{M}^u$  — вектор управляющего внешнего момента,  $\mathbf{M}^p$  — вектор внутреннего возмущающего момента сил, обусловленный наличием вязкой жидкости в полости,  $\mathbf{M}^v$  — вектор внутреннего возмущающего момента сил, обусловленный вязкоупругим элементом,  $\mathbf{M}^r$  — момент сил сопротивления среды (Кошляков, 1985; Chernousko, Akulenko, & Leshchenko, 2017). Вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{J}\omega$  — кинетический момент тела, где  $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$  — симметричный тензор инерции невозмущенного тела ( $A_1 \neq A_3$ ),  $\omega = (p, q, r)$  — вектор угловой скорости, определяемый проекциями на связанные оси координат.

Величина управляющего момента сил  $\mathbf{M}^u$  предполагается малой порядка  $\epsilon$ . Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений по-

стоянных  $b_i$ , имеющих размерность момента сил, на малый числовой параметр  $\varepsilon$  и безразмерные управляющие функции, подлежащие определению (Черноусько, Акуленко, & Соколов, 1980; Акуленко, 1987):

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, u_i = -G_i G^{-1}, i = 1, 2, 3, |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (2)$$

Произведения  $\varepsilon b_i, i = 1, 2, 3$  характеризуют эффективность системы управления по соответствующей оси связанной системы координат.

В работе предполагается, что момент сил сопротивления среды пропорционален кинетическому моменту тела (Chernousko, Akulenko, & Leshchenko, 2017)

$$\mathbf{M}^r = -\varepsilon \lambda \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и формы тела.

С учетом (2), (3) уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные оси инерции тела имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) qr &= -\varepsilon b_1 A_1 p G^{-1} + L p r^2 + F G^2 q r + D r^4 p - \varepsilon \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) p r &= -\varepsilon b_2 A_1 q G^{-1} + L q r^2 - F G^2 p r + D r^4 q - \varepsilon \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= -\varepsilon b_3 A_3 r G^{-1} + H (p^2 + q^2) r - A_1 A_3^{-1} D r^3 (p^2 + q^2) - \varepsilon \lambda A_3 r, \\ F &= m \rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, D = m \rho^2 \Lambda \Omega^{-4} A_3^3 (A_1 - A_3) A_1^{-4}, \\ H &= \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1), L = \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \\ 0 &< A_3 \leq 2A_1, A_3 \neq A_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $F, D$  в (4) характеризуют моменты сил, вызываемые вязкоупругим элементом,  $m$  — масса точки,  $\rho$  — расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления на теле. Частота колебаний и скорость их затухания имеют вид

$$\Omega^2 = \frac{c}{m}, \Lambda = \frac{\delta}{m},$$

здесь  $c$  — жесткость,  $\delta$  — коэффициент вязкости.

Коэффициенты  $L, H$  в (4) характеризуют момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости тела,  $\beta$  — объемная плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $P$  — коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса  $a_0$  он равен  $P = 8\pi a_0^7 / 525$ . Основным допущением в данной задаче является предположение о малости числа  $Re$ .

В случае

$$b_1 = b_2 = b_3 = b \quad (b > 0),$$

где параметр  $b$  может быть функцией времени, управление является оптимальным для любых значений  $\varepsilon$ . Если величины  $b_i$  близки, то указанное управление можно считать квазиоптимальным (Черноусько и др., 1980; Акуленко, 1987).

Рассматривается случай, когда выполняются неравенства

$$\Omega^2 \gg \Lambda\omega_0 \gg \omega_0^2,$$

где  $\omega_0$  — величина начального значения вектора угловой скорости. Данное неравенство позволяет ввести малый параметр в (4) и считать возмущающие моменты малыми для применения метода усреднения вне возможного начального переходного процесса.

Для решения задачи квазиоптимального управления обезразмерим задачу. В качестве характерных параметров задачи возьмем момент инерции твердого тела относительно оси  $x_1$  —  $A_1 = A_2$  и величину  $\omega_0$  порядка начальной скорости. Вводятся безразмерные коэффициенты инерции  $\tilde{A}_i = A_i/A_1$  и  $\tau = \omega_0 t$  — безразмерное время.

Тогда система (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -(\tilde{A}_3 - 1)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_1\tilde{p}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{p}\tilde{r}^2 + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{D}\tilde{p}\tilde{r}^4 - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p}, \\ \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -(1 - \tilde{A}_3)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_2\tilde{q}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{q}\tilde{r}^2 - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{D}\tilde{q}\tilde{r}^4 - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q}, \\ \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\varepsilon\tilde{b}_3\tilde{r}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{H}(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)\tilde{r} - \varepsilon\tilde{A}_3^{-2}\tilde{D}\tilde{r}^3(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2) - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r}, \\ \varepsilon\tilde{F} &= m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2, \quad \varepsilon\tilde{D} = m\rho^2\Lambda\Omega^{-4}(1 - \tilde{A}_3)A_1^{-1}\tilde{A}_3^3\omega_0^3, \\ \varepsilon\tilde{L} &= \beta P\nu^{-1}A_1^{-1}\tilde{A}_3(1 - \tilde{A}_3)\omega_0, \quad \varepsilon\tilde{H} = \beta P\nu^{-1}A_3^{-1}(\tilde{A}_3 - 1)\omega_0, \\ \varepsilon\tilde{b}_i &= b_i/A_1\omega_0^2, \quad \varepsilon\tilde{\lambda} = \lambda/\omega_0, \quad \tilde{G} = G/A_1\omega_0, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем использовать безразмерные переменные, опуская  $\sim$ .

Общее порождающее решение системы (5) при  $\varepsilon = 0$  имеет вид:

$$p = a \cos \psi, \quad q = a \sin \psi, \quad a > 0, \quad r = \text{const} \neq 0, \quad \psi = (A_3 - 1)r\tau + \psi_0.$$

После ряда преобразований и усреднения по фазе для переменных  $a$  и  $r$ , получим

$$\begin{aligned} a' &= -\frac{a}{2} \left[ G^{-1}(b_1 + b_2) - 2Lr^2 - 2Dr^4 + 2\lambda \right], \quad \theta = \varepsilon\tau, \\ r' &= -r \left( b_3G^{-1} - Ha^2 + A_3^{-2}Dr^2a^2 + \lambda \right), \quad ' = \frac{d}{d\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Среднее выражений, содержащих множитель  $F$ , равно нулю. При  $b_1 = b_2 = b_3 = b$  уравнения для  $a$  и  $r$  интегрируются полностью и задача оптимального управления решена аналитически в Акуленко, Лещенко, Рачинская, и Зинкевич (2013).



Для решения системы (6) были проведены численные исследования при разных начальных условиях и параметрах задачи в случае, когда

$$0.5(b_1 + b_2) \neq b_3.$$

Расчеты проведены при следующих перенормированных значениях: коэффициентов управляющего момента  $b_1 = 1.625$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 1.25$ ; коэффициента сопротивления  $\lambda = 1.2$ ;  $1.8$ ; момента инерции  $A_3 = 1.2$ ; коэффициентов  $D = -0.05$ ;  $-0.5$ ;  $H = 1.0$ ;  $3.0$ . Рассмотрено два случая, соответствующие начальным данным:  $a_{01} = 0.35$ ,  $a_{02} = 0.626$ . В начальный момент  $r_0$  находим по формуле

$$r_0 = \sqrt{1 - a_0^2},$$

а величину кинетического момента из выражения

$$G = |\mathbf{G}| = \sqrt{a^2 + A_3^2 r^2}.$$

Параметры выбраны так, чтобы выполнялись условия:

$$A_3 \leq 2, a_0 < r_0.$$

Численный анализ показывает, что функции  $a, r, G$  монотонно убывают, а увеличение коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости приводит к изменению характера убывания  $a(\theta)$ . В случае  $\lambda = 1.2$  и  $a_{01} = 0.35$  время торможения при различных значениях коэффициентов  $D$  и  $H$  равно  $T \simeq 0.63$ . При значении  $\lambda = 1.8$  и  $a_{02} = 0.626$  время торможения составляет  $T \simeq 0.53$ . Следовательно, при увеличении коэффициента сопротивления  $\lambda$  торможение твердого тела происходит быстрее. Также время торможения зависит от начальных значений  $a$  и  $r$ . Таким образом, задача квазиоптимального быстрого действия решена.

#### Список литературы

- Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., & Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of motions of a rigid body about its center of mass*. Cham: Springer.
- Акуленко, Л. Д. (1987). *Асимптотические методы оптимального управления*. Москва: Наука.
- Акуленко, Л. Д., Лешенко, Д. Д., Рачинская, А. Л., & Зинкевич, Я. С. (2013). *Возмущенные и управляемые вращения твердого тела*. Одесса: ОНУ.
- Кошляков, В. Н. (1985). *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы*. Москва: Наука.
- Черноузько, Ф. Л. (1968). *Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость*. Москва: Издательство ВЦ АН СССР.
- Черноузько, Ф. Л. (1973). О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, (4), 33—44.
- Черноузько, Ф. Л., Акуленко, Л. Д., & Соколов, Б. Н. (1980). *Управление колебаниями*. Москва: Наука.

# Побудова системи інтегральних рівнянь задачі про тріщину на межі пружного шару та півплощини, що знаходиться під дією двох нормальних сил

Н. М. Антоненко

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна  
[antonenkonina@i.ua](mailto:antonenkonina@i.ua)

Використовуючи одномірне інтегральне перетворення Фур'є, побудовано систему інтегральних рівнянь задачі про тріщину на межі пружного шару та пружної півплощини, що знаходиться під дією двох нормальних зосереджених розтягуючих сил.

**Ключові слова:** шар, півпростір, тріщина, напруження, інтегральне перетворення Фур'є, інтегральне рівняння.

Розглядається плоска деформація пружного шару товщини  $h$ , зчепленого із пружною півплощиною. Усі величини, які стосуються до шару позначатимемо нижнім індексом 1, а до півплощини — 2 (якщо це не призводить до неоднозначності, то індекси біля відповідних величин опускатимемо). Шар та півплощину характеризуватимемо модулями зсуву  $\mu_i$  та коефіцієнтами Пуассона  $\nu_i$  ( $i = 1, 2$ ). Запровадимо локальні декартові системи координат так, як показано на рис. 1.

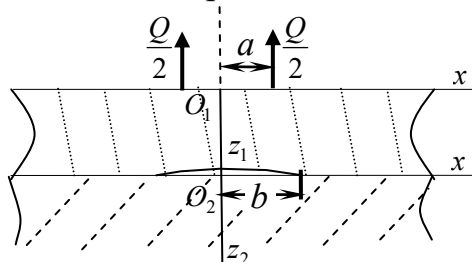


Рис. 1.

На нижній межі шару при  $x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$  шар зчеплений із пружною півплощиною, а при  $x \in [-b, b]$  маємо тріщину. До верхньої межі шару прикладені дві нормальні розтягуючі зосереджені сили величини  $\frac{Q}{2}$  (рис. 1).

Граничні умови:

$$\sigma_{z1}(x, 0) = \frac{Q}{2}(\delta(x - a) + \delta(x + a)), \quad \tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad (1)$$

$$u_2(x, 0) - u_1(x, h) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b, \end{cases} \quad (2)$$

$$w_2(x, 0) - w_1(x, h) = \begin{cases} g(x), & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b, \end{cases}$$

$$\sigma_{z2}(x, 0) = \sigma_{z1}(x, h), \quad \tau_{xz2}(x, 0) = \tau_{xz1}(x, h), \quad (3)$$

$$\sigma_{z1}(x, h) = \tau_{xz1}(x, h) = 0, \quad |x| \leq b, \quad (4)$$

де  $\delta(x)$  — функція Дірака,  $f(x), g(x)$  — неперервно диференційовні функції.

Вважаємо, що всі напруження та переміщення задовольняють умови існування одномірно інтегрального перетворення Фур'є за змінною  $x$  (для будь-якого  $z$ ):

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

У просторі трансформант Фур'є напруження та переміщення точок окремого шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій  $\alpha(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi), \delta(\xi)$  (Антоненко, 2013):

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (5)$$

де  $S = -i\xi \bar{u}(\xi, z), W = p\bar{w}(\xi, z), p = |\xi|$ .

Вирази для нормальних і дотичних напружень у точках нижньої межі шару, з урахуванням умов (1)—(3) та представлень трансформант напружень та переміщень у вигляді комбінацій функцій (5), у просторі трансформант Фур'є набувають такого вигляду:

$$\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = \frac{i\xi A_1(p)N(\xi) + pA_2(p)M(\xi) + \bar{Q}A_3(p)}{D(p)}, \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = \frac{ip}{\xi} \cdot \frac{i\xi A_4(p)N(\xi) - pA_1(p)M(\xi) + \bar{Q}A_5(p)}{D(p)}, \quad (7)$$

де  $M(\xi) = \int_{-b}^b w(t) e^{i\xi t} dt, N(\xi) = \int_{-b}^b u(t) e^{i\xi t} dt, \bar{Q} = \frac{Q(e^{i\xi a} + e^{i\xi a})}{2}, p_1 = ph,$

$\Delta = \frac{\mu_1}{\mu_2}; A_1(p), A_2(p), A_3(p), A_4(p), A_5(p), D(p)$  — відомі функції, які

мають такі властивості

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_1(p)}{D(p)} = \frac{2\Delta\omega_1 a_1}{k_1}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_2(p)}{D(p)} = \frac{2\Delta\omega_1 b_1}{k_1}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_4(p)}{D(p)} = -\frac{2\Delta\omega_1 b_1}{k_1}, \quad (8)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_3(p)}{D(p)} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_5(p)}{D(p)} = 0,$$

$a_1 = -\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \mu_1\omega_1\omega_2 - \mu_2\omega_1\omega_2, b_1 = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2,$

$$k_1 = \omega_1 (2\Delta\omega_2 + 2\Delta\omega_1 + \Delta^2\omega_1\omega_2 - 2\Delta^2\omega_1 - 2\omega_2 - 2\Delta\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_2 - 4\Delta),$$

$$\omega_i = 0,5/(1 - \nu_i), \quad i = 1, 2.$$

Використовуючи зв'язок між оригіналами та трансформантами нормальних і дотичних напружень у точках нижньої межі шару та умови (4), отримаємо систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} -\int_{-b}^b f(t)K_1(t-x)dt + \int_{-b}^b g(t)K_2(t-x)dt + F_1(x) = 0, \\ -\int_{-b}^b f(t)K_3(t-x)dt + \int_{-b}^b g(t)K_1(t-x)dt + F_2(x) = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } K_1(z) = \int_0^\infty \frac{pA_1(p)}{D(p)} \sin pzd p, \quad K_2(z) = \int_0^\infty \frac{pA_2(p)}{D(p)} \cos pzd p,$$

$$K_3(z) = \int_0^\infty \frac{pA_4(p)}{D(p)} \cos pzd p,$$

$$F_1(x) = \frac{Q}{2} \int_0^\infty \frac{A_3(p)}{D(p)} (\cos p(x-a) + \cos p(x+a)) dp,$$

$$F_2(x) = \frac{Q}{2} \int_0^\infty \frac{A_5(p)}{D(p)} (\sin p(x-a) + \sin p(x+a)) dp.$$

Проінтегруємо частинами перші два доданки кожного з рівнянь останньої системи. З урахуванням того, що  $f(\pm b) = g(\pm b) = 0$ , отримаємо:

$$\begin{cases} -\int_{-b}^b B'(t)R_1(t-x)dt + \int_{-b}^b A'(t)R_2(t-x)dt + F_1(x) = 0, \\ -\int_{-b}^b B'(t)R_3(t-x)dt + \int_{-b}^b A'(t)R_1(t-x)dt + F_2(x) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{де } R_1(z) = \int_0^\infty \frac{A_1(p)}{D(p)} \cos pzd p, \quad R_2(z) = \int_0^\infty \frac{A_2(p)}{D(p)} \sin pzd p,$$

$$R_3(z) = \int_0^\infty \frac{A_4(p)}{D(p)} \sin pzd p.$$

З урахуванням властивостей (8), запишемо систему (9) у такому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\int_{-b}^b \varphi(t)L_1(t-x)dt - \int_{-b}^b \psi(t)L_2(t-x)dt - \\ -q_1\pi\varphi(x) - q_2\int_{-b}^b \frac{\psi(t)dt}{t-x} = -F_1(x), \\ \int_{-b}^b \varphi(t)L_3(t-x)dt + \int_{-b}^b \psi(t)L_1(t-x)dt + \\ +q_1\pi\psi(x) - q_2\int_{-b}^b \frac{\varphi(t)dt}{t-x} = -F_2(x), \end{array} \right. \quad (10)$$

де  $\psi(x) = A'(x)$ ,  $\varphi(x) = B'(x)$ ,  $q_1 = \frac{a_1}{k_1}$ ,  $q_2 = \frac{b_1}{k_1}$ ,

$$L_1(z) = \int_0^\infty \left[ \frac{A_1(p)}{D(p)} - q_1 \right] \cos(pz) dp, \quad L_2(z) = \int_0^\infty \left[ \frac{A_2(p)}{D(p)} - q_2 \right] \sin(pz) dp,$$

$$L_3(z) = \int_0^\infty \left[ \frac{A_4(p)}{D(p)} + q_2 \right] \sin(pz) dp.$$

При побудові (10) використано наступні значення інтегралів (у сенсі теорії узагальнених функцій) (Александров, & Пожарский, 2001):

$$\int_0^\infty \sin(pt) dp = \frac{1}{t}, \quad \int_0^\infty \cos(pt) dp = \pi\delta(t).$$

З того, що  $A(\pm a) = 0$ ,  $B(\pm a) = 0$  випливають умови:

$$\int_{-b}^b \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^b \psi(t) dt = 0. \quad (11)$$

Розв'язок системи (10) з додатковими умовами (11) можна знайти методом методом механічних квадратур (Панасюк, Саврук, & Дацьшин, 1976).

### Список літератури

- Антоненко, Н. М. (2013). Плоска деформація багатощарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, 23, 15—21.
- Александров, В. М., & Пожарский, Д. А. (2001). К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости. *Известия РАН Механика твердого тела*, (1), 86—93.
- Панасюк, В. В., Саврук, М. П., & Дацьшин, А. П. (1976). *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*. Киев: Наукова думка.

# Дуальна стратегія аналізу ймовірних загроз для об'єктів критичної інфраструктури

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*  
[armchairdoc@ukr.net](mailto:armchairdoc@ukr.net)

Сформульовані вимоги до систем моніторингу стану об'єктів критичної інфраструктури, перераховані переваги централізованого підходу до технічного діагностування, вказані методи підвищення вірогідності діагностичної інформації.

**Ключові слова:** моніторинг стану, об'єкти критичної інфраструктури, розпізнавання надзвичайних ситуацій, регресійний аналіз.

У теперішній час до об'єктів критичної інфраструктури висувають підвищені вимоги щодо захисту від несанкціонованого втручання в їх роботу, тому моніторинг їхнього функціонування в режимі реального часу є невід'ємною частиною забезпечення їх інформаційної безпеки (Закон України..., 2017). Системи моніторингу стану об'єктів критичної інфраструктури самостійно виконують значну частину рутинної роботи, відслідковуючи значення контрольованих параметрів і події, що відбуваються, співвідносять їх між собою в режимі реального часу, що дозволяє на виході отримати невеликий обсяг справді важливої інформації, яка передається для оцінки стану та прийняття управлінських рішень операторам і керівникам таких об'єктів. Зокрема, на українських АЕС вже відбувається перехід від локальних систем діагностування до створення галузевого комплексу технічного діагностування обладнання АЕС, що надасть такі переваги (Белов, 2003):

- можливість системного вирішення завдань оперативного діагностування за рахунок централізації процесу програмування системи;
- можливість уніфікації окремих програмних блоків різних систем діагностики, зокрема: єдиний стандарт баз даних, стандартизація опитування датчиків, інтерфейсу користувача тощо;
- простота обміну інформацією між різними підсистемами;
- оптимізація числа робочих місць діагностуючого персоналу;
- простота модифікації й удосконалення підсистем шляхом перепрограмування без зміни технічних засобів.

Актуальність питання про те, наскільки інформація про вихід деяких контрольованих параметрів з належних інтервалів, пов'язана з такими обставинами:

- небезпекою значних матеріальних та/або людських втрат у випадку, коли надходження цієї інформації справді передуює виникненню надзвичайної події з відповідними наслідками;
- заходи, які пов'язані з унеможливленням виникнення такої надзвичайної події (як реакція на відповідну інформацію), також пов'язані з суттєвими матеріальними витратами, відволіканням ресурсів, і навіть загрозами життю та здоров'ю людей, які до них залучаються.

Отже, оперативне реагування на отримані засобами контролю дані, що свідчать про відхилення функціонування об'єкта від нормального режиму, має включати до себе дії, спрямовані на розв'язання двох задач:

- максимальне уточнення реального стану речей;
- реалізацію заходів, спрямованих на запобігання надзвичайній ситуації та, у разі потреби, ліквідації її наслідків.

Первинною в цьому комплексі взаємопов'язаних дій є перевірка отриманих даних на їх відповідність реальній ситуації. Таку перевірку обов'язково треба здійснювати в режимі реального часу та давати високо вірогідний результат. До найпростіших заходів у цьому випадку належать повторні запити інформації та/або аналіз послідовних даних, отриманих опитуванням наявних джерел інформації з певною періодичністю (можливо, опитування вказаних джерел з підвищеною частотою та порівняння нових результатів із прогнозованими).

Водночас принциповим моментом у цьому випадку є необхідність використання незалежних джерел інформації про стан системи. Можливість отримання такого роду джерел забезпечується, як правило, наявністю декількох незалежних мереж датчиків системи, але найефективнішим є використання зовнішніх можливостей спостереження, які надаються, зокрема, мережею GPS. За таких умов виникає можливість контролю саме тих параметрів об'єкта, які, за даними внутрішніх мереж датчиків, є найбільш загрозливими. При цьому можуть контролюватись, наприклад, вібрації, інфрачервоне випромінювання (як результат нагрівання конструкції або витoku охолоджуючої рідини), радіаційне випромінювання, конструктивна цілісність тощо (Васильев, 2016). У такому випадку маємо математичну модель, що полягає в паралельній генерації кількох незалежних вибірок та побудови регресійних співвідношень як для фіксованих моментів часу, так і динамічного характеру. Використання регресійного аналізу дозволяє виділяти ті властивості об'єкта, для яких процедура голосування сукупності всіх датчиків вказує на реальний вихід показника в загрозливий діапазон (Дрейпер & Смит, 2016). Кореляційний аналіз отриманих результатів за сукупністю всіх властивостей визначає тим відхилення системи від номінального режиму та дозволяє, відповідно до наявної бази даних про особливості її функціонування, оцінити рівень загрози та сформулювати регламент заходів з усунення її причин.

### Список літератури

- Белов, П. Г. (2003). *Системный анализ и моделирование опасных процессов в техносфере*. Москва: Академия.
- Васильев, А. Д. (2016). *Моделирование тяжелых аварий на АЭС*. Москва: МФТИ.
- Дрейпер, Н., & Смит, Г. (2016) *Прикладной регрессионный анализ* (3-е изд.). Москва: Диалектика.
- Закон України «Про основні засади забезпечення кібербезпеки України» (2017). *Відомості Верховної Ради*, (45), ст. 403. <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/2163-19>

# Мережні обчислення як засіб підвищення ймовірності ефективного функціонування комп'ютерних систем

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[ssaavvaa@ukr.net](mailto:ssaavvaa@ukr.net)

Розглянуто задачу залучення мережних ресурсів для збільшення продуктивності комп'ютерних систем та підвищення їх надійності. Проаналізовано позитивні та негативні фактори, які слід враховувати при створенні систем, які використовують «хмарні» технології

**Ключові слова:** мережні ресурси, безпека, надійність.

Традиційною проблемою, яка виникає на шляху використання мережних сервісів та обчислень у комп'ютерних системах, є проблема безпеки передачі та зберігання інформації в публічних мережах, які до того ж повністю контролюються їх власниками. Водночас мережний ресурс залишається дуже привабливим з точки зору можливості його використання для розв'язання громіздких задач та передавання великих об'ємів інформації.

Задачу підвищення надійності комп'ютерних систем стандартно формулюють як задачу збільшення ймовірності ефективного функціонування системи протягом деякого (можливо, випадкового) проміжку часу (Columbus, 2014). У випадку існування можливості використання з такою ціллю мережевого ресурсу, перш за все, враховують ймовірність того, що протягом вказаного часу мережа не вимагатиме:

- підвищення пропускної спроможності каналів передачі інформації;
- збільшення обчислювальних потужностей;
- додаткових засобів збереження знань;
- використання специфічних програм та сервісів, відсутніх у первісного замовника послуг, тобто в системі.

Лише у випадку, коли ця ймовірність відрізняється від одиниці на величину, що перевищує наперед задане значення, може бути прийняте рішення про залучення мережного ресурсу.

Наступним етапом аналізу ситуації є питання про захист інформації, яка «циркулює» в системі, від зовнішнього та, скоріш за все, несанкціонованого замовником мережевих послуг доступу. При цьому порівнюють можливості проникнення до системи та несанкціонованого доступу до хмарних ресурсів, вивчають можливості її захисту використанням шифрування та стеганографічного приховування. Слід зауважити, що існує теоретична можливість зробити ймовірність небажаного доступу до інформації меншою за рахунок використання хмарних технологій, скориставшись дезорієнтацією ймовірного зловмисника через необхідність пошуку в мережі, ускладненого як різноманіттям ресурсів, так і використанням вищезгаданих засобів приховування та стегано-контейнерів, що можуть бути використані для цього. Водночас, навіть використання досконалих анонімайзерів може бути зменшено доступом до інформації провайдера.

Якщо обидві ймовірності (необхідності використання хмарних ресурсів та захищеності інформації) достатньо великі (іноді розглядають обмеження щодо



їх доступності), то переходять до вивчення якості доступних мережеских послуг, які відповідно до NIST-класифікації мають п'ять таких основних характеристик:

— якість самообслуговування на вимогу (можливість для споживача вибрати серверний час, швидкість доступу й обробки даних, обсяг збереженої інформації тощо;

— універсальність доступу (незалежність його від терміналу, наявного у «клієнта»);

— ступінь інтеграції ресурсів — сховищ, пам'яті, обчислювальних потужностей, пропускну здатності за наявності можливостей для контролю території чи дата-центру, яким вона належить;

— достатня еластичність — наявність можливості для оперативної зміни об'єму послуг в автоматичному режимі;

— облік споживання ресурсів, який дозволяє керувати та оптимізувати використання ресурсів (необхідно для формування звітних документів та дотримання витрачених коштів у межах фінансування).

Виходячи з означених критеріїв, вибирається модель розгортання мережеских ресурсів:

— приватна мережа (для кількох користувачів, об'єднаних організаційно) має незаперечні переваги у вартості та захищеності;

— публічна мережа (найнижчий рівень захищеності);

— гібридна мережа — комбінація кількох структур різних типів зі специфічними протоколами обміну даними;

— спільна мережа (створюється групою виконавців, об'єднаних виконанням спільної задачі).

Рішення про тип використовуваної мережі завжди приймається на основі оптимізації фінансового ресурсу, що полягає в мінімізації витрат, які є сумою витрат на власні ресурси, мережескі ресурси та середнього значення можливих збитків у випадку невиконання поставленої задачі з обов'язковим знаходженням дисперсії (варіації) згаданих витрат.

Отже, наведені вище рекомендації, хоча й мають дещо абстрактний характер, опосередковано вказують на загрози, що, виникають при залученні мережеских ресурсів. Але проблему надійності та навіть безпеки комп'ютерної системи можна сприймати з іншої точки зору. Мова йде про використання мережеских ресурсів у якості резервних щодо власних ресурсів (Буценко & Савченко, 2018), тобто використовувати їх лише у критичних ситуаціях, наприклад, під час відмови частини основного обладнання або дефіциті дискового простору для зберігання даних. У цьому разі мережескі обчислення стають потужним фактором підвищення надійності системи.

#### Список літератури

- Columbus, L. (2014). Roundup of cloud computing forecasts and market estimates, 2014. <https://www.forbes.com/sites/louiscolumbus/2014/03/14/roundup-of-cloud-computing-forecasts-and-market-estimates-2014/#3a041fc757a2>
- Буценко, Ю. П., & Савченко, Ю. Г. (2018). Показники надійності кластерів високої доступності як резервованих систем із структурною надлишковістю. *Математичні машин та системи*, (4), 101—108.

# Модель стохастичної системи автоматичного керування за розширеним критерієм якості

І. М. Голінко, І. Є. Галицька

Київський політехнічний інститут імені Сікорського, Київ, Україна  
[irinagalicka@gmail.com](mailto:irinagalicka@gmail.com)

У статті розглянуто синтез оптимальної стохастичної цифрової системи автоматичного керування (САК). Критерій якості адаптовано до задач керування реальними процесами, що дозволяє мінімізувати дисперсію відхилення вихідного сигналу об'єкту керування (ОК) від завдання САК. Проведено аналіз структури цифрового регулятора (ЦР) в залежності від параметра критерію якості та математичного опису ОК, який показав ефективність роботи ЦР при компенсації стохастичних збурень. Рекомендується використовувати при автоматизації виробничих процесів.

**Ключові слова:** стохастична система автоматичного керування, критерій якості, оптимізація, цифровий регулятор.

Сучасна система автоматичного керування (САК) повинна забезпечувати гарантовану якість керування в умовах дії випадкових збурень, а також мінімізувати витрату матеріальних та енергетичних ресурсів для досягнення поставлених цілей. Переважна більшість систем керування на виробництві реалізують за допомогою одноконтурних САК, тому розгляньмо лінійний об'єкт керування (ОК) з одним входом  $u$  та одним виходом  $y$ . Динамічну поведінку стаціонарного ОК можна представити у вигляді  $z$ -перетворення (Романенко, 1995):

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(z), \quad (1)$$

де  $B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$  та  $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}$ .

Припустимо, що на ОК впливають стохастичні збурення. Оскільки ОК лінійний, можна використати принцип суперпозиції та подати всі збурення як одне збурення, яке діє на виході. Окрім цього, вважаємо, що збурення представляють стаціонарний гаусовий процес із дробово-раціональною спектральною щільністю. Отже, у загальному випадку модель взаємодії ОК зі збурюючим середовищем можна подати рівнянням (Острем, 1973):

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(z) + \lambda \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} \gamma(z), \quad (2)$$

де  $D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m}$ ;  $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}$ ;

$\gamma(z)$  — некорельований випадковий сигнал, причому  $M\{\gamma(t)\} = \bar{\gamma}(t) = 0$ ,

$$M\{\gamma(t) \gamma(t + \tau)\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \tau = 0, \\ 0, & \text{якщо } \tau \neq 0; \end{cases}$$

$M$  — оператор математичного сподівання.

Для узагальнення викладок, у моделі (2) усі поліноми  $m$ -го порядку, оскільки коефіцієнти вищих степенів завжди можна вважати рівними нулю.

**Постановка задачі.** Для промислових САК важливо мінімізувати відхилення вихідного сигналу ОК у робочій точці завдання, також при цьому необхідно обмежувати витрату матеріальних ресурсів на досягнення поставленої цілі. У роботі Golinko (2014) розглядається розширений критерій якості, який ураховує розглянуті вимоги. Використаємо запропонований критерій оптимізації для синтезу стохастичної САК.

Отже, метою роботи є синтез оптимальної структури цифрового регулятора (ЦР), який забезпечує мінімум квадратичного критерію оптимальності:

$$J_{t+1} = M \left\{ q (w_t - y_{t+1})^2 + (1 - q) (w_t - Ku_t)^2 \right\}, \quad (3)$$

де  $w_t$  — завдання ЦР при  $[nT_0] \leq t < [(n+1)T_0]$ ,  $T_0$  — період дискретизації,  $n = 1, 2, 3 \dots$ ;  $q$  — ваговий коефіцієнт, який ураховує у критерії якості співвідношення впливу сигналів розбалансу ( $w_t - y_{t+1}$ ) та приведенного відхилення керуючого впливу ( $w_t - Ku_t$ ),  $q \in [0 \dots 1]$ ;  $K$  — коефіцієнт передачі ОК за каналом регулювання, для статичного ОК

$$K = \frac{\sum_{i=0}^m b_i}{\sum_{i=0}^m a_i}.$$

**Синтез оптимальної структури ЦР.** У критерії якості (3) використано змінну  $y_{t+1}$ , а не  $y_t$ , оскільки у вихідній моделі (2)  $b_0 = 0$  (керуючий сигнал  $u_t$  не впливає на зміну вихідної величини  $y_t$ ). Визначимо  $y_{t+1}$  як функцію відомих змінних  $y_t, y_{t-1}, \dots; u_t, u_{t-1}, \dots$ . Відповідно до рівняння (2), прогнозує значення  $y_{t+1}$  можна отримати із залежності

$$zy(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} zu(z) + \lambda \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} z\gamma(z), \quad (4)$$

звідки,

$$A(z^{-1})C(z^{-1})zy(z) = B(z^{-1})C(z^{-1})zu(z) + \lambda A(z^{-1})D(z^{-1})z\gamma(z).$$

Останнє рівняння записуємо в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}\right) \left(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right) zy(z) = \\
& = \left(b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}\right) \left(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right) zu(z) + \\
& + \lambda \left(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}\right) \left(1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m}\right) z\gamma(z).
\end{aligned}$$

Виконавши множення поліномів та повертаючись у часову область, маємо

$$\begin{aligned}
y_{t+1} + (a_1 + c_1)y_t + \dots + a_m c_m y_{t-2m+1} = \\
= b_1 u_t + (b_2 + b_1 c_1)u_{t-1} + \dots + b_m c_m u_{t-2m+1} + \\
+ \lambda \left[ \gamma_{t+1} + (a_1 + d_1)\gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right].
\end{aligned} \quad (5)$$

З (5) визначимо  $y_{t+1}$  та використаємо його у критерії (3)

$$\begin{aligned}
J_{t+1} = M \left\{ q \left( w_t + (a_1 + c_1)y_t + \dots + a_m c_m y_{t-2m+1} - b_1 u_t - \dots - b_m c_m u_{t-2m+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - \lambda \left[ (a_1 + d_1)\gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right] - \lambda \gamma_{t+1} \right)^2 + (1 - q) \left( w_t - K u_t \right)^2 \right\}
\end{aligned} \quad (6)$$

У момент  $t$  усі змінні, що входять у (6), окрім  $u_t$  та  $\gamma_{t+1}$  відомі. Виконаємо операцію математичного сподівання для (6), враховуючи, що  $\gamma_{t+1}$  не залежить від інших змінних:

$$\begin{aligned}
J_{t+1} = q \left[ \left( w_t + (a_1 + c_1)y_t + \dots + a_m c_m y_{t-2m+1} - b_1 u_t - \dots - b_m c_m u_{t-2m+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - \lambda \left[ (a_1 + d_1)\gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right] \right)^2 + \lambda^2 M \left\{ \gamma_{t+1}^2 \right\} - \right. \\
\left. - 2\lambda \left( w_t + (a_1 + b_1)y_t + \dots + a_m b_m y_{t-2m+1} - b_1 u_t - \dots - b_m c_m u_{t-2m+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - \lambda \left[ (a_1 + d_1)\gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right] \right) M \left\{ \gamma_{t+1} \right\} + (1 - q) \left( w_t - K u_t \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Оптимальне значення сигналу керування  $u_t$  визначимо з умови:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{t+1}}{\partial u_t} = q \left( w_t + (a_1 + c_1)y_t + \dots + a_m c_m y_{t-2m+1} - b_1 u_t - \dots - b_m c_m u_{t-2m+1} - \right. \\
\left. - \lambda \left[ (a_1 + d_1)\gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right] \right) b_1 + K (1 - q) \left( w_t - K u_t \right) = 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

Із (5) знаходимо

$$\begin{aligned}
y_{t+1} - \lambda \gamma_{t+1} = \\
= - \left( a_1 + c_1 \right) y_t - \dots - a_m c_m y_{t-2m+1} + b_1 u_t + \dots + b_m c_m u_{t-2m+1} + \\
+ \lambda \left[ \left( a_1 + d_1 \right) \gamma_t + \dots + a_m d_m \gamma_{t-2m+1} \right].
\end{aligned} \quad (8)$$

Урахувавши (8) у (7), маємо

$$\frac{\partial J_{t+1}}{\partial u_t} = q \left( w_t - y_{t+1} + \lambda \gamma_{t+1} \right) b_1 + K (1 - q) \left( w_t - K u_t \right) = 0. \quad (9)$$

Різницеве рівняння (9) представляємо як  $z$ -перетворення

$$q \left( w(z) - zy(z) + \lambda z \gamma(z) \right) b_1 + K (1 - q) \left( w(z) - Ku(z) \right) = 0. \quad (10)$$

Із (4) знаходимо

$$\lambda z \gamma(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} zy(z) - \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} zu(z)$$

Використовуючи його у (10), отримаємо

$$q \left( w(z) - zy(z) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} zy(z) - \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} zu(z) \right) b_1 + K(1-q)(w(z) - Ku(z)) = 0.$$

Для останнього виразу виконаємо математичні перетворення та отримаємо рівняння оптимального ЦР із мінімальною дисперсією:

$$u(z) = L(z^{-1}) [H(z^{-1})w(z) - F(z^{-1})y(z)], \quad (11)$$

де

$$L(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{K^2(1-q)A(z^{-1})D(z^{-1}) + qb_1B(z^{-1})C(z^{-1})z};$$

$$H(z^{-1}) = (qb_1 + K(1-q))D(z^{-1}); F(z^{-1}) = qb_1(D(z^{-1}) - C(z^{-1}))z.$$

При  $A(z^{-1}) = C(z^{-1})$  та/або  $q = 1$  маємо окремі випадки реалізації ЦР:

1) якщо  $A(z^{-1}) = C(z^{-1})$ , то

$$L(z^{-1}) = \frac{1}{K^2(1-q)D(z^{-1}) + qb_1B(z^{-1})z},$$

$$H(z^{-1}) = (qb_1 + K(1-q))D(z^{-1}), F(z^{-1}) = qb_1(D(z^{-1}) - C(z^{-1}))z;$$

2) якщо  $q = 1$ , то

$$L(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{b_1B(z^{-1})C(z^{-1})z}, H(z^{-1}) = b_1D(z^{-1}),$$

$$F(z^{-1}) = b_1(D(z^{-1}) - C(z^{-1}))z;$$

3) якщо  $q = 1$  та  $A(z^{-1}) = C(z^{-1})$ , то

$$L(z^{-1}) = \frac{1}{b_1B(z^{-1})z}, H(z^{-1}) = b_1, F(z^{-1}) = b_1(D(z^{-1}) - C(z^{-1}))z.$$

Структурна схема моделі САК, що включає ОК (4) та ЦР (11), представлена на рис.°1. Отримана структура оптимального ЦР для стохастичного одномірного об'єкта відповідає узагальненій структурі лінійного ЦР (Романенко, 1995).

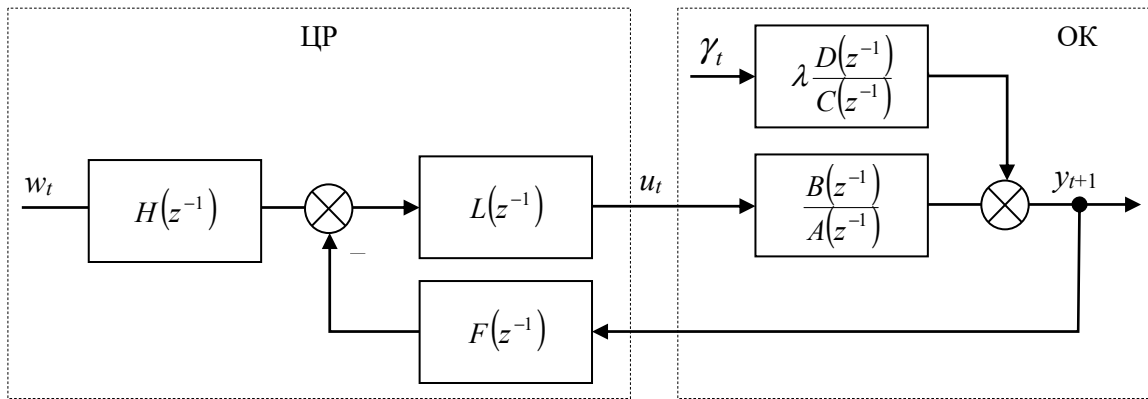


Рис. 1. Структурна схема моделі стохастичної САК

Закон оптимального керування (11) визначає керуючий вплив та встановлює узагальнену функцію якості у робочу точку завдання  $w_t$  САК на кожному періоді квантування. У результаті, з плином часу мінімізується дисперсія узагальненої функції якості (3). Використання такого закону на реальних об'єктах забезпечує компенсування випадкових шумів, а також, дає змогу ЦР стабілізувати вихідну величину з незначним дрейфом навколо сигналу завдання.

#### Список літератури

- Golinko, I. M. (2014). Optimal tuning of a control system for a second-order plant with time delay. *Thermal Engineering*, 61(7), 524–532.
- Острем, К. (1973). *Введение в стохастическую теорию управления*. Москва: Мир.
- Романенко, В. Д. (1995). *Методи автоматизації прогресивних технологій*. Київ: Вища школа.

# Про рух стрижня під дією ексцентрично прикладеної поперечної сили

Є. Т. Горалік, Т. О. Лупіна

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна  
lupina@i.ua

Розглядається задача про рух прямого стрижня під дією прикладеної до його кінця сталої за величиною поперечної сили на основі розв'язання диференціальних рівнянь його обертового руху відносно центру мас та поступального руху разом із центром мас у проекціях на осі декартової системи координат.

**Ключові слова:** обертовий рух, поступальний рух, рух центру мас, траєкторія.

У роботі авторів Горалік та Лупіна (2018) на основі розв'язку диференціальних рівнянь руху центру мас стрижня та його обертового руху навколо центру мас без врахування сил опору середовища отримано аналітичний розв'язок задачі при кутах повороту, що не перевищують  $90^\circ$ . Представлено результати виконаних за отриманими формулами числових розрахунків часу повороту, швидкості та координат центру мас стрижня (металевого понтону) масою  $m = 2700$  кг, довжиною  $l = 12$  м при значенні поперечної сили  $F = 100$  Н для кутів повороту  $\phi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  та графік траєкторії руху центру мас стрижня.

Оскільки отримані диференціальні рівняння руху центру мас стрижня не інтегруються в елементарних функціях, було застосовано відомі розвинення тригонометричних функцій у степеневі ряди (Смирнов, 1974):

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Як відомо, ці ряди зручні для обчислення значень функцій  $\sin x$  і  $\cos x$  для малих значення кута  $x$   $\left(x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ . При великих значеннях  $x$  ці ряди теж збігаються, але повільно, і для обчислення незручні.

Тому для дослідження руху стрижня при кутах повороту до  $2\pi$  в даній роботі задача розв'язується послідовно для 4 етапів повороту: на кут від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , від  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$ , від  $\pi$  до  $\frac{3}{2}\pi$  та від  $\frac{3}{2}\pi$  до  $2\pi$ . При цьому результати знаходження швидкостей і координат центру мас у кінці кожного етапу використовуємо як початкові умови при розв'язуванні диференціальних рівнянь його руху на наступному етапі.

Кут повороту стрижня визначається з розв'язку диференціального рівняння обертового руху стрижня виразу

$$\phi = \frac{3Ft^2}{ml}.$$

Звідси час повороту на кут  $\phi$  знаходиться за формулою

$$t = \sqrt{\frac{\phi ml}{3F}}.$$

Поклавши

$$x = \frac{3Ft^2}{ml}$$

і обмежившись першими п'ятьма членами розкладу, у результаті розв'язку диференціальних рівнянь руху центру мас стрижня з урахуванням початкових умов для першого етапу руху (при  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ) отримали:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{F}{m} \left( 1 \cdot t - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^{10} \frac{t^{21}}{21 \cdot 10!} \right) \\ \dot{y} &= \frac{F}{m} \left( \frac{F}{ml} t^3 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^{11} \frac{t^{23}}{23 \cdot 11!} \right) \\ x &= \frac{F}{m} \left( \frac{t^2}{2} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right) \\ y &= \frac{F}{m} \left( \frac{F}{4 \cdot ml} t^4 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right) \end{aligned}$$

Результати виконаних за останніми формулами числових розрахунків руху досліджуваного стрижня представлені в табл. 1.

Таблиця 1

$\phi$	$t, \text{с}$	$V_x, \text{м/с}$	$V_y, \text{м/с}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$
0	0	0	0	0	0
$\pi/6$	7,5199	0,2710	0,04767	1,0377	0,0905
$\pi/4$	9,2099	0,3207	0,0854	1,5390	0,2011
$\pi/3$	10,6347	0,3528	0,1271	2,0202	0,3515
$\pi/2$	13,0248	0,3762	0,2114	2,9009	0,7537

Диференціальні рівняння для другого етапу руху стрижня та їх розв'язки мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F}{m} \cos \phi = -\frac{F}{m} \sin \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right), \quad \ddot{y} = \frac{F}{m} \sin \phi = \frac{F}{m} \cos \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right); \\ \dot{x} &= -\frac{F}{m} \left( \frac{F}{ml} t^3 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} \right) + A_1 \\ \dot{y} &= \frac{F}{m} \left( 1 \cdot t - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} \right) + B_1 \end{aligned}$$



$$x = -\frac{F}{m} \left( \frac{F}{4 \cdot ml} t^4 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right) + A_1 t + A_2$$

$$y = \frac{F}{m} \left( \frac{t^2}{2} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right) + B_1 t + B_2$$

З урахуванням початкових умов сталі інтегрування  $A_1 = 0,376$  м/с,  $A_2 = 2,876$  м,  $B_1 = 0,211$  м/с,  $B_2 = 0,754$  м.

Результати числових розрахунків, виконаних за останніми формулами, представлені в табл. 2.

Таблиця 2

$\phi$	$\phi - \frac{\pi}{2}$	$t$	$V_x$	$V_y$	$x$	$y$
$\pi/2$	0	0	0,376	0,211	2,8760	0,754
$2\pi/3$	$\pi/6$	2,015	0,375	0,286	3,633	1,254
$3\pi/4$	$\pi/4$	2,927	0,373	0,319	3,974	1,53
$5\pi/6$	$\pi/3$	3,79	0,37	0,351	4,295	1,819
$\pi$	$\pi/2$	5,395	0,358	0,409	4,88	2,43

Для третього етапу руху стрижня маємо:

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m} \cos\left(\frac{3Ft^2}{ml}\right), \quad \ddot{y} = -\frac{F}{m} \sin\left(\frac{3Ft^2}{ml}\right).$$

$$\dot{x} = -\frac{F}{m} \left( 1 \cdot t - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} \right) + C_1;$$

$$\dot{y} = -\frac{F}{m} \left( \frac{F}{ml} t^3 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} \right) + D_1.$$

$$x = -\frac{F}{m} \left( \frac{t^2}{2} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right) + C_1 t + C_2;$$

$$y = -\frac{F}{m} \left( \frac{F}{4 \cdot ml} t^4 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right) + D_1 t + D_2$$

З урахуванням початкових умов сталі інтегрування  $C_1 = 0,358$  м/с,  $C_2 = 4,88$  м,  $D_1 = 0,409$  м/с,  $D_2 = 2,43$  м.

Результати числових розрахунків для третього етапу представлені в табл. 3.

Таблиця 3

$\phi$	$\phi - \pi$	$t$	$V_x$	$V_y$	$x$	$y$
$\pi$	0	0	0,358	0,409	4,88	2,43
$7\pi/6$	$\pi/6$	1,476	0,3033	0,4086	5,368	2,993
$5\pi/4$	$\pi/4$	2,174	0,2774	0,4078	5,57	3,232
$4\pi/3$	$\pi/3$	2,8496	0,2525	0,4064	5,7498	3,445
$3\pi/2$	$\pi/2$	4,1398	0,2051	0,4009	6,0449	3,8061

Для четвертого етапу руху стрижня отримали:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \sin \frac{3Ft^2}{ml}, \quad \ddot{y} = -\frac{F}{m} \cos \frac{3Ft^2}{ml}.$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m} \left( \frac{F}{ml} t^3 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t^{15}}{15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t^{19}}{19 \cdot 9!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^{11} \frac{t^{23}}{23 \cdot 11!} \right) + E_1$$

$$\dot{y} = -\frac{F}{m} \left( 1 \cdot t - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{17}}{17 \cdot 8!} \right) + H_1$$

$$x = \frac{F}{m} \left( \frac{F}{4 \cdot ml} t_1^4 - \left( \frac{3F}{ml} \right)^3 \frac{t_1^8}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^5 \frac{t_1^{12}}{12 \cdot 11 \cdot 5!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^7 \frac{t_1^{16}}{16 \cdot 15 \cdot 7!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^9 \frac{t_1^{20}}{20 \cdot 19 \cdot 9!} \right) + E_1 t_1 + E_2$$

$$y = -\frac{F}{m} \left( \frac{t^2}{2} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^2 \frac{t^6}{6 \cdot 5 \cdot 2!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^4 \frac{t^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 4!} - \left( \frac{3F}{ml} \right)^6 \frac{t^{14}}{14 \cdot 13 \cdot 6!} + \left( \frac{3F}{ml} \right)^8 \frac{t^{18}}{18 \cdot 17 \cdot 8!} \right) + H_1 t + H_2$$

Тут сталі інтегрування  $E_1 = 0,2051$  м/с,  $E_2 = 6,0449$  м,  $H_1 = 0,4009$  м/с,  $H_2 = 3,8061$  м.

Результати числових розрахунків для четвертого етапу руху представлені в табл. 4.

Таблиця 4

$\phi$	$\phi - \frac{3\pi}{2}$	$t$	$V_x$	$V_y$	$x$	$y$
$3\pi/2$	0	0	0,2051	0,4009	6,0449	3,8061
$5\pi/3$	$\pi/6$	1,22	0,2053	0,3557	6,2952	4,3228
$7\pi/4$	$\pi/4$	1,8076	0,2058	0,333958	6,4159	4,5913
$11\pi/6$	$\pi/3$	2,381	0,2066	0,3127	6,5342	4,8656
$2\pi$	$\pi/2$	3,49	0,209955	0,2718	6,7649	5,4307

Траекторію руху центру мас стрижня, побудовану за отриманими даними, показано на рис. 1.

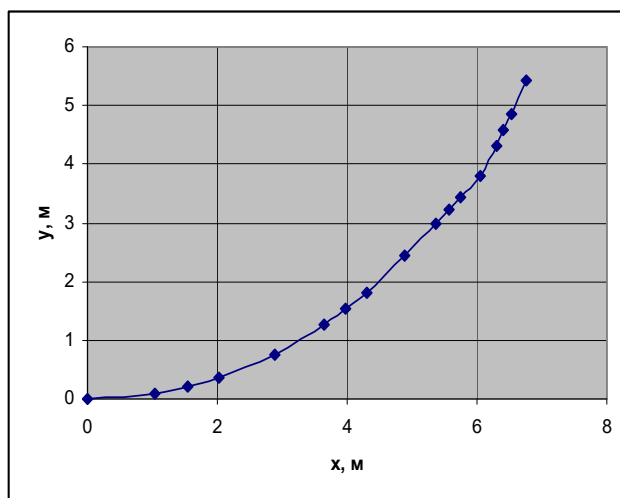


Рис. 1. Траекторія руху центру мас стрижня при його повороті на  $360^\circ$

#### Список літератури

- Горалік, Є. Т., & Лупіна, Т. О. (2018). Про рух стрижня під дією поперечної сили, прикладеної до його кінця. У *Матеріалах VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 28—29 грудня 2017 р. (с. 36—40). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Смирнов, В. И. (1974). *Курс высшей математики*. (Т. 1). Москва: Наука.

# Застосування сплайн-функцій у задачах про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів

Я. М. Григоренко<sup>1</sup>, А. Я. Григоренко<sup>1</sup>, Л. С. Рожок<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

<sup>2</sup>Національний транспортний університет, Київ, Україна

<sup>2</sup>[r.l.s@ua.fm](mailto:r.l.s@ua.fm)

На основі методу сплайн-функцій розв'язано задачу про напружений стан ізотропних суцільних циліндрів за жорсткого закріплення торців при дії розподіленого та локального навантаження, при цьому розкрито невизначеність у геометрично особливій точці.

**Ключові слова:** геометрично особлива точка, локальне навантаження, напружений стан, сплайн-функції, суцільні циліндри.

Останнім часом, у задачах обчислювальної математики, математичної фізики та механіки для їх розв'язування почали широко застосовувати сплайн-функції (Курпа & Осетров, 2010). До числа основних переваг методу наближення сплайн-функціями можна віднести той факт, що стійкість сплайнів відносно локальних збурень в околі точки не впливає на поведінку сплайну в цілому, як, наприклад, це має місце при поліноміальному наближенні; гарна збіжність сплайн-інтерполяції на відміну від багаточленної; простота і зручність у реалізації алгоритмів та обчислення сплайнів на персональних комп'ютерах (Алберг, Нильсон, & Уолш, 1972).

Суцільні циліндри, що розглядаються, віднесено до ортогональної циліндричної системи координат  $r, \theta, z$ , де  $r$  — полярний радіус,  $\theta$  — центральний кут у поперечному перерізі,  $z$  — поздовжня координата. За вихідні приймаються основні рівняння лінійної теорії пружності для ізотропного осесиметричного тіла (Абрамян, 1958) у циліндричній системі координат (співвідношення Коші, рівняння рівноваги, співвідношення закону Гука). Циліндри знаходяться при дії осесиметричного навантаження

$$q = q_0 \sin^m \frac{\pi z}{l},$$

прикладеного на зовнішній поверхні.

Обравши за розв'язувальні функції компоненти переміщення  $u_r, u_\theta$ , після деяких перетворень можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_r, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (1)$$

$(0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq l).$

На торцях циліндра мають місце умови жорсткого закріплення

$$u_r = 0, u_z = 0 \text{ при } z = 0; l. \quad (2)$$

Граничні умови при  $r = \text{const}$  можна задати у вигляді

$$u_r = 0, \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad (3)$$

$$\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z} = q_r, \quad \text{при } r = R.$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$$

Для зниження розмірності вихідної задачі застосовується підхід, що базується на сплайн-апроксимації розв'язку в напрямку твірної (Григоренко, Григоренко, & Рожок, 2006). Подамо шуканий розв'язок у вигляді сплайн-функцій

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(r) \varphi_{1i}(z), \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(r) \varphi_{2i}(z), \quad (4)$$

де  $u_{1i}(r)$ ,  $u_{2i}(r)$  — шукані функції, а  $\varphi_{1i}(z)$ ,  $\varphi_{2i}(z)$  — функції, побудовані за допомогою лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів третього степеня, що дозволяють точно задовольнити граничні умови та торцях циліндра (2), які у випадку жорсткого закріплення торців мають вигляд

$$\varphi_{i0}(z) = -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \quad \varphi_{i1}(z) = B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z);$$

$$\varphi_{ij}(z) = B_3^j \quad (j = 2, 3, \dots, N-2);$$

$$\varphi_{iN-1}(z) = B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \quad \varphi_{iN}(z) = -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z);$$

Після підстановки виразів (4) до системи диференціальних рівнянь (1), необхідно задовольнити їх у точках колокації  $z = z_k$  ( $k = 0, N$ ). Таким чином отримуємо систему  $2(N+1)$  звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Аналогічно чинять із граничними умовами на краях  $r = \text{const}$  (3).

Розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}''(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) +$$

$$+ \sum_{i=0}^N \frac{1}{r^2} u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}'(z_k), \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) = -\frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} u_{1i} \varphi'_{1i}(z_k) -$$

$$-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) \quad (k = 2(N+1));$$

із граничними умовами

$$\sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) = 0, \quad \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad (6)$$

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) +$$

$$+ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi'_{2i}(z_k) = q_r, \quad \text{при } r = R.$$

$$\sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi'_{1i}(z_k) + \sum_{i=1}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0$$

Отримана система звичайних диференціальних рівнянь (5) із граничними умовами (6) утворює двоточкову крайову задачу на проміжку  $0 \leq r \leq R$ . При цьому в рівняннях системи (5) при  $r = 0$  необхідно розкрити невизначеності  $\frac{0}{0}$ . Ураховуючи, що при  $r \rightarrow 0$

$$\frac{u_{1i}}{r} \rightarrow \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}), \quad (7)$$

рівняння (5) у геометрично особливій точці ( $r = 0$ ) набувають вигляду

$$\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k). \quad (8)$$

Ставлячи для систем рівнянь (5), (8) граничні умови (6), приходимо до крайової задачі, яку можна розв'язати чисельно. При цьому для  $r = 0$  використовують система рівнянь (8), а потім — систему рівнянь (5).

Нехай

$$y_{1i} = u_{1i}, \quad y_{2i} = \frac{du_{2i}}{dr}, \quad y_{3i} = u_{2i}, \quad y_{4i} = \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}).$$

Тоді розв'язувальну систему диференціальних рівнянь можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} + \bar{f}, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (9)$$

де

$$\bar{Y} = \{y_{10}, \dots, y_{1N}; y'_{10}, \dots, y'_{1N}; y_{20}, \dots, y_{2N}; y'_{20}, \dots, y'_{2N}; y_{30}, \dots, y_{3N}; y'_{30}, \dots, y'_{3N}; y_{40}, \dots, y_{4N}; y'_{40}, \dots, y'_{4N}\}^T;$$

$A(r)$  — квадратна матриця порядку  $4(N+1)$ ,  $\bar{f}$  — вектор правої частини. Граничні умови можна записати аналогічно

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(R) = \bar{b}_2. \quad (10)$$

Розв'язок крайової задачі (9), (10) здійснюється стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних:

$$R = 5; l_i = 2, 5; 5; 15; 35; 65; m = 1; 8.$$

При  $m = 1$  — маємо розподілене навантаження, при  $m = 8$  — локальне вздовж твірної. Результати розподілу полів нормальних переміщень наведено на рис. 1, колових напружень — на рис. 2, на зовнішній поверхні циліндрів вздовж твірної. Графіки на рис. 1 а, 2 а відповідають випадку розподіленого навантаження, на рис. 1 б, 2 б — локального. Цифрам 1—5 відповідають значення довжин циліндрів, починаючи з найкоротшого. Координата  $\xi = 7l_i / z$ .

З наведених графіків видно, що поблизу торців мають місце крайові ефекти.

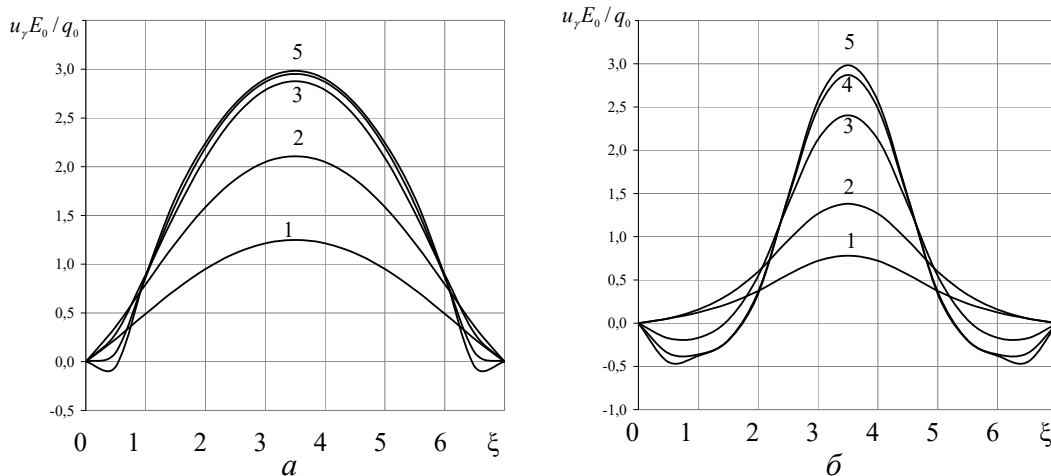


Рис. 1. Розподіл переміщень вздовж твірної циліндра

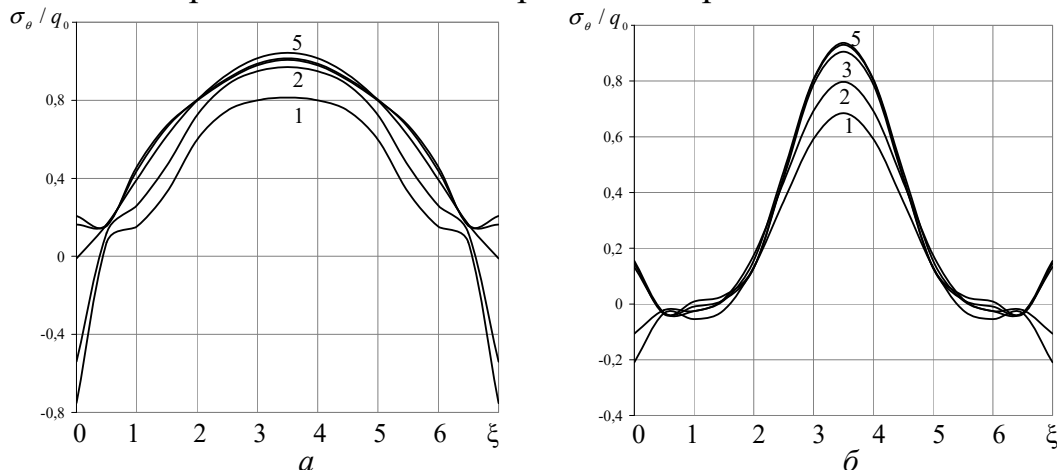


Рис. 2. Розподіл напружень вздовж твірної циліндра

Для коротких циліндрів ( $l_i = 2, 5; 5$ ) крайові ефекти поблизу торців більшою мірою спостерігаються в розподілі колових напружень (рис. 2). Для циліндрів середньої довжини та довгих ( $l_i = 15; 35; 65$ ) — у розподілі нормальних переміщень (рис. 1). При цьому в середньому перерізі  $z = l_i / 2$  максимальні значення як переміщень, так і напружень збільшуються при збільшенні довжини циліндра.

#### Список літератури

- Абрамян, Б. Л. (1958). Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. *Доклады АН АрмССР*, 26(2), 65—72.
- Алберг, Д., Нильсон, Э., & Уолш, Д. (1972). *Теория сплайнов и ее приложения*. Москва: Мир.
- Григоренко, Я. М., Григоренко, А. Я., & Рожок, Л. С. (2006). К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. *Прикладная механика*, 42(6), 24—31.
- Курпа, Л. В., & Осетров, А. А. (2010). Решение задач изгиба многослойных пологих оболочек с применением метода  $R$ -функций и сплайн-аппроксимации. *Проблемы машиностроения*, 13(2), 38—50.



# Функціональні рівняння: приклад, застосування, методи розв'язування

В. Ф. Давидович

Луцька загальноосвітня школа І—ІІІ ступенів № 25, Луцьк, Україна

[v.f.davydovych@gmail.com](mailto:v.f.davydovych@gmail.com)

Функціональні рівняння широко застосовують до розв'язання різноманітних задач в математиці та суміжних з нею дисциплінах. У доповіді коротко викладено основні поняття, наведено приклади відомих рівнянь та подано основні методи розв'язування функціональних рівнянь.

**Ключові слова:** функціональне рівняння, рівняння Коші, рівняння д'Аламбера, рівняння Лобачевського, рекурентні співвідношення, числа Фібоначчі.

Функціональні рівняння широко застосовують у різноманітних задачах математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, проективної геометрії, динамічного програмування та багатьох інших розділів математики (див. список літератури та цитовану там літературу).

Функціональними рівняннями називають рівняння, у яких шукані функції пов'язані з відомими за допомогою операції утворення складеної функції. Найбільшого поширення набули рівняння, у складених функціях яких, шуканими є зовнішні функції, а внутрішні є або відомими функціями, або поєднують з допомогою арифметичних операцій відому й шукану функції. Зазвичай шукані функції є функціями однієї змінної, а от внутрішні функції можуть залежати як від однієї, так і від кількох змінних. Одну з них уважають *незалежною*, а інші називають *вільними* змінними. Термін «функціональне рівняння» як правило використовується для рівнянь, які не зводяться простими способами до алгебричних рівнянь.

*Розв'язком* функціонального рівняння називають функцію, яка на заданій множині перетворює рівняння на тотожність. Функціональне рівняння вважають розв'язаним, якщо знайдено всі його розв'язки або доведено, що їх немає.

Розглянь приклади відомих функціональних рівнянь.

*Рівняння Коші*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

яке використовують зокрема у проективній геометрії та теорії ймовірностей. Це рівняння задовольняють усі лінійні однорідні функції

$$f(x) = c_1 x$$

(тут і далі параметри  $c$  з індексами є довільними дійсними сталими, якщо не вказано додаткових обмежень).

*Квадратичне рівняння*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)], \quad (1)$$

яке отримав *д'Аламбер*, розв'язуючи проблему паралелограма сил. Розв'язком рівняння (1) є функція

$$f(x) = c_2 x^2.$$

Рівняння Єнсена

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

задовольняють усі лінійні функції

$$f(x) = ax + b.$$

Рівняння

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2, \quad (2)$$

використане Лобачевським для визначення кута паралельності у своїй геометрії. Рівняння (2) задовольняє функція вигляду

$$f(x) = c_3 e^x.$$

У кожному з цих рівнянь  $f$  — невідома функція однієї змінної;  $x+y$  та  $x-y$  — відомі функції двох змінних;  $x$  — незалежна змінна;  $y$  — вільна змінна.

Розгляньмо функціональне рівняння вигляду

$$f(x+2y) + f(x-2y) + 6f(x) = 4[f(x+y) + f(x-y) + 6f(y)], \quad (3)$$

де  $f$  — довільна функція,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Одним з розв'язків рівняння (3) є функція вигляду

$$f(x) = x^4.$$

Справді, легко переконатися, що для заданої функції  $f(x)$  виконується рівність:

$$(x+2y)^4 + (x-2y)^4 + 6x^4 = 4[(x+y)^4 + (x-y)^4 + 6y^4].$$

Рівняння (3) досліджувалося в багатьох роботах (див., наприклад, статті Chung та Sahoo (2003), Lee, Im та Hwang (2005) та цитовану там літературу). Зокрема, в роботі Chung та Sahoo (2003) побудовано його загальний розв'язок. В статті Lee та ін. (2005) встановлено необхідні та достатні умови (теорему 2.1) при яких деяка функція  $f$  буде розв'язком рівняння (3), а також досліджено питання стійкості рівняння (3).

Перейдімо тепер до окремого випадку функціональних рівнянь, а саме до рекурентних співвідношень (отримали широке застосування в комбінаториці, аналізі алгоритмів, тощо), що містять невідому функцію від цілих чисел і оператор зсуву.

Найвідомішим рекурентним співвідношенням, є рекурентне співвідношення для *числа Фібоначчі*:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

За означенням, перші два числа в послідовності Фібоначчі є або 1 та 1, або 0 та 1, а кожне наступне число є сумою двох попередніх. Зазначимо, що числа Фібоначчі тісно пов'язані з золотим перерізом  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (застосовують у мистецтві, архітектурі, тощо):

$$f(n) \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

За допомогою рекурентних співвідношень задають також арифметичну й геометричну прогресії, факторіал натурального числа, з якими учні знайомляться у шкільному курсі алгебри:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = qb_n, \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

З вищесказаного випливає, що функціональні рівняння є досить відомими математичними об'єктами та займають значне місце не тільки в математиці, а також у суміжних з нею дисциплінах. У зв'язку з цим ми коротко зупинемося на деяких загальних методах розв'язування функціональних рівнянь.

Основні методи розв'язування функціональних рівнянь (Федак, 2018).

1. *Метод невизначених коефіцієнтів* для розв'язування функціональних рівнянь полягає в тому, що шуканий розв'язок записують у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних функцій

$$f(x) = c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x) + \dots + c_n a_n(x).$$

Таку функцію підставляють у задане рівняння і прирівнюють коефіцієнти при однакових  $a_k(x)$  у його лівій та правій частинах. З отриманої системи рівнянь знаходять сталі  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

2. *Метод підстановок*. Цей метод є найбільш поширеним способом розв'язування функціональних рівнянь. Він дає змогу досліджувати функціональні рівняння звести до рівнянь відомого типу, зокрема алгебричних рівнянь та їх систем. Під час розв'язання функціональних рівнянь методом підстановки основною складністю є виділення числа або виразу, який треба підставити в дане рівняння.

3. *Метод граничного переходу*. Цей метод використовують у випадках, коли шуканим розв'язком функціонального рівняння є неперервна в деякій області функція. Метод граничного переходу передбачає побудову послідовності чисел  $\{x_n\}$  за деякою рекурентною формулою та використання рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

4. *Метод диференціювання*. Він полягає в тому, що для знаходження розв'язку функціонального рівняння в класі диференційованих функцій доцільно здиференціювати обидві його частини за незалежною змінною. Проілюструємо застосування методу диференціювання на прикладі розв'язування рівняння Коші.

**Приклад.** Знайти всі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Розв'язання.* Продиференціювавши обидві частини рівняння за змінними  $x$  та  $y$ , отримуємо:

$$f'(x+y) = f'(x), \quad f'(x+y) = f'(y).$$

Таким чином, виконується рівність

$$f'(x) = f'(y) \text{ для всіх } x, y \in \mathbb{R}.$$

Рівняння (5) має розв'язок лише при одночасному виконанні умов  $f'(x) = c_1$ ,  $f'(y) = c_1$ , з яких знаходимо функцію  $f(x) = c_1x + c_2$ . Підставивши знайдену функцію в рівняння (4), переконуємося, що  $c_1$  може бути довільним дійсним числом, а  $c_2 = 0$ .

Детальніше ознайомитися з функціональними рівняннями, методами їх розв'язування та можливим застосуванням можна, наприклад, у монографіях зі списку літератури.

### Список літератури

- Balasubrahmanyam, R. & Lau, K. S. (2014). *Functional equations in probability theory*. Elsevier.
- Bellman, R. & Lee, E.S. (1978). *Functional equations in dynamic programming*. *Aequationes Mathematicae*, 17(1), 1–18.
- Chung, J. K. & Sahoo, P. K. (2003). On the general solution of a quartic functional equation. *Bull. Korean Math. Soc.*, 40(4), 565–576.
- Kuczma, M. (1985). *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*. Warszawa: Polish Sci. Publ. and Silesian Univ.
- Lee, S. H., Im, S. M. & Hwang, I. S. (2005). Quartic functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 307(2), 387–394.
- Rassias, T. M. & Brzdek, J. (2012). *Functional equations in mathematical analysis*. New York, NY, USA: Springer.
- Rassias, T. M. (Ed.). (2003). *Functional equations, inequalities, and applications*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Федак, І. В. (2018). *Функціональні рівняння: Навчальний посібник*. Івано-Франківськ: ПНУ. <http://194.44.152.155/elib/local/2981.pdf>

# Підбір закону ймовірнісного розподілу рівня автентичності людини

О. О. Диховичний, Н. В. Круглова

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*  
[adyx@ukr.net](mailto:adyx@ukr.net), [natahk@ukr.net](mailto:natahk@ukr.net)

У роботі проаналізовано результати тестування на рівень автентичності за опитувальником А. М. Wood, Р. А. Linley. Оцінено параметри автентичності респондентів та проведено підбір ймовірнісного розподілу, який найкраще описує вибірку значень параметрів автентичності. Показано, що таким розподілом є нормальний розподіл.

**Ключові слова:** автентичність; IRT, ймовірнісний розподіл.

Поняття феномену автентичності людини є одним важливих питань сучасної психології, розгорнуте означення якого наводиться у роботі Дукочухній та ін. (2018), там же досліджуються за допомогою сучасних моделей IRT (van der Linden, 2016) результати, які були отримані під час опитування студентів 1—4 курсів педагогічних ЗВО м. Києва, що здобувають фах практичного психолога закладів освіти за опитувальником Wood, Linley та ін. (2008), адаптованого колективом лабораторії методології й теорії психології Інституту психології імені Г. С. Костюка НАПН України (керівник НДР В. Л. Зливков) (Зливков та ін., 2017). Всього в дослідженні взяли участь 162 особи, з них 117 жіночої та 45 чоловічої статі. У даній роботі досліджуються питання визначення статистичного ймовірнісного розподілу рівня автентичності респондентів.

З van der Linden (2016) відомо, що параметри осіб, які проходять тестування, зокрема, рівень автентичності, мають розподіл близький до нормального, якщо тестування було адекватним.

Рівень автентичності респондентів, який вимірюють у логітах, визначено за допомогою Generalized partial credit model. У результаті застосування цієї моделі, ми отримали статистичний ряд випадкової величини — параметра підготовленості (рівень автентичності) об'ємом 162, зі значеннями з інтервалу  $(-3; 3)$ . Оцінку параметрів автентичності проведено засобами мови статистичного програмування R (<https://cran.cnr.berkeley.edu>)(пакет **mirt**)

Підбір найбільш підходящого ймовірнісного розподілу побудовано за наступною схемою:

- 1) підбір можливого теоретичного закону розподілу, який найкраще описує вибірку;
- 2) обчислення оцінок основних параметрів розподілу;
- 3) перевірка гіпотези про узгодженість емпіричного і теоретичного розподілів.

Цю процедуру можна реалізувати в середовищі R засобами пакету **fitdistrplus**.

Підбір теоретичного розподілу проводився на підставі аналізу гістограм і теоретичної щільності розподілу; емпіричної і теоретичної функції розподілу; P-P і Q-Q діаграми. Було перевірено розподіли: нормальний, логістичний, розподіл Вейбула, гамма, логнормальний, експоненціальний.

Рис. 1 Нормальний розподіл

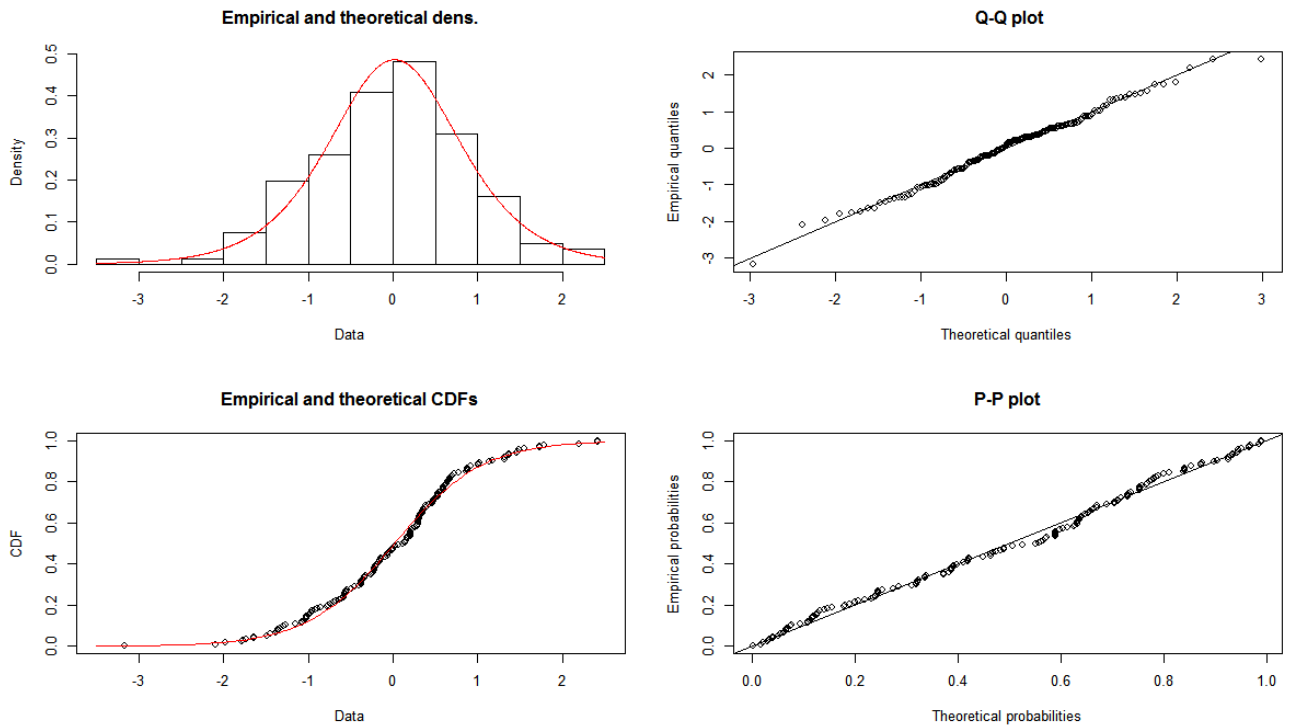


Рис. 2. Логістичний розподіл

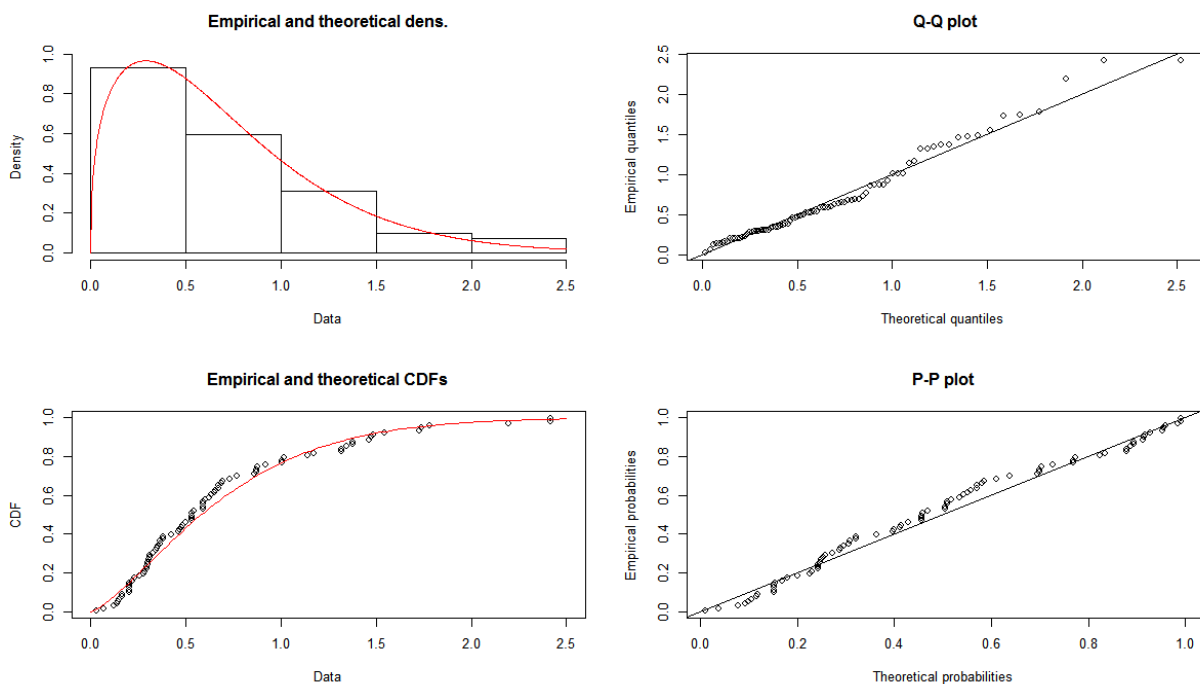


Рис. 3. Розподіл Вейбула

Як видно з рис. 1—3, що для даної вибірки найбільш підходить три розподіли: нормальний, логістичний і розподіл Вейбула.

Одним із вхідних параметрів функції **fitdist** є метод отримання оцінок розподілу. Було розглянуто всі можливі: метод моментів (**mme**), метод квантилів (**qme**), метод найбільшої вірогідності (**mle**), метод найменшої відстані (**mge**).

У табл. 1—2 наведено оцінки параметрів за результатами роботи функції **fitdist** для нормального і логістичного розподілів, у табл. 3 — за результатами роботи функції **mledist** для розподілу Вейбула.

Таблиця 1. Нормальний розподіл

Метод	mme	mle	qme	mge
Параметри розподілу	Mean=-0.00087 Sd=0.9184	Mean=-0.000874 Sd=0.9184	Mean=0.1289566 Sd=1.0366202	Mean= 0.02362671 Sd=0.86973096
loglik	-216.0797	-216.0797	-219.5445	-217
Aic	436	436	443	437
bic	442	442	449	443
p-value	0.5433	0.5433	0.01138	0.6261

Таблиця 2. Логістичний розподіл

Метод	mme	mle	qme	mge
Параметри розподілу	Location=-0.001 Scale=0.506345	Location=0.01639 scale=0.515	Location=0.1294 Scale=0.63642	Location=0.0274 Scale=0.521
loglik	-216	-216	-222	-216
Aic	436	435	447	436
Bic	442	442	453	442
p-value	0.6885	0.7998	0.01256	0.6743

Таблиця 3. Розподіл Вейбула.

Метод	mle
Параметри розподілу	Shape=1.3629 scale=0.7605
loglik	-47.1452
p-value	0.3409

Тест Колмогорова — Смірнова (найбільші значення p-value) показав, що задану вибірку найкраще описує логістичний розподіл, з параметрами одержаними методами найменшої відстані й методом найбільшої вірогідності (табл. 3), і нормальний розподіл з параметрами, одержаними методом найменшої відстані.

Наведемо фрагмент кода програми (у фрагменті розглянуто метод моментів для функції **fitdist** і метод найбільшої правдоподібності для функції **mledist**).

```

library(fitdistrplus)#підключення пакету
fit.norm <- fitdist(data = m, "norm", method = "mme")
print(fit.norm)
plot(fit.norm)
ks.test(unique(m), "pnorm", mean=mean(m), sd=sd(m))
fit.gama <- fitdist(data = m, "gamma", method = "mme")
print(fit.gama)
plot(fit.gama)
ks.test(unique(m), "pgamma", shape=fit.gama$estimate[1], rate=fit.gama$estimate[2])
fit.exp <- fitdist(data = m, "exp", method = "mme")
print(fit.exp)
plot(fit.exp)
ks.test(unique(m), "pexp", rate=fit.exp$estimate[1])
fit.logis <- fitdist(data = m, "logis", method = "mme")
print(fit.logis)
plot(fit.logis)
ks.test(unique(m), "plogis", location=fit.logis$estimate[1], scale=fit.logis$estimate[2])
f3<-mledist(m[m>0], "weibull", lower = c(0, 0))
f3
plotdist(m[m>0], "weibull", para=list(shape=f3$estimate[1], scale=f3$estimate[2]))
ks.test(unique(m[m>0]), "pweibull", shape=f3$estimate[1], scale=f3$estimate[2])

```

У Дуківчній та ін. (2018) було показано, що результати проведеного тестування можна вважати задовільними, але в деяких тестах неповна шкала оцінювання. Це, можливо, призвело до появи логістичного розподілу замість нормального, що відображено в нашому дослідженні.

#### Список літератури

- Дуківчній, О., Зливков, В., Круглова, Н., Лукomska, С., & Kotukh О. (2018). *Using the multidimensional models to the teacher authenticity scale adaptation. Актуальні проблеми психології: Збірник наукових праць Інституту психології ім. Г.С. Костюка НАПН України, 14(1), 137—146.*
- van der Linden, W. (Ed.). (2016). *Handbook of Item Response Theory (3 vols.)* New York: Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315119144>
- Wood, A. M., Linley, P. A., Maltby, J., Baliousis, M., & Joseph, S. (2008). The authentic personality: A theoretical and empirical conceptualization and the development of the Authenticity Scale. *Journal of Counseling Psychology, 55(3), 385–399.*
- Зливков, В. Л., Лукомська, С. О., Копилов, С. О., Хомутинікова Н. Н., & Федан, О. В. (2017). *Методологічні закономірності формування автентичності фахівців соціально-чужих професій.* Київ: Видавничий Дім «Слово».



# Застосування рекурентних співвідношень до вивчення процесів розмноження

М. М. Зеліско, Н. М. Пирч

Українська академія друкарства, Львів, Україна  
zelisko.mykhaylo@gmail.com, pnazar@ukr.net

У доповіді розглядаються класи задач про розмноження та їхнє моделювання за допомогою рекурентних співвідношень

**Ключові слова:** рекурентне співвідношення, процес розмноження.

Саме із задачі Леонарда Пізанського, більш відомого як Фібоначчі, про розмноження кроликів розпочалося вивчення рекурентних співвідношень (Андерсен, 2004). У даній роботі ми розглядаємо кілька задач про розмноження, розв'язування яких приводить до застосування рекурентних співвідношень. Задачі стосуються комп'ютерних програм-шкідників, але більшість з них має свої аналоги в біології.

**Задача 1.** Комп'ютерна програма-шкідник за кожну секунду своєї роботи запускає  $m$  своїх копій. Визначити кількість  $Y_n$  програм-шкідників, які будуть працювати через  $n$  секунд.

Моделювання задачі приводить до рекурентного співвідношення

$$Y_n = (m + 1)Y_{n-1}, Y_0 = 1.$$

Його розв'язок задає формула:

$$Y_n = (m + 1)^n.$$

**Задача 2.** Комп'ютерна програма-шкідник за першу секунду своєї роботи запускає  $m$  своїх копій, а далі зациклюється і продовжує працювати, займаючи пам'ять комп'ютера. Визначити кількість  $Y_n$  програм-шкідників, які будуть працювати через  $n$  секунд.

Покладаємо

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}.$$

Моделювання задачі приводить до рекурентного співвідношення

$$\Delta Y_n = m\Delta Y_{n-1},$$

або

$$Y_n - Y_{n-1} = m(Y_{n-1} - Y_{n-2}), Y_0 = 1, Y_1 = m + 1.$$

Це однорідне рекурентне співвідношення зі сталими коефіцієнтами (Зеліско, Зікрач, & Пирч, 2012). Його розв'язок задає формула:

$$Y_n = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}.$$

**Задача 3.** Комп'ютерна програма-шкідник за першу та другу секунди своєї роботи запускає по  $m$  своїх копій, а далі завершує свою роботу. Визначити кількість  $Y_n$  програм-шкідників, які будуть працювати через  $n$  секунд.

Нехай  $X_n$  — кількість програм, які були запуснені на  $n$ -й секунді. Для послідовності  $X_n$  отримаємо рекурентне співвідношення

$$X_n = m(X_{n-1} + X_{n-2}), \quad X_0 = 1, \quad X_1 = m.$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \left( \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Зауважмо, що

$$\lambda = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2} = \frac{-1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{m}}},$$

тобто  $|\lambda| < 1$ , а тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ , отже при  $n \rightarrow \infty$  будемо мати, що

$$X_n \approx \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^{n+1}.$$

Тоді

$$Y_n = X_n + X_{n-1},$$

звідки знаходимо

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \left( \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^n \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^n \left( \frac{m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2} - 1 \right) \right)$$

Зокрема, при  $n \rightarrow \infty$  матимемо, що

$$Y_n \approx \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \right)^n \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} + 1 \right).$$

**Задача 4.** Комп'ютерна програма-шкідник за першу та другу секунди своєї роботи запускає по  $m$  своїх копій, а далі зациклюється і продовжує працювати, займаючи пам'ять комп'ютера. Визначити кількість  $Z_n$  програм-шкідників, які будуть працювати через  $n$  секунд.

Для послідовності  $X_n$  означеної в попередній задачі, справджується розглянуте в цій задачі співвідношення. Тоді

$$Z_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n,$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \left( \frac{\alpha^{n+1} - \alpha}{a - 1} - \frac{\beta^{n+1} - \beta}{\beta - 1} \right),$$

де

$$\alpha = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2}, \beta = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  отримаємо асимптотику

$$Z_n \approx \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4m}} \frac{\alpha^{n+1} - \alpha}{a - 1}.$$

### Список літератури

- Андерсен, Д. (2004). *Дискретная математика и комбинаторика*. Санкт-Петербург: Издательский дом Вильямс.
- Зеліско, М. М., Зікрач, Д. Ю., & Пирч, Н. М. (2012). *Дискретна математика: Рекурентні співвідношення*. Львів: Видавництво УАД.

# Застосування диференціальних рівнянь у задачах з фінансової математики

Т. В. Іваненко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
[tivanenko2015@gmail.com](mailto:tivanenko2015@gmail.com)

У доповіді розглянуто задачі фінансової математики, під час розв'язання яких застосовують диференціальні рівняння, а саме неперервні змінні грошові потоки з неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою зростання.

**Ключові слова:** інтенсивність потоку, інтенсивність процентної ставки, диференціальне рівняння динаміки банківського рахунку, автономне зростання.

Фінансова математика — це дисципліна, що вивчає математичні методи, які застосовують у фінансових розрахунках. Предметом вивчення фінансової математики зокрема є грошові потоки, які виникають під час кредитування або інвестування, та їх оцінка, тобто визначення теперішньої та майбутньої вартості потоку платежів у визначений момент часу.

Розглянемо найзагальніший випадок: змінний неперервний грошовий потік зі змінною неперервною процентною ставкою, де  $f(t)$  — інтенсивність потоку платежів,  $\delta(t)$  — інтенсивність ставки.

**Теорема.** Якщо функції  $\delta(t)$  та  $f(t)$  неперервні, або мають скінченну кількість точок розриву 1-го роду на відрізку  $[0; n]$ , то нарахована вартість  $FV_n$  потоку платежів  $f(t)$  за ставкою  $\delta(t)$  на кінець періоду  $[0; n]$  дорівнюватиме:

$$FV_n = \int_0^n f(t) e^{\int_0^t \delta(t) dt} dt \quad (1)$$

$$PV = \int_0^n f(t) e^{-\int_0^t \delta(t) dt} dt \quad (2)$$

$$FV_n = PV e^{\int_0^n \delta(t) dt} \quad (3)$$

*Доведення.* За умови змінної неперервної ренти зі змінною неперервною ставкою майбутня вартість потоку зростає як унаслідок зміни самого потоку, так і внаслідок процентного зростання за ставкою  $\delta(t)$ . Приріст  $FV$  за нескінченно малим проміжком часу  $\Delta t$  складе:

$$\Delta FV = FV(t) \delta(t) \Delta t + f(t) \Delta t.$$

Перший доданок визначає приріст коштів за рахунок відсоткових платежів, а другий — за рахунок надходження грошового потоку. Останню рівність розділимо на  $\Delta t$  і знаходимо границю, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ . Отримаємо диференціальне рівняння динаміки банківського рахунку

$$FV'(t) = FV(t)\delta(t) + f(t).$$

Воно є лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку з початковою умовою:

$$FV(0) = PV_0,$$

де  $PV_0$  — початкова сума коштів, яка була на банківському рахунку в момент  $t = 0$ .  $PV_0 \neq PV$  зведеної вартості потоку  $f(t)$ , оскільки, наприклад, на початку періоду на рахунку могло й не бути коштів ( $PV_0 = 0$ ), але зведена вартість потоку  $f(t)$   $PV \neq 0$ . Проінтегруємо це рівняння за допомогою підстановки Бернуллі

$$FV(t) = uv \tag{4}$$

де  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  невідомі функції, одна з яких обирається довільно, а інша знаходиться з рівняння (5):

$$u'(t)v(t) + u(t)(v'(t) - v(t)\delta(t)) = f(t). \tag{5}$$

Функцію  $v(t)$  підберемо так, щоб  $v'(t) - v(t)\delta(t) = 0$ , тоді рівняння (5) рівносильне системі:

$$\begin{cases} v'(t) - v(t)\delta(t) = 0 \\ u'(t)v(t) = f(t) \end{cases} .$$

Підставляємо знайдені функції  $u(t)$  та  $v(t)$  у формулу майбутньої вартості (4):

$$FV(t) = e^{\int_0^t \delta(t)dt} \left( \int_0^t f(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt} dt + u(0) \right).$$

Знайдемо сталу  $u(0)$  з початкової умови: при  $t = 0$

$$FV(0) = u(0) = PV_0.$$

Нехай  $t = n$ , тоді

$$FV(n) = e^{\int_0^n \delta(t)dt} \left( \int_0^n f(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt} dt + PV_0 \right).$$

Оскільки

$$e^{\int_0^n \delta(t)dt} = \text{const},$$

можемо її внести під інтеграл та зробити перетворення, використовуючи властивості визначеного інтеграла:

$$FV(n) = \underbrace{\int_0^n f(t)e^{\int_0^t \delta(t)dt} dt}_{FV_1(n)} + \underbrace{PV_0 e^{\int_0^n \delta(t)dt}}_{FV_2(n)}.$$

Бачимо, що вартість потоку збільшується внаслідок двох чинників:

$FV_1(n)$  — за рахунок потоку платежів (тобто неперервного поповнення суми коштів), який також неперервно нарощується,

та  $FV_2(n)$  — так званого автономного зростання початкової суми за умови відсутності зовнішнього потоку. Позначивши  $FV_1(n) = FV_n$ , отримаємо формулу (1) Приведену вартість потоку платежів знайдемо, продисконтувавши

$FV_n$  множителем дисконтування  $e^{-\int_0^n \delta(t)dt}$ , звідси отримаємо формули (2) та (3):

$$PV = FV_n e^{-\int_0^n \delta(t)dt} = e^{-\int_0^n \delta(t)dt} \int_0^n f(t)e^{\int_0^t \delta(t)dt} dt = \int_0^n f(t)e^{-\int_0^t \delta(t)dt} dt. \quad \blacksquare$$

Отже, формули (1)—(3) є загальними, з них можна отримати окремі випадки для неперервного потоку з неперервним нарахуванням відсотку.

Якщо  $CF_k = f(t)$ , а сила зростання  $\delta = const$ , то

$$FV_n = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt; \quad PV = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt.$$

Якщо  $CF_k = const$ , а  $\delta = \delta(t)$  (автономне зростання), то

$$FV_n = CF_k e^{\int_0^n \delta(t)dt}; \quad PV = CF_k e^{-\int_0^n \delta(t)dt}.$$

І найпростіший випадок, коли  $CF_k = const$ ,  $\delta = const$ , тоді

$$FV_n = CF_k \int_0^n e^{\delta(n-t)}dt = CF_k \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta};$$

$$PV = CF_k \int_0^n e^{-\delta t}dt = CF_k \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

### Список літератури

- Борисенко, О. Д., Мішура, Ю. С., Радченко, В. М., & Шевченко, Г. М. (2006). *Збірник задач з фінансової математики*. Київ: Техніка.
- Бочаров, П. П., & Касимов, Ю. Ф. (2002). *Финансовая математика: Учебник*. Москва: Гардарики.
- Капустян, В. О., & Пасенченко, Ю. А. (2013). *Фінансова математика (2-ге вид.)*. Київ: Принт-Сервіс.

# Асимптотична нормальність квантильних оцінок у моделях регресії з сингулярним спектром шуму

О. В. Іванов, Н. В. Каптур, І. М. Савич

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
alexntuu@gmail.com, vasylivna.nv@gmail.com, sim\_ka@i.ua

Методи регресійного аналізу широко використовують для розв'язання величезного спектру прикладних задач. Оцінювання параметрів моделей регресії є важливою проблемою статистики випадкових процесів. У повідомленні розглянуто асимптотичну нормальність оцінок Коенкера — Бассетта, або квантильних оцінок, у лінійної моделі з випадковим шумом, який є нелінійно перетвореним стаціонарним гауссівським часовим рядом із сингулярною спектральною щільністю.

**Ключові слова:** функція регресії, стаціонарний гауссівський часовий ряд, квантильна оцінка, коваріаційна функція, спектральна щільність, спектральна міра, асимптотична нормальність.

Розглядаємо модель спостережень

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

з лінійною функцією регресії

$$g(j, \theta) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(j), \quad j = \overline{1, N},$$

де  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)^T \in \Theta^c$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$  — відкрита обмежена множина,  $\Theta^c$  — замкнена  $\Theta$ . Відносно похибок спостережень  $\varepsilon_j$  припускаємо, що виконано наступні умови.

**A1.**  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , — локальний функціонал від гауссівського часового ряду  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , тобто  $\varepsilon_j = G(\xi_j)$ ,  $G(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , — не випадкова борелева функція, причому  $E\varepsilon_0 = 0$ ,  $E\varepsilon_0^2 < \infty$ .

**A2.**  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , — гауссівський стаціонарний часовий ряд з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B(j) = E\xi_j \xi_0 = \sum_{l=0}^r A_l B_{\alpha_l, \chi_l}(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0, \quad (2)$$

де  $A_l > 0$ ,  $\sum_{l=0}^r A_l = 1$ ,  $B_{\alpha_l, \chi_l}(j) = \frac{\cos(\chi_l j)}{(1 + j^2)^{\alpha_l/2}}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 0$ ,  $\alpha_l \in (0, 1)$ ,

$0 \leq \chi_0 \leq \dots \leq \chi_r < \pi$ .

**A3.**  $F(0) = \beta$ ,  $\beta \in (0, 1)$ .

**A4.** Випадкова величина  $\varepsilon_0$  має щільність  $p(x) = F'(x)$ , причому

$$|p(x) - p(0)| \leq H|x|, \quad p(0) > 0,$$

де  $H < \infty$  — деяка константа.

Розгляньмо функцію втрат

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \geq 0 \\ (\beta - 1)x, & x < 0 \end{cases}, \quad \beta \in (0, 1).$$

Оцінкою Коенкера — Бассетта (ОКБ), або квантильною оцінкою, параметра  $\theta \in \Theta$  отриманою за спостереженнями (1), називають будь-який випадковий вектор  $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1, N}) \in \Theta^c$ , для якого

$$Q(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_N(\tau), \quad Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^N \rho_\beta(X_j - g(j, \tau)).$$

Квантильні оцінки в сенсі попереднього означення є узагальнення оцінки найменших модулів ( $\beta = 1/2$ ) і використовуються в обробці статистичних даних вигляду (1) у випадку несиметричних похибок спостережень.

Нехай  $\xi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — неперервний у середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією  $B(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , яка є неперервним аналогом коваріаційної функції (2) стаціонарного часового ряду  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , з таким же розташуванням констант  $\chi_l, l = \overline{0, r}$ .

Спектральна щільність  $\tilde{f}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , процесу  $\xi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{l=0}^r A_l \tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda) = \frac{c_1(\alpha_l)}{2} \left( K_{\frac{\alpha_{l-1}}{2}}(|\lambda + \chi_l|) |\lambda + \chi_l|^{\frac{\alpha_{l-1}}{2}} + K_{\frac{\alpha_{l-1}}{2}}(|\lambda - \chi_l|) |\lambda - \chi_l|^{\frac{\alpha_{l-1}}{2}} \right),$$

де

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)z\right\} ds, \quad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

— модифікована функція Бесселя 2-го роду порядку  $\nu$ .

Спектральна щільність  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  часового ряду  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , та спектральна щільність (3) пов'язані між собою співвідношенням

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad (4)$$



Нехай  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра борелевих підмножин інтервалу  $[-\pi, \pi]$ . Запровадимо матричну міру  $\mu_N(d\lambda)$  на  $([-\pi, \pi], \mathcal{B})$  з матрицею щільності

$$\left( \mu_N^{kl}(\lambda) \right)_{k,l=1}^q = \left( g_N^{(k)}(\lambda) g_N^{(l)}(\lambda) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(\lambda)|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^l(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} \right)_{k,l=1}^q,$$

$$g_N^k(\lambda) = \sum_{j=1}^N e^{i\lambda j} g_k(j), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], k = \overline{1, q}.$$

**V1.** Послідовність мір  $\mu_N(d\lambda)$  слабо збігається до додатно визначеної матричної міри  $\mu(d\lambda)$ .

Умова **V1** означає, що  $\mu([- \pi, \pi])$  — додатно визначена матриця та для довільної неперервності та обмеженої функції  $a(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu_N(d\lambda) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu(d\lambda), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Міру  $\mu(d\lambda)$  називають спектральною мірою функції регресії  $g(j, \theta)$ . Коли  $a(\lambda)$  втрачає властивості неперервності та обмеженості, збіжність (5) може в деяких випадках також мати місце.

Спектральну щільність  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , часового ряду  $\xi_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , називають  $\mu$ -припустимою, якщо вона  $\mu$ -інтегровна та для  $f = a$  виконується (5).

**V2.** Спектральна щільність (4) є  $\mu$ -припустимою.

Достатні умови  $\mu$ -припустимості щільності (3) містяться в роботі Ivanov, Leonenko, Ruiz-Medina та Savich (2013). Для щільності (4) такі достатні умови аналогічні.

Нехай деяка функція  $\Psi \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ ,  $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2 / 2\}$ . Тоді її можна розкласти в цьому просторі в ряд Фур'є

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\Psi)}{n!} H_n(x), \quad c_n(\Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \geq 0,$$

за поліномами Чебишова — Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \left( \frac{d^n}{dx^n} \right) e^{-x^2/2}, \quad n \geq 0.$$

Казатимемо, що функція  $\Psi \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$  має ермітів ранг  $m$ , якщо або  $c_1(\Psi) \neq 0$  та  $m = 1$ , або для деякого  $m \geq 2$  виконується

$$c_1(\Psi) = \dots = c_{m-1}(\Psi) = 0, \quad c_m(\Psi) \neq 0.$$

Нагадаємо, що коваріаційній функції  $B^r(t), t \in \mathbb{R}, r \geq 2$ , де  $B(t), t \in \mathbb{R}$ , — коваріаційна функція випадкового процесу  $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ , відповідає спектральна щільність, яка є  $r$ -ю згорткою спектральної щільності (3):

$$\tilde{f}^{*r}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - \dots - \lambda_r) \prod_{i=2}^r \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 \dots d\lambda_r, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тоді за формулою (4) коваріаційній функції  $B^r(j), j \in \mathbb{Z}, r \geq 2$ , відповідає спектральна щільність

$$f^r(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*r}(\lambda + 2\pi k), \lambda \in [-\pi, \pi], r \geq 2.$$

Розгляньмо ще одну умову, яка регулює зростання функцій  $g_i(j), j \geq 1$ , при зростанні об'єму вибірки  $N$ .

$$\mathbf{B3.} \quad d_{iN}^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| \leq k^i N^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}.$$

У доведенні наступної теореми використано центральну граничну теорему для зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром, яку доведено в роботі Ivanov та ін. (2013).

**Теорема.** Нехай виконано умови  $A1$ — $A4$ ,  $B1$ — $B3$  та ОКБ  $\hat{\theta}_N$  є консистентною, у тому сенсі, що

$$N^{-1/2} d_N(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Нехай також функція  $\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , має ермітів ранг  $m = 1$  та  $\min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l > 1/2$ . Тоді нормована ОКБ  $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$  асимптотично при  $N \rightarrow \infty$  нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$K = \frac{2\pi}{p^2(0)} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\Psi)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda) \mu(d\lambda) \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) \right)^{-1}.$$

Достатні умови виконання (6) наведено в Ivanov, Kaptur та Savych (2018).

### Список літератури

- Ivanov, A. V., Kaptur, N. V., & Savych, I. N. (2018). Consistency of the Koenker—Bassett estimator in linear regression model. In *Proceedings of International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman, Kyiv, 17–22 September* (p. 31–32). Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.
- Ivanov, A. V., Leonenko, N., Ruiz-Medina, M. D., & Savich, I. N. (2013). Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra. *The Annals of Probability*, 41(2), 1088–1114.

# Об улучшении дифференциальных свойств обобщенных решений в моделях Маргерра — Власова с помощью введения обобщенного собственного спектра

Е. В. Колпакова, Е. А. Кривонос

*Новороссийский политехнический университет Кубанского государственного технологического университета, Новороссийск, Россия*

*evge.kolpakova@yandex.ru*

В данной статье приведены модели Маргерра — Власова колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений срединной поверхности с шарнирным закреплением края оболочки. Авторы проанализировали определение обобщенного решения начально-краевой задачи данной модели и теорему существования этих решений на произвольном промежутке времени для случая с шарнирным закреплением края, данное ранее в Колпакова (2010). Доказательство теоремы изначально было проведено с использованием дискретного собственного спектра бигармонического оператора в рамках метода Бубнова — Галеркина, что повлекло за собой достаточно сильное ограничение на границу области. Проведена работа по ослаблению дифференциальных свойств, доказано существование обобщенного собственного спектра бигармонического оператора, проанализировано возможность доказательства теорем существования с менее сильными ограничениями. В данной статье приведена теорема существования глобальных по времени обобщенных решений для случая, когда оболочка состоит из материалов с внутренним трением, и проанализировано ее доказательство, для выявления изменений в дифференциальных свойствах обобщенных решений при замене собственного спектра бигармонического оператора на обобщенный собственный спектр.

Модели колебания пологих оболочек могут описывать и абстрактные физические явления, и конкретные механические системы. Актуальность изучения оболочек заключается в их широком практическом применении в реальных конструкциях. Оболочечные конструкции широко применяют практически во всех отраслях хозяйственной деятельности: в гидротехнике, в судо- и самолетостроении, в объектах АЭС, при возведении самых разнообразных промышленных, сельскохозяйственных и гражданских объектов, для покрытий и перекрытий зданий (Кравчук, 2011), в мостостроении, в дорожном и подземном строительстве, в горнодобывающей и перерабатывающей промышленности. Проблемы устойчивости тонкостенных конструкций в полной мере может решаться лишь на базе нелинейных краевых задач (Ворович, 1989). Поэтому постановке начально-краевой задачи изучаемой модели посвящено в работе достаточно большое внимание. Следует также отметить, что особенно актуальным является строгое математическое исследование рассматриваемого класса нелинейных задач, что стало возможным сравнительно недавно благодаря работам Ворович (1989) и Седенко (1996).

В качестве модели колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений срединной поверхности с шарнирным закреплением края рассматривается следующая начально-краевая задача.

Пусть оболочка проектируется на плоскую ограниченную область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  множества  $C^1$ . Поперечное перемещение  $w$  точек срединной поверхности оболочки удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \rho h w_{tt} - \gamma \Delta w_{tt} + D \Delta^2 w + \delta \Delta^2 w_t = Z + \left( N_1 w_{x_1} \right)_{x_1} + \\ + \left( N_2 w_{x_2} \right)_{x_2} + \left( N_{12} w_{x_1} \right)_{x_2} + \left( N_{12} w_{x_2} \right)_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2 \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями шарнирного закрепления

$$w \Big|_{\Gamma} = \left( \frac{d^2 w}{dn^2} - \mu \chi \frac{dw}{dn} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $n$  — вектор внешней нормали к кривой  $\Gamma$ ,  $\chi$  — кривизна  $\Gamma$ ,  $\rho$  — массовая плотность оболочки,  $h$  — высота оболочки,  $D$  — изгибная жесткость оболочки,  $\gamma$  — константа, пропорциональная  $h$ ,  $Z$  — поперечная составляющая массовых сил, действующих на оболочку. Величина при  $\delta > 0$ , описывает внутреннее трение в оболочке.  $N_1, N_2, N_{12}$  — продольные усилия в оболочке, которые выражаются через характеристики деформации срединной поверхности оболочки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 = Eh \left( 1 - \mu^2 \right)^{-1} \left( \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 \right), N_2 = Eh \left( 1 - \mu^2 \right)^{-1} \left( \varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1 \right), \\ N_{12} = \frac{1}{2} Eh \left( 1 + \mu \right)^{-1} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E$  — упругая постоянная,  $\mu \in (0; 0,5)$  — коэффициент Пуассона. В свою очередь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$  выражаются через продольные перемещения  $u$  и  $v$ , через поперечное перемещение срединной поверхности оболочки  $w$  и через кривизны  $k_1, k_2$ , которые считаются непрерывно дифференцируемыми, по следующим формулам:

$$\varepsilon_1 = u_{x_1} + k_1 w + \frac{1}{2} w_{x_1}^2, \varepsilon_2 = v_{x_2} + k_2 w + \frac{1}{2} w_{x_2}^2, \varepsilon_{12} = u_{x_2} + v_{x_1} + w_{x_1} w_{x_2}. \quad (4)$$

Продольные перемещения  $u$  и  $v$  точек срединной поверхности оболочки удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{aligned} -\Delta u - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \theta_{x_1} = \frac{2}{1 - \mu} \left[ \left( k_1 w \right)_{x_1} + w_{x_1 x_1} w_{x_1} + \mu \left( k_2 w \right)_{x_1} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_2} \right] + \\ + w_{x_1 x_2} w_{x_2} + w_{x_1} w_{x_2 x_2} + X, \\ -\Delta v - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \theta_{x_2} = \frac{2}{1 + \mu} \left[ \left( k_2 w \right)_{x_2} + w_{x_2 x_2} w_{x_2} + \mu \left( k_1 w \right)_{x_2} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_1} \right] + \\ + w_{x_1 x_2} w_{x_1} + w_{x_2} w_{x_1 x_1} + Y, \\ u \Big|_{\Gamma} = v \Big|_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $X$  и  $Y$  — продольные составляющие внешних сил, действующих на оболочку,  $\theta = u_{x_1} + v_{x_2}$ .

Начальные условия имеют следующий вид

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad w_t(x, 0) = w_1(x) \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Определение обобщенного решения начально-краевой задачи (1)—(6) изучаемой модели дано в Колпакова (2010). Доказательство существования обобщенных решений проводится по плану, реализованному в работах Воровича (1989), следуя которому вводится в рассмотрение пространство  $\tilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$ .

Так как доказательство проводится с помощью метода приближений Бубнова — Галеркина, строится полная ортонормированная система функций в соответствующем пространстве. Поэтому далее рассматривается краевая задача на отыскание собственных значений (Колпакова, Давтян, & Седенко, 2008) бигармонического оператора

$$\Delta^2 \xi = \lambda \xi, \quad \xi|_{\Gamma} = \left( \frac{d^2 \xi}{dn^2} - \mu \chi \frac{d\xi}{dn} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

При условии, что граница области  $\Gamma \in C^4$  задача (7) имеет дискретный спектр  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$  из счетного числа стремящихся к бесконечности положительных собственных значений, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций  $\xi_l$ . Собственные функции  $\xi_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  образуют полную ортонормированную систему в  $L_2(\Omega)$  и полную ортогональную систему в  $\tilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$ .

Следует отметить, что именно условие на границу области  $\Gamma \in C^4$  считалось слишком жестким и после работы Колпакова и Седенко (2012) его удалось ослабить с помощью введения обобщенного собственного спектра бигармонического оператора. Благодаря этому стало возможным более широкое изучение моделей при других модификациях краевых условий. Обобщенной собственной функцией бигармонического оператора определили такую функцию  $\xi \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$ , которая удовлетворяет следующему соотношению и граничным условиям

$$\begin{aligned} (\Delta \xi, \Delta \xi')_{L_2(\Omega)} - \int_{\Gamma} \chi (\mu + 1) \frac{d\xi}{dn} \frac{d\xi'}{dn} ds &= \lambda (\xi, \xi')_{L_2(\Omega)}, \\ \xi|_{\Gamma} &= \left( \frac{d^2 \xi}{dn^2} - \mu \chi \frac{d\xi}{dn} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

при любом  $\xi' \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$ .

В Колпакова и Седенко (2012) доказано, что краевая задача (8) имеет обобщенный дискретный спектр, если граница области  $\Omega$   $\Gamma \in C^2$ .

Действуя далее по схеме, предложенную в Ворович (1989), нами доказан следующий результат

**Теорема.** Пусть  $w_0 \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$ ,  $w_1 \in \overset{\circ}{H}_2^1(\Omega)$ ,  $X, Y \in L_{p,1}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f])$ ,  $X(\cdot, 0), Y(\cdot, 0) \in L_p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $Z \in L_2(\Omega \times [0, t_f])$ . Тогда существуют обобщенные решения  $u, v$  и  $w$  исходной начально-краевой задачи, удовлетворяющие следующим условиям

$$w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,\infty}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f]) \cap C([0, t_f], H_r^1(\Omega)), \text{ для всех } r \geq 1,$$

$$u, v \in L_\infty \left( [0, t_f], \overset{\circ}{H}_2^1(\Omega) \right) \cap L_\infty([0, t_f], H_p^2(\Omega)), \quad 1 < p < 2,$$

$$u, v \in L_\infty \left( [0, t_f], \overset{\circ}{H}_2^1(\Omega) \right) \cap L_\infty([0, t_f], H_q^2(\Omega)), \quad p \geq 2, q < 2.$$

В ходе получения данного результата было детально проработано доказательство существования обобщенных решений исходной начально-краевой задачи, которое существенно не изменило дифференциальных свойств обобщенных решений при замене собственного спектра бигармонического оператора на обобщенный собственный спектр, но привело к ослаблению условий на границу области рассмотрения.

#### Список литературы

- Ворович, И. И. (1989). *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. Москва: Наука.
- Колпакова, Е. В. (2010). Существование обобщенных решений моделей Маргерра —Власова колебаний пологих оболочек с шарнирным закреплением края в неограниченной области. *Вестник ИжГТУ*, (1), 144—146.
- Колпакова, Е. В., & Седенко, В. И. (2012). Обобщенный спектр бигармонического оператора в задаче с краевыми условиями шарнирного закрепления. *Вестник СевКав ГТИ*, (12), 29—32.
- Колпакова, Е. В., Давтян, Д. Б., & Седенко, В. И. (2008). Задача на собственные значения для бигармонического оператора с краевыми условиями смешанного закрепления края оболочки. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 3, 13—15.
- Кравчук, В. А. (2011). Пологие оболочки для покрытий и перекрытий зданий с диафрагмами на основе предварительно напряженных стальных балок. *Вестник ТОГУ*, (3), 63—74.
- Седенко, В. И. (1996). Классическая разрешимость начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек. *Известия АН СССР*, 60(5), 157—190.

# Визначення температури теплового самозаймання пиловугільних сумішей на основі математичної моделі цього процесу

**Б. В. Кузьменко,**

*Інститут вугільних енерготехнологій НАН України, Київ, Україна*

bkuzmenko@i.ua

В основі прикінцевої математичної моделі процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей складає система двох нелінійних диференціальних рівняння відносно температури та концентрації пиловугільної суміші. Ця система розв'язана з використанням системи комп'ютерної математики Mathcad 14, отриманий графік, що відображає температуру пиловугільної суміші, який містить точку максимуму температури, або ділянку прямої лінії, паралельну осі абсцис, що відповідає асимптоті температурної кривої. Відповідне значення температури і є температурою самозаймання.

**Ключові слова:** температура теплового самозаймання, математична модель, точка екстремуму.

Основу математичної моделі процесу теплового самозаймання пиловугільної суміші складають, рівняння (Кузьменко & Мальчевський, 2011; Хзмалян, 1990): теплового балансу суміші, що реагує (1); матеріального балансу за витратою кисню (Хзмалян, 1990); рівняння матеріального балансу за витратою вугільного пилу, а саме:

$$\frac{d\theta}{d\chi} = \bar{C}\bar{\mu} \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}} - \Omega(\Theta - \Theta_1) - \Omega(\Theta^4 - \Theta_1^4), \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{C}}{d\chi} = -\frac{1}{\theta_{ад}} \bar{C}\bar{\mu} \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta_{ад} = QR[(c_v + \mu_0 c_{п})E]^{-1}, \quad (2)$$

$$\bar{\mu} = 1 - \alpha(1 - \bar{C}). \quad (3)$$

початкові умови  $\chi = 0, \theta = \theta_0, \bar{C} = 1, \mu = 1$ . Розв'язання цієї системи нелінійних диференціальних рівнянь (СНДР) можна звести до системи двох нелінійних диференціальних рівнянь СНДР з двома невідомими функціями:

$$\frac{d\theta}{d\chi} = \bar{C}[1 - \alpha(1 - \bar{C})] \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta^3}} - \Omega(\Theta^4 - \Theta_1^4), \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{C}}{d\chi} = -\frac{1}{\theta_{ад}} \bar{C} \left[ 1 - \alpha(1 - \bar{C}) \right] \frac{1}{\theta^3} e^{-\frac{1}{\theta^2}}, \quad (5)$$

$$\chi = 0, \theta = \theta_0, \bar{C} = 1.$$

Система диференціальних рівнянь (4), (5) розв'язана з використанням системи комп'ютерної математики Mathcad 14, графік для  $\theta(\chi)$  має вигляд:

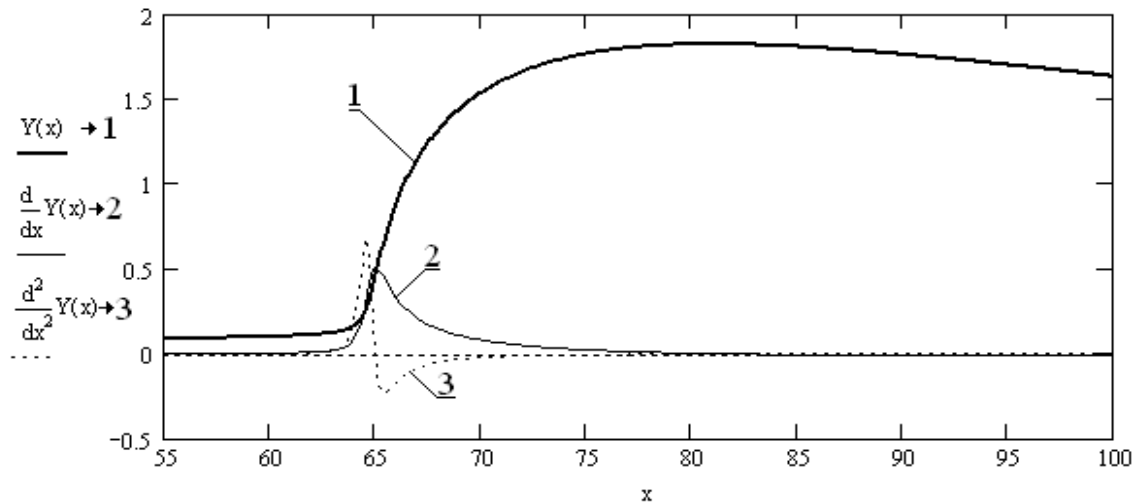


Рис. 1. Графічне зображення розв'язку системи диференціальних рівнянь (1)—(3) математичної моделі Семенова — Хзмаляна теплового самозаймання пиловугільних сумішей.

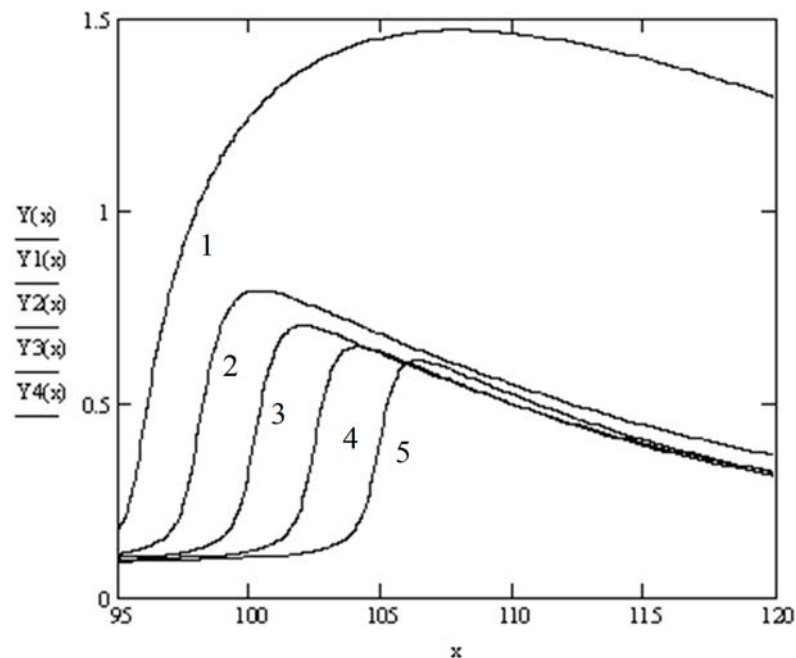


Рис. 2. Динаміка температури пиловугільної суміші за умови певних значень параметрів математичної моделі процесу  $\theta_{ад}$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\Omega$  та інших

Аналіз результатів досліджень свідчить про наявну можливість нульового значення похідної температури пиловугільної суміші, тобто екстремуму цієї температури — максимуму. У цій точці дотична є прямою, паралельною осі абсцис. Можливим є також випадок, коли ця дотична може бути горизонтальною дотичною до графіка температурної кривої. Останній випадок може відповідати точці теплового самозаймання.

#### Список літератури

- Кузьменко, Б. В., & Мальчевський, І. А. (2011). *Теплове самозаймання пиловугільних сумішей*. Київ: Наукова думка.
- Хзмалян, Д. М. (1990). *Теорія топочних процесов*. Москва: Энергоатомиздат.



## Задача прийняття рішення з мінімізацією можливих втрат

Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[bodo\\_kush@hotmail.com](mailto:bodo_kush@hotmail.com), [olgakushlyk64@gmail.com](mailto:olgakushlyk64@gmail.com), [nvpolinv@gmail.com](mailto:nvpolinv@gmail.com)

Описано використання бінарних відношень, шкал вимірювань, інваріантності використання середніх значень. Показано використання критеріїв Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца прийняття рішень в умовах повної невизначеності.

**Ключові слова:** теорія прийняття рішень, бінарні відношення, шкала вимірювання, середні значення, коефіцієнт кореляції, матриця інвестування, матриця втрат, критерії Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

На сучасному етапі розвитку технологій управління технологічним процесом виготовлення друкованої продукції на всіх рівнях виходить на нові висоти автоматизованості, спрощення та більшої потоковості. Інтенсифікація виробництва зумовлює підвищення вимог до чіткості та якості виконання операцій, передбачає оперативне реагування на будь-які ситуації відхилення від нормативного процесу. З точки зору теорії прийняття рішень можна теоретично формально обґрунтовувати та описувати такі ситуації, виявляти наявні парадокси та пропонувати можливі способи пошуку прийнятних рішень.

Основою, теоретичним підґрунтям теорії прийняття рішень (Кушлик & Кушлик-Дивульська, 2014) є бінарні відношення, апарат попарних відношень — для оцінювання переваг альтернатив шляхом попарних порівнянь. Основні результати теорії впорядкованих множин дають змогу обґрунтувати процедури перетворення та модифікації системи переваг децидента, причому зручний і точний спосіб подання впорядкованих множин — діаграми Гассе на площині, також зображення графами.

Для вимірювання значень кожного критерію чи показника, що характеризує певну властивість варіантів рішень, використовують окрему шкалу чи міру: номінальна та порядкова шкала, шкала інтервалів, відношень, різниць, абсолютна шкала.

У теорії прийняття рішень можуть використовуватись середні значення для заміни сукупності чисел одним, тобто для порівняння сукупності за допомогою середнього. Застосовують такі середні величини: середнє арифметичне, медіану, моду, середнє геометричне, середнє гармонічне, середнє квадратичне, причому їх використання залежить від вибору шкали. Окрім середніх величин, вивчають й інші статистичні характеристики: показники розкиду, зв'язку, відстані та інші. Так, коефіцієнт кореляції не змінюється за будь-якого допустимого перетворення у шкалі інтервалів, як відношення дисперсії — у шкалі різниць, коефіцієнт варіації — у шкалі відношень тощо, причому необхідно застосовувати лише інваріантні алгоритми опрацювання даних.

Зупинімось детальніше на прикладі використання критеріїв прийняття рішень в умовах часткової невизначеності, оскільки це найчастіший тип задач. Ситуацію, що має часткову невизначеність виражену певною мірою, можна подати як задачу з мінімізації можливих втрат. Розглянемо ситуацію про необхідність подання вибору інвестиційного плану в поліграфічне підприємство подану в

інвертному вигляді, а саме у вигляді матриці можливих втрат. Завданням є обрати оптимальну стратегію, ґрунтуючись на аналізі критеріїв вибору. Дані для прийняття рішення подано в таблиці в тисячах умовних одиниць.

Варіанти інвестиційних планів	Варіанти можливих зовнішніх станів, що зумовлюють необхідність інвестицій, тис. у.о.		
1	90	120	240
2	175	180	125
3	180	220	140

Для визначення оптимальної стратегії поведінки скористаємося критеріями Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

Матрицю інвестування (матрицю втрат) подаємо у вигляді:

$A_i \setminus \Pi_j$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$A_1$	90	120	240
$A_2$	175	180	125
$A_3$	180	220	140

За критерієм Вальда для визначення оптимальної стратегії використовують згідно з матрицею втрат мінімаксний критерій за формулою

$$W = \min_i \max_j a_{ij}.$$

Тоді в кожному рядку матриці втрат знаходять найбільший елемент, а потім обирають стратегію  $A_i$  (рядок  $i$ ), якій відповідає найменше значення із цих найбільших елементів, тобто стратегія  $A_{\text{опт}}$ , яка визначає результат. Отже, у даному випадку є оптимальною стратегія  $A_2$ .

Критерій Лапласа базується на принципі недостатнього підґрунтя, виходячи з якого всі стани природи  $\Pi_j$  є рівноймовірними. Для прийняття рішень для кожної стратегії  $A_i$  обчислюють середнє арифметичне значення виграшу. За умови матриці втрат критерій набуває вигляду:

$$W = \min_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}.$$

Для матриці інвестування маємо очікувані витрати для  $A_1, A_2, A_3$  :

$$W(A_1) = \frac{1}{3} \cdot (90 + 120 + 240) = 150;$$

$$W(A_2) = \frac{1}{3} \cdot (175 + 180 + 125) = 160;$$

$$W(A_3) = \frac{1}{3} \cdot (180 + 220 + 140) = 180.$$

Критерій Лапласа схиляє до вибору стратегії  $A_1$ . Зазвичай використовують на практиці найпростіший варіант невизначеності — «доброякісна» стохастична. У цьому випадку стани природи характеризуються ймовірностями їх виникнення  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  і використовують критерій Баєса — Лапласа.

*Критерій Севіджа.* Для вихідної матриці інвестицій (матриці втрат) будемо матрицю ризиків  $R_A$ , елементи якої  $r_{ij}$  визначаємо за формулою

$$r_{ij} = \begin{cases} \max_k a_{kj} - a_{ij}, & \text{якщо } A - \text{виграш,} \\ a_{ij} - \min_k a_{kj}, & \text{якщо } A - \text{втрати,} \end{cases}$$

де  $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$ .

$A_i \setminus \Pi_j$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\max_j r_{ij}$
$A_1$	0	0	115	115
$A_2$	85	60	0	85
$A_3$	90	100	15	100

Критерій Севіджа рекомендує в умовах повної невизначеності обирати ту стратегію, для якої величина ризику набуває найменшого значення у найнесприятливішій ситуації (коли ризик максимальний), тобто в даному випадку доцільно обрати стратегію  $A_2$ .

Застосування критерію Севіджа дозволяє уникнути великого ризику в процесі вибору стратегії, тобто мінімізувати можливі втрати.

*Критерій Гурвіца (критерій песимізму — оптимізму)* охоплює різні підходи до прийняття рішень — від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Критерій Гурвіца встановлює баланс між випадками крайнього песимізму й крайнього оптимізму шляхом надання їм відповідної ваги  $(1 - \alpha)$  та  $\alpha$ , де  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Значення  $\alpha$  може визначатись залежно від схильності прийняття рішення до песимізму або оптимізму. Якщо відсутня яскраво виражена прихильність, то вважають  $\alpha = 0,5$ . За умови  $\alpha = 0,5$  та

$$W = \min_i \left\{ \alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right\}$$

слід обрати стратегію  $A_2$ .

У дослідженому випадку переважає стратегія  $A_2$ , хоча в загальному випадку вибір критерію прийняття рішення в умовах повної невизначеності є найскладнішим, найвідповідальнішим етапом процесу розв'язання задачі й варто також урахувувати попередні дослідження, специфіку реалізації задачі, також і власний набутий практичний досвід.

#### Список літератури

Кушлик, Б. Р., & Кушлик-Дивульська, О. І. (2014). *Основи теорії прийняття рішень*. Київ: НТУУ «КПІ». <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838>

# До обчислювальних проблем антисипаційних систем

С. В. Лазаренко

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

[LazarenkoSerg7@mail.ru](mailto:LazarenkoSerg7@mail.ru)

Розглянуто такі дискретні динамічні системи із антисипацією, у яких майбутні стани явно представлені минулими за допомогою оператора Хатчинсона. Введено ряд визначень для дослідження динаміки систем із антисипацією. Розглядається принципова проблема моделювання таких систем — використання обчислювальних ресурсів. На прикладі запропонованих та детально описаних процедур пошуку періодичних траєкторій динамічних систем із антисипацією розглядаються часові та просторові складності. Представлені та обґрунтовані додаткові рекомендації щодо мінімізації часової складності за допомогою використання мультимножин.

**Ключові слова:** обчислювальна складність, дискретні динамічні системи, оператор Хатчинсона, періодична траєкторія.

**Математична модель.** Розгляньмо сильні антисипаційні системи (АС) (Лазаренко & Макаренко, 2012). Цікавить наступна формалізація математичної моделі. Розглядатимемо початкову систему, яку описує закон сильної антисипації першого порядку

$$x_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}, \Lambda), \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

де керуючий параметр  $\Lambda = (\lambda; \alpha) \in \mathbb{R}^2$ , оператор зв'язку  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  (часто — однозначний),  $x_i$  — стани неявної системи. Нас цікавить випадок, коли  $f$  передбачає багатозначність розв'язків та нехай його можна представити відображенням  $F: S_n \times \mathbb{R}^{n \dim(\Lambda)} \rightarrow S_n$  у вигляді

$$X_i = F(X_{i-1}, \Lambda) = \bigcup_{x \in X_{i-1}} \bigcup_k f_k(x, \Lambda), \quad (1)$$

тут  $X_i \in S_n, x \in \mathbb{R}^n$ . Тут  $S_n \subset 2^{\mathbb{R}^n}$  є підмножиною множини всіх можливих підмножин із  $\mathbb{R}^n$ . Виходячи з цих міркувань та керуючись термінологією для антисипаційних систем (стан АС, неперушена точка АС тощо), досліджуємо наступне — складність побудови стану АС, траєкторії

**Складність побудови стану ДСА.** Кожну ітерацію еволюції ДСА супроводжує побудова чергового стану системи, а тому розгляньмо обчислювальні затрати на кожній ітерації. Має місце наступна теорема.

**Теорема.** Обчислювальна складність побудови кожного стану  $X_i, i = 0, 1, 2, \dots$ , у найгіршому випадку буде  $O(N^{2i})$ , де  $N$  — кількість селекторів  $F$ .

Найбільші обчислювальні витрати  $O(N^{2i})$  припадають на операції порівняння, а на обчислення відповідних точок в  $\mathbb{R}^n$  лише  $O(N^i)$ . У цьому й полягає

одна з найбільших проблем при моделюванні ДСА. Її можна частково обійти за рахунок представлення  $X_i$  як *мультимножин*, тоді складність побудови стану буде лише  $O(N^i)$ . Однак, тоді, постійно зростатиме використання пам'яті за показниковим законом  $N^i$ .

**Складність розрахунку метрики.** Ми працюємо в метричному просторі всіх непорожніх компактних підмножин з метрикою Хаусдорфа  $d_H(\cdot, \cdot)$ . Можна показати, що її складність в  $O$ -нотації  $d_{ij} \in O(N^{i+j})$

**Складність побудови траєкторії ДСА.** Наступним кроком після побудови стану ДС є побудова їх послідовності (траєкторії). Складність побудови траєкторії довжиною  $p$ , яка починається із стану з індексом  $i$  в  $O$ -нотації  $O(N^{2i+2p})$ , а у випадку мультимножин  $O(N^{i+p})$ .

**Адаптація процедури побудови карт динамічних режимів для ДСА.** Карт динамічних режимів є досить зручним інструментом візуального представлення різних режимів багатопараметричних нелінійних системи та аналізу переходів між цими режимами. Методика побудови таких карт базується на практичних критеріях існування детермінованого хаосу, сильна чутливість до вхідних даних, тощо. Класичні процедури їх розрахунку можна знайти у роботах С. П. Кузнєцова, О. П. Кузнєцова, В. С. Аніщенко та ін. (Кузнєцов, Савин, & Тюрюкіна, 2010, с. 39).

Розгляньмо особливості їх побудови для нелінійних дискретних ДС з антиципацією (Лазаренко & Макаренко, 2013). Основна процедура побудови цих карт досить проста. Для кожної точки  $\bar{\lambda} \in L$  запускають ітеративний процес еволюції ДС з метою виходу досить близько до інваріантної множини (атрактора). Ітерування продовжують до тих пір, аж поки чергова точка  $x_i$  траєкторії (при зміні  $t$ ) не почне відхилятися від якоїсь найближчої попередньої точки  $x_{t-p}$  менше від заданої наперед точності  $\varepsilon$ , тобто  $|x_t - x_{t-p}| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  у відповідній метриці. Тоді стверджують, що у відповідній точці простору керуючих параметрів ДС має цикл період  $p$ . Цілком зрозуміло, що при тих же самих керуючих параметрах нелінійна ДС може мати кілька басейнів притягання, котрим, у загальному випадку, можуть відповідати різні режими системи. Якщо така система містить більше однієї притягаючої множини, її називають *мультистабільною* (Feudel & Grebogi, 1997; Pisarchik & Feudel, 2014).

Опишімо базову процедуру для АС. Суть її полягає в тому, що на кожному кроці побудови траєкторії ми намагаємося знайти цикл, порівнюючи останній отриманий стан ДС із попередніми у зворотному часі. Для початку обмежуємося пошуком циклу довжиною  $p$ . Нехай у деякий момент часу ми знаходимося в точці  $X_{i-1}$  ДСА. Будуємо  $X_i$  за (1) та порівнюємо цей стан з попередніми  $(i-1)$ -м,  $(i-2)$ -м і так далі до  $(i-p)$ -го, поки не знайдемо достатньо близь-

кий (з наперед заданою точністю) стан в обраній метриці. Саме такий напрямок порівнянь обраний не дарма — аби уникнути ситуації, коли ми спочатку знайшли кратний цикл. Таким чином ми спершу натрапимо на «мінімальний» цикл (без подвоєнь, потроєнь, тощо). Так, якщо знайдено такий стан  $X_j$  з  $d(X_i, X_j) \leq \varepsilon$ , то подальші дії цілком зрозумілі. Інакше, продовжуємо траєкторію на один стан вперед, та повторюємо процедуру знову.

Нас цікавить наступне питання — якою буде складність дій на кожній ітерації? Нехай ми раніше збудували стан  $i + k - 1$  та не знайшли цикл довжини  $k - 1 < p$ . Будуємо  $(i + k)$ -й і порівнюємо його із усіма раніше збудованими в зворотному порядку — із  $i + k - 1$ ,  $i + k - 2$ , ...,  $i$ . Це, відповідно, потребуватиме:

$$m(i + k) + d_{i+k, i+k-1} + d_{i+k, i+k-2} + \dots + d_{i+k, i}$$

Тому й вся процедура потребуватиме наступні затрати під час ітерування із стану  $i$  у стан  $i + p$ , що замикатиме знайдений цикл довжини  $p$

$$\begin{aligned} & m(i) + \left( m(i + 1) + d_{i, i+1} \right) + \left( m(i + 2) + d_{i, i+2} + d_{i+1, i+2} \right) + \dots + \\ & + \left( m(i + p) + d_{i, i+p} + d_{i+1, i+p} + \dots + d_{i+p-1, i+p} \right) = \\ & = M(i, i + p) + \sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj}. \end{aligned}$$

Протягом усієї процедури необхідно постійно тримати в пам'яті останні  $p + 1$  станів ДС  $(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+p})$  для розрахунку метрик між ними (просторова складність), тобто необхідно тримати в пам'яті

$$\sum_{j=i}^{i+p} |X_j| = |X_0| \cdot N^i \cdot \frac{N^{p+1} - 1}{N - 1}$$

чисел із  $\mathbb{R}^n$ , або в  $O$ -нотації  $O(N^{i+p})$ .

У випадку, коли у процесі ітерування траєкторія переривається (множина дійсних значень стану порожня), то збурюємо  $X_{i-1}$  і починаючи з нього, знову застосовуємо обрану процедуру пошук періодичної орбіти.

Визначивши характер динаміки для  $\bar{\lambda}_0$  рухаємося у просторі параметрів далі — здійснюємо пошук періоду орбіт для  $\bar{\lambda}_1$  і т. д. При такій побудові карти можуть різнитися залежно від вибору початкового стану та напрямку руху в просторі параметрів. Це пояснюється можливою наявністю мультістабільності системи. Розпочавши рух траєкторії зі збуреного значення  $X'_{i-1}$ , ми можемо потрапити в інший атрактор, що, ймовірно, матиме зовсім іншу структуру.

**Висновки.** У роботі розглянуто одне із принципів питань, що постає під час моделювання дискретно-часових динамічних систем з антисипацією — об-

числювальні затрати. Детально представлено процедуру розрахунку періоду циклічних траєкторій для ДСА, та описано її складність. Запропоновано та обґрунтовано перехід станів ДСА на мультимножини для пониження обчислювальних затрат в ході пошуку циклічних траєкторій.

Оскільки проблема використання обчислювальних ресурсів під час моделювання ДСА є однією з найбільш значущих, то в подальшому, з метою її мінімізації варто зосередитись на порівняння різних процедур (з точки зору обчислювальних складностей) залежно від структури фазового простору (розподілу періодичних режимів).

#### Список літератури

- Feudel, U., & Grebogi, C. (1997). Multistability and the control of complexity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(4), 597–604.
- Pisarchik, A. N., & Feudel, U. (2014). Control of multistability. *Physics Reports*, 540(4), 167–218.
- Кузнецов, А. П., Савин, А. В., & Тюрюкина, Л. В. (2010). *Введение в физику нелинейных отображений*. Саратов: Научная книга. <http://www.sgtnd.narod.ru/wts/rus/KST.pdf>
- Лазаренко, С. В., & Макаренко, О. С. (2012). Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 91–96.
- Лазаренко, С. В., & Макаренко, О. С. (2013). Багатопоточні комп'ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем. *Проблеми програмування*, (3), 109–116.

# Стійкість коефіцієнта кореляції до «викидів» при використанні в регресійному аналізі

С. М. Лапач

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[lapach@ukr.net](mailto:lapach@ukr.net)

Розглядається питання стійкості коефіцієнта кореляції при наявності «викидів», які в регресійному аналізі часто є наслідком закону розподілу похибки, відмінного від нормального, наприклад, логнормального чи нормального з «важкими хвостами». Тоді вони не можуть бути відкинутими або скорегованими і залишаються в навчальній вибірці. При цьому відбувається зміщення регресійної моделі в бік відхилень. Крім того, у зв'язку зі зміною коефіцієнтів кореляції можлива зміна сформованої структури моделі. Метою роботи є визначення наскільки великим може зміщення коефіцієнта кореляції залежно від розміру коефіцієнта, способу його обчислення, величини викиду та розміру вибірки.

**Ключові слова:** кореляційний аналіз, регресійний аналіз, коефіцієнт кореляції Пірсона, коефіцієнт кореляції Спірмена, коефіцієнт кореляції Кендала.

Коефіцієнти парної кореляції застосовують в регресійному аналізі для визначення конкретної специфікації (також у літературі вживають терміни-аналогі: структура, оптимальна множина регресорів) (Айвазян, Енюков, & Мешалкин, 1987; Езекиэл & Фокс, 1966; Лапач, 2017). Особливістю застосування є широке використання малих за абсолютною величиною значень коефіцієнтів, що пов'язано з можливістю множини значущих у сукупності, а не за одним з регресорів (Pardoux, 1982). Перевагою парного коефіцієнта кореляції при використанні для визначення конкретної структури рівняння моделі є то, що для «істинних» ефектів він більше, ніж для закорельованих з ним «хибних» (Лапач, Пасечник, & Чубенко, 1999). Проблеми, які виникають під час прийняття рішень у регресійному аналізі у зв'язку зі статистичними коливаннями значення коефіцієнта в різних вибірках однієї і тієї ж генеральної сукупності розглянуті в Лапач (2018). У регресійному аналізі у випадку «викидів», які в багатьох випадках можуть бути просто відхиленням від нормального розподілу помилки, наприклад з «важкими хвостами», які поширені, зокрема, при випробуваннях міцності, важливо знати, наскільки в цій ситуації можлива деформація структури моделі. Для цього необхідно знати, наскільки змінюється коефіцієнт кореляції при наявності «викидів».

У роботі досліджується наскільки змінюється порівняно з точним випадком оцінка коефіцієнта кореляції при наявності викидів. Аналізується вплив відносного розміру викидів, розміру вибірки, виду коефіцієнта кореляції (Пірсона, Спірмена, Кендала, Пірсона з використанням медіани замість середнього). За еталон взято значення коефіцієнта кореляції Пірсона для вибірки без викидів. Для дослідження взято штучно створену регресійну модель з різними рівнями залежності відгуку від факторів. Еталонні (без похибок і «викидів») значення коефіцієнтів кореляції приведено в табл. 1. Умовні позначення варіантів вибірок приведені в табл. 2.



Табл. 3 показує залежність тісноти зв'язку сукупності розрахованих коефіцієнтів кореляції для моделі залежно від розміру вибірки, наявності й величини «викиду», виду коефіцієнта кореляції і наявності випадкової похибки в результатах.

Тривіальні висновки — стійкість коефіцієнта кореляції, розрахованого будь яким способом, збільшується при збільшенні розміру вибірки; стійкість зменшується при збільшенні величини викиду. Переваг використання медіани замість середнього для обчислення коефіцієнта кореляції Пірсона не виявлено.

Таблиця 1. Рівень еталонної кореляції

Розмір вибірки	Назва фактору							
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_9$
16	0,895881	0,206166	-0,00984	-0,07438	-0,0333	0,024412	0,344878	-0,15252
32	0,858295	0,32919	0,070124	-0,08177	-0,12526	-0,10966	-0,16677	-0,07895

Таблиця 2. Умовні позначення в таблицях і на малюнках

Позначення	Розшифрування
П	Коефіцієнт кореляції Пірсона
С	Коефіцієнт кореляції Спірмена
К	Коефіцієнт кореляції Кендала
М	Коефіцієнт кореляції Пірсона з медіаною замість середнього
П+s	Коефіцієнт кореляції Пірсона з викидом розміром $\sigma$
С+s	Коефіцієнт кореляції Спірмена з викидом розміром $\sigma$
К+s	Коефіцієнт кореляції Кендала з викидом розміром $\sigma$
М+s	Коефіцієнт Пірсона з медіаною замість середнього з викидом розміром $\sigma$
П+2s	Коефіцієнт кореляції Пірсона з викидом розміром $2\sigma$
С+2s	Коефіцієнт кореляції Спірмена з викидом розміром $2\sigma$
К+2s	Коефіцієнт кореляції Кендала з викидом розміром $2\sigma$
М+2s	Коефіцієнт Пірсона з медіаною замість середнього з викидом розміром $2\sigma$
П+3s	Коефіцієнт кореляції Пірсона з викидом розміром $3\sigma$
С+3s	Коефіцієнт кореляції Спірмена з викидом розміром $3\sigma$
К+3s	Коефіцієнт кореляції Кендала з викидом розміром $3\sigma$
М+3s	Коефіцієнт Пірсона з медіаною замість середнього з викидом розміром $3\sigma$

Таблиця 3. Тіснота зв'язку коефіцієнтів кореляції з еталонним

Розмір вибірки N= 16				Розмір вибірки N = 32			
Точна		З похибкою		Точна		З похибкою	
Імена	Рівень кореляції	Імена	Рівень кореляції	Імена	Рівень кореляції	Імена	Рівень кореляції
П	1	П	1	П	1	П	1
М	0,999174	М	0,999713	М	0,999993	М	0,999969
К	0,985977	П+s	0,9839	М+s	0,995113	К	0,997331
С	0,982752	М+s	0,981051	П+s	0,995056	М+s	0,995365
П+s	0,979792	С	0,97508	С	0,993314	П+s	0,9953
К+s	0,973685	С+s	0,960701	С+s	0,990212	С	0,994808
К+2s	0,973685	П+2s	0,948715	К	0,98856	К+s	0,991602

K+3s	0,973685	K	0,94789	C+2s	0,988452	C+s	0,990447
M+s	0,972755	M+2s	0,9433	C+3s	0,988452	K+2s	0,984481
C+s	0,964017	C+2s	0,940446	K+s	0,982657	C+2s	0,98411
C+2s	0,964017	K+s	0,935346	M+2s	0,981381	M+2s	0,982385
C+3s	0,964017	C+3s	0,923695	П+2s	0,981167	П+2s	0,982125
П+2s	0,93354	П+3s	0,907926	K+2s	0,98099	K+3s	0,976093
M+2s	0,920003	K+2s	0,906446	K+3s	0,98099	C+3s	0,975823
П+3s	0,878566	M+3s	0,900402	M+3s	0,960556	M+3s	0,9627
M+3s	0,85975	K+3s	0,890624	П+3s	0,960091	П+3s	0,962159

При всіх рівнях «викиду» найближче до еталону відтворюють рівень зв'язку коефіцієнт кореляції Пірсона і його аналог з використанням медіани замість середнього. Відповідність між коефіцієнтами різних видів, як точними, так і з похибками різних рівнів при різних еталонних значеннях коефіцієнта представлено на рис. 1 і рис. 2. .

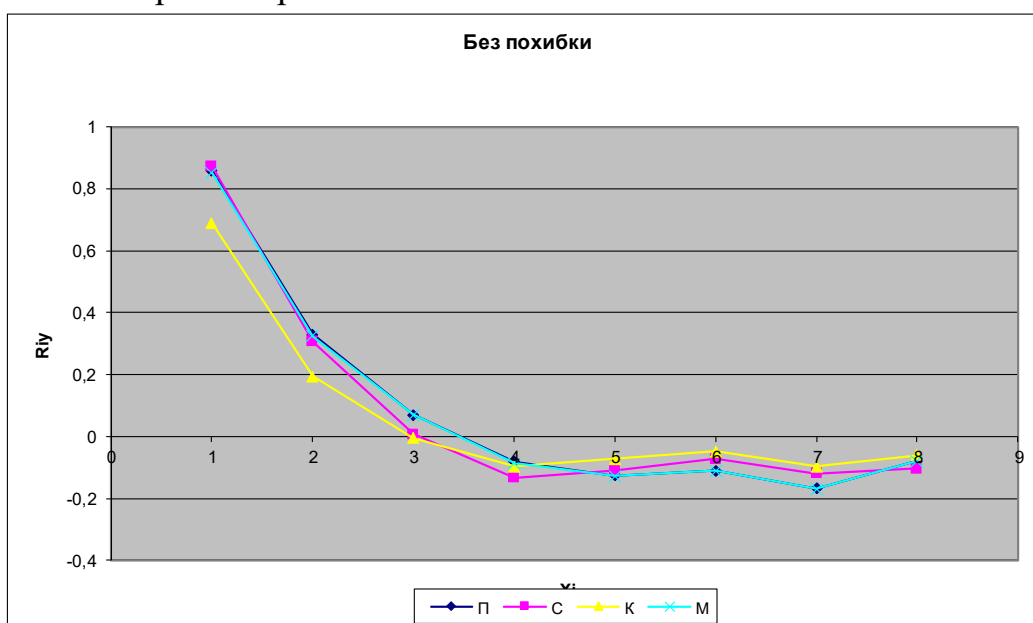


Рис. 1. Відповідність коефіцієнтів кореляції різних видів при відсутності «викидів»

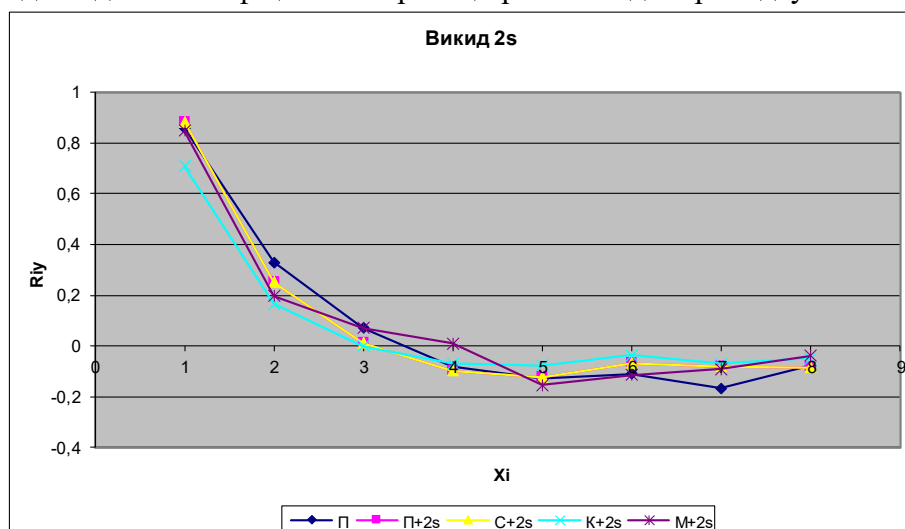


Рис. 2. Відповідність коефіцієнтів кореляції різних видів при наявності «викиду» в  $2\sigma$

Добре видно, що співвідношення між значеннями коефіцієнтів різних видів залежить від наявності «викидів». Тобто, наявність і величина «викидів» впливає на співвідношення коефіцієнтів кореляції, змінюючи їх. Прийняття рішення про використання певного виду коефіцієнтів кореляції залежить значною мірою від того, наскільки значення кореляції при наявності «викидів» відрізняється від еталонного. Від цього залежить наскільки спотворюється картина співвідношень рівня зв'язку з відгуком для різних регресорів і, зрештою, структура рівняння регресії. На рис. 3 показано рівень відхилень від еталонного значення для різних коефіцієнтів кореляції при високій закорельованості з відгуком.

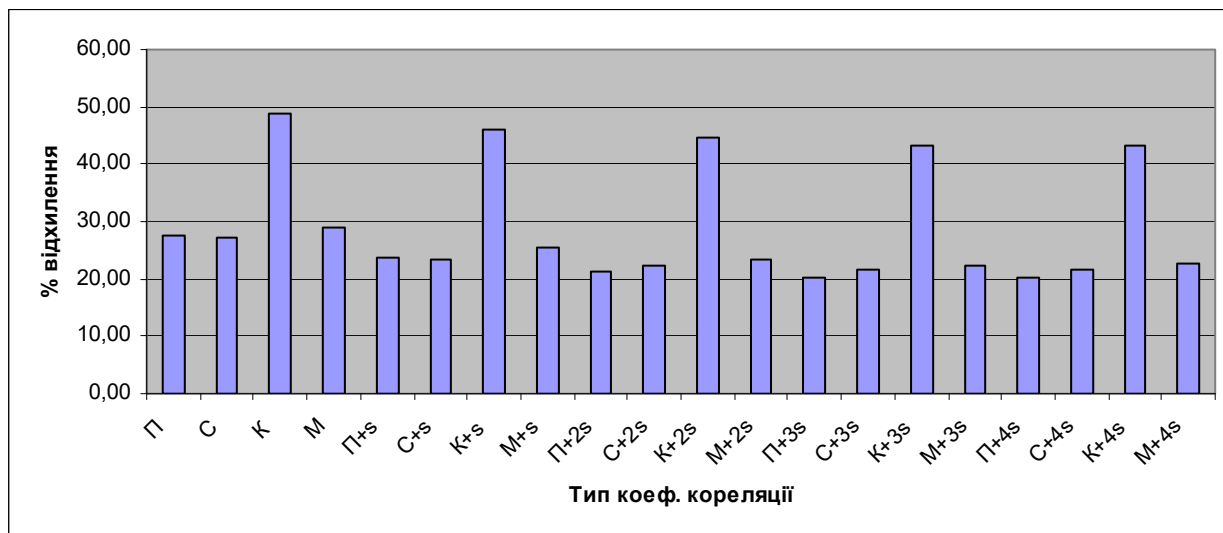


Рис. 3. Відхилення в процентах з похибкою і без для високої кореляції і різних рівнів «викидів»

### Висновки.

1. За стійкістю до «викидів» коефіцієнт кореляції Пірсона з використанням медіани замість середнього практично не відрізняється від традиційного.
  2. Найбільш стійкими до викидів є коефіцієнти кореляції Пірсона для всіх рівнів «викидів».
  3. Співвідношення рівня відхилень від еталонного значення кореляції різних видів змінюється залежно від рівня викидів.
  4. Найбільш відрізняється від еталонного в будь-яких умовах коефіцієнт кореляції Кендала.
  5. Структура співвідношень зберігається в цілому. Разом з тим, між окремими значеннями співвідношення коефіцієнтів може порушуватись, причому, імовірність такої ситуації зростає зі зменшеннями абсолютного значення коефіцієнта кореляції і зі зменшенням розміру вибірки.
- Отже, гіпотеза про більшу стійкість до «викидів» рангових коефіцієнтів кореляції чи використання медіани замість середнього при обчисленні кореляції не підтверджується. У регресійному аналізі наявність «викидів» при слабкому зв'язку регресорів з відгуком означає збільшення ймовірності неправильного визначення структури моделі.

### Список літератури

- Pardoux, C. (1982). Sur la sélection de variables en régression multiple: une mise au point. *Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle Série Recherche*, 39, 101–133.
- Айвазян, С. А., Енюков, И. С., & Мешалкин, Л. Д. (1987). *Исследование зависимостей*. Москва: Финансы и статистика.
- Езекиэл, М., & Фокс, К. А. (1966). *Методы анализа корреляций и регрессий. Линейных и криволинейных*. Москва: Статистика.
- Лапач, С. М. (2017). Кореляційний аналіз в застосування до визначення структури рівняння регресії. У *Матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука*, Київ, 7—10 жовтня (с. 119—123). Київ: КПІ.
- Лапач, С. М. (2018). Ризики застосування коефіцієнта кореляції при конкретній специфікації регресійної моделі. *Математичні машини і системи*, (3), 142—148.
- Лапач, С. Н., Пасечник, М. Ф., & Чубенко, А. В. (1999). *Статистические методы в фармакологии и маркетинге фармацевтического рынка*. Киев: ЗАТ «Укрспецмонтаж».

# Абарона кадаванага сігналу ад перахопу

А. І. Міцюхін

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі,

Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь

mityuhin@bsuir.by

У артыкуле аналізуюцца неабходныя характарыстыкі сістэмы сувязі, якія павышаюць ўзровень памехаабароненасці і утойлівасці.

**Ключевые слова:** сувязь, памехаабароненасць, радыёўціск, кадаванне, белы шум, памылка, імавернасць, нявызначанасць.

У спецыяльных сістэмах сувязі найважнейшае значэнне маюць такія характарыстыкі як памехаабароненасць і ўтойлівасць работы. Гэта абумоўліваецца тым, што такія сістэмы павінны працаваць у каналах з актыўным радыёсупрацівам (радыёэлектронным ўціскам) і радыётэхнічнай выведкай з мэтай выяўлення сігналу, вызначэння структуры сігналу і дэкадавання інфармацыі, якая перадаецца.

Сродкам радыёўціску перашкаджае памехаабароненасць работы сістэмы сувязі. Паспяховым дзеяннем радыёперахопу перашкаджае утойлівая работа сістэмы. У артыкуле аналізуюцца неабходныя характарыстыкі сістэмы сувязі, якія павышаюць ўзровень памехаабароненасці і утойлівасці.

Вядома, што павышэнне надзейнасці сувязі вырашаецца за кошт выкарыстання метаду пашырэння спектру інфармацыйнага сігналу (Ипатов, 2007), кадавання інфармацыі кодам, статыстычныя і спектральныя характарыстыкі, якога набліжаюцца да характарыстык фонавага выпраменьвання тыпу белага шуму. На мал. 1 паказана матэматычная мадэль канала, па якім перадаецца  $i$ -е кадаванае паведамленне  $X^i, i = 1, \dots, n, M, M$  — магутнасць мноства  $\{X\}$ . Кодар фарміруе словы  $[n, M, d_{\min}]$ -кода даўжынёй  $n$  знакаў;  $d_{\min} = 2t + 1$  — мінімальная адлегласць Хэмінга,  $t$  — кратнасць памылак, выпраўленых кодам; ДСК — двайковы сіметрычны канал (канал перахопу). Код можа выпраўляць  $t$  памылак. Як у асноўным канале, так і ў канале перахопу фарміруецца адытыўная сумесь (вектар) віду

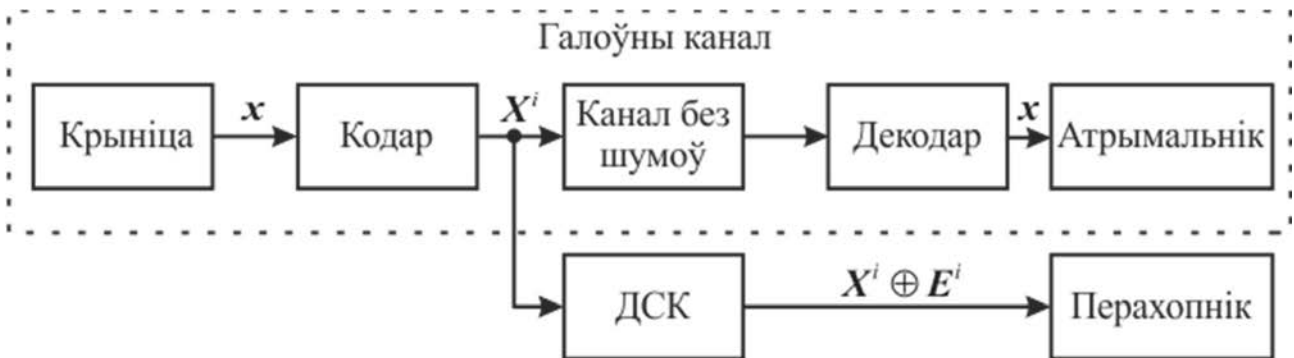
$$Y = X + E,$$

дзе  $E = (e_0, \dots, e_{n-1})$  — выпадковы вектар памылак (шумаваы вектар),  $X = (x_0, \dots, x_{n-1}), Y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ .

Мяркуюцца, што ў канале перахопу апрыёры могуць быць вядомымі алгарытмы кадавання-дэкадавання. Прымаем, што імавернасці  $\{P^1, \dots, P^M\}$  фарміравання кодавых словаў  $\{X\}$  аднолькавыя. Калі ўсе значэнні імавернасцяў роўныя

$$P^i = \frac{1}{M}$$

структура кода, вектары памылак  $E = (e_0, \dots, e_{n-1})$  адказваюць ўласцівасці псеўдавыпадковасці (вядомыя правілы крыптазасцярогі), то энтрапія крыніцы імкнецца да максімальнага значэння. Тым самым дасягаецца максімальная нявызначанасць інфармацыйнай крыніцы для перахопніка.



Мал. 1. Абагульненая матэматычная мадэль канала

Памылкі  $E$  робяць больш складаным выяўленне і дакладнае дэкадаванне інфармацыі ў канале перахопу. У асноўным канале вектар  $E$  выступае ў якасці ключа. Стратэгія абароны павінна грунтавацца на тым, што пасля атрымання  $Y$ , веды перахопніка адносна  $X$  заставаліся б нявызначанымі. Калі прыём вектара  $Y$  адбываецца ва ўмовах, калі на прыёмную прыладу дзейнічае адытыўны белы гаўсаўскі шум (АБГШ), працэс дэкадавання носіць імавернасны характар.

Колькаснай мерай паспяховага перахопу можа служыць значэнне імавернасці  $P(X|Y)$  атрымання інфармацыі крыніцы  $x \rightarrow X$ . У адпаведнасці з тэарэмай Баеса імавернасць перахопу  $i$ -га словы  $X^i$ , па прынятаму працэсу  $Y$  вызначаецца значэннем апастэрыёрнай імавернасці

$$P(X^i|Y) = \frac{P(Y|X^i)P(X^i)}{P(Y^i)},$$

дзе  $P(X^i)$  і  $P(Y^i)$  — адпаведна, апрыёрныя значэнні імавернасцяў ўваходу і выхаду канала (крыніц),  $P(Y|X^i)$  — пераходная імавернасць, якая характарызуе канал перахопу. Паколькі імавернасці  $P(X^i)$  і  $P(Y^i)$  вядомыя, дачыненне  $\frac{P(X^i)}{P(Y^i)}$  роўна пастаяннай велічыні  $K$ . Тады маем значэнне

$$P(X^i|Y) = KP(Y|X^i) \quad (1)$$

Паколькі выпадковы вектар  $E = Y - X$  не залежыць ад слова  $X$  функцыю

$P(Y|X)$  адлюструем як

$$P(Y|X) = P(Y - X = E|X) = P(E) \quad (2)$$

дзе велічыня  $P(E)$  — імавернасць узнікнення наўмыснага шумавога вектара.

Выраз

$$Y - X^i = \|Y - X^i\| = d(Y, X^i)$$

з (2) вызначае эўклідаву адлегласць паміж вектарам  $Y$  на выхадзе канала і  $i$ -м словам кода. З пазіцыі неабходнасці абароны інфармацыі ад перахопу, адлегласць Еўкліда  $d(Y, X^i)$  паказвае, колькі каардынат словы трэба сказаць з выкарыстаннем шумавога вектара  $E$ , каб перавесці (трансфармаваць) адно, дазволенае для перадачы кодавае слова, ў іншае дазволенае. Заўважым, у адрозненне ад канала з АБГШ, у выпадку з ДСК эквівалентам адлегласці Еўкліда з'яўляецца адлегласць Хэмінга  $d_{\min}$ . З выразу (1) вынікае, што працэдура перахопу (дэкадавання) заключаецца ў знаходжанні такога значэння нумара  $i$  кодавага слова, пры якім значэнне апастэрыёрнай імавернасці  $P(X^i|Y)$  дасягае максімума. Няхай ўжываецца алгарытм аптымальнага дэкадавання вектара  $Y$  бліжайшы вектар  $X$   $[n, M, d_{\min}]$ -кода па адлегласці Хэмінга (Митюхин, 2015). Тады, калі

$$d_{\min} \geq t = \frac{d_{\min} - 1}{2},$$

не існуе канфігурацый вектараў  $E$  з  $t$  або менш памылак, якія маглі б здзейсніць трансфармацыю. З (2) і апошняга сцвярджэння вынікае, што колькасць ненулявых сімвалаў у шумавога вектара  $E$  або ўзровень наўмыснага шуму вызначаецца значэннем імавернасцяў

$$P(Y, X^i) \rightarrow P(E) \rightarrow P$$

Задача павышэння ўзроўню памехаабароненасці і утойлівасці сістэмы сувязі патрабуе, каб у канале перахопу значэнне імавернасці  $P$  набліжалася да велічыні  $P \rightarrow 0,5$ . Задаваная вялічыня  $P$  адлюстроўвае ступень нявызначанасці адносна перахопленнага паведамлення. Практычны развязак гэтага задання грунтуецца на ўжыванні мноства кодавых вектараў  $\{X\}$ ,  $WT$ -

мернай прасторы, дзе  $WT = \frac{1}{\tau}$  — вялічыня спектральнай паласы кадаванага сігналу,  $\tau$  — працягласць элементарнага дыскрэта (чыпа) слова  $X$ ,  $T$  — часавы інтэрвал перадачы  $i$ -га сігналу. Развязак задання перахопу закадаванай інфармацыі патрабуе ведаў

$$2^n = 2^{\frac{T}{\tau}} = 2^{WT}$$

законаў мадуляцыі (кадавання) і неабходнасці апрацоўкі сігналаў у зашумленым канале.

Перахоп інфармацыі робіцца цяжка здзяйсняльным з-за значных часавых, вылічальных і энергетычных выдаткаў.

**Высновы.** Выкарыстанне шумавога вектара у сістэмах з пашырэннем спектру, якія характарызуюцца значным частотна-часовым здабыткам  $WT$  дазваляе забяспечыць энергетычную ўтойлівасць перадачы закадаванай інфармацыі.

#### Спіс літаратуры

- Ипатов, В. (2007). *Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения*. Москва: Техносфера.
- Митюхин, А. И., & Якубенко, П. Н (2015). Корреляционные спектры и кодовые расстояния мажоритарных последовательностей. *Доклады БГУИР*, 4(90), 5—9.



# Дослідження поведінки жорсткого сферичного сегменту в пружному середовищі під дією хвилі кручення

О. А. Назаренко

Одеська державна академія будівництва і архітектури, Одеса, Україна

Gelo.fabric@gmail.com

У теперешній час багато важливих вузлів, деталей і цілих агрегатів, які входять до складу сучасного обладнання, споруд, працюють або в постійно діючих або в різко нестаціонарних режимах. Тонкостінні конструкції оболонкового типу складають широкий клас механічного обладнання сучасного транспорту, ракетної техніки, і, звичайно, будівництва. В умовах експлуатації, під час інтенсивних навантажень різної природи, виникають великі напруження. Дослідження взаємодії недеформованих оболонок з навколишнім пружним середовищем має практичну цінність, обумовлену підвищенням ударостійкості судів щодо підводних і повітряних вибухів, поліпшенням методів і способів підводної акустики, забезпеченням сейсмостійкості деяких гідротехнічних споруд і їх складових частин. Таким чином, розробка математичних методів вирішення завдань про взаємодію нестаціонарних (стаціонарних) хвиль з різними об'єктами, зокрема й оболонкового типу, є актуальною.

У пропонованій роботі розглянуто взаємодію недеформованих об'єктів з навколишнім пружним середовищем.

Ця проблема, так чи інакше, вимушено приводить до розроблення математичних методів вирішення завдань про взаємодію нестаціонарних (стаціонарних) хвиль, що виникають у пружних середовищах із «зануреними» в них різними об'єктами. У якості яких, зокрема, розглядаються тонкостінні конструкції оболонкового типу, зчеплені з навколишнім їх простором.

Було поставлено задачу про можливість застосування методу розривних рішень до динамічних задач дифракції пружних хвиль на, як окремий випадок, сферичних включених. У зв'язку з цим, було розроблено підхід для дослідження зазначених хвильових процесів, заснований на застосуванні цього методу, а також, як наслідок, методу узагальнених інтегральних перетворень.

Для цього, з використанням інтегральних перетворень Фур'є та Лежандра, побудовано розривне рішення хвильового рівняння, а потім,

Користуючись методом розривного рішення для хвильового рівняння в сферичній системі координат (Попов, 1982; Попов & Назаренко, 1992; 1993), отримано його рішення в цих трансформантах:

$$\Psi_{nk}^J(r) = R^2 \left[ \langle \Psi_{nk}^{J'}(R) \rangle \Gamma_{\beta_0}(r, R) - \langle \Psi_{nk}^J(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \Gamma_{\beta_0}(r, R) \right], \quad (1)$$
$$J = \overline{1, 2}, \quad \Gamma_{\beta_0}(r, R) = \frac{\overline{\Psi_k^1}(r, R)}{\sqrt{rR}},$$

$$\overline{\Psi}_k^1 = \begin{cases} I_\nu(R\beta_0) K_\nu(r\beta_0), & r > R, \\ I_\nu(r\beta_0) K_\nu(R\beta_0), & r < R, \nu = k + 0, 5, \end{cases}$$

тут  $I_\nu(R\beta_0)$  — модифікована функція Бесселя,  $\beta_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho_m}{\mu}}$ ,  $\omega$  — циклічна частота,  $K_\nu(r\beta_0)$  — функція Макдональда; а потім і тривимірних рівнянь руху пружного середовища для зазначеного дефекту у сферичній системі координат:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_n \Psi_n^1(R+0, \theta) &= \frac{[\sin \theta u_n^\varphi(R+0, \theta)]' + in u_n^\theta(R+0, \theta)}{\sin \theta}, \\ \frac{1}{R} \nabla_n [\Phi_n(R+0, \theta)] + \nabla_n \left\{ \frac{1}{r} [r \Psi_n^2(r, \theta)]' \right\} \Big|_{r=R+0} &= \\ &= \frac{in u_n^\varphi(R+0, \theta) - [\sin \theta u_n^\theta(R+0, \theta)]'}{\sin \theta}, \\ \Phi_n'(R+0, \theta) + \frac{\nabla_n}{R} \Psi_n^2(R+0, \theta) &= u_n^r(R+0, \theta), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де

$$\nabla_n f = \frac{n^2 f}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right),$$

$f$  — довільна функція, що має, принаймні, другу неперервну похідну за змінною  $\theta$ ; штрих — похідна за змінною  $r$ , точка — похідна по змінній  $\theta$ .

Для подальших обчислень виникла необхідність у виведенні й доведенні збіжності лівого спектрального співвідношення з неінтегрованою особливістю для многочленів Якобі. Застосувавши його до отриманих рівнянь, а потім, скориставшись співвідношенням ортогональності для многочленів Якобі у сферичній системі координат, а також використовуючи побудований розривний розв'язок, удалось звести задачу пружних хвиль на дефекті до задачі розв'язання інтегральних рівнянь.

Припускаємо, що з боку середовища на дефект діє хвиля крутіння, створювана деяким крутолом (Грилицкий & Поддубняк, 1980):

$$u_0^\varphi = Ar \sin \theta \cdot e^{i\beta_0 r \cos \theta}, \quad (3)$$

де  $A$  — це амплітуда хвилі,  $r$  — радіус-вектор в сферичній системі координат. Слід зазначити, що в такій інтерпретації, розв'язання поставленої задачі сильно спрощується. У цьому випадку

$$\Phi \equiv 0, \Psi^1 = \Psi^1(r, \theta), \Psi^2 \equiv 0$$

і відмінними від нуля будуть компоненти  $u^\varphi$ ,  $\tau^{\theta\varphi}$ ,  $\tau^{r\varphi}$ , що приведе до необхідності розв'язання лише першого рівняння з системи (2), яке, в силу симетричності, набуде простішого вигляду:

$$\nabla_0 \Psi_0^1 (R + 0, \theta) = \frac{[\sin \theta \cdot u_0^\varphi (R + 0, \theta)]^\bullet}{\sin \theta}. \quad (4)$$

Використовуючи матеріали праць Гузь та Немиш (1982), Гузь, Кубенко та Черевко (1978), а також запроваджуючи позначення для стрибків (Попов, 1982; Попов & Назаренко, 1992; 1993), можна виразити стрибок функції і її нормальної похідної через скачки напружень. Таким чином рівняння (4) перетворимо до вигляду:

$$\frac{R^2}{\mu} \int_0^{\omega_0} \langle \tau_n^* (R, \tau) \rangle \sin \tau K_{\beta_0} (r, R, \theta, \tau) \Big|_{r=R+0} d\tau = F_n (\theta), \quad (5)$$

де  $R$  — радіус сегмента,  $\omega_0$  — кутовий розмір дефекту в радіанах (кут між віссю  $Oz$  і  $r$ ),  $\tau$  — кут прямого перетворення Лежандра,

$$\begin{aligned} \langle \tau_n^* \rangle \sin \tau &= in \langle \tau_n^\theta \rangle + [\sin \tau \langle \tau_n^\varphi \rangle]^\bullet K_{\beta_0} (r, R, \theta, \tau) = \\ &= \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{k,|n|} \Gamma_{\beta_0} (r, R) P_k^{|n|} (\cos \theta) P_k^{|n|} (\cos \tau), \\ \sigma_{k,|n|} &= \frac{(k - |n|)!}{(k + |n|)!} \left( k + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$P_k^{|n|} (\cos \theta)$  — поліном Лежандра,  $F_n (\theta)$  — права частина рівняння (4) в термінах перетворення Фур'є. Для ефективного розв'язання інтегрального рівняння першого роду, потрібно перетворити рівняння (5) в інтегральне рівняння другого роду (Попов, 1991; Роров, 1992). Використовуючи Попов (1991), можна довести, що правдиве наступне співвідношення:

$$\Gamma_{\beta_0} (r, R) = \frac{1}{2k + 1} - \frac{\Lambda_k (R\beta_0)}{2k + 1}, \quad (6)$$

де

$$\Lambda_k (R\beta_0) = (-1)^k \int_0^\pi \Omega'_0 (2R\beta_0 \cos (0, 5\alpha)) \sin [(k + 0, 5)\alpha] d\alpha,$$

штрих — похідна за зовнішнім аргументом, що входить у функцію

$$\Omega_0 (2R\beta_0 \cos (0, 5\alpha)) = I_0 (2R\beta_0 \cos (0, 5\alpha)) - L_0 (2R\beta_0 \cos (0, 5\alpha)),$$

$L_0(\cdot)$  — модифікована функція Струве нульового порядку.

Позначаючи стрибка напруги

$$\chi_n (\tau) = \langle \tau_n^* (R, \tau) \rangle$$

і позбавляючись від модулів в рівнянні (11), отримаємо:

$$\frac{R^2}{\mu} \left\{ \int_0^{\omega_0} W_n \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) \sin \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \Lambda_k(\beta_0 R) \int_0^{\omega_0} P_k^n(\cos \theta) P_k^n(\cos \tau) \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau \right\} = (7) \\ = F_n(\theta),$$

де  $0 \leq \theta \leq \omega_0$ ,  $n = 0$ .

Розроблено ефективний чисельний метод наближеного розв'язання інтегральних рівнянь (7). Застосуванням методу редукції вдалося до мінімуму скоротити число ітерацій.

Використовуючи отримане рішення інтегрального рівняння, як проміжний результат, далі, виводимо формулу для визначення реактивного моменту, що діє на дефект, який породжується хвилею крутіння:

$$M = 2\pi R^3 \beta \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \chi_0^{(m)} \int_0^{\omega_0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} P_m^{0,-3/2} \left( 1 - \frac{2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta d\theta}{\cos \frac{\theta}{2} \left( \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \right)^3} - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \chi_0^{(m)} \int_0^{\omega_0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} P_m^{0,-3/2} \left( 1 - \frac{2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) d\theta}{\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}. \quad (8)$$

Щоб обчислити реактивний момент крутіння, вхідним параметрам було надано такі значення: включення виготовлено зі сталі, його товщина  $h = 5 \cdot 10^{-4}$ , радіус  $R = 0,02$  м, матеріал навколишнього пружного середовища — вапняний шпат зі швидкістю зміщення  $c = 1113$  м/с, щільністю  $\rho_0 = 7900$  кг/м<sup>3</sup>, параметром Ламе  $\mu = 3,58 \cdot 10^9$  МПа і амплітудою падаючої хвилі  $A = 0,01$  рад.

На рис. 1 побудовано сімейство кривих у вигляді залежності реактивного моменту крутіння  $M$  від частоти  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  для різних розмірів сферичного дефекту  $\omega \approx 23^\circ$  — крива 1,  $\omega \approx 25^\circ$  — крива 2,  $\omega \approx 27^\circ$  — крива 3.

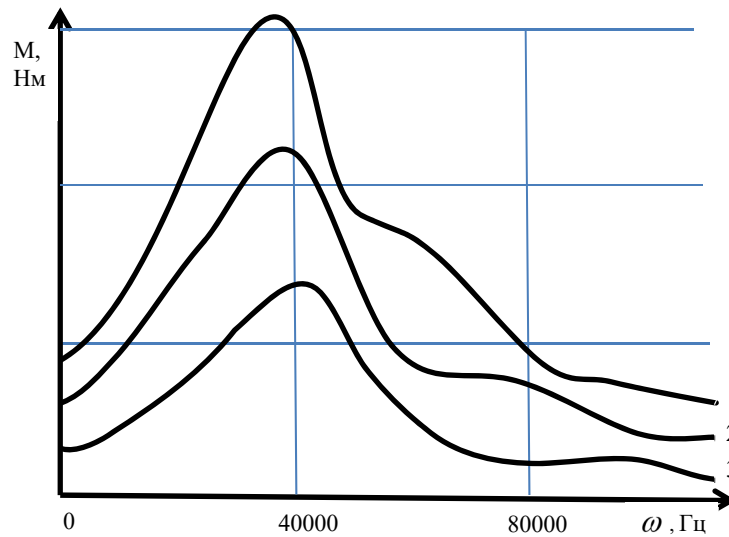


Рис. 1.

### Список літератури

- Ропов, Г. І. (1992). Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. *Advances in Mechanics. Uspekhi Mekhaniki*, 15, 71–110.
- Грилицкий, Д. В., & Поддубняк, А. И. (1980). Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде. *Механика твердого тела*, (5), 86–92.
- Гузь, А. Н., & Немиш, Ю. Н. (1982). *Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости*. Киев: Вища школа.
- Гузь, А. Н., Кубенко, В. А., & Черевко, М. А. (1978). *Дифракция упругих волн*. Киев: Наукова думка.
- Попов, Г. Я. (1982). *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. Москва: Наука.
- Попов, Г. Я. (1991). Об одном новом подходе к задачам о концентрации упругих напряжений возле трещин. *Прикладная математика и механика*, 55(1), 148–156.
- Попов, Г. Я., & Назаренко, О. А. (1992). Исследование метода разрывного решения для анализа дифракции акустических волн на абсолютно жесткой преграде. *Акустика и ультразвуковая техника*, (27), 27–31.
- Попов, Г. Я., & Назаренко, О. А. (1993). Метод анализа дифракции акустических волн на жесткой преграде вблизи жесткого плоского дна. *Акустика и ультразвуковая техника*, (28), 29–35.

# Математичні аспекти обробки даних судових рішень

Д. В. Павлюк<sup>1</sup>, О. В. Семенів<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ТОВ «Ховер Україна», Житомир, Україна

<sup>2</sup>Svitla Systems, Inc., Київ, Україна

[oleg.semeniv@gmail.com](mailto:oleg.semeniv@gmail.com)

У роботі розглянуто задачу пошуку статистичних закономірностей для підвищення ефективності ведення судових справ на основі відкритих даних. Досліджено можливість виділення інформативних характеристик за типом справи та оцінювання ймовірності досягнення позитивного результату. Розроблено програмне забезпечення, що дозволяє на основі відкритих даних здійснювати пошук та селекцію необхідних справ за вказаним типом, формувати вибірки за прийнятими рішеннями, проводити попередні статистичні розрахунки, відслідковувати існуючі справи та здійснювати їх супровід. Продемонстровано перспективність застосування машинного навчання для досягнення позитивних рішень у судових справах та для автоматичного відбору найбільш перспективних справ у контексті успішного їх ведення.

**Ключові слова:** обробка даних, машинне навчання, судові рішення, статистичний аналіз, відкриті дані.

Динамічний розвиток методів машинного та глибокого навчання все частіше знаходять відгук у різних сферах людської діяльності [1—3]. Створені засоби аналізу та обробки різномірної інформації в близькому до реального часу дозволяють значною мірою спростити, а часто й замінити людську рутинну роботу [1—7]. Розпізнавання мови, тексту та зображень дозволяють створювати високоінтелектуальні автоматизовані системи супроводу та допомоги людині: пошуку та вибору оптимальних маршрутів, пошуку квитків та апартаментів, підбору таргетованої реклами, здійснення покупок, ведення обліку та аудиту, медичного супроводу, перекладачі і т. п. [1—7]. Стає зрозумілим, що з часом важко буде уявити галузь, у якій, тією чи іншою мірою, не буде використовуватися машинне та глибоке навчання.

Юриспруденція та судова гілка залишаються вузько спеціалізованою та доволі закритою сферою, при цьому ринок юридичних послуг відзначається доволі значною капіталізацією [8, 9]. Застосування сучасних математичних засобів для прогнозування та систематизації судових рішень в останні роки набувають значного поширення [8—12]. Проте прогностичні моделі вимагають значних баз даних з урахуванням як варіативності самих судових справ, так і варіативності розглянутих супровідних чинників і, звичайно ж, доступності всього ланцюгу супроводження справи для виявлення прихованих чинників. На даному етапі такої інформації не можливо отримати, що унеможливорює створення репрезентативної вибірки. Однак реалізація системи асистента юриста, яка дозволить узагальнювати, вести пошук інформації по відкритих каналах та формувати ймовірнісні оцінки для спрощення прийняття рішення юриста є цілком можливою.

Значною мірою роботу юриста, під час підготовки до суду, можна розділити на наступні етапи: тлумачення та ідентифікація типу справи за проблемою

(визначення територіальної та предметної підсудності), визначення нормативно-правової бази, на якій ґрунтується правова позиція, вивчення судової практики за аналогічними справами, підготовка процесуальних документів, оцінка ризиків результату ведення справи, визначення винагороди з урахуванням об'єму та складності роботи. Очевидно, що значну частину юридичної діяльності за наявності достатньої бази знань можливо формалізувати математично.

Розгляньмо доступність інформації, яку можна отримати на основі відкритої бази даних в Україні, і який вид статистики можна отримати:

- а) загальна кількість позитивних та негативних рішень за типом справи;
- б) частота прийняття позитивних та негативних рішень за типом справи;
- в) виявлення судів (суддів), що прийняли максимальну/мінімальну кількість позитивних/негативних рішень за певним типом рішення;
- г) середня кількість позитивних/негативних рішень по справах певного типу по судах (окремо по суддях);
- г) відносний показник позитивних/негативних прийнятих рішень по справах певного типу (загальний, по судах, по суддях);
- д) дисперсія прийнятих рішень по справах певного типу для оцінювання допустимих відхилень при пошуку аномалій;
- е) виділення законів, на які посилалися при негативно/позитивно прийнятих рішеннях;
- є) пошук та систематизація унікальних профілів (шаблонів) посилань на статі законів/кодексів у прийнятих негативно/позитивно рішеннях для досягнення відповідних рішень по справам певного типу.

Припускаємо, що необхідно здійснити попередню оцінку ймовірності виграшу судової справи  $s$  деякого типу  $k \in K$ , у певній судовій інстанції  $j \in J$ , із врахуванням складності справи  $e \in (0; 1]$  (попередня суб'єктивна експертна оцінка, де менше значення відображає найскладніший вид справи), відомих рішень за даним типом справ та доступної статистики щодо рішень суду і судді за даним типом справ. Нехай на основі відкритих даних [13] можна провести оцінку позитивних результатів за даним типом справ у контексті усіх доступних позитивних рішень  $\xi$ , позитивних рішень прийнятих в певному суді  $\bar{\xi}$  та суддею  $\hat{\xi}$ . Таким чином оцінку справи  $s$  у контексті прийняття її до розгляду можна представити у вигляді функції

$$d_s = f(e_{jk}, \xi_{jk}, \bar{\xi}_k, \hat{\xi}_k) = \frac{e_{jk}}{3} \left( \frac{\theta_0 \xi_{jk}}{\Xi_{jk}} + \frac{\theta_1 \bar{\xi}_k}{\bar{\Xi}_k} + \frac{\theta_2 \hat{\xi}_k}{\hat{\Xi}_k} \right),$$

$$\sum_{t=0}^2 \theta_t$$

де  $\Xi_{jk}$  — загальна кількість справ типу  $k$ , що розглянуті в усіх судах інстанції  $j$ ,  $\bar{\Xi}_k$  та  $\hat{\Xi}_k$  — загальна кількість справ розглянутих в обраному суді та суддею,  $\theta$  — вагові коефіцієнти, що дозволяють проводити сублімовану оцінку без урахування деяких підвибірок,

$$0 \leq \sum_{t=0}^3 \theta_t \leq 3, \quad \theta_t = [0, 1],$$

а  $0 \leq d_s \leq 1$ . Таким чином, вибираючи деякий пороговий відбір, можна здійснити фільтрування справ щодо ймовірності їх виграшу. Нехай необхідно автоматично проводити відбір більш перспективних справ для розгляду юристом. Тоді при

$$e = 1, \quad \sum \theta = 3,$$

за шаблонним профілем та з використанням відкритих даних [13], проводиться оцінка ймовірності позитивних рішень за даним типом справ.

Ще одним важливим фактором, який суттєво може допомогти у формуванні коректного запиту для отримання очікуваного результату, є можливість, на основі проведеного відбору прийнятих рішень за типом справи, виділення унікальних законів та постанов. Нехай у рамках типових справ, за якими прийнято негативне рішення посилаються на  $\phi \in \Phi$  законів та постанов, а за якими прийнято позитивне або частково задовільне  $\phi' \in \Phi$ , де  $\phi + \phi' = \Phi$  — сукупність усіх законів та постанов на які здійснено посилання в рамках досліджуваного типу справ. Таким чином на основі машинного навчання можна провести вибір законів  $\hat{\phi} \in \phi'$  та  $\hat{\phi} \notin \phi$ .

Очевидно, що описаний вище математичний інструмент значною мірою залежить від якості обробки та виділення корисної інформації за типом досліджуваних справ. Даному аспекту роботи приділено значну увагу, програмний засіб розроблено так, що дозволяє через канали доступу до відкритих даних [13] здійснювати пошук та селекцію необхідних справ за вказаним типом, формувати вибірки за прийнятими рішеннями, проводити попередні статистичні обрахунки, відслідковувати існуючі справи та здійснювати їх супровід.

Наступний крок досліджень буде направлено на реалізацію автоматичного оцінювача ймовірності виграшу та ідентифікатору найбільш придатних законів та постанов для отримання позитивного рішення під час розгляду судової справи певного типу.

### Список літератури

1. Yu, D., & Deng, L. (2015). *Automatic speech recognition. A Deep Learning approach*. London: Springer-Verlag.
2. Deng, L., & Yu, D. (2014). Deep learning: methods and applications. *Foundations and Trends® in Signal Processing*, 7(3—4), 197—387.
3. Wu, Y., Schuster, M., Chen, Z., Le, Q. V., Norouzi, M., Macherey, W., ... & Klingner, J. (2016). Google's neural machine translation system: Bridging the gap between human and machine translation. *arXiv preprint arXiv:1609.08144*.
4. Chung, J. S., Senior, A., Vinyals, O., & Zisserman, A. (2016). Lip Reading Sentences in the Wild. *arXiv preprint arXiv:1611.05358v1*.
5. Isola, P., Zhu, J. Y., Zhou, T., & Efros, A. A. (2018). Image-to-Image translation with conditional adversarial networks. *arXiv preprint arXiv:1611.07004v3*.



6. Wojna, Z., Gorban, A., Lee, D. S., Murphy, K., Yu, Q., Li, Y., & Ibarz, J. (2017). Attention-based extraction of structured information from street view imagery. *arXiv preprint arXiv:1704.03549*.
7. Kadurin, A., Aliper, A., Kazennov, A., Mamoshina, P., Vanhaelen, Q., Khrabrov, K., Zhavoronkov, A. (2017). The cornucopia of meaningful leads: Applying deep adversarial autoencoders for new molecule development in oncology. *Oncotarget*. 8(7), 10883—10890.
8. Katz, D. M., Bommarito, I. I., Michael, J., & Blackman, J. (2014). Predicting the behavior of the supreme court of the united states: A general approach. *arXiv preprint arXiv:1407.6333*.
9. Surden, H. (2014). Machine learning and law. *Washington Law Review*, 89(1), 87—115.
10. Harbert, T. (2013). The law machine. *IEEE Spectrum*, 50(11), 31–54.
11. Lee, E. D., Broedersz, C. P., & Bialek, W. (2015). Statistical mechanics of the US Supreme Court. *Journal of Statistical Physics*, 160(2), 275–301.
12. Katz, D. M., Bommarito II, M. J., & Blackman, J. (2017). A general approach for predicting the behavior of the Supreme Court of the United States. *PloS one*, 12(4), e0174698. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0174698>
13. Opendatabot — сервіс моніторингу реєстраційних даних українських компаній та судового реєстру для захисту від рейдерських захоплень і контролю контрагентів. <https://opendatabot.ua>

# Про ефективність роботи деякого технічного пристрою

Н. В. Поліщук, О. І. Кушлик-Дивульська

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

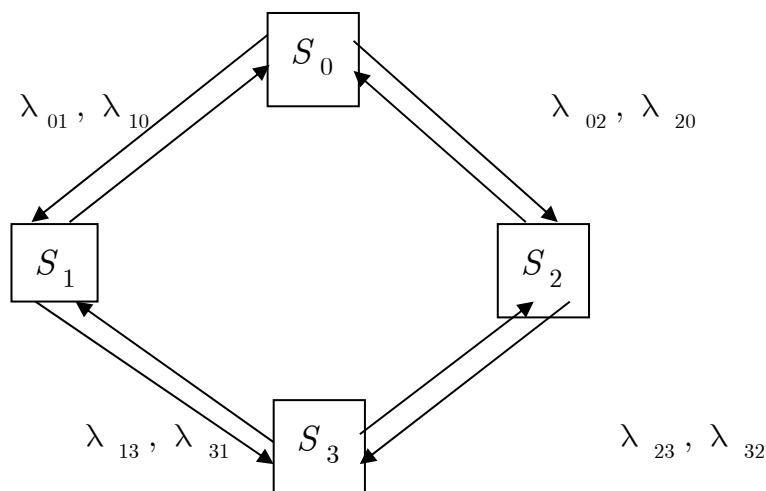
[nvpolinv@gmail.com](mailto:nvpolinv@gmail.com), [olgakushlyk64@gmail.com](mailto:olgakushlyk64@gmail.com)

Розглянуто задачу дослідження ефективності роботи технічного пристрою, який складається із двох вузлів і може перебувати в чотирьох станах. Наведено матрицю інтенсивностей переходів, диференціальні рівняння Колмогорова, рівняння фінальних станів. Розраховано ймовірності фінальних станів і дохід роботи пристрою. Досліджено доцільність зменшення часу ремонту вузлів при збільшенні вартості ремонту.

**Ключові слова:** технічний пристрій, ймовірності станів, дохід.

Технічні пристрої з можливостями переходу з одного стану в інший широко використовують у прикладних задачах. Їх розглядають також у дисциплінах «Дослідження операцій», «Математичне програмування», «Теорія надійності» для економічних і технічних спеціальностей вишів. Для них досліджують питання ефективності та надійності роботи.

Маємо технічний пристрій, який може перебувати в чотирьох станах  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану  $S_i$  у стан  $S_j, i, j = 0, 1, 2, 3$ , з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Граф системи має вигляд:



Можливості переходу із стану у стан позначені на графі стрілками. Матриця інтенсивностей переходів для станів системи має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00}^* & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11}^* & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\lambda_{22}^* & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{33}^* \end{pmatrix}^T,$$

де  $\lambda_{ii}^*$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  — сумарна інтенсивність потоків, які виводять систему із стану  $S_i$ .

Складемо матрицю інтенсивностей переходів для даного пристрою, маємо

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) & \lambda_{01} & \lambda_{02} & 0 \\ \lambda_{10} & -(\lambda_{10} + \lambda_{13}) & 0 & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & 0 & -(\lambda_{20} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \end{pmatrix}^T.$$

Позначаємо  $p_i(t)$  — ймовірність знаходження пристрою у стані  $S_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , у момент  $t$ . Ці ймовірності задовольняють матричній системі диференціальних рівнянь Колмогорова (Вентцель, 1972):

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ p_3'(t) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} p_0' = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 + \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 + \lambda_{31}p_3, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3, \end{cases}$$

з початковим умовами:

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0.$$

У кожний момент часу  $t$  для функцій  $p_i(t)$  виконано співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$$

У теорії випадкових процесів доведено (Поліщук та ін., 2011): якщо кількість станів системи скінчена і з кожного з них можна за скінчене число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Вони справджують систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} -(\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 + \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 + \lambda_{31}p_3 = 0, \\ \lambda_{02}p_0 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

при умові

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (2)$$

Запропонований технічний пристрій можна використати для аналізу ефективності роботи промислових комплексів, які містять декілька вузлів обслуговування. У роботах Поліщук (2016а, 2016б) розглядається система масового обслуговування для дослідження роботи поліграфічного комплексу з двох друкувальних машин.

Застосуємо цю методику для дослідження ефективності роботи деякого комплексу із двох вузлів обслуговування і двох ремонтних бригад. Вузли обслуговування можуть відмовити в будь-який момент. Після чого починається ремонт вузла, який триває випадковий час. Розглянемо можливість збільшення доходу від роботи цього комплексу при зменшенні тривалості ремонту машин.

Нехай стан системи  $S_0$  — обидва вузли працюють,  $S_1$  — перший вузол у ремонті, другий працює,  $S_2$  — перший працює, другий у ремонті,  $S_3$  — обидва вузла в ремонті. Задаємо інтенсивності переходів наступними співвідношеннями

$$\lambda_{01} = \lambda_{10} = \lambda_{32} = 2, \quad \lambda_{02} = \lambda_{20} = \lambda_{31} = 1, \quad \lambda_{13} = \lambda_{23} = 3.$$

Знаходимо фінальні ймовірності, розв'язуючи систему (1) при умові (2). Маємо точні розв'язки:

$$p_0 = 0,1875; \quad p_1 = 0,15625; \quad p_2 = 0,25; \quad p_3 = 0,40625.$$

Нехай дохід від роботи першого вузла 20 ум. од. за одиницю часу, другого вузла — 10 ум. од. за од. ч., ремонт першого вузла коштує 6 ум. од., другого — 4 ум. од. за од. ч.

Обчислюємо дохід від роботи комплексу.

Перший вузол працює з ймовірністю

$$p_0 + p_2 = 0,4375,$$

не працює — з ймовірністю

$$p_1 + p_3 = 0,5625.$$

Другий вузол працює з ймовірністю

$$p_0 + p_1 = 0,34375,$$

не працює — з ймовірністю

$$p_2 + p_3 = 0,65625.$$

Тому дохід від роботи комплексу буде дорівнювати

$$D = 20(p_0 + p_2) + 10(p_0 + p_1) - 6(p_1 + p_3) - 4(p_2 + p_3) = \\ = 6,1875 \text{ ум. од. за од. ч.}$$

З'ясуємо, як зміниться дохід, якщо тривалість ремонту кожного вузла зменшити вдвічі, тоді інтенсивність потоку ремонту збільшиться вдвічі. Маємо

$$\bar{\lambda}_{10} = \bar{\lambda}_{32} = 4, \quad \bar{\lambda}_{20} = \bar{\lambda}_{31} = 2$$

відповідно. Інші інтенсивності потоків залишимо без змін. При цьому ремонт першого вузла буде коштувати 12 ум. од., а другого — 8 ум. од. за од. часу, тобто збільшиться вдвічі. Для фінальних ймовірностей станів тепер маємо:

$$\bar{p}_0 = 0,38554; \quad \bar{p}_1 = 0,16868; \quad \bar{p}_2 = 0,24096; \quad \bar{p}_3 = 0,20482.$$

При цих змінах дохід  $\bar{D}$  від роботи комплексу буде дорівнювати

$$\bar{D} = 20(\bar{p}_0 + \bar{p}_2) + 10(\bar{p}_0 + \bar{p}_1) - 12(\bar{p}_1 + \bar{p}_3) - 8(\bar{p}_2 + \bar{p}_3) = \\ = 10,024 \text{ ум. од. за од. ч.}$$

Оскільки дохід збільшився у 1,6 рази, то економічна доцільність прискорення ремонту вузлів очевидна.

#### Список літератури

- Вентцель, Е. С. (1972). *Исследование операций*. Москва: Советское радио.
- Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І., & Орел, Б. П. (2011). *Дослідження операцій: конспект лекцій*. Київ: НТУУ «КПІ».
- Поліщук, Н. В. (2016а). Дослідження надійності деякої системи масового обслуговування. У *Матеріалах V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 29—30 грудня 2015 р.* (с. 89—90). Київ: НТУУ «КПІ».
- Поліщук, Н.В. (2016б). Застосування систем масового обслуговування в дисципліні «Дослідження операцій». У *Матеріалах XVII міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 19—20 травня* (Т. 3, с. 310—311). Київ: НТУУ «КПІ».

# Планы эксперимента на основе ЛП<sub>т</sub> равномерно распределенных последовательностей

С. Г. Радченко

*Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина*  
lapach@ukr.net

Получение многофакторных статистических регрессионных моделей с наилучшими свойствами возможно только при планировании эксперимента. При невозможности проведения полного факторного эксперимента рекомендуется использовать многофакторные регулярные планы и планы на основе ЛП<sub>т</sub> равномерно распределенных последовательностей. Указанные последовательности позволяют по сравнению с регулярными планами получить расположение точек плана эксперимента, более близкое к тем точкам многомерного пространства отклика, в которых эта поверхность принимает экстремальные значения или имеет точки перегиба.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, планы эксперимента, структура модели, ЛП<sub>т</sub>-равномерно распределенные последовательности.

При построении многофакторных статистических регрессионных моделей реальных сложных систем и процессов часто используются полиномиальные модели линейные по параметрам и нелинейные, в общем случае, по факторам. При построении моделей необходимо восстановить в виде формализованного выражения влияние управляемых факторов и оценить случайную составляющую, которая не несет полезной информации. Источником ее являются неуправляемые и неконтролируемые факторы. Такие задачи получили название обратных. Обратная задача — определение коэффициентов **B** в уравнении

$$Y = XB + E$$

по измеренному выходному результату **Y** и условиям наблюдения **X**; **E** — значение случайной ошибки  $\epsilon$  (Радченко, 2011).

Получение многофакторных статистических моделей с наилучшими свойствами возможно только при планировании эксперимента, т. е. в том случае, когда матрица, которая используется для построения модели, конструируется таким образом, чтобы обеспечить требуемые свойства всего процесса моделирования. Оптимальность плана должна определяться как ошибкой модели, так и ошибкой определения коэффициентов модели (Радченко, 2011; Бродский, 1976; Лапач, 2016; Радченко, 2012).

Это означает, что к построению многофакторных регрессионных моделей необходимо подходить системно: процесс должен включать построение плана эксперимента, формализованный выбор структуры модели, устойчивое оценивание коэффициентов модели.

Под устойчивым (робастным) планом эксперимента понимается план факторного эксперимента, позволяющий выбрать неизвестные исследователю структуры «истинных» статистических моделей  $\hat{y}$  полиномиального вида, линейных по параметрам, и получить адекватные модели. План эксперимента не изменяется для получаемых различных структур моделей (Радченко, 2011, с. 89). План эксперимента должен обеспечивать за счет ортогональности и нор-

мирования эффектов максимально возможную устойчивость коэффициентов модели ( $\text{cond}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 1$ ).

Устойчивым робастным планам экспериментов соответствуют полные факторные эксперименты, многофакторные регулярные не близкие к насыщенным планы экспериментов, планы на основе ЛП<sub>τ</sub> равномерно распределенных последовательностей (Радченко, 2005).

Устойчивая структура многофакторной статистической модели — структура, которая характеризуется неизменностью множества главных эффектов и взаимодействий многофакторной статистической модели полиномиального вида при изменении значений результатов экспериментов (откликов), порождаемых случайными ошибками (погрешностями) результатов наблюдений, измерений, вычислений и неопределенностью искомой структуры модели. Структурные элементы моделей выбираются из множества структурных элементов модели полного факторного эксперимента с ортогональными или слабо коррелированными (коэффициент парной корреляции  $|r_{ij}| < 0,3$ ) эффектами с использованием устойчивого (робастного) плана эксперимента (Радченко, 2011, с. 91—92).

Определенность и точность моделирования зависит от ортогональности эффектов в структуре построенной модели, устойчивости моделирования, т. е. конкретных выбранных условий моделирования. Для создания наилучших условий получения модели необходимо, чтобы влияющие на критерии качества факторы были управляемые. Выбор условий проведения эксперимента должен сводиться к получению системы ортогональных эффектов, которые должны быть нормированы. Целесообразно использовать схему полного факторного эксперимента. Если по количеству опытов проведение его невозможно, применяют дробный факторный эксперимент с использованием многофакторных регулярных планов и планов на основе ЛП<sub>τ</sub> равномерно распределенных последовательностей. Такие планы наиболее близки к полному факторному эксперименту.

Равномерное расположение точек в многомерном пространстве известно как ЛП<sub>τ</sub> равномерно распределенные последовательности (Соболев & Статников, 2006). Теория их построения, алгоритмы получения и свойства приведены в многочисленных работах д.ф.-м.н. И.М. Соболя.

Последовательность точек  $P_1, \dots, P_i, \dots$  называется *равномерно распределенной* (Соболев, Статников, 2006) в  $n$ -мерном кубе  $K^n$ , если для любого параллелепипеда  $\Pi$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = V_{\Pi},$$

где  $S_N(\Pi)$  — количество точек  $P_i$  с номерами  $1 \leq i \leq N$ , принадлежащих  $\Pi$ ;  $V(\Pi)$  — объем ( $n$ -мерный) параллелепипеда  $\Pi$ .

Последовательность точек  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$   $n$ -мерного куба  $K^n$  называется ЛП<sub>τ</sub>-последовательностью, если любой ее двоичный участок, содержащий не менее чем  $2^{\tau+1}$  точек, представляет собой П<sub>τ</sub>-сетку (Соболь, Статников, 2006).

Равномерное распределение точек плана эксперимента в любом многомерном пространстве уже при сравнительно малом количестве точек ( $N = 16 \dots 64$  — в физических экспериментах и получении математических моделей;  $N = 64 \dots 256$  — при аппроксимации результатов, полученных методом статистических испытаний или сложных аналитических зависимостей) позволяет получать сравнительно слабо коррелированные главные эффекты и эффекты взаимодействий факторов при выборе структуры математической модели.

В табл. 1 приведены координаты точек ЛП<sub>τ</sub> равномерно распределенных последовательностей  $\xi$ , используемых для плана эксперимента  $32^3//32$  (3 фактора на 32 уровнях, 32 опыта) для значений факторов  $0 \leq X_1, \dots, X_3 \leq 1$ .

Таблица 1. ЛП<sub>τ</sub> равномерно распределенные последовательности

Номер точки	Координаты точек			Номер точки	Координаты точек		
	$\xi_1 = X_1$	$\xi_2 = X_2$	$\xi_3 = X_3$		$\xi_1 = X_1$	$\xi_2 = X_2$	$\xi_3 = X_3$
1	0,5	0,5	0,5	17	0,53125	0,03125	0,90625
2	0,25	0,75	0,25	18	0,28125	0,28125	0,15625
3	0,75	0,25	0,75	19	0,78125	0,78125	0,65625
4	0,125	0,625	0,875	20	0,15625	0,15625	0,53125
5	0,625	0,125	0,375	21	0,65625	0,65625	0,03125
6	0,375	0,375	0,625	22	0,40625	0,90625	0,78125
7	0,875	0,875	0,125	23	0,90625	0,40625	0,28125
8	0,0625	0,9375	0,6875	24	0,09375	0,46875	0,84375
9	0,5625	0,4375	0,1875	25	0,59375	0,96875	0,34375
10	0,3125	0,1875	0,9375	26	0,34375	0,71875	0,59375
11	0,8125	0,6875	0,4375	27	0,84375	0,21875	0,09375
12	0,1875	0,3125	0,3125	28	0,21875	0,84375	0,21875
13	0,6875	0,8125	0,8125	29	0,71875	0,34375	0,71875
14	0,4375	0,5625	0,0625	30	0,46875	0,09375	0,46875
15	0,9375	0,0625	0,5625	31	0,96875	0,59375	0,96875
16	0,03125	0,53125	0,40625	32	0,015625	0,796875	0,953125

Для этого плана эксперимента и для плана  $64^3//64$  были рассчитаны парные коэффициенты корреляции  $r_{ij}$  эффектов для совокупностей точек  $N = 32$  и  $N = 64$ . Определялась коррелированность друг с другом 9 главных эффектов, 54 двойных и тройных взаимодействий, всего 63 эффектов.

Анализ результатов показал, что доля коэффициентов корреляции эффектов с  $|r_{ij}| < 0,4$  составляет 90,07% для плана  $N = 32$  и 96,21% для плана  $N = 64$ .



Средние абсолютных величин коэффициентов корреляции равны соответственно 0,1954 и 0,1526. Приведенные значения следует считать хорошими для устойчивого выделения структуры и устойчивого определения коэффициентов статистических моделей, построенных на основе использования этих планов. Как и следовало ожидать, план  $N = 64$  имеет лучшие характеристики по сравнению с планом  $N = 32$  вследствие увеличения общего числа экспериментов.

ЛП<sub>т</sub> равномерно распределенные последовательности позволяют по сравнению с регулярными планами получить расположение точек плана эксперимента, более близкое к тем точкам многомерного пространства отклика, в которых эта поверхность принимает экстремальные значения или имеет точки перегиба. Именно эти точки определяют в многомерном пространстве границы изменения характера направления криволинейной поверхности. В задачах аппроксимации многомерных поверхностей отклика эти точки (экстремума и перегиба) являются наиболее информативными для получения правильной структуры многофакторной математической модели. ЛП<sub>т</sub> равномерно распределенные последовательности используются в задачах многофакторной оптимизации для поиска экстремальных значений критериев качества (Соболь & Статников, 2006).

К недостаткам указанных планов следует отнести значительное число уровней по каждому фактору (число уровней равно числу опытов) и необходимость обеспечить и поддерживать в процессе экспериментирования значения этих уровней с высокой точностью; несоответствие традиционным статистическим критериям, которые обычно используются в регулярных планах экспериментов. Из приведенных недостатков следует, что ЛП<sub>т</sub> равномерно распределенные последовательности не следует использовать в тех ситуациях, когда не обеспечивается необходимая точность поддержания значений уровней факторов и результатов экспериментов.

#### Список литературы

- Бродский, В. З. (1976). *Введение в факторное планирование эксперимента*. Москва: Наука.
- Лапач, С. Н. (2016). Робастные планы эксперимента. *Математичні машини і системи*, (4), 111—121.
- Радченко С. Г. (2005). *Устойчивые методы оценивания статистических моделей*. Киев: Санспарель.
- Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа*. Киев: Корнійчук.
- Радченко, С. Г. (2012). Системное оптимальное планирование регрессионного эксперимента. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 78(7), 71—75.
- Соболь, И. М., & Статников, Р. Б. (2006). *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. (2-е изд.). Москва: Дрофа.

# Кривини поверхні та оптимізація функції двох змінних

Н. П. Селезньова, Д. Ю. Петриняк

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

[nadijasel@gmail.com](mailto:nadijasel@gmail.com)

Робота присвячена аналізу кривин поверхні у процесі оптимізації функції двох змінних. У роботі розглянуто різні поверхні та знайдено їх екстремум, визначено типи поточних та екстремальних точок поверхні, обчислено кривини поверхні в цих точках.

**Ключові слова:** лінії кривини поверхні, стичний параболоїд, індикатриса Дюпена, головні напрямки поверхні, градієнтний метод оптимізації.

Процес відшукування глобального екстремуму функцій багатьох змінних є достатньо складним. Відомі числові методи оптимізації при обчисленні екстремальних точок вимагають додаткових досліджень достатності умов, які для неквадратичних функцій є досить складними. Пропозиція на кожному кроці оптимізації додатково обчислювати кривини поверхні в кожній точці, дозволяє визначати характер цих точок, що дає точніше уявлення про рельєф поверхні і вже не потребує додаткових досліджень достатності умов екстремуму.

Для визначення екстремуму функції двох змінних є необхідним вивчення просторової будови околу точки на поверхні, заданої цією функцією. Це можна виконати за допомогою другої квадратичної форми поверхні. Але оскільки такі поверхні визначаються досить складними формулами, то окіл точки поверхні доцільно замінити простішою структурою — *стичним параболоїдом*. Для нього обчислити другу квадратичну форму набагато простіше. Така заміна не вносить суттєвої похибки — це обґрунтовано в Рашевский (1950).

Визначити тип точки на поверхні можна за допомогою індикатриса Дюпена, породженої стичним параболоїдом. Знаючи типи поточних точок у процесі оптимізації функції та кривини в цих точках, можна побудувати рельєф поверхні та визначити її екстремальні точки.

У роботі у прикладах мінімізації функції реалізовано градієнтний метод, в основі якого лежить така властивість функції: напрямок найшвидшого зростання функції  $f(x)$  у точці  $x$  збігається з напрямком градієнта  $\nabla f(x)$ , а напрямок найшвидшого спадання — з напрямком антиградієнта  $(-\nabla f(x))$  (Нефьодов & Балицька, 2011).

У кожній точці поверхні є два головних напрямки. Винятками є сфера і площина, для яких головні напрямки не визначені.

Лінії на поверхні, дотичні до яких збігаються з напрямками головних кривин поверхні називають *лініями кривини поверхні*.

З курсу диференціальної геометрії (Кованцов, 1973; Погорелов, 1984; Рашевский, 1950), нормальна кривина поверхні по головних напрямках досягає екстремальних значень. До відомого градієнтного методу додаємо обчислення гаусової, середньої та двох головних кривин у кожній точці, знайденої за градієнтним

методом. Такі дані дають можливість визначити характер точки на поверхні, тобто, залежно від значення гаусової кривини у точці, можна визначити чи ця точка є еліптичною, чи гіперболічною, параболічною, чи точкою сплюснення.

Маючи таку інформацію про точки поверхні, фактично можна відтворити рельєф поверхні та не пропустити яри чи ще якісь впадини.

Інші чисельні методи не дають такої вичерпної інформації: перебираючи поточні точки в напрямку спадання чи зростання функції, можна пропустити яри чи якісь впадини або в них зациклитись.

В обчислювальних методах оптимізації шукати головні напрямки досить складно, адже доводиться розв'язувати диференціальне рівняння. Також виникає наступна проблема — система координат у якій задана поверхня та система криволінійних координат на поверхні в загальному випадку між собою ніяк не пов'язані. Отже, маючи рівняння ліній кривини поверхні у вигляді диференціального рівняння (Кованцов, 1973; Погорелов, 1984), досить складно знайти координати точок на поверхні, що лежать на лініях кривини, у системі координат у якій задано поверхню.

Цю проблему можна обійти за допомогою індикатриси Дюпена (Кованцов, 1973; Погорелов, 1984). У дотичній площині поверхні в точці в напрямку дотичної нормально перерізу відкладають відрізок, що дорівнює кореню квадратному з радіуса кривини нормального перерізу. Отриману крива називається *індикатрисою Дюпена* (Кованцов, 1973):

$$\frac{L}{E} x^2 + 2 \frac{M}{\sqrt{EG}} xy + \frac{N}{G} y^2 = \pm 1, \quad (1)$$

де  $E, F, G$  — коефіцієнти першої квадратичної форми,  $L, M, N$  — коефіцієнти другої квадратичної форми. Знак правої частини (1) залежить від знаку кривини (опуклості чи ввігнутості). Індикатриса Дюпена є плоскою центральною кривою другого порядку. Центр кривої міститься у точці поверхні, характер якої ми розглядаємо (Погорелов, 1984). Із теорії кривих другого порядку, відомо, що невідроджена крива другого порядку може бути еліпсом, параболою, або гіперболою. Тип кривої визначається знаком другого інваріанту квадратичної форми другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Звідси випливає, що вид кривої індикатриси Дюпена відповідає типу поверхні в околі точки, а головні напрямки поверхні в заданій точці відповідають осям індикатриси Дюпена, зведеної до канонічного виду. Отже, головні напрямки в заданій точці поверхні можна визначити як власні числа квадратичної форми, коефіцієнтами якої є коефіцієнти рівняння (1).

При обчисленнях кривин поверхні використано такі формули (Кованцов, 1973; Погорелов, 1984; Рашевский, 1950):

Головні кривини  $k_1, k_2$  поверхні можна знайти із рівняння:

$$k^2 + \frac{2MF - EN - LG}{EG - F^2} k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0.$$

$$D = (2MF - EN - LG)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2),$$

$$k_{1,2} = \frac{-2MF + EN + LG \pm \sqrt{D}}{2(EG - F^2)}.$$

Гаусова кривина:  $K = k_1 \cdot k_2$ .

Середня кривина:  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .

Обчислюючи градієнтним методом мінімум функції та кривини функції в поточних точках, аналіз цих точок будемо проводити, користуючись табл. 1.

Таблиця 1

№	Співвідношення між головними кривинами поверхні, гаусова та середня кривини	Знаки		Тип лінії індикатрис и Дюпена	Геометрична інтерпретація околу точки поверхні	Характеристика центральної точки
1	$k_1 = k_2$	-	-	Коло	Круговий пагорб	Максимум
2	$k_1 = k_2$	+	+	Коло	Кругова западина	Мінімум
3	$k_1 > k_2, K > 0$	-	-	Еліпс	Еліптичний пагорб	Максимум
4	$k_1 > k_2, K > 0$	+	+	Еліпс	Еліптична западина	Мінімум
5	$ k_1  >  k_2 , K < 0$	+	-	Гіпербола	Симетричне сідло	Сідлова точка
6	$ k_1  =  k_2 , K < 0$	-	+	Гіпербола	Симетричне сідло	Сідлова точка
7	$k_1 >  k_2 , K < 0$	+	-	Гіпербола	Витягнуте сідло	Сідлова точка
8	$k_2 = 0, K = 0$	-		Пряма	Стационарний хребет (вироджена поверхня)	Нема
9	$k_2 = 0, K = 0$	+		Пряма	Стационарний яр (вироджена поверхня)	Нема
10	$k_2 = 0, K = 0, H \neq 0$	-		Парабола	Хребет, що підіймається (вироджена поверхня)	на $\infty$
11	$k_2 = 0, K = 0, H \neq 0$	+		Парабола	Яр, що спадає (вироджена поверхня)	на $\infty$

Розгляньмо описаний метод на конкретних прикладах. Побудуємо графіки та перерізи, що показують різні кривини поверхонь в послідовності проміжних

точок при обчисленні мінімумів поверхонь. Мінімум функції шукаємо градієнтним методом за допомогою Excel. Перші та другі частинні похідні функцій в поточних точках обчислюємо за означенням.

**Приклад 1.**  $z(x, y) = x^4 + 2y^4 + x^2y^2 + 2x + y$

На рис. 1 представлена поверхня та її лінії рівня. Ця поверхня має однакове найменше значення не в одній точці, а в безлічі точок:

У всіх цих точках найменше значення функції дорівнює  $(-1, 44283)$

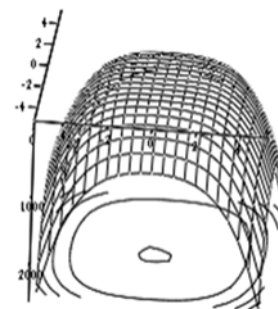


Рис. 1

За допомогою Excel обчислено наступне:

- гаусова кривина в цих точках спадає від  $K = 1354,26$  до  $K = 53,24$ ;
- середня кривина в цих точках спадає від  $H = 97,26$  до  $H = 7,40$ ;
- $k_1 > k_2$  ( $k_1$  суттєво більша за  $k_2$ ) у всіх поточних точках, згідно з табл. 1;
- всі поточні точки поверхні в околі мінімуму є еліптичними;
- частинні похідні в точках зменшуються від  $z'_x = 0,001869$ ;  $z'_y = 0,00195$  до  $z'_x = 7,25 \cdot 10^{-5}$ ;  $z'_y = 7,56 \cdot 10^{-5}$ .

Отже функція досягає свого мінімуму не в одній точці, а в деякій області, як видно з рис. 1.

Графіки головних кривин в околі цих точок характеризують рельєф поверхні в напрямках ліній кривини (рис. 2).

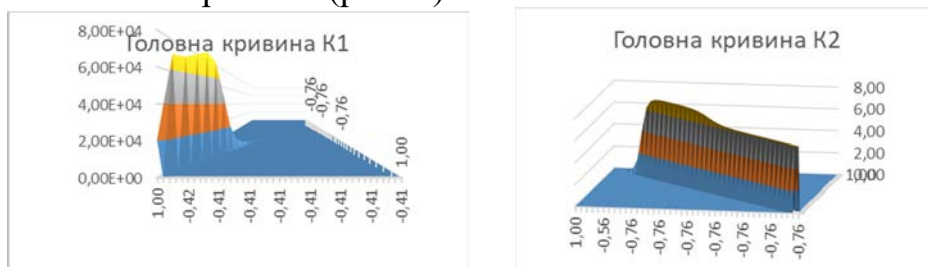


Рис. 2

Гаусова та середня кривини характеризують нормальні перерізи поверхні (рис. 3).

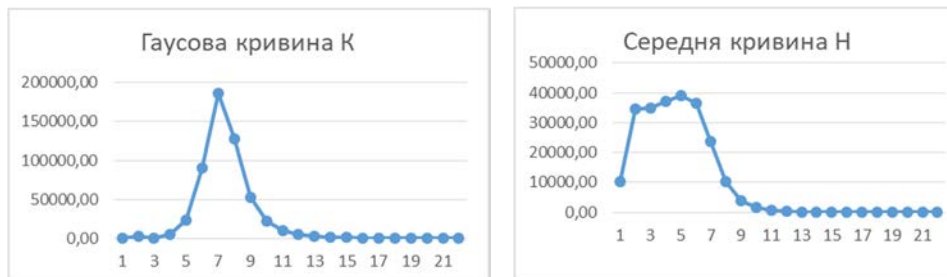


Рис. 3

**Приклад 2.**

$$z(x, y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 4y$$

Мінімум функції дорівнює  $(-4)$  і досягається в точці  $(0,999; 0,999)$ . У цій точці  $K = 24$ ,  $H = 5$ ,  $k_1 = 6$ ,  $k_2 = 3,99$ . Отже точка мінімуму є еліптичною. В той же час по зміні у поточних точках кривин, можна сказати, що поверхня має яружний характер.

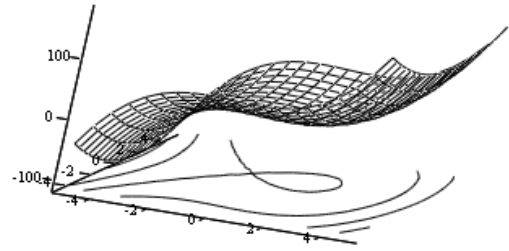


Рис. 4

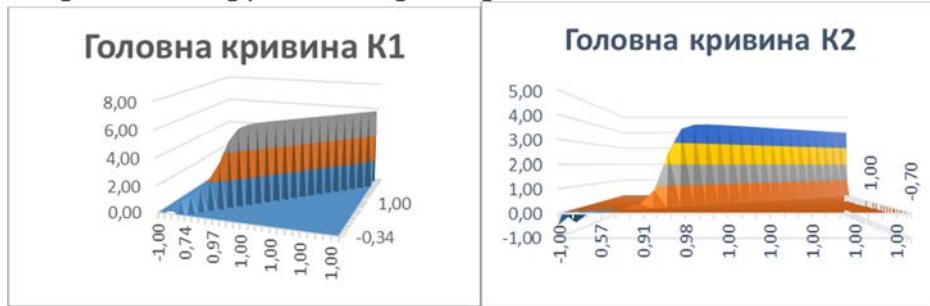


Рис. 5

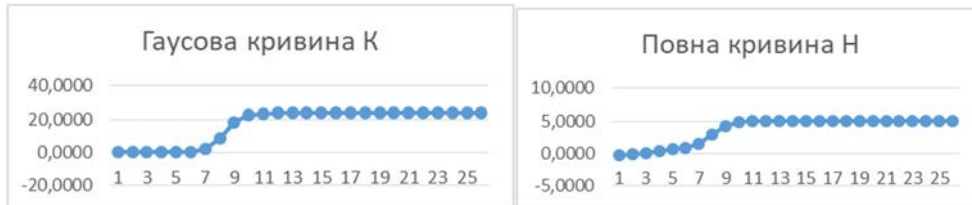


Рис. 6

Таблиця 2

№	K (гаус. кр)	H(сер. кр)	$k_1$	$k_2$
1	-0,0037	-0,2349	0,007757	-0,47759
2	-0,0162	-0,1884	0,038977	-0,41583
3	-0,0302	0,1021	0,303513	-0,09938
4	-0,0102	0,4097	0,83169	-0,01228
5	0,0529	0,6047	1,163932	0,045438
6	0,3112	0,8839	1,569588	0,198282
7	1,8794	1,5594	2,302691	0,816178

З табл. 2 видно, що на поверхні є точки гіперболічного типу (№ 1—4), а в їх околі поверхня набуває сідлового вигляду, також є точки в околі яких маємо еліптичні западини (№ 5—7).

**Приклад 3.**  $z(x, y) = 10(y - \sin x)^2 + 0,2x^2$

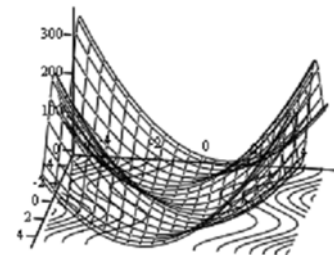


Рис. 7

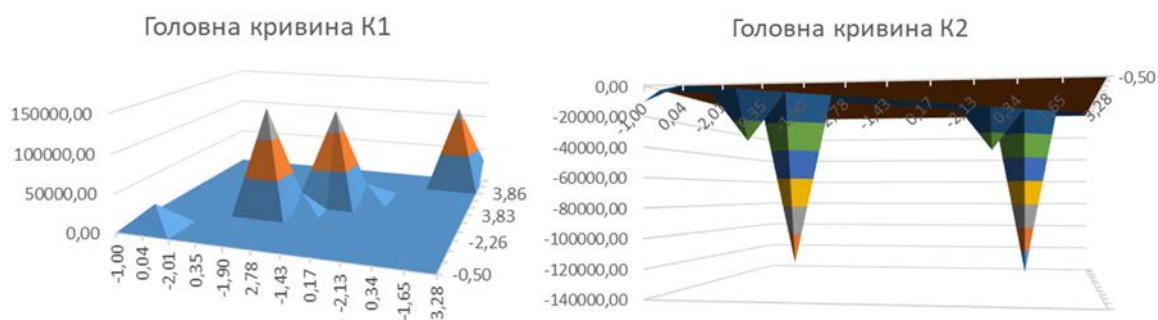


Рис. 8



Рис. 9

Таблиця 3

№	K(гаус.кр)	H(сер.кр)	$k_1$	$k_2$
1	-607040,03	-5268,80	57,29557	-10594,9
2	-13848890,98	15192,11	30833,37	-449,153
3	-2221664,09	-16798,48	65,99728	-33663
4	-27353787,90	-60152,33	226,9429	-120532
5	-4905568,99	70435,03	140904,9	-34,8148
6	-170098,84	10274,84	20557,96	-8,27411
7	-51072568,06	64281,30	128958,6	-396,038
8	-14363613,50	10035,05	20761,93	-691,825
9	-2110593,35	-16975,54	62,05229	-34013,1
10	-29228709,88	-69108,76	211,1464	-138429
11	-5777115,75	58194,45	116438,5	-49,6152
12	-738353,32	16417,02	32856,51	-22,4721

З табл. 3 бачимо, що поточні точки є гіперболічними, а поверхня має сідлову форму. На цій поверхні відсутні точки мінімуму. Частинні похідні в поточних точках суттєво відрізняються від нуля.

**Приклад 4.**  $z(x, y) = (2 + \sin 2x)(2 + \sin 2y)$

Ця функція досягає свого локального мінімуму

$$z(-0,7848, -0,7858) = 1.$$

$$K < 0, k_1 > 0, k_2 < 0, H > 0.$$

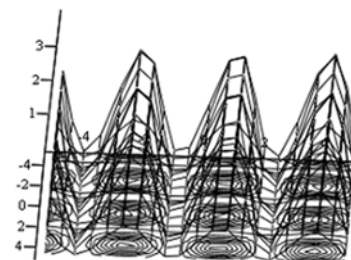


Рис. 10

При цьому є точки на поверхні, в яких  $k_1 = k_2$ . Отже поточні точки мають гіперболічний характер, а функція має сідлову форму.

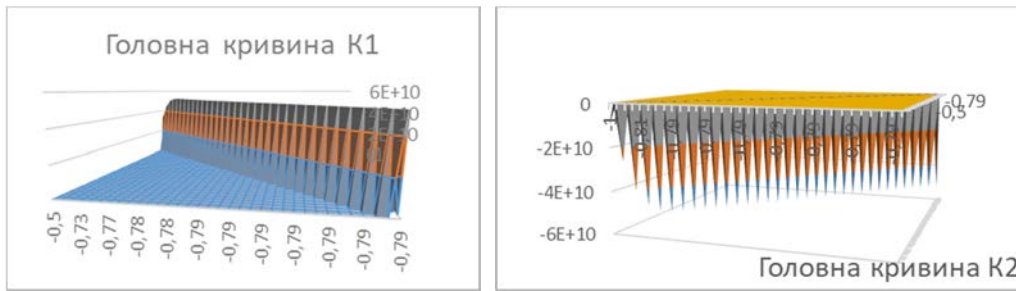


Рис. 11

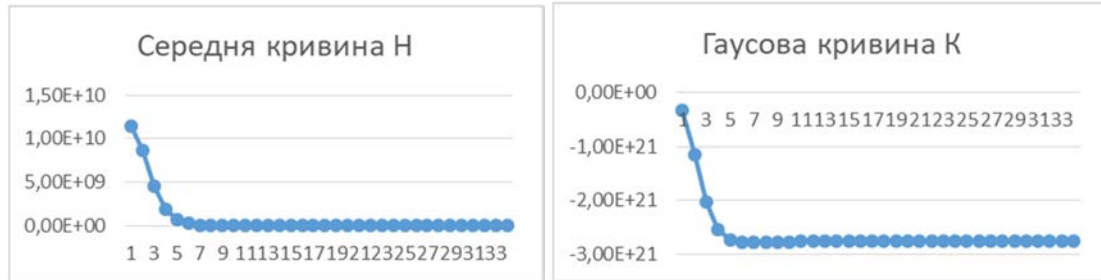


Рис. 12

**Висновки.** З розглянутих прикладів зрозуміло, що обчислені значення кривин поверхонь у поточних точках дозволяють точніше, ніж у стандартних методах оптимізації, визначити наявність екстремуму функції в певній точці. Так у прикладах 3 та 4 маємо сідлову форму поверхні, але у прикладі 3 не існує мінімальної точки, а у прикладі 4 така точка знайдена (локальний мінімум).

#### Список літератури

- Кованцов, М. І. (1973). *Диференціальна геометрія*. Київ: Вища школа.
- Нефьодов, Ю. М., & Балицька, Т. Ю. (2011). *Методи оптимізації в прикладах і задачах*. Київ: Кондор.
- Погорелов, А. В. (1984). *Дифференциальная геометрия*. Москва: Наука.
- Рашевский, П. К. (1950). *Курс дифференциальной геометрии*. Москва: Гос. издат. технико-теор. литературы.



# Складні коливання пружних тіл та методологія їх дослідження

Б. І. Сокіл<sup>1</sup>, М. Б. Сокіл<sup>2</sup>, Н. Б. Сокульська<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Національна академія сухопутних військ імені Петра Сагайдачного,  
Львів, Україна

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна  
Sokil\_b\_i@ukr.net, natalya.sokulska@gmail.com

Експлуатація різних видів машин та механізмів супроводжується, майже завжди, коливаннями їх елементів: поздовжніми, згинальними, крутильними або їх поєднанням. Якщо аналітичні методи дослідження моноформних коливань пружних тіл розроблені достатньо для практичного використання як для лінійних (Гуляєв & Борщ, 2007; Огородніков, Світлицький & Гоголь, 2014) так і нелінійних математичних моделей (Пукач, Кузьо & Сокіл, 2013; Улитин & Петтик, 2000; Митропольський & Моисеєнков, 1976), то складні коливання (поєднання різних видів моноформних коливань) пружних тіл досліджувались лише в окремих випадках (Mitropol'skii & Sokil, 1998; Sokil, 1995). Однак, у більшості випадків, експлуатація машин та конструкцій супроводжується складними коливаннями їх елементів. Взаємодіючи між собою, вони можуть привести не тільки до значних динамічних навантажень, але й виведення з ладу самого об'єкту. Тому розроблення методології дослідження вказаних процесів у пружних тілах є важливою задачею.

**Ключові слова:** поздовжні коливання, згинальні коливання, крутильні коливання, складні коливання, резонанс.

Колівальні процеси в окремих елементах описують, як правило, нелінійними крайовими задачами для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. Зінтегрувати останні вдається тільки чисельними методами. Чисельна ж симуляція їх не завжди дає відповіді на важливі практичні питання, зокрема, умови існування внутрішніх та зовнішнього резонансів, стійкість процесу та ін. На сьогодні залишається відкритою проблема аналітичного дослідження складних коливань навіть для одновимірних моделей пружних тіл. Водночас, навіть наближене аналітичне дослідження цих складних процесів у таких тілах може дати набагато більше інформації щодо динаміки їх елементів конструкцій, аніж чисельне інтегрування. Тому дана робота зосереджена на розробленні методики дослідження складних коливань пружного тіла (для випадку поєднання крутильних та згинальних).

Серед аналітичних методів, які знайшли своє застосування для дослідження нелінійних коливань систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами, найбільш ефективними є методи, які базуються на основній ідеї методів збурень (Митропольський & Моисеєнков, 1976). На їх базі, у поєднанні із принципом одночастотності коливань у нелінійних механічних системах, розроблено теорію асимптотичного інтегрування також нелінійних (Mitropol'skii & Sokil, 1998; Sokil, 1995) математичних моделей систем з розподіленими параметрами за умови, що динамічний процес у відповідних системах можна трактувати як прості (моно) коливання (поздовжні, поперечні, крутильні, згинальні). В

останні роки вони (для випадку одночастотних коливань) були поширені на нові математичні моделі, які описують динаміку пружних тіл, що характеризуються поздовжньою складовою руху (Харченко & Сокіл, 2006; Харченко & Сокіл, 2006; Харченко & Сокіл, 2007), (канатні витяги, пасові та ланцюгові передачі, стрічкопротяжні механізми, конвеєрні лінії, трубопроводи вздовж котрих переміщується суцільний потік середовища). Проте, моноформні коливання є скоріше винятком, ніж закономірністю динамічних процесів у елементах машин та конструкцій. У роботі для дослідження складних процесів у пружних тілах запропоновано методологію, основна ідея якої полягає у наступному:

а) за допомогою обробки емпіричної інформації про деякі з коливань, описуємо їх наближеними аналітичними співвідношеннями;

б) указані співвідношення враховуємо в математичній моделі інших коливань, а від так, зменшуємо кількість рівнянь, які описують динаміку об'єкту, що досліджується;

в) для вказаної дещо спрощеної неавтономної математичної моделі динаміки об'єкту використовуємо найбільш ефективні методи її дослідження.

Математичною моделлю нелінійних крутильних коливань прямолінійного одновимірного тіла, яке обертається навколо нерухомої вертикальної осі  $OZ$  з кутовою швидкістю  $\Omega$ , може служити (за певних крайових умов) диференціальне рівняння

$$\theta_{tt} - \frac{G}{\rho} \theta_{zz} = \frac{1}{I} Q(x, t, \theta, \theta_t, \theta_x, \varphi), \quad (1)$$

де  $\theta(x, t)$  — кут закручення пружного тіла,  $I = \rho J_p$  — його погонний момент інерції відносно осі обертання,  $G$  — модуль зсуву (модуль пружності другого роду),  $\rho$  — густина матеріалу тіла,  $J_p$  — екваторіальний момент поперечного перерізу (момент інерції поперечного перерізу),  $Q(x, t, \theta, \theta_t, \theta_x, \varphi)$  — нелінійна за сукупністю змінних періодична за  $\varphi = \mu t + \varphi_0$  функція, яка описує розподіл вздовж довжини тіла моментів зовнішніх сил відносно осі обертання (в т. ч. моментів опору), а  $\mu$  — частота періодичного збурення. Якщо до того ж тіло здійснює згинальні коливання малої амплітуди в рухомій площині  $XOZ$ , то додатково для кожного елемента довжиною  $dz$  існують сили інерції відносного руху та кориолісова сила інерції (Павловский & Путята, 1985). Для їх визначення будемо вважати що:

а) погонна маса тіла —  $m$ ;

б) відхилення в указаній вище площині довільного елемента з аплікатою  $z$  визначається функцією  $u(z, t)$ ;

в) депланація плоских нормальних перерізів відсутня.

У цьому випадку сила інерції відносного руху  $d\vec{\Phi}_r$  вказаного елемента визначається залежністю

$$d\vec{\Phi}_r = -m u_{tt}(z, t) \vec{i} dz.$$

Подібним чином знаходиться кориолісова сила інерції  $d\vec{\Phi}_{\text{cor}}$  вказаного елемента:

$$d\vec{\Phi}_{\text{cor}} = -2m\Omega \vec{k} \times u_t(z, t) \vec{i} dz = -2m\Omega u_t(z, t) \vec{j}.$$

З отриманого вище випливає, що сила інерції відносного руху не впливає на крутильні коливання тіла, адже їх момент відносно осі обертання рівний нулю. Що стосується кориолісової сили інерції вказаного елемента, то її момент відносно осі обертання рівний

$$dM_z^{\text{cor}} = d\vec{\Phi}_{\text{cor}} u(z, t) = 2m\Omega u_t(z, t) u(z, t).$$

Таким чином, «уточнене» диференціальне рівняння крутильних коливань тіла з урахуванням його малих поперечних коливань має вигляд

$$\theta_{tt} - \frac{G}{\rho} \theta_{zz} = \varepsilon \left\{ Q(x, t, \theta, \theta_t, \theta_x, \varphi) + 2m\Omega u_t(z, t) u(z, t) \right\}, \quad \varepsilon = \frac{1}{I}. \quad (2)$$

Суть роботи полягає в отриманні базових співвідношень, які описують визначальні параметри крутильних коливань пружного тіла, що досліджується, за умови, що згинальні коливання описуються відомою аналітичною функцією

$$u_s(z, t) = \vartheta \left( z, \Xi_s t + \vartheta_{0s} \right) = b_s \sin \frac{s\pi}{l} x \cos \left( \Xi_s (\Omega) t + \vartheta_{0s} \right),$$

де  $\Xi_s (\Omega) t + \vartheta_{0s}$  — фаза крутильних коливань, а  $\Xi_s (\Omega)$ ,  $\vartheta_{0s}$  — відповідно їх частота та початкова фаза.

Для аналізу отриманого диференціального рівняння вдається застосувати відомі аналітичні методи для рівнянь із частинними похідними (Митропольський & Моисеєнков, 1976). Проаналізувавши результати запропонованої методики дослідження складних коливань пружних тіл (крутильних та згинальних), встановлено:

1) обертання пружного тіла навколо вертикальної осі впливає на частоту його згинальних коливань — для більших значень кутової швидкості частота згинальних коливань є меншою;

2) навіть малі згинальні коливання пружного тіла, яке обертається навколо вертикальної осі, за певного співвідношення між частотами крутильних та згинальних коливань, впливають на основні параметри крутильних коливань;

3) для випадку складних коливань пружного тіла можливі резонансні коливання зумовлені не тільки зовнішніми періодичними силами (моментами), а й їх взаємовпливом (внутрішні резонанси);

4) амплітуда крутильних коливань при «швидкому» переході через резонанс на частоті зовнішнього чи «внутрішнього збурення» є меншою, ніж при «повільному»;

5) амплітуда крутильних коливань переходу через резонанс на частоті згинальних за великих значень резонансних кутових швидкостей обертання валу для більших значень останніх набуває більшого значення, а для малих навпаки — біль-

шим значенням резонансної кутової швидкості обертання тіла відповідає більше значення амплітуди крутильних коливань переходу через резонанс.

Отримані результати можуть служити базою для вибору основних технологічних та експлуатаційних параметрів елементів машин, які здійснюють складні коливання з метою уникнення у них резонансних явищ.

#### Список літератури

- Mitropol'skii, Y. A. & Sokil, V. I. (1998). On the application of Ateb-functions to the construction of an asymptotic solution of the perturbed nonlinear Klein-Gordon equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 50(5), 754–760.
- Sokil, V. I. (1995). On the construction of asymptotic approximations for a nonautonomous wave equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 47(12), 1960—1963.
- Гуляев, В. І. & Борщ, О. І. (2007). Спіральні хвилі в закручених пружних трубчастих стержнях, що обертаються з внутрішнім потоком рідини. *Акустичний вісник*, 10(3), 12—18.
- Митропольский, Ю. А. & Моисеенков, Б. И. (1976). *Асимптотические решения уравнений в частных производных*. Киев: Вища школа.
- Огородников, П. І., Світлицький, В. М. & Гоголь, В. І. (2014). Дослідження зв'язку між поздовжніми і крутильними коливаннями бурильної колони. *Нафтова галузь України*, (2), 6—9.
- Павловский, М. А. & Путята, Т. В. (1985). *Теоретическая механика*. Киев: Вища школа.
- Пукач, П. Я., Кузьо, И. В. & Сокил, М. Б. (2013). Нелинейные изгибные колебания вращающихся вокруг неподвижной оси тел и методика их исследования. *Известия высших учебных заведений. Горный журнал*, (7), 141—149.
- Улитин, Г. М. & Петтик, Ю. В. (2000). Ударные процессы в буровых установках. *Вибрации в технике и технологиях*, (1), 70—74.
- Харченко, Є. В. & Сокил, М. Б. (2006). Вплив способу закріплення на коливання одного класу рухомих одновимірних систем. *Науковий вісник НЛТУ України*, 16(7), 80—83.
- Харченко, Є. В. & Сокил, М. Б. (2006). Коливання рухомих нелінійно пружних середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні. *Науковий вісник НЛТУ України: Збірник науково-технічних праць*, 16(1), 134—138.
- Харченко, Є. В. & Сокил, М. Б. (2007). Багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних рухомих середовищ та методика побудови асимптотичних наближень крайових задач, що їх описують. *Машинознавство*, (1), 19—25.

# Про аналітичне і чисельне розв'язання крайових задач для некругових циліндричних оболонок при дії статичного навантаження

Є. А. Сторожук, В. А. Максимюк, І. С. Чернишенко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

[stevan@ukr.net](mailto:stevan@ukr.net)

Розроблено три методи розв'язання задач статичної теорії тонких циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу — аналітичний, чисельний і аналітично-чисельний. Ефективність запропонованих підходів показано на прикладі дослідження напружено-деформованого стану довгої овальної циліндричної оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, статичне навантаження, крайова задача, точний розв'язок, чисельний розв'язок.

Циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в інженерній практиці. Так, в авіаційній техніці фюзеляжі сучасних літаків часто з міркувань аеродинамічності, компонування технологічних з'єднань, ефективності використання внутрішнього об'єму мають некруговий поперечний переріз. Тому розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) некругових циліндричних оболонок є актуальним.

**Постановка задачі і основні рівняння.** Розгляньмо нескінченно довгу тонку циліндричну оболонку некругового поперечного перерізу, яка знаходиться під дією тиску  $q$  і рівномірно розподілених уздовж твірної поперечних сил  $P$  (рис. 1). Тоді всі шукані величини будуть залежати тільки від кута  $\phi$  між нормаллю до серединної поверхні оболонки і вертикальною віссю  $OZ$ .

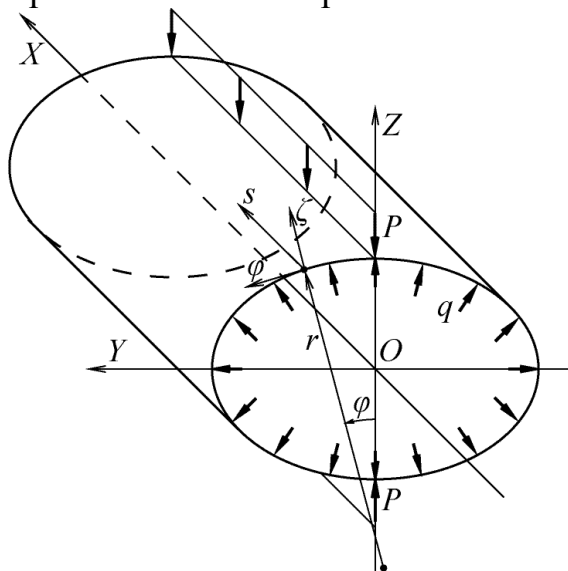


Рис. 1. Циліндрична оболонка некругового поперечного перерізу

При дослідженні НДС даного класу оболонок скористаємося рівняннями теорії непологих оболонок, в якій справедливі гіпотези Кірхгофа — Лява:

— геометричними співвідношеннями:

$$\varepsilon = \frac{du}{rd\phi} + \frac{w}{r}; \quad \mu = -\frac{d\vartheta}{rd\phi}; \quad \vartheta = \frac{dw}{rd\phi} - \frac{u}{r}; \quad (1)$$

— фізичними співвідношеннями:

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = Eh / (1 - \nu^2); \quad M = D_M \mu; \quad D_M = Eh^3 / 12(1 - \nu^2); \quad (2)$$

— рівняннями рівноваги:

$$\frac{dN}{rd\phi} + \frac{Q}{r} = 0; \quad \frac{dQ}{rd\phi} - \frac{N}{r} + q = 0; \quad \frac{dM}{rd\phi} - Q = 0, \quad (3)$$

де  $\varepsilon, \mu$  — мембранна і згинна деформації;  $u, w$  — тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки;  $\vartheta$  — кут повороту дотичної до напрямної;  $r$  — радіус кривини поперечного перерізу;  $h$  — товщина оболонки;  $N, Q, M$  — внутрішні зусилля і момент;  $E, \nu$  — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Для розв'язання конкретних задач до системи рівнянь (1)—(3) потрібно приєднати відповідні крайові умови.

**Методи.** Автори розробили три підходи до розв'язання даної проблеми.

*1. Аналітичний підхід.* Отримано (Сторожук & Яцура, 2016) точні розв'язки рівнянь рівноваги для таких видів циліндричних оболонок: відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки ( $0 \leq \phi \leq \phi_k$ ), повздовжній край  $\phi = \phi_k$  якої жорстко закріплений, а на краю  $\phi = 0$  діє рівномірно розподілена поперечна сила  $P$ ; відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки ( $-\phi_k \leq \phi \leq \phi_k$ ) з жорстко або шарнірно закріпленими повздовжніми краями  $\phi = \pm\phi_k$ , навантаженої рівномірним тиском  $q$  або рівномірно розподіленою поперечною силою  $P$  у вершині овалу  $\phi = 0$ ; замкненої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки з неперервним або східчасто-змінним радіусом кривини, яка знаходиться під дією рівномірного тиску  $q$  або двох діаметрально протилежних рівномірно розподілених поперечних сил  $P$ .

*2. Аналітично-чисельний підхід.* Розв'язання системи рівнянь (1)—(3) зводиться до обчислення ряду інтегралів. Для більшості некругових поперечних перерізів первісні підінтегральних функцій не виражаються через елементарні функції. Тому автори розробили методіку розв'язання задач статички для даного класу оболонок, яка базується на аналітичному і чисельному (за формулою трапецій) інтегруванні та забезпечує високу точність результатів (Сторожук & Яцура, 2017).

*3. Чисельний підхід.* Відомо, що при виконанні конкретних розрахунків для довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу з використанням традиційних варіантів варіаційно-різницевого методу (ВРМ) і методу скінченних елементів (МСЕ) спостерігається сповільнена збіжність результатів унаслідок так званого явища мембранного замикання. Тому для дослідження НДС некругової циліндричної оболонки автори розробили варіант ВРМ, у якому геометричні

гіпотези Кірхгофа — Лява реалізовані методом множників Лагранжа і додатково варіюється мембранна деформація (Абросов, Максимюк, & Чернышенко, 2016). Також запропоновано варіант МСЕ з обчисленням мембранної деформації за допомогою методу подвійної апроксимації (Сторожук, Чернышенко, & Пиголь, 2017; Сторожук, Чернышенко, & Яцура, 2018), що значно покращує збіжність числових результатів.

**Числовий приклад.** Розглянемо крайову задачу про НДС замкненої по напрямній довгої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу, яка навантажена рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності  $q = 1$  кПа.

Прийmemo, що поперечний переріз оболонки має дві осі симетрії і його задають параметричні рівняння вигляду:

$$Y = r_0 \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \phi + \frac{\xi}{6} \sin 3\phi \right]; \quad Z = r_0 \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \phi + \frac{\xi}{6} \cos 3\phi \right]. \quad (4)$$

Тут  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ ;  $\xi = \frac{3(a-b)}{a+b}$ ;  $a, b$  — півосі поперечного перерізу.

Використовуючи рівняння (4), для радіуса кривини поперечного перерізу оболонки отримаємо такий вираз:

$$r = r_0 (1 + \xi \cos 2\phi).$$

Розрахунки виконані для оболонки з параметрами:

$$r_0/h = 100; \quad a/b = 1,5; \quad E = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,3.$$

У табл. 1, 2 представлені значення відносних прогинів  $\tilde{w} = w/h$  у точках  $\phi = 0$  і  $\phi = \pi/2$  поперечного перерізу (у кінцях малої і великої півосей). Дані отримані з використанням аналітично-чисельного (АЧР) і точного (ТР) розв'язків (табл. 1) та двох варіантів методу скінченних елементів (МСЕ без подвійної апроксимації і МСЕ з подвійною апроксимацією; табл. 2). У табл. 1 літерою  $N$  позначено кількість частин, на які розбивається відрізок інтегрування  $[0, \pi/2]$ , а в табл. 2 — кількість скінченних елементів вздовж чверті контуру поперечного перерізу. Там же наведені значення похибок АЧР і МСЕ ( $\Delta$ ).

Таблиця 1. Прогини в кінцях півосей поперечного перерізу (АЧР і ТР)

Аналітично-чисельний розв'язок				
N	$\tilde{w}(0)$	$\Delta, \%$	$\tilde{w}(\pi/2)$	$\Delta, \%$
3	0,734	38,6	-0,580	26,3
5	1,011	15,5	-0,709	9,9
10	1,148	4,0	-0,768	2,4
20	1,184	1,0	-0,782	0,6
40	1,193	0,3	-0,786	0,1
80	1,196	0,0	-0,787	0,0
Точний розв'язок: $\tilde{w}(0) = 1,196; \tilde{w}(\pi/2) = -0,787$				

Таблиця 2. Прогини в кінцях півосей поперечного перерізу (МСЕ)

МСЕ без подвійної апроксимації					МСЕ з подвійною апроксимацією				
N	$\tilde{w}(0)$	$\Delta, \%$	$\tilde{w}(\pi / 2)$	$\Delta, \%$	N	$\tilde{w}(0)$	$\Delta, \%$	$\tilde{w}(\pi / 2)$	$\Delta, \%$
250	1,088	9,0	-0,719	8,6	3	1,137	4,9	-0,740	6,0
500	1,167	2,4	-0,769	2,3	5	1,169	2,3	-0,769	2,3
1000	1,189	0,6	-0,783	0,5	10	1,189	0,6	-0,783	0,5
2000	1,194	0,2	-0,786	0,1	20	1,194	0,2	-0,786	0,1

З аналізу даних, представлених в табл. 1, випливає, що при розбитті відрізка інтегрування на 3, 5, 10, 20, 40 і 80 частин найбільша відмінність ( $\Delta_{\max}$ ) результатів АЧР даної задачі від її точного розв'язку складає, відповідно, 38,6; 15,5; 4,0; 1,0; 0,3; 0,0(%).

Порівняння результатів, отриманих МСЕ без подвійної апроксимації (табл. 2), з аналітичним розв'язком свідчить про те, що під час розв'язання цієї задачі вказаним методом виникає явище мембранного замикання. Так, для того щоб похибка чисельного розв'язку задачі в цьому випадку була менше, ніж 1%, необхідно розбити чверть контуру поперечного перерізу на 1000 елементів. Водночас для досягнення вказаної точності при використанні МСЕ з подвійною апроксимацією достатньо всього 10 елементів, тобто в 100 разів менше.

Отже, у роботі отримано аналітичні (точні) і аналітично-чисельні (практично точні) розв'язки задач статички для некругової циліндричної оболонки, які мають самостійне значення, а також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. Розроблено модифікації МСЕ і ВРМ, вільні від мембранного замикання, що значно підвищує точність розв'язання даних задач.

#### Список літератури

- Абросов, Ю. Ю., Максимюк, В.А., & Чернышенко, И. С. (2016). Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование длинной цилиндрической оболочки. *Прикладная механика*, 52(5), 106—111.
- Сторожук, Е. А., Чернышенко, И. С., & Пиголь, О. В. (2017). Упругопластическое состояние цилиндрической оболочки эллиптического сечения, ослабленной круговым отверстием. *Прикладная механика*, 53(6), 49—56.
- Сторожук, Е. А., Чернышенко, И. С., & Яцура, А. В. (2018). Напряженно-деформированное состояние возле отверстия в податливой на сдвиг композитной цилиндрической оболочке эллиптического сечения. *Прикладная механика*, 54(5), 78—86.
- Сторожук, Е. А., & Яцура, А. В. (2017). Аналитически-численное решение задач статички для некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины. *Прикладная механика*, 53(3), 91—103.
- Сторожук, Е.А., & Яцура, А.В. (2016). Точные решения краевых задач для цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения. *Прикл. механика*, 52(4), 68—81.



# Способи створення паркетів, мозаїк та замощень площини

Н. В. Шаповалова, Л. В. Процак

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

shaponv@gmail.com, protsak\_l\_v@ukr.net

У доповіді описано застосування властивостей геометричних фігур та геометричних перетворень у мистецтві створення паркетів, розглянуто різні види паркетів. Описано різні способи створення паркетів, мозаїк та замощень площини та їх прикладне застосування.

**Ключові слова:** паркет, мозаїка, замощення площини, сітка, геометричне перетворення, геометричний орнамент.

**Мета статті** полягає у систематизації базових відомостей щодо способів створення паркетів, мозаїк і замощень площини.

*Паркет* (або *мозаїка*) — це нескінченне сімейство многокутників, що покриває площину без просвітів і подвійних покриттів. Створення паркетів тісно пов'язане з вивченням і застосуванням властивостей многокутників, оскільки існують різні види паркетів, а саме: *правильні паркети* — це паркети, які складаються із правильних многокутників і навколо кожної вершини многокутника розташовані одним і тим самим способом (рис. 1). Існує лише три види правильних паркетів.

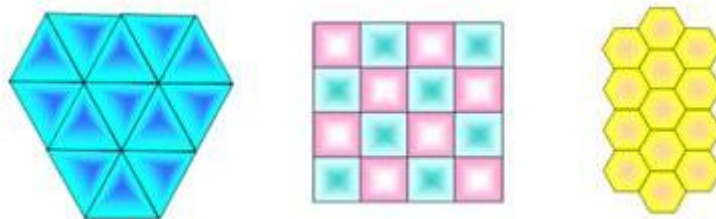


Рис. 1. Види правильних паркетів

*Напівправильні паркети* — це паркети, які складаються із правильних многокутників з різною кількістю сторін, однаково розташованих навколо кожної вершини. Існує лише вісім видів напівправильних паркетів (Шаповалова, 2018, с. 134—135).

Паркети не обмежуються правильними многокутниками. Можна створювати паркети з криволінійних фігур, або з неправильних многокутників (Шаповалова, 2018, с. 135—136).

Вивчення паркетів, мозаїк та замощень площини корисне як для учнів середніх навчальних закладів, так і для студентів вищих навчальних закладів, оскільки ця тема тісно пов'язана з темою «Многокутники», геометричними перетвореннями, періодичними функціями і відображеннями, теорією груп, комбінаторикою та деякими іншими розділами сучасної математики, і має широкий спектр прикладних застосувань (Бевз, 2007, с. 3).

Вона придатна для дослідницької роботи учнів та студентів. Особливо корисною вона може стати для тих, хто цікавиться дизайном, архітектурою, деко-

ративним мистецтвом та іншими прикладними питаннями геометрії (Шапова-лова, 2017, с. 204).

Розглянемо деякі *способи побудови паркету*.

**Спосіб перший.** Беремо деякий уже відомий нам паркет і виконуємо перетворення: стиснення або розтягнення, заміна прямолінійних відрізків кривими з початком і кінцем в тих самих точках, що й у відрізків...

Наприклад: паркети, отримані заміною відрізків «квадратної» сітки деякими кривими або ламаними (рис. 2)

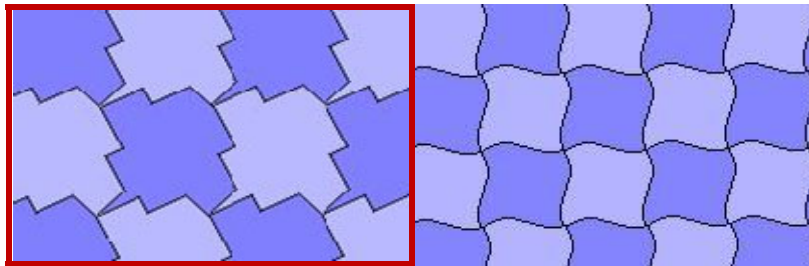


Рис. 2

**Спосіб другий.** Об'єднуємо окремі елементи вже існуючих паркетів. Наприклад, паркети, отримані в результаті об'єднання елементів квадратної сітки (рис. 3).



Рис. 3

**Спосіб третій.** Беремо існуючу сітку й доповнюємо її новими лініями. Отримуємо розбиття площини на фігури, які потім можна об'єднати іншим способом (рис. 4).

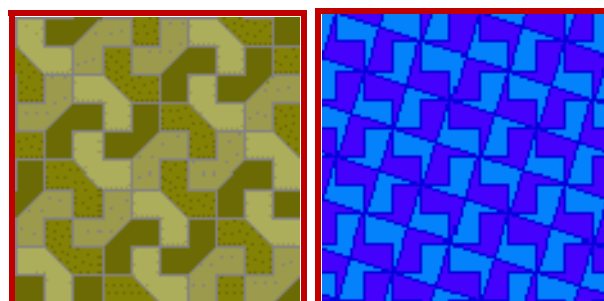


Рис. 4

**Спосіб четвертий.** Вибираємо деяку криву або ламану і починаємо її переносити, повертати, відображати. Отримані криві або ламані розміщуємо на

площині таким чином, щоб вони утворили замкнуті контури, які в подальшому будуть розглядатися як елементи паркету.

Наприклад, для побудови наступного паркету було взято дугу спіралі, яку три рази повернули на  $90^\circ$ , а потім до отриманої фігури застосували паралельне перенесення (рис. 5).



Рис. 5

**Спосіб п'ятий.** Паралельне перенесення зірчастих фігур (рис. 6).

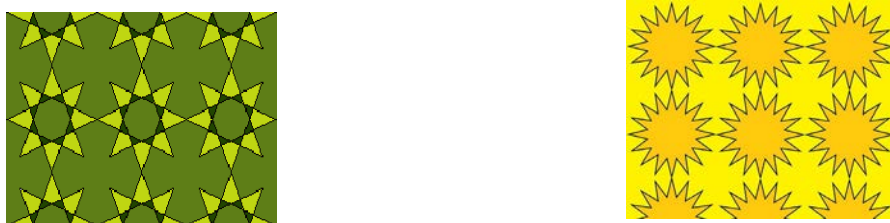


Рис. 6

Пошук і класифікація паркетних п'ятикутників — одна з актуальних задач в сучасній комбінаторній геометрії. Першу класифікацію п'ятикутників дав математик Карл Рейнхард у своїй дисертації «Про розбиття площини на многокутники» (Reinhardt, 1918), представленій у Франкфуртському університеті. Він описав п'ять типів фігур п'ятикутників, ще дев'ять — винайшли вчені в період з 1968 по 1985 роки. Через 30 років, в 2015 році, американські вчені відкрили 15-й тип п'ятикутника (Борисов, 2015). У результаті практичної роботи В. С. Долгушевим знайдено нові шістнадцятий, сімнадцятий (Долгушев, 2016а) і вісімнадцятий (Долгушев, 2016б) типи п'ятикутників, якими можна замостити площину без пропусків і накладань.

Дуже корисним є розгляд різних способів утворення паркетів із застосуванням геометричних перетворень та комп'ютерних програм, що відкриває можливості для особистої творчості і створення нових мозаїк.

При вивченні паркетів доцільно розглянути замощення площини, сітки, їх види, деформації, визначальні області сітки та їх застосування, фігурні смуги. *Замощення* — це покриття всієї площини фігурами, які не перекриваються між собою. *Зміщеною* називається кожна сітка, хоч одна з вершин якої є внутрішньою точкою її ребра. Якщо жодна вершина сітки не є внутрішньою точкою деякого її ребра, її називають *незміщеною* (Бевз, 2007, с. 8).

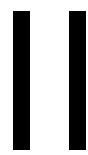
*Фігурна смуга* — це частина площини, обмежена двома періодичними лініями, які паралельно розміщені і не перетинаються. Лінії, які обмежують фігу-

рну смугу, — її межі. Якщо вони — нескінченні ламані, то таку фігурну смугу називатимемо також *ламаною смугою*. Звичайна і ламана смуги — окремі види фігурних смуг. Дві фігурні смуги називаються *рівними*, якщо рухом одну з них можна відобразити на другу. Межі рівних фігурних смуг рівні, тому одну з них завжди можна прикласти до другої так, щоб ці межі сумістились. Отже, будь-якими рівними смугами можна замостити площину. І якщо якими-небудь рівними фігурами можна замостити деяку фігурну смугу, то ними можна замостити й усю площину. Знання цього простого факту істотно полегшує розв'язання багатьох задач (Бевз, 2007, с. 10).

Для більш емоційного та яскравого сприйняття паркетів доцільно розглянути різноколірні паркети, сюжетні мозаїки, прослідкувати зв'язок між паркетами і орнаментами, які ми описували в своїх попередніх роботах (Шаповалова, 2015, 2018).

### Список літератури

- Reinhardt, K. (1918) Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. Dissertation Frankfurt a.M. Leipzig: R. Noske.
- Shapovalova N., & Panchenko L. (2018). Plane geometrical ornaments: types, features and application *Theory and practice of social, economic and technological changes*. (p. 172—182). <http://sried.in.ua/uploads/images/exw/monograph.pdf>
- Wong, M. T., Zongker, D. E., & Salesin, D. H. (1998, July). Computer-generated floral ornament. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 423—434). ACM. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.34.8821&rep=rep1&type=pdf>
- Бевз, Г. П. (2003). *Геометрія чотирикутника*. Харків: Основа.
- Бевз, Г. П. (2007). *Геометрія паркетів*. Київ: Вежа.
- Борисов, А. (2015). *Математический паркет*. *Лента.ру*. 20 августа. <http://lenta.ru/articles/2015/08/20/pentagon/>
- Долгушев В. С. (2016б) Новые паркетные замощения плоскости выпуклыми пятиугольниками. Часть II *Амурский научный вестник*, (3), 43—47. [http://www.amgpgu.ru/upload/iblock/4aa/dolgushev\\_v\\_s\\_novye\\_parketnye\\_zamoshcheniya\\_ploskosti\\_vypuklymi\\_pyatiugolnikami\\_chast\\_ii.pdf](http://www.amgpgu.ru/upload/iblock/4aa/dolgushev_v_s_novye_parketnye_zamoshcheniya_ploskosti_vypuklymi_pyatiugolnikami_chast_ii.pdf)
- Долгушев, В. С. (2016а). Новые паркетные замощения плоскости выпуклыми пятиугольниками. *Амурский научный вестник*, (2), 72—81. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26231741>
- Шаповалова, Н. В., & Панченко, Л. Л. (2015) Орнаменти на площині *Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць*, 1(1), 80—92. [http://mmtu.in.ua/issues/1/MMTU\\_Iss1\\_10.pdf](http://mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_10.pdf)
- Шаповалова, Н. В., & Панченко, Л. Л. (2017). Вивчення паркетів, мозаїк та замощень площини для реалізації прикладної спрямованості навчання геометрії *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО — 2017)*, (с. 204—205). <http://difur.in.ua/wp-content/uploads/2017/11/pmo-2017.pdf#page=204>
- Шаповалова, Н. В., & Панченко, Л. Л. (2018) Паркети, мозаїки і замощення площини у реалізації прикладної направленості вивчення многокутників у курсі геометрії. У *Тезах доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін»*, (с. 134—138). <http://www.enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/17847/1/gorbachuk-85.pdf#page=135>



МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ  
МАТЕМАТИКИ  
У ВИЩІЙ ШКОЛІ



# Аналіз Фур'є в «інженерному» курсі вищої математики

О. І. Баліна<sup>1</sup>, І. С. Безклубенко<sup>1</sup>, Ю. П. Буценко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва та архітектури,  
Київ, Україна

<sup>2</sup>Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
[elena.i.balina@gmail.com](mailto:elena.i.balina@gmail.com)

Розглядається питання про роль та місце вивчення елементів аналізу Фур'є в курсі вищої математики для студентів інженерних спеціальностей. На основі аналізу досвіду викладання такого розділу пропонуються конкретні рекомендації щодо його місця у курсі, змісту лекцій та практичних занять, осучаснення застосувань, підвищення мотивації студентів.

**Ключові слова:** курс вищої математики, ряд Фур'є, перетворення Фур'є.

Розгляд елементів теорії рядів Фур'є, інтеграла та перетворення Фур'є традиційно належить до обов'язкових елементів курсу вищої математики для студентів інженерних факультетів вишів. Можна сказати, що еталонним зразком традиційного підходу до викладання цієї теми є відповідний розділ посібника Анго (1965). Водночас, на думку авторів, актуальними залишаються наступні питання:

- 1) місце вищезазначеної теми в послідовності тем курсу;
- 2) актуальні застосування елементів аналізу Фур'є;
- 3) «ідейне» наповнення цього розділу.

Що стосується першого пункту, то на нашу думку, розповсюджена практика «приєднання» вивчення рядів Фур'є та «суміжних» питань до вивчення теми «Ряди» (після розгляду степеневих рядів та їх застосувань) може бути виправдана лише крайньою скрутою (найпростішим обмеженням кількості кредитів, виділених на вивчення курсу математики). Принципова різниця між степеневими рядами та рядами Фур'є, зв'язок останніх з функціями комплексної змінної обов'язково мають бути донесені до всіх більш-менш свідомих студентів. Справжнє місце лекцій, присвячених рядам Фур'є, інтегралу Фур'є, інтегральному перетворенню Фур'є — безпосередньо після закінчення розгляду функцій комплексної змінної. Тут доречним, як нам здається, є початковий розгляд ряду Фур'є як «ряду Лорана на одиничному колі».

Другий з указаних вище пунктів пов'язаний, перш за все, із чи не найважливішим наразі для переважної більшості викладачів вишів питання — мотивації студентів. Досвідчені викладачі добре пам'ятають, наскільки ефективними часто виявлялися звернення їх до близьких і цікавих для переважної більшості студентів питань частотних характеристик побутових звукозаписуючих та звуковідтворюючих пристроїв. Часи змінилися і це вже не спрацьовує — «юзери» дуже віддалилися від «заліза», яке забезпечує їм слухання улюбленої музики. Наш досвід викладання свідчить, що вказівка на використання перетворення Фур'є в різноманітних галузях науки (фізиці — акустиці, океанології, оптиці, математиці — теорії чисел, комбінаториці, теорії ймовірностей, математичній

статистиці, геометрії та ін.) не викликає у студентів такого відгуку, як його застосування в обробці сигналів та криптографії. Природно, що роблячи при цьому наголос на цифровому (дискретному) характері операцій з сигналами, безальтернативним є хоча б первинне ознайомлення студентів з такими поняттями як дискретне перетворення Фур'є, віконне перетворення Фур'є, DTFT-перетворення (Marks II, 2009). Відповідно, гарним наочним прикладом є широко досі розповсюджений графічний формат .JPEG, який ґрунтується на дискретному косинус-перетворенні, та аналогічним йому форматі MPEG.

Це ж стосується застосування рядів Фур'є за функціями Уолша (природним є ознайомлення студентів із цією вельми корисною ортогональною системою функцій) для підвищення продуктивності шляхом кодового розділення каналів у таких, наприклад стандартах, як CDMA, IS-95, UMTS, CDMA-2000.

Чи не найважливішим при вивченні аналізу Фур'є виявляється, на наш погляд, третій пункт. Хоча історично запровадження рядів Фур'є пов'язане, як відомо, з розв'язанням рівнянь у частинних похідних (методом Фур'є), але принциповим є те, що це було чи не першим кроком до запровадження та вивчення того, з чим асоціюється, у першу чергу, сучасна математика — специфічних множин (просторів). При цьому абсолютно природним є знайомство студентів з поняттям гільбертового простору. Окрім того, саме аналіз Фур'є виявився природною передумовою для запровадження вейвлетів, які наразі належать, серед іншого, до сучасного інструментарію сигналів (2000 рік — стандарт .JPEG2000, 2003 — формат .ICER). Вони вже представлені в системах комп'ютерної математики Mathcad, MATLAB, Mathematica (Малла, 2005).

Позиція авторів полягає в тому, що саме дотримання викладених вище рекомендацій дозволить зробити вивчення студентами інженерних спеціальностей елементів аналізу Фур'є максимально для них корисним, забезпечивши свідому їх зацікавленість у перспективах майбутнього використання відповідних математичних методів.

#### Список літератури

- Анго, А. (1965). *Математика для электро- и радиоинженеров*. Москва: Наука.
- Marks II, R. J. (2009). *Handbook of Fourier analysis & its applications*. Oxford: Oxford University Press.
- Малла, С. (2005). *Вэйвлеты в обработке сигналов*. Москва: Мир.



# **С. П. Тимошенко та сучасна математична й інженерна освіта в Україні: деякі реалії, проблеми та перспективи**

**А. Г. Дем'яненко**

*Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Дніпро, Україна  
anatdem@ukr.net*

## **До 140 річчя від дня народження С. П. Тимошенко**

Наведено деякі міркування, погляди та думки одного з найвидатніших механіків світу, одного із засновників інженерної освіти у світовому масштабі, нашого співвітчизника С. П. Тимошенко стосовно ролі математики в інженерній освіті, які є актуальними і для сьогодні. Обговорюються стан, деякі реалії, проблеми вищої інженерної, у тому числі й аграрної, освіти в Україні. Наголошується на необхідності урахування досвіду вищої інженерної освіти минулих років і, в першу чергу, збереження її фундаментальності.

**Ключові слова:** освіта, фундаментальність, інженер, підготовка, реформування.

Свого часу Альберт Ейнштейн казав, що розумним і дуже ефективним засобом навчання людей є надання власного прикладу (Гернек, 1979). Саме таким вчителем на власному прикладі і був С. П. Тимошенко (1878—1972), один з найвидатніших вітчизняних фахівців у галузі інженерної механіки, з ім'ям якого пов'язані становлення і розвиток інженерної механіки, виховання багатьох поколінь наукових та інженерних кадрів не тільки в Україні, а й у всьому світі. У грудні 2018 року світова наукова спільнота відзначала 140 річчя від дня його народження.

Народився С. П. Тимошенко 23 грудня 1878 року в Чернігівській губернії. Спочатку реальне училище у Ромнах, студент Інституту інженерів шляхів сполучення Санкт-Петербурга, лаборант механічної лабораторії Інституту інженерів шляхів сполучення, викладач кафедри опору матеріалів Петербурзької політехніки, Київська політехніка, знову Петербург в електротехнічному і політехнічному інститутах, завідувач кафедри будівельної механіки Київської політехніки, декан будівельного факультету політехніки. На цей час має відомі підручники, ним запроваджено багато слушних новацій в організацію інженерної освіти в Україні. У 1920 році С. П. Тимошенко покидає Україну. Польща — політехніка Варшавська, Югославія — політехніка у Загребі, де він працює два роки, а потім США — консультант приватної компанії Акімова по врівноважуванню та усуненню вібрацій машин, інженер дослідного інституту компанії електричних машин Вестінгауза, кафедра механіки інженерної школи Мічиганського університету в Анн-Арборі, з вересня 1936 р. професор Каліфорнійського університету в Стенфорді.

Покинувши СРСР, С. П. Тимошенко прискіпливо стежить за інженерною та навіть шкільною освітою в Україні, яку він створював та добре знав, та порівнює її з системами освіти інших країн. Під час неодноразових відвідувань своєї батьківщини він спілкується з викладачами, керівниками навчальних закла-

дів, знайомиться зі станом освітянських справ. Особлива увага та акцент на фізико-математичний цикл дисциплін.

У 60 роки минулого сторіччя С. П. Тимошенко відвідує багато технічних вишів СРСР і приходять до висновку: «Наше старшее поколение так хорошо заложило фундамент образования, что как ни пытаются его сейчас испортить, пока ничего у них не получается» (Тимошенко, 1993). Погляди, думки, міркування, оцінки щодо інженерної освіти, зроблені у свій час С. П. Тимошенко не тільки залишаються коректними, корисними, а стають сьогодні навіть більш важливими, актуальними для сучасної інженерної освіти в Україні. Виникає логічне запитання, на чому робив наголос у свій час фундатор, засновник інженерної освіти у світовому масштабі С. П. Тимошенко та як з часів С. П. Тимошенко (1878—1972) змінилася інженерна освіта в Україні? Які вона має здобутки? Що відбувається зараз з інженерною освітою в Україні? Що про це говорять авторитети інженерної галузі світового рівня? Звичайно, виникає і запитання, що треба принципово зробити, щоб покращувалась, а не погіршувалась основа розвитку технічного прогресу — інженерна освіта в Україні?

За словами академіка Е. І. Григолюка (1997) саме С. П. Тимошенку належить заслуга постановки та побудови системи інженерної освіти, який разом з відомим фізиком, академіком А. Ф. Йоффе, створили у політехнічному інституті Санкт-Петербурга відомий на весь світ фізико-механічний факультет, де студентам механічного відділення передбачалося дати серйозну фундаментальну підготовку з математики, механіки та фізики у зв'язку із широкими технічними застосуваннями цих наук. Саме С. П. Тимошенко відповідав за створення, навчальні плани і програми навчання на механічному відділенні. Ще з реального училища, де готували учнів до практичної технічної роботи, С. П. Тимошенко знав, що механіка для інженера є важливим та визначальним курсом. У своїх спогадах він писав: «Ми одержали добрі знання з кінематики, а статика, така важлива для всіх наших подальших занять, була практично не прочитана, і я завершив інженерну освіту, не прослухавши систематичного курсу статички» (Тимошенко, 1993). Багато уваги цим питанням С. П. Тимошенко приділяв працюючи деканом інженерно-будівельного факультету у Київській політехніці.

Аналізуючи певні прогалини у викладанні математики і механіки, С. П. Тимошенко вбачав причину цього у абстрактному підході, далекому від практичних проблем виробництва. Тут він наголошував, що результативність інженерної освіти буде вищою, якщо математику в технічному виші викладатимуть фахівці обізнані з інженерною справою. Дуже схожої думки й відома математик О. С. Вентцель: «Учить инженеру математику нужно не для того, чтобы он изошрял свой ум, а для того чтобы он применял ее на практике». Іншою причиною незадовільного вивчення математики і механіки була відсутність практичних занять. У подальшому ці недоліки були усунені С. П. Тимошенко під час його викладацької роботи, але зараз усе повертається на ті ж самі кола.

У травні 2018 року виповнилося 13 років з того моменту, коли під час Бергенської конференції Україна приєдналась до Болонського процесу. Які ж за

цей час відбулися зміни в системі вищої інженерної освіти в Україні, чи підвищилася якість інженерної освіти? Чи володіють наші студенти масово іноземними мовами та є дійсно мобільні? Чи зберігається фундаментальність і закладаються надійні підвалини інженерної освіти в Україні? Ці та багато інших питань залишаються відкритими й сьогодні (Кобець & Дем'яненко, 2011). Після приєднання до Болонського процесу вища освіта в Україні перейшла на кредитно-модульну систему (КМС) організації навчального процесу, біля 50% передбачених навчальними програмами питань винесено на самостійне опрацювання студентами. Значно скорочені аудиторні години, відведені на вивчення дисциплін, які закладають основи, формують базис майбутніх інженерів. Залишено блок соціально-гуманітарних дисциплін, частину дисциплін професійного блоку п'ятого року навчання перекинуто на попередні роки. Зроблено меланж вітчизняної системи освіти минулих часів, яка була визнана в ті часи кращою у світі за свою широку фундаментальність, і європейської, причому вихоплені окремі частини, не завжди логічно узгоджені та придатні для наших реалій.

У 2014 році вийшов наказ МОН України № 1050 від 17.09.2014 р., «Визнати таким, що втратив чинність наказ МОН України від 30.12.2005 №774 «Про впровадження кредитно-модульної організації навчального процесу». Тобто Україна практично вийшла з Болонського процесу. Але нічого не було повернуто в початковий стан 2005 р. Меланж систем залишився, та ще й ліквідували в навантаженні викладачів поточні модульні контрольні заходи знань студентів при значній кількості матеріалу дисциплін винесених та залишених на самостійне опрацювання. Скорочено число розрахункових та курсових робіт, які і складали основу самостійної роботи студентів. Це звичайно нанесло велику шкоду рівню знань та і якості інженерної освіти.

С. П. Тимошенко наголошував на важливість шкільної підготовки з математики для інженерної освіти — «Математика продолжает быть одним из самых важных предметов при обучении в средней школе...». Видатні засновники інженерної освіти С. П. Тимошенко, О. М. Крилов постійно наголошували (Кобець & Дем'яненко, 2011; Тимошенко, 1993), що «удовлетворительное инженерное образование требует предварительной подготовки в таких фундаментальных предметах, как математика, механика, физика. Наличие хорошей математической подготовки в школе позволяло начинать преподавание фундаментальных дисциплин на достаточно высоком уровне уже на первом курсе и дать студентам достаточную подготовку по фундаментальным дисциплинам в первые два года. Последние три года использовались для изучения инженерных дисциплин».

Зауважмо, що дисципліни професійного блоку інженерної підготовки, особливо для сучасних інженерних напрямів, являють собою практично розділи прикладної математики, бо як відомо, у будь-якій теорії стільки науки, скільки в ній математики. Тут і формування математичних моделей машин, явищ, технологій, і їх дослідження за допомогою математичного апарату. Низький рівень математичної підготовки, як відзначав С. П. Тимошенко, впливає на рівень ви-

кладання, який треба знижувати, пристосовуючись до рівня математичної підготовки студентів, впливає і на ставлення студентів до інженерної науки, знижує креативну складову навчального процесу та і інженерної діяльності в цілому. Класики інженерної освіти С. П. Тимошенко, О. М. Крилов, В. Л. Кирпичов висловлювали думку та побажання, щоб математику для інженерів викладали математики, обізнані з інженерною справою, надавали велике значення лекціям та лекторові взагалі, який своїм фахом, компетентністю, прикладом закладав основи знань майбутніх фахівців.

Уважаємо, що перші два роки інженерної освіти у технічному університеті, необхідно зробити недоторканими для формування саме бази, фундаменту майбутнього інженера, як це було раніше. Проводячи реформи, треба пам'ятати, що система інженерної освіти інерційна, досить консервативна і миттєвих результатів, покращення, навіть при використанні найсучасніших результативних методик та технологій не матимемо. А тому, за покращення рівня інженерної освіти в Україні на даному етапі, треба вважати її «непогіршення». Основна задача при сучасних тенденціях не допустити погіршення якості інженерної освіти, зниження рівня знань. Відомо що руйнувати дуже просто, а мурувати, будувати значно складніше. Останнім часом «покращення» як у шкільній так і вищій інженерній освіті продовжується з прискоренням. Це і відома ручка з червоними чорнилами, а ще краще електронні планшети замість підручників, і таке інше. Скільки маємо новацій за останні роки, але реформами їх назвати неможливо, бо результати кожного року гірші і гірші.

Тут і компетентнісна освіта, і проблемна, і діяльнісна, і STEM освіта, і дуальна, і бізнес-інкубатори, і заочна, і дистанційна, і створення національної освітньої платформи, і об'єднання декількох предметів в один, та інші закордонні новації, які є половинчасті, звичайно, там слухні, але зовсім не придатні і не працюють у реаліях України. Реформа відбувається тоді, якщо маємо позитивний результат хоча б, як кажуть у математиці, на нескінченно малу «епсилон». Суспільство має розвиток тільки тоді, коли інтелектуальний потенціал майбутнього покоління перевищує хоча б на «епсилон» потенціал попереднього. А у нас чого тільки не пропонується, які ідеї та гасла не висуваються, і не проголошуються начебто для покращення рівня і якості освіти, у тому числі і математичної. Школярі наче проходять незалежне оцінювання знань! А у виші з'ясовується незнання таблиці множення, правил і порядку математичних дій та інших елементарних знань математики. Причому не поодинокі випадки.

Чому так відбувається? На це частково ще у свій час дав відповідь автор передмови до книги Тимошенко (1996) професор В. Н. Луканін: «часом є багато дій, які руйнують вищу школу, причому відбувається це часто під знаком реформ та надання вищій школі нової якості... Оцінки стану сучасної вищої освіти приводять нас до висновків недопустимого заперечення минулого. Минулі досягнення краще доповнювати новими мотивами, ніж різко переходити на нові принципи побудови вищої освіти, новизна яких у ряді випадків є гаданою».

Як відомо дитину починають виховувати з пелюшок, а при звичаювати до навчання з самого початку, тобто ще в початковій школі.

Міністр освіти і науки із критикою каже, що у школах України тільки напихували знаннями, а треба будувати нову 12 річну школу на нових принципах. Так у школах Січеславщини протягом чотирьох років упроваджуватимуть освіту громадських компетентностей. А за рахунок чого? Мабуть замість, та за рахунок, опанування письма та математики. Слід відзначити, що в Україні вже проходили і одинадцятирічну школу, і з професійним нахилом, коли працювали заводи і фабрики, які курували і були шефами шкіл. А як результат «ненатихування» знаннями школярів маємо і відповідні підсумки ЗНО у 2018 році. У Європі забороняють у школах користуватися планшетами, телефонами, а в Україні це виставляють як новації й рекомендують замість паперових підручників.

Як показало ЗНО у 2018 році, багато випускників середніх шкіл не володіють елементарними знаннями з математики, фізики та навіть державної української мови. Третина учасників ЗНО у 2018 році, а саме 102 000, набрали мінімальний бал 100, що свідчить про «шаленні» успіхи останніх псевдореформ освіти в Україні. Усе це результати безглузвих, нефахових реформ шкільної освіти в Україні. А потім маємо і відповідний контингент студентів у НЗВО. Теж саме відбувається і у вищій інженерній освіті, шаленими темпами деградують, не набираючи студентів, технічні виші, фізико-технічні, механіко-математичні факультети класичних університетів — мозок, локомотиви інженерії. Як би ми не змінювали назви міст, вишів, факультетів, кафедр, нічого корисного це не дає і не дасть.

Наприклад Національний гірничий університет (один з авангардів національних вишів в Україні) змінив назву на Дніпровську політехніку. А що від цього змінилося? Уже втратили гірничу галузь, а чи запрацювала промисловість? В Україні на 10 економістів та 10 юристів готують одного інженера. А чи володіють ці новоспечені економісти поняттями бізнесу, ринку товарів і послуг? Чи є в Україні ринок газу, електрики? Чи й не великим досягненням в економіці України є кооперативи та кооперативний рух! А як розподіляють бюджетні місця в аграрних вишах України? Саме ці виші повинні бути зараз в Україні на передовому фронті системи освіти й економіки! Важливим чинником при розподілі бюджетних місць є кількість наукових статей у наукометричних базах? А чому не за наявності сучасного обладнання або кількості суперсучасних комп'ютерів у НЗВО, якими і повинно забезпечувати МОН? А статті то НПП друкують, приймають участь у конференціях, проходять стажування за кордоном, вивчають іноземні мови й багато іншого практично за власні кошти. Усе це новації реформ, які не забезпечені матеріально МОН і державою.

А хто не дбає про освіту, той не дбає про майбутнє! А яка матеріально технічна база у переважній більшості вишів — ще часів Тимошенка! А винагорода за працю у викладачів вишів в Україні на рівні мінімальної, в рази менша, ніж в інших країнах. Професор отримує практично вдвічі менше, ніж водій громадського транспорту у Дніпрі! А хтось, паразитуючі на бідних громадянах, отримує

в якості премії мільйони \$. А при цьому ведемо мову про розвиток науки, технічний прогрес і технічний прорив в Україні! При такій політиці і псевдореформах скоро молоді викладачі підуть з вишів і нікому буде розвивати, викладати математику, механіку та інші інженерні дисципліни, які потихеньку вимивають вивченням громадських компетентностей, кооперативного руху тощо. А обдарована молодь та науковці покинуть Україну! А без інженерії не буде розвитку промисловості, сучасного рентабельного виробництва та і економіки України. Нічого суттєвого не принесуть тут і ІТ (інформаційні технології та айтішники), бо вони є допоміжними, обслуговуючими, інструментом при розв'язуванні складних інженерних проблем виробництва (Феодос'єв, 1969), зокрема, агропромислового, та й економіки.

Переймаючись питанням покращення якості підготовки інженерних кадрів для АПК на кафедрі теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства Дніпровського державного аграрно-економічного університету за потребою часу підготовлено та надруковано навчальний посібник Кагадій, Дем'яненко та Гурідова (2011) «Основи механіки матеріалів і конструкцій» для інженерно-технологічних спеціальностей АПК. Маючи на увазі, що більшість землеробської техніки працює на риллі у стані вібрації, велика увага приділена розрахункам деталей машин на міцність за дії динамічних навантажень та питанням їх втомної міцності. У тому ж складі авторів підготовлено та видано із грифом навчальні посібники (Кагадій, С. В., Дем'яненко, А. Г., Науменко, М. М., Гурідова, В. О. (2015)) «Основи теорії коливань в інженерній справі та втомна міцність», «Лабораторний практикум з механіки матеріалів і конструкцій, опору матеріалів та будівельної механіки». Викладаємо на вимоги часу та прохання керівництва тракторного виробництва Південмашу вибірково дисципліну «Основи комп'ютерних розрахунків в інженерній механіці». Зараз є плани підготувати до 100-річчя ДДАЕУ українською мовою підручник «Теоретичні основи сільськогосподарської механіки». У підготовці цього видання задіяні НПП декількох навчальних закладів вищої освіти України.

На жаль, стан справ у вищій інженерній освіті не покращується та і перспектив не видно. Залишилося в Україні перейти на підготовку фахівців за дуальною формою здобуття інженерної освіти, концепцію якої 19.09.2018 р. на своєму засіданні схвалив Кабінет міністрів України, й остаточно вища інженерна освіта, особливо аграрна, перетвориться у звичайну професійно-технічну підготовку, яка останнім часом лежить на місцевих бюджетах. Таким чином навчальні заклади вищої інженерної освіти тихенько, по мовчазній згоді, причому без винятків, перетворюються, у кращому випадку, у професійно-технічні, а то й у ремісничі училища, а замість підготовки інженерних кадрів, інженерів-механіків сільськогосподарського виробництва, готуватимемо просто кваліфікованих робітників промисловості та АПВ. А це неминуче призведе до деградації наукового потенціалу у галузі інженерної механіки, інженерної освіти та і нашого суспільства в цілому.

### Список літератури

- Гернек, Ф. (1979). *Альберт Эйнштейн*. Москва: Мир.
- Григолюк, Э. И. (1997). Разница в подготовке русских и американских инженеров. *Наука и жизнь*, (7), 48—54.
- Кобець, А. С., & Дем'яненко, А. Г. (2011). Сучасна вища інженерна аграрна освіта в Україні. У *Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі*, (с. 72—77). Кривий Ріг: Вид. відділ НМетАУ.
- Кагадій, С. В., Дем'яненко, А. Г., & Гурідова В. О. (2011). Основи механіки матеріалів і конструкцій. Дніпропетровськ: Свідлер А. Л.
- Кагадій, С. В., Дем'яненко, А. Г., Науменко, М. М., Гурідова, В. О. (2015). *Основи теорії коливань в інженерній справі та втомна міцність*. Дніпропетровськ: Свідлер А. Л.
- Писаренко, Г. С. (1979). *Степан Прокопович Тимошенко*. Київ: Наукова думка.
- Тимошенко, С. П. (1996). *Инженерное образование в России*. Люберцы: ПИК, ВИНТИ.
- Тимошенко, С. П. (1993). *Воспоминания*. Киев: Наукова думка, 1993.
- Феодосьев, В. И. (1969). *Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов*. Москва: Наука.

# Актуальність профорієнтаційної роботи в середній загальноосвітній школі для підвищення рівня якості знань з елементарної математики

В. В. Довгай

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[valerdov@gmail.com](mailto:valerdov@gmail.com)

Розглядаються перспективи чергового етапу реформування середньої освіти у світлі його обговорення в засобах масової інформації. Обґрунтовується необхідність посилення профорієнтаційної роботи в загальноосвітніх школах та участі в ній викладачів математики сучасного технічного університету.

**Ключові слова:** реформа, освіта, якість, профорієнтація, компетенція.

Уже не один десяток років продовжується реформа середньої освіти і стільки ж викладачі математики факультетів та інститутів сучасного технічного університету, орієнтованих на підготовку фахівців для машинобудівної галузі, сподіваються на реальне (а не обіцяне у гарно складених бюрократичних матеріалах відповідного міністерства) підвищення вкрай низької якості знань з елементарної математики випускників середніх загальноосвітніх шкіл, з якими згаданим викладачам доводиться працювати. Кожен з керівників Міністерства освіти і науки України, що неодноразово реорганізовувалось, презентував блискуче складені плани перебудови своєї галузі, здатні нарешті піднести українську середню освіту до рівня найвищих світових стандартів. Можливо, що випускники середніх загальноосвітніх шкіл уже досягли такого рівня знань у гуманітарних науках, бачимо успіхи в математичній підготовці випускників невеликої кількості елітних шкіл, та не вони, на жаль, становлять основний контингент вступників до факультетів та інститутів сучасного технічного університету, завданням яких є підготовка фахівців для машинобудівної галузі — основи економічної могутності країни. Викладачі математики, які працюють у згаданих підрозділах, власними очима бачать відсутність у багатьох своїх студентів необхідних знань фундаментальних положень шкільної програми з елементарної математики, що не сприяє якісному процесу продовження навчання. Звідси і їх оцінка багаторічного реформування середньої школи, яке виявилось нездатним забезпечити мінімальний рівень знань з основної для них (і не тільки) навчальної дисципліни — математики, та ще й після того, коли в недавньому минулому цей рівень був значно вищим. Воно й не дивно, бо реформування стосується другорядних питань (як то: масштабування оцінок, кількість років навчання — 11 чи 12, гра термінологією і т. д., і т. п.), а не суті справи, яку бачать викладачі вже на своїх перших заняттях із новим поповненням.

Чи змінять щось на краще нововведення теперішнього керівництва міністерством? Спробуємо проаналізувати перспективи чергового етапу реформування середньої освіти, беручи за основу не офіційні документи Міністерства освіти і науки України (там, як завжди, райдужні обіцянки ще на один десяток



років), а опираючись на те, як це висвітлювалось у засобах масової інформації, зокрема й самими чиновниками, та як це зможе принести довгоочікувані плоди знань з елементарної математики. Ось пропонується навчання дітей у перших класах замінити грою, уроки зробити коротенькими, ніяких тобі оцінок та домашніх завдань, учню дозволяється сидіти на уроках у школі де завгодно, хоч і на підлозі, при бажанні — виходити з класу. Чи не нагадує це дитячий садок? То вже краще так і казати, що нова школа — це об'єднання колишньої школи з дитячим садком, а не щось небачене у вітчизняній педагогіці, а от вже далі за дитячо-садковим вихованням має початися справжній процес навчання учнів від початкової до середньої освіти, на що й орієнтувати як вихователів, так і вчителів, бо справжня освіта — це важка робота як учителя, так і самого учня, а не гра чи забава. Звичайно, у цій роботі можна і треба робити короткі паузи в системному й логічному викладі програмного матеріалу, які заповнювати цікавими прикладами практичного застосування відповідних знань, історичними довідками щодо їх розвитку від прадавніх часів аж до сучасності, хто з видатних вчених (а особливо українських) зробив вагомий внесок у цей розвиток. Грамотне і змістовне використання таких пауз, без порушення цілісності викладу дисципліни, одночасно є такою важливою складовою частиною виховного процесу, як профорієнтаційна робота з майбутніми випускниками, у якій знайдеться місце для патріотичного виховання.

Саме таким чином можна виправити сформоване в нашому аж надто недосконалому суспільстві хибне уявлення, що для успіху необхідно мати освіту юриста, економіста, артиста чи режисера. Просто те, що в нас заведено називати успіхом (дуже часто безпідставно), більшістю сприймається за суто зовнішніми ознаками. При цьому мало кому спаде думка, що незаслужений у багатьох випадках успіх, досягнутий завдяки корупційним схемам, непотизму, відсутності честі й гідності, зрештою виявиться ненадійним, несправжнім та може закінчитись крахом великих сподівань. Зараз панує тенденція до зменшення кількості бажаних стати в майбутньому висококваліфікованим спеціалістом для роботи в галузі машинобудування, свідченням чого є те, що ряд відповідних підрозділів сучасного технічного університету не може залучити до вступу на свої кафедри навіть тієї кількості випускників, яким держава виділяє бюджетні місця і, отже, відчуває потребу в таких спеціалістах. Країна підходить до межі, за якою її довготривала та недалекоглядна деіндустріалізація може боляче вдарити по перспективах досягти нарешті успіху не тільки мізерній кількості зажерливих монополістів разом з найближчим оточенням, а й усьому суспільству. Але ще є небагато часу для виправлення зроблених за чверть століття помилок і шкідливих діянь, бо ще продовжують готувати наші технічні університети кадри, якість підготовки яких високо оцінюють як в Україні, так і поза її межами, куди чи не найкращі з них змушені виїжджати у пошуках кращої долі.

Ось тому, щоб країна протрималась до того часу, коли почнеться вже усвідомлений та незворотній процес демонтажу олігархічного ладу з усе більш помітними елементами феодалізму, такою важливою є профорієнтаційна робота в

середній школі, до якої слід долучатись і нашій університетській спільноті викладачів математики. Можна пожалкувати, що зараз ця робота послабилась і тому інколи стимулюється якась сумнівна творчість, притаманна діянням масовика-витівника. А хіба дійдеш до іншого висновку, слухаючи одного з чиновників, що побував у США й захоплено розповідав, які є геніальні та креативні тамтешні вчителі, бо хтось один з них додумався до того, щоб заохотити своїх учнів за допомогою гри в морський бій вивчити напам'ять таблицю Менделєєва. Більшість із нас (якщо не всі) скаже, що така непродуктивна робота є абсолютно зайвою, бо ця таблиця якщо й не висить у кожному шкільному хімічному кабінеті, то вже обов'язково наявна в кожному підручнику з хімії і до якої має бути вільний доступ. А дехто ще й додасть, що найімовірніше таке можна було б зустріти в одній із багатьох шкіл, яких досить багато і в США, і де якість підготовки з фундаментальних дисциплін залишає бажати кращого. Там справді можна познайомитись із подібною методою викладання, що нагадує колись уже описану і знайому нам з дитинства завдяки геніальному Марку Твену. Але сприйняття такої методи як досягнення педагогічної думки є черговим кроком до перетворення середньої школи в заклад, що його за аналогією з «потішним полком» горезвісного Петра I слід називати «потішною школою», здатною лише імітувати процес навчання. Звичайно, потужна економіка США здатна залучити для свого розвитку найкращих учених з усього світу, зокрема й з України, а тому може собі дозволити собі таку розкіш, як існування «потішних шкіл». Ми ж з нашою кволою і деіндустріалізованою економікою не повинні навіть думати про такий шлях розвитку своєї освіти щоб остаточно не перетворитись на сировинний придаток високорозвинених країн. А тому маємо утримувати досить високий рівень вітчизняної освіти (починаючи саме з середньої, і де одним з найважливіших є саме рівень знань з елементарної математики), завдяки чому майбутні випускники машинобудівних підрозділів сучасного технічного університету будуть здатними суттєво збільшити наукоємність своїх розробок для машинобудівної галузі, впроваджуваних у виробництво.

Великі сподівання покладають новітні реформатори середньої освіти на такий широко рекламований ними в засобах масової інформації критерій якості освіти, як універсальний і багатовимірний термін «компетенція». Ставиться глобальне завдання — покращити колись у далекому майбутньому незavidне сучасне становище нашої освіти в переважній більшості середніх шкіл стосовно предметів природничого напрямку, тоді як на сучасному етапі актуальним є завдання рятувати, зокрема, від повного занепаду стан справ з елементарною математикою. Тут насамперед потрібні конкретні критерії та підходи для підвищення якості знань, а не загальне та розмите внаслідок його універсальності поняття компетенції. Для більшості з нас очевидним є те, що в основі такого критерію повинні лежати ґрунтовні знання з елементарної математики та вміння їх застосовувати під час виконання шкільних завдань, тобто лише дві з багатьох складових компетенції. Усе інше слід обмежити такою важливою на даному етапі роботою, яка визначається єдиним давно відомим терміном — профорієнтація. Час усвідомити, що вибраний монополістично феода-

льний та сировинно-орієнтований шлях розвитку вітчизняної економіки загрожує вже самому існуванню держави і що єдиним виходом із скрутного становища є підвищення наукоємності виробництва продукції, насамперед у галузі машинобудування, здатної бути конкурентоспроможною на міжнародному ринку. Саме туди слід залучати інвестиції та спрямовувати фінансові потоки, створюючи нові потужні підприємства, де працюватимуть тисячі наших співвітчизників і які потребуватимуть відповідних фахівців, котрих ще здатні готувати наші технічні університети. Передбачаючи неминучість такого розвитку подій, педагогічні колективи середніх загальноосвітніх шкіл мають кардинально змінити акценти своєї профорієнтаційної роботи в напрямку підсилення її для природничої складової, де одне з чільних місць належить елементарній математиці. Без повноцінних знань випускниками середніх шкіл цієї навчальної дисципліни годі й сподіватися на великі успіхи у процесі підготовки висококваліфікованих спеціалістів для машинобудівної галузі, спроможних вирішувати складні проблеми сучасного виробництва.

Ураховуючи той сучасний занедбаний стан відповідної шкільної профорієнтаційної роботи, викладачі математики сучасного технічного університету мають прийти на допомогу шкільним учителям, установивши або відновивши втрачений зв'язок хоча б зі своєю рідною школою. Хто краще за нас зможе переконати як самих учнів, так і їх батьків у важливості та універсальності здобутих під час навчання якісних математичних знань, проілюструвавши їх практичне застосування в діяльності тих підрозділів свого університету чи установ, де ми зараз працюємо або працювали в минулому? При цьому форми взаємодії можуть бути найрізноманітнішими, без зайвої регламентації. Добре сприймається адміністрацією шкіл та їхнім педагогічним колективом інформація про умови та реальність вступу випускників до різних факультетів чи інститутів університету на бюджетні місця, інформація про день відкритих дверей, наявність гуртожитку для студентів з інших міст, і т. д., і т. п. Не буде заперечень щодо факультативних занять типу майстер-класів з елементарної математики на різні теми, але слід зауважити, що ця важлива і трудомістка робота, на жаль, зовсім не передбачена при обчисленні рейтингу науково-педагогічного працівника. У минулому досить популярним і бажаним було проведення факультетом олімпіад з елементарної математики для випускників прямо в їхній школі, бо переможців цих олімпіад дозволялось зараховувати на факультет за результатами наступної співбесіди. Саме таким чином факультети, які вважались і тоді неперестигшими, могли залучити до навчання чи не найкращих випускників. Після запровадження ЗНО все це було скасовано, не зважаючи на те, що стан з набором вступників до цих факультетів, навіть на бюджетні місця, значно погіршився.

Здається, Міністерству освіти і науки України саме час переходити до запровадження справжніх реформ у освіті, зважаючи на те, яких структурних змін потребує наша слабка економіка для свого зростання до рівня, що має забезпечити соціальну справедливість та гідний рівень життя всього суспільства, а не лише вузького кола вибраних.

# Щодо сакраментальної аббревіатури СРС

В. В. Дрозд

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

*Slava572@ukr.net*

Доповідь присвячена питанню змісту та структури такої важливої складової учбового процесу як самостійна робота студентів спеціальності «математика».

**Ключові слова:** самостійна робота студентів, домашнє завдання, типова розрахункова робота.

Неможливо виконати ОПП у ЗВО без СРС. Сподіваюсь, Ви мене зрозуміли. Не зовсім? Співчуваю. Що поробиш — жага бюрократичної машини до всіляких скорочень та аббревіатури іноді доводить до відчаю. Звичайно, нашим бюрократам далеко до більшовиків з усіма їхніми викжелями, лечсанупрами та румчеродами. Але й у наш час іноді буває моторошно. Відкриваєш, наприклад, електронний кампус КПІ (який теж, до речі, скорочено до двох літер ЕК) і бачиш — ЕІР, РНП, НПП. Що воно таке? Відкриваєш газету і бачиш — ГПУ, ОБСЄ, НКРЄКП. Що воно таке? Добре, що існує Google. Що б ми без нього робили? Хоча на запит, що означає РНП, Google дає шістнадцять відповідей. Щось мені підказує, що жодна з них ні як не стосується до РНП. Єдине радує — пошуковик розуміє СРС так, як слід. Тобто як *самостійну роботу студента*.

Отже, найпершу фразу звичайною мовою можна перекласти так: «Неможливо виконати освітньо-професійну програму підготовки у закладі вищої освіти без самостійної роботи студентів». З «Методичних рекомендацій до складання програм навчальних дисциплін та робочих програм кредитних модулів», які розроблено в КПІ ім. Ігоря Сікорського, випливає, що навчальний час, відведений для засвоєння кожного кредитного модуля, складається із двох приблизно рівних за часом частин: аудиторні години та години для самостійної роботи студентів. У свою чергу остання частина складається з виконання розрахунково-графічних робіт та підготовки до лекцій, практичних занять, модульних контрольних робіт, заліку, екзамену тощо.

Уважне вивчення цього нормативного документу викликає природне запитання: навіщо добуватися у відчинені двері? Ну справді, чи можна зробити розрахункову роботу чи підготуватися до заліку, не витрачаючи на це час, не працюючи самостійно? З іншого боку, чи варто жорстко регламентувати час, відведений на цю роботу? Наприклад, на підготовку до однієї години практичного заняття відводиться 0,5—0,75 годин, а на виконання розрахункової роботи відводиться 10—15 годин. Але ж ясно, що кількість цих годин принципово залежить від того, яка тема практичного заняття, скільки завдань містить розрахункова робота та багатьох інших чинників.

Більшість авторів, які пишуть про самостійну роботу студентів, часто теж не помічають, що двері прочинені. Наприклад, Шилинець та Гуло (2013) наголошують: «Для организации эффективной самостоятельной работы студентов по любому

курсу ... необходимо иметь достаточное число учебных и учебно-методических пособий». До цього можна тільки додати: і чим більше, тим краще. Або Ерошевская, Ерошевская та Минченкова (2013) підкреслюють, що «большую роль в ритмичности самостоятельной работы студентов младших курсов технического университета играет регулярный контроль над выполнением аудиторных и внеаудиторных заданий». Хотів би я подивитись на викладача, який проводить контрольну роботу, а потім не перевіряє її виконання. А ще один наш колега Домбровський (2014) каже: «Яким би не був гарний викладач, ніякі удосконалені новітні технології, методологічні рекомендації, сучасна матеріально-технічна база навчального закладу не допоможуть стати висококваліфікованим фахівцем, якщо студент сам цього не хоче». Ну що тут додати? Як кажуть, без коментарів.

Але при ретельнішому вивченні вказаних «Методичних рекомендацій» приходиш до думки, що автори цієї роботи крім самоочевидних речей на кшталт підготовки до лекції та виконання лабораторної роботи забули про один з найважливіших видів самостійної роботи студентів. Мова йде про роботу над теоретичною частиною будь-якого курсу. Наприклад, Шилинець та Гуло (2013) пропонують під час вивчення теоретичної частини того чи іншого курсу лекцій «выделить необходимый мини-стандарт, который должны усвоить студенты, а также тщательно спланировать изучаемый материал. При этом планировании ряд тем следует выделить на самостоятельное изучение».

Звичайно, віднесення частини розділів теоретичного курсу на самостійне вивчення студентами — захід, який виник не від гарного життя. Але що поробиш — це об'єктивна реальність. З одного боку, часто викладач фізично не спроможний викласти весь теоретичний матеріал як кажуть «від корки до корки». А з іншого боку, ми повинні привчати студентів до самостійної роботи над теоретичним матеріалом. Тільки не слід ставитись до цієї роботи формально, механістично.

Наприклад, що можна помітити при вивченні робочих програм з того чи іншого теоретичного курсу? Часто викладач чисто формально відносить на самостійний розгляд студентів якісь незручні, неприємні для нього або громіздкі для розгляду на лекції теми. Це може бути розділ «Поверхні другого порядку» у курсі аналітичної геометрії або тема «Збіжність інтеграла Фур'є» у курсі математичного аналізу. Як показує досвід, такий підхід навряд чи призведе до позитивного результату. Автору не один раз доводилось у цьому пересвідчитись.

Уявіть собі колоквиум, на який винесено десь п'ятнадцять питань, одне з яких пропонувалось студентам для самостійного розгляду. Роздруковано карточки з цими питаннями. Кожен студент мріє витягнути карточку під номером вісім або одинадцять. Але замість різних карточок усі студенти одержують одне й те ж питання. Саме те, яке й треба було розглянути самостійно. І що ви думаєте? Результат колоквиуму — абсолютно прогнозований. У кращому випадку один чи два студенти із групи щось там напишуть. Інші здадуть чисті аркуші. Перевірено не один раз.

Простий приклад. Під час вивчення теми «Подвійний інтеграл у криволінійній системі координат» студентам було запропоновано обчислити площу паралелограма, у який переходить квадрат, заданий у декартовій системі координат, при заданому лінійному перетворенні координат. Жоден студент не зробив цього протягом двох тижнів. Прийшлося прямо на колоквиумі їм підказувати: зробіть так, так і так. Хто зрозумів, той зробив. Отже, винесення на самостійний розгляд студентами якогось окремого розділу з теоретичного курсу є мірою вимушеною, але не дуже продуктивною.

Продуктивніший підхід до самостійної, а головне — творчої роботи студентів у процесі засвоєння теоретичного матеріалу пропонують Шегда та Кулініч (2014): «З метою подолання пасивності аудиторії слід будувати лекцію у формі діалогу, ставити проблемні питання і спонукати слухачів шукати на них відповіді. В ході лекції або в кінці її бажано деякі моменти запропонувати студентам самостійно знайти в літературі і доповнити лекцію». Я б тільки змінив останню фразу так: «запропонувати студентам самостійно розглянути, а якщо не вийде, знайти в літературі».

Справді, якщо мова йде про викладання математики, то під час доведення майже кожної другої теореми трапляються тонкі місця, суть яких залишається непоміченою більшістю студентів. Якщо на лекції зосередити увагу на цих місцях, влучно поставити питання щодо обґрунтованості того чи іншого кроку доведення теореми, то запевняю вас, що від пасивності аудиторії не залишиться й сліду.

Простий приклад. Наприкінці лекції, після доведення діагональним методом теореми про зліченність множини раціональних чисел, коли аудиторія, здається, була цілком задоволена (або тим, що лекція вже закінчується, або тим, що доведення наскрізь прозоре), їй було запропоновано питання: «Панове. А вас не бентежить той факт, що в намальованій на дошці таблиці є числа, які повторюються?» Відразу після закінчення лекції частина студентів запропонувала свої відповіді на поставлене питання. Не всі вони були прийнятні. Але той, хто довів, що доведення теореми є коректним, одержав так званий бонусний бал, що передбачено рейтинговою системою оцінювання студентів. І в цьому, мабуть, полягає найважливіший момент викладацької роботи. Тому що, як стверджує Петропавловська (2015): «Самостійну роботу обов'язково треба оцінювати і надавати «бонусні» бали за проявлення творчого пошуку і нестандартного мислення. Це підвищує зацікавленість результатами цієї роботи і сприяє активізації процесу навчання».

### Список літератури

- Домбровський, М. А. (2014). Якість самостійної роботи студентів при вивченні математичних дисциплін в сучасних умовах освіти. У *Матеріалах III міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 25—26 грудня 2013 р.* (с. 344—346). Київ: НТУУ «КПІ».
- Ерошевская, В. И., Ерошевская, Е. Л., & Минченкова, Л. П. (2013). Использование дидактических материалов для активизации самостоятельной работы студентов. У *Матеріалах II Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 20—21 грудня 2012 р.* (с. 304—305). Київ: НТУУ «КПІ».

- Петропавловська, Г. О. (2015). Активізація навчального процесу й організація самостійної роботи під час вивчення математичного аналізу іноземними студентами ОМА. У *Матеріалах IV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 24—25 грудня (с. 197—200). Київ: НТУУ «КПІ».
- Шегда, Л. М., & Кулініч, Г. М. (2014). Значимість самостійної роботи студентів при вивченні вищої математики. У *Матеріалах III Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 25—26 грудня 2013 р. (с. 216—219). Київ: НТУУ «КПІ».
- Шилинець, В. А., & Гуло, І. Н. (2013). Методическое обеспечение организации самостоятельной управляемой работы студентов по ТФКП. У *Матеріалах II Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 20—21 грудня 2012 р. (с. 211—214). Київ: НТУУ «КПІ».

# Побудова графіків функцій та використання ІКТ

Н. М. Задерей<sup>1</sup>, Г. Д. Нефьодова<sup>1</sup>, М. В. Гаєвський<sup>2</sup>, І. С. Пісний<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

<sup>2</sup>Центральноукраїнський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

zadereyv@ukr.net, mgaevskij@gmail.com

Метою роботи є дослідження методів елементарної математики для побудови графіків функцій та методичних аспектів використання при цьому засобами комп'ютерної математики.

**Ключові слова:** графік функції, математичний пакет, складені функції.

Вивчення поведінки функцій і побудова графіків функцій є важливим розділом математики. Вільне володіння технікою побудови графіків часто допомагає вирішувати багато завдань і часом є єдиним засобом їх вирішення. Методи математичного аналізу дають змогу побудувати графіки функцій довільної складності. Як відомо, методи дослідження базуються на загальній схемі.

1. Визначити область означення функції, область неперервності та точки розриву.

2. Встановити факт парності, періодичності.

3. Відшукати точки перетину з осями координат та по можливості встановити проміжки знакосталості.

4. За допомогою апарату похідних відшукати екстремальні точки, визначити проміжки монотонності функції.

5. Відшукати точки перегину та проміжки опуклості.

6. Встановити поведінку функції на нескінченності, знайти асимптоти.

7. Побудувати графік.

У цій схемі основним є використання поняття похідної. Проте, існують випадки, коли застосування похідної не є доцільним та ефективним, зокрема, у випадку, коли досліджувана функція є складеною і в результаті можна отримати похідну, для якої проблематичним є відшукування її коренів.

Зокрема, в математиці відомо багато важливих функцій, у яких похідні мають складний вигляд для подальшого дослідження, наприклад, такими функціями є щільності логнормального розподілу, розподілів Рейлі, Вейбула, бета-розподілу,  $t$ -розподілу Стьюдента тощо, а також багатьох складених та спеціальних функцій (Корн & Корн, 1974).

Досить часто, у таких випадках можна застосувати окремі, спеціальні методи побудови графіків, що дозволяють обійтися без загальної схеми дослідження. Ці спеціальні методи, переважно базуються на фактах елементарної математики (див., наприклад, Вірченко, Ляшко та Швецов (1979) чи Шунда (1983)).



Часто доречним є використання властивостей функцій  $y = f(u)$  та  $u = g(x)$  (за умови що вираз  $y = f(g(x))$  має зміст), оскільки самі по собі ці функції є простішими.

Зокрема, легко встановити такі факти:

1) якщо  $u = g(x)$  є парною, то і складена функція  $y = f(g(x))$  теж буде парною;

2) якщо  $u = g(x)$  є періодичною, то і складена функція  $y = f(g(x))$  теж буде періодичною;

3) якщо  $y = f(u)$  та  $u = g(x)$  є непарними, то і складена функція  $y = f(g(x))$  теж є парною;

4) якщо  $y = f(u)$  та  $u = g(x)$  є зростаючими функціями, то і складена функція  $y = f(g(x))$  теж зростаюча;

5) за теоремою про монотонність складеної функції можна відшукати проміжки зростання і спадання складеної функції  $y = f(g(x))$ .

Без використання апарату похідної з успіхом можна будувати графіки складених функцій таких типів  $y = (f(x))^r, r \in \mathbb{Q}, y = a^{f(x)}, a > 0, y = \ln(f(x)), f(x) > 0, y = \sin(f(x)), y = \operatorname{tg}(f(x)), y = \operatorname{arctg}(f(x))$  та функцій виду  $y = f(x) + g(x), y = f(x) \cdot g(x)$  тощо. Також, особливий клас утворюють функції побудовані на основі цілої та дробової частини.

Використання методів елементарної математики під час побудови графіків функцій слугує матеріалом для закріплення, вдосконалення та систематизації знань з елементарної математики, а також пропедевтики важливих понять із деяких розділів вищої математики, що у свою чергу сприяє кращому вивченню багатьох розділів вищої математики.

Крім того для кращого засвоєння матеріалу доцільним є використання математичних пакетів (засобів комп'ютерної математики), зокрема Maple, Mathematica, MATLAB, GeoGebra тощо. Можливості використання математичних пакетів є досить обширними, при використанні методів комп'ютерної математики, крім розвитку математичних понять у студентів формуються також навички використання інформаційних технологій, методів моделювання тощо, зокрема, застосування цих пакетів дає змогу:

1) краще засвоїти потрібний матеріал;

2) покроковий контроль студентом правильності та адекватності своїх розрахунків та перетворень;

3) засвоєння основ та принципів роботи з математичними пакетами, що в подальшому дасть змогу студентові застосовувати методи математичного та аналітичного моделювання різних явищ та процесів.

Для кращого засвоєння матеріалу доцільним є наступний підбір вправ.

$$1) y = \frac{1}{a^2 + bx^2}, y = x + \frac{1}{x}, y = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7);$$

$$2) y = \frac{\sin x}{x}, y = \frac{\cos x}{x}, y = \operatorname{arctg}(x^n + a), y = \ln(\operatorname{arctg}(x^2 + a));$$

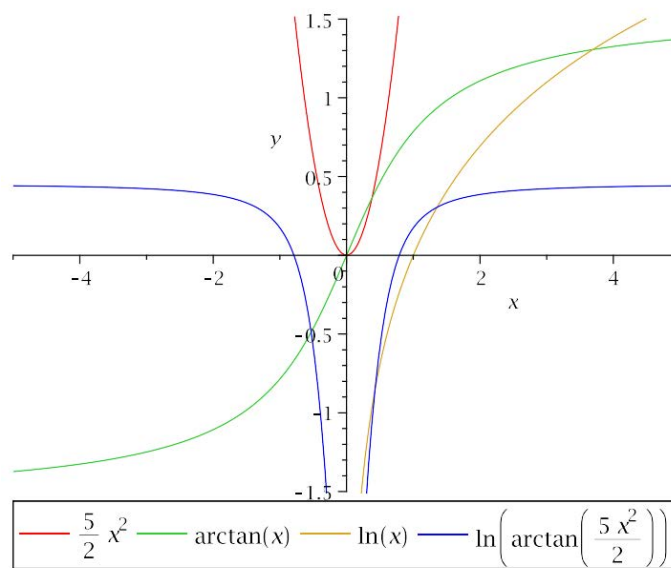
$$3) y = 1 - e^{-x^n}, y = ax^{n-1}e^{-bx^n}, n = 1, 2, \dots;$$

$$4) y = \frac{1}{b^2 x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{b^2}}, x > 0;$$

$$5) y = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Для прикладу розгляньмо побудову графіка функції  $y = \ln\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5x^2}{2}\right)\right)$ .

Відмітимо лише, що функція є парною та кожна із функцій  $y = \ln(x)$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  та  $y = \frac{5x^2}{2}$  є зростаючою на  $(0; \infty)$ , тому складена функція буде теж зростаючою на  $(0; \infty)$  та парною функцією. Для кращої побудови бажано встановити декілька контрольних точок.



Отже, вивчення теми перетворення та побудова графіків, крім вивчення, засвоєння та узагальнення математичних понять і фактів як елементарної, так і вищої математики дає змогу залучати студентів до вивчення методів комп'ютерної математики та математичного моделювання із застосуванням інформаційних технологій.

#### Список літератури

- Вирченко, Н. А., Ляшко, И. И. & Швецов, К. И. (1979). *Графики функций: Справочник*. Киев: Наукова думка.
- Корн, Г. & Корн, Т. (1974). *Справочник по математике*. Москва: Наука.
- Шунда, Н. М. (1983). *Функции та їх графіки*. Київ: Наукова думка.

# Про контроль точності квадратурних формул

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

Подання квадратурних формул у вигляді суми їх головної та залишкової частини дає змогу легко здійснювати контроль точності квадратурного процесу.

**Ключові слова:** формула, квадратура, точність, процес.

Відомі квадратурні формули прямокутників є двосторонніми, їх лінійна комбінація (а саме, півсума) є більш точна формула (формула трапецій), а певна їх лінійна комбінація (а саме, піврізниця) — головна частина їх похибки (залишкового члена). За її допомогою легко здійснюється контроль точності квадратурного процесу формули трапецій. За такою схемою, зрозуміло, можна здійснювати контроль точності квадратурного процесу на основі й інших двосторонніх квадратурних формул. Інакше кажучи, для контролю точності квадратурного процесу за допомогою квадратурної формули вищого порядку (як-от, формули трапецій) необхідно подати її у вигляді суми однієї з відповідних їй двосторонніх формул (як-от, однієї з формул прямокутників) та згаданої головної частини їх похибки. При цьому важливо, щоб порядок головної частини похибки був якомога ближчим до порядку похибки більш точної квадратурної формули (як-от у випадку формул прямокутників та формули трапецій), тобто щоб порядок похибки «вилки» не надто відрізнявся від порядку похибки більш точної квадратурної формули (щоб контроль точності квадратурного процесу не був надто грубим). Так, наприклад, у випадку формул Ньютона — Котеса для будь-якої з цих формул двосторонніми для неї являються пара формул, утворених з неї, відповідно, зануленням одного з її крайніх коефіцієнтів та подвоєнням іншого (за цим правилом з формули трапецій утворюються двосторонні для неї формули прямокутників) (Калайда, 2000). Але піврізниця таких двосторонніх формул для квадратурних формул (як півсуми двосторонніх) завжди дає «вилку» для похибки всього лише  $O(h^2)$ ,  $h$  — крок сітки вузлів (що прийнятно лише для формули трапецій). На прикладі формули трапецій та формули середніх прямокутників (вони двосторонні)

$$\hat{J} = h(f_0 + f_2), \check{J} = 2hf_1 \Rightarrow J - \hat{J} = -\frac{2h^3 f''(\bar{c})}{3}, J - \check{J} = \frac{h^3 f''(\tilde{c})}{3} \quad (1)$$

( $\bar{c}$ ,  $\tilde{c}$  — середні точки) покажемо, як з них побудувати більш точну квадратурну формулу (формулу Сімпсона) та більш точну «вилку», ніж утворена за вищезгаданим правилом з формули Сімпсона «вилка»

$$\frac{h(f_2 - f_0)}{3} = \frac{2h^2 f'(c)}{3}.$$

З (1) впливає формула Сімпсона, причому її можна подати у вигляді

$$\tilde{J} = J_3 = J_1 + \frac{h(f_0 - 2f_1 + f_2)}{3}, \quad J_1 = 2hf_1. \quad (2)$$

тобто у вигляді формули середніх прямокутників та її залишкового члена, за допомогою якого й можна контролювати точність формули середніх точок.

Відмітимо також, що сумарну формулу середніх прямокутників (із кроком  $H = 2h$ ) легко контролювати за допомогою доданка  $h^2(f_n' - f_0') / 6$ , у сумі з яким згадана формула еквівалентна сумарній формулі Сімпсона (таку ж властивість у літературі відмічено також і у формули трапецій). Наведемо, далі, ще одну формулу вищого порядку з такими ж властивостями.

Легко перевірити, що формули

$$\hat{J} = h(f_0 + f_2) - \frac{h^2(f_2' - f_0')}{3}, \quad \hat{r} = J - \hat{J} = \alpha h^5 f_0^{(IV)} + O(h^6), \quad \alpha = \frac{8}{180}, \quad (3)$$

$$\check{J} = 2hf_1 + \frac{h^2(f_1' - f_0')}{6}, \quad \check{r} = J - \check{J} = \beta h^5 f_0^{(IV)} + O(h^6), \quad \beta = \frac{7}{180}, \quad (4)$$

двосторонні (це формули четвертого порядку), а їх лінійна комбінація

$$\tilde{J} = \frac{\alpha \hat{J} + \beta \check{J}}{\alpha + \beta} = \frac{8\hat{J} + 7\check{J}}{15} = \frac{h}{15} (7f_0 + 16f_1 + 7f_2 - h(f_1' - f_0')), \quad (5)$$

причому

$$\tilde{r} = J - \tilde{J} = \frac{h^7}{4725} f_0^{(VI)} + O(h^8),$$

отже, є формула шостого порядку (сьомого локального) і, як бачимо, має ту ж відмічену вище властивість, що й її твірні формули (3), (4). Піврізниця цих формул

$$\delta = \frac{1}{2}(\hat{r} - \check{r}) = \frac{1}{2}(\check{J} - \hat{J}) = -\frac{h}{2}(f_0 - 2f_1 + f_2 - \frac{h}{2}(f_2' - f_0')) \quad (6)$$

може слугувати для контролю точності формули (5). Так, наприклад, для  $f(x) = \exp(x)$  при  $a = 0$ ,  $h = 0.3$  за формулою (5) дістаємо  $J$  з похибкою  $6.2 \cdot 10^{-8}$ ,  $\delta = 1.37 \cdot 10^{-4}$  (за формулою Сімпсона — з похибкою  $-3.7 \cdot 10^{-5}$ ).

Крім того, формулу (5) можна подати у вигляді

$$\tilde{J} = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{2h}{15} \left( f_0 - 2f_1 + f_2 - \frac{h}{2}(f_2' - f_0') \right),$$

тобто у вигляді суми формули Сімпсона та її доповнення до формули (5), яке, як бачимо, у 30 разів менше величини (6).

Як видно з рівності (2), формула Сімпсона є сума формули середніх прямокутників та її залишкового члена із заміною в ньому другої похідної підінтегральної функції формулою чисельного диференціювання для центрального вузла (у формулах Ейлера початок з формули трапецій, а залишкові члени подано приростами похідних відповідного порядку). Оскільки, далі, залишковий член формули Сімпсона має вигляд

$$r_3 = -\frac{h^5 f^{IV}(c)}{90},$$

то наступна квадратурна формула з непарним числом вузлів матиме вигляд

$$J_5 = J_3 + r_5, \quad r_5 = \frac{2h(-8f_0 + 32f_1 - 48f_2 + 32f_3 - 8f_4)}{45},$$

де  $h$  — крок сітки вузлів. Очевидно, що  $r_5$  напевне може слугувати контролем точності для формули Сімпсона (спочатку обчислювати другий доданок, а потім, якщо він достатньо малий, додати до нього перший доданок). Аналогічно, маючи квадратурну формулу  $J_{2k+1}$ , з неї легко виділити формулу  $J_{2k-1}$  (можливо й складену, кількаланкову) та її головну частину похибки  $r_{2k+1}$ .

Зауважмо, нарешті, що подання квадратурних формул у вигляді своє рідного многочлена Тейлора здійснено в формулах Ейлера — Маклорена (Калайда, 2000), що те саме, що інтегрувати її многочлен Тейлора, й практично не вигідно. Відмітимо, що інтегруванням частинами інтеграл подається у простішому, ніж формули Ейлера, вигляді квадратурної формули з кратними вузлами

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\Delta(x^{j+1}f^{(j)})}{(j+1)!} + R_n, \quad R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b x^n f^{(n)} dx$$

(при  $a = 0, b = h \Rightarrow$

$$J(f) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{h^{j+1} f^{(j)}(h)}{(j+1)!}.$$

Звідси разом з рівністю

$$J(f) = \sum_{j=0}^{\infty} h^{j+1} \frac{f^{(j)}(0)}{(j+1)!}$$

дістаємо рівність (півсуму цих рівностей)

$$J(f) = \frac{h(f_0 + f_1)}{2!} - \frac{0.5h^2(f'_1 - f'_0)}{2!} + \frac{h^3(f''_1 + f''_0)}{3!} - \frac{h^4(f'''_1 - f'''_0)}{4!} + \dots,$$

а також чудову рівність (різницю цих рівностей, ряд з нульовою сумою)

$$0 = h(f_1 - f_0) - \frac{h^2(f'_1 + f'_0)}{2!} + \frac{h^3(f''_1 - f''_0)}{3!} - \frac{h^4(f'''_1 + f'''_0)}{4!} + \dots f_1'''$$

Замінивши в першій із цих рівностей похідні відповідними формулами чисельного диференціювання, дістаємо відповідний клас багатоточкових квадратурних формул із простими вузлами.

### Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: РВЦ «Київський університет».

# Про дві модифікації методу квадратування знаходження нулів алгебричних многочленів

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

На основі аналізу системи рівнянь Ейткена пропонується два способи прискорення процесу квадратування знаходження нулів алгебричних многочленів з дійсними додатними нулями.

**Ключові слова:** алгебричний, многочлен, нулі, квадратування.

З системи рівнянь Ейткена

$$S_i(x_1, \dots, x_n) = (-1)^i \frac{a_i}{a_0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де  $S_i$  — симетричні функції нулів  $x_i$  алгебричних многочленів

$$P_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0, \quad (2)$$

впливає (та й насправді спостерігається), що під час знаходження нулів з дійсними додатними нулями з найменшою точністю знаходяться саме найбільший ( $x_1$ ) та найменший ( $x_n$ ) їх нулі, причому найбільший нуль — з від'ємною (з

надлишком,  $x_1 \leq -\frac{a_1}{a_0}$ ), найменший з додатною (з недостатчею,  $x_n \geq -\frac{a_n}{a_{n-1}}$ )

похибками. Це приводить до певного сповільнення процесу квадратування. Тут пропонується два способи зменшення похибки наближень згаданих нулів, а отже, відповідно, й до прискорення процесу квадратування. Принагідно зауважмо, що оскільки межі нулів многочленів відомі, то їх легко змістити у праву півплощину, причому, до того ж так, щоб усі вони перевищували одиницю. При цьому зникатиме також проблема рівних за модулем нулів. Проблема ж кратних нулів та їх кратності вирішується шляхом виділення з многочлена (2) многочлена лише з простими нулями (Кострикин, 1999, Калайда, 2018), а після їх знаходження кратність кожного з них теж легко знаходиться (Калайда, 2018).

**Перший спосіб.** Оскільки

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2S_1(x_1, \dots, x_n),$$

то

$$x_1 \approx \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - (-1)^{n-2} \frac{2a_2}{a_0}}, \quad (3)$$

а з такої ж рівності для зворотного до (2) рівняння

$$Q_n(y) = a_n y^n + \dots + a_1 y + a_0, \quad y = x^{-1},$$

$$(x_1^{-1} + \dots + x_n^{-1})^2 = (x_1^{-2} + \dots + x_n^{-2}) + 2S_1(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}),$$

впливає, що

$$x_n \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - \frac{2a_{n-2}}{a_n}}}. \quad (4)$$

Наближення решти нулів обчислюють за відповідними методу квадратування формулами

$$x_i \approx -\frac{a_i}{a_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Звернімо увагу, що формули (5) (у тому числі й при  $i = 1, i = n$ ) свідчать про те, що наближення нулів многочленів (2) насправді визначають з лінійних рівнянь

$$a_{i-1}x + a_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

тобто з послідовних двочленних відтинків многочлена. Це можна пояснити тим, що многочлен (2) можна подати у вигляді (після ділення його на  $x^{n-1}$ )

$$P_n(x) = a_0x + a_1 + x^{-(n-1)}(\dots) = a_0x + a_1 + O(x^{-(n-1)})$$

і наближення найбільшого нуля природно знайти, прирівнявши до нуля головну його частину  $a_0x + a_1$ , тобто з першого рівняння (6). Аналогічно й для наближення решти нулів. Цим обґрунтовуються формули (5), добуті з системи (1) (інакше, звідки системі (1) відомо, що нулі  $x_i$  упорядковані в порядку їх зменшення).

### Приклад 1. Розглядаємо рівняння

$$P_4(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) = x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384 = 0.$$

За формулами (5) дістаємо:

$$x_1 \approx 20 > 8, \quad x_2 \approx 7 > 6, \quad x_3 \approx \frac{20}{7} \approx 3 < 4, \quad x_4 \approx \frac{384}{40} = 0.906 < 2.$$

За формулами ж (3), (4) маємо:  $x_1 \approx 11 > 8, x_4 \approx 1.874 < 2$ .

**Другий спосіб.** Оскільки, як було сказано, наближення середніх нулів, обчислюваних за формулами (5), точніші за наближення крайніх нулів, обчислюваних за тими ж формулами при  $i = 1, i = n$ , то більш точними наближеннями крайніх нулів будуть, з врахуванням формул (5), наближення

$$x_1 \approx (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_0} - \sum_{j=2}^{n-k} \frac{a_j}{a_{j-1}}, \quad k \geq 0, \quad x_n \approx \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_n} - \sum_{j=2}^{n-l} \frac{a_{n-j}}{a_{n-1-j}}}, \quad l \geq 0. \quad (7)$$

Решта нулів теж визначаємо за формулами (5).

**Приклад 2.** Розглядаємо рівняння

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)(x - 10) = \\ &= x^5 - 26x^4 + 246x^3 - 1036x^2 + 1865x - 1050 = 0. \end{aligned}$$

За формулами (5) дістаємо:

$$x_1 \approx 26 > 10, x_2 \approx 9.46 > 7, x_3 \approx 4.21 < 5, x_4 \approx 1.8 < 3, x_5 \approx 0.56 < 1.$$

За формулами ж (7) маємо:

$$x_1 \approx 9.97 \approx 10 = x_1, x_5 \approx 0.99 \approx 1 = x_5.$$

**Список літератури**

- Калайда, О. Ф. (2018). Про алгебричні многочлени. Статті до другого випуску збірника МСТУ. Київ: КПІ, 77—83. <http://matan.kpi.ua/uk/mvstu6.html>
- Кострикин, А. И. (1999). *Введение в алгебру* (Ч. 1). Москва: Физматлит.



# Про один спосіб наближеного знаходження квадратур

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei\_kalaida@comcast.net

За допомогою інтегрально-дискретної квадратурної формули автора для добутку функцій застосуванням її у зворотному порядку будуються автономні квадратурні формули, еквівалентні формулі трапецій та формулі Сімпсона.

**Ключові слова:** добуток, функція, квадратура, формула.

Розгляньмо тотожність (Калайда, 1968)

$$J(fg) = \int_a^{a+x} f(s)g(s)ds = \frac{1}{x} J(f)J(g) + \int_a^{a+x} (f(s) - x^{-1}J(f))(g(s) - x^{-1}J(g))ds \quad (1)$$

та асимптотичні і відповідні наближені рівності (при  $f_{+x} = O(x)$ ,  $g_{+x} = O(x)$ )

$$J_{+x}fg = xJ(f)J(g) + O(x^3) \Rightarrow J(fg) \approx xJ(f)J(g), \quad (2)$$

$$J_{+x}fg = xJ(f)J(g) + x \frac{\Delta f \Delta g}{12} + O(x^5) \Rightarrow J(fg) \approx xJ(f)J(g) + x \frac{\Delta f \Delta g}{12} \quad (3)$$

$(\Delta q = q(a+x) - q(a)).$

Як бачимо, другий доданок в (1) є точна похибка  $O(x^3)$ , в (2). Зокрема, з (1) при  $f(x) \equiv g(x)$ ,  $x > 0$  маємо цікаву нерівність

$$xJ_{+x}f^2 \geq (J(f))^2.$$

За допомогою наближених рівностей (2), (3) можна знаходити наближення інтегралів  $J_{+x}f$ . Для цього, очевидно, досить у цих рівностях задати функцію  $g$  так, щоб були відомими їх складові  $J(fg)$ ,  $J(g)$ . Серед багатьох можливостей для цього першою, найпростішою, є та, коли  $g = f'$ . Тоді рівності (2), (3) набувають, відповідно, вигляду

$$x \frac{\Delta f^2}{2} = J(f)\Delta f + O(x^4), \quad x \frac{\Delta f^2}{2} = \Delta f \left( J(f) + x^2 \frac{\Delta f'}{12} \right) + O(x^6). \quad (4)$$

Отже, з (4) з похибкою, відповідно,  $O(x^3)$  та  $O(x^5)$  дістаємо наближення шуканого інтеграла  $J(f)$  у вигляді двоточкових (автономних) квадратурних формул (за порядком точності — формул типу трапецій та типу Сімпсона)

$$J(f) \approx x \frac{\Delta f^2}{2\Delta f} = x \frac{f(a+x) + f(a)}{2} \quad (5)$$

(як бачимо, перша формула виявилась формулою трапецій).

$$J(f) \approx \frac{x}{2} \left( f(a+x) + f(a) - x \frac{\Delta f'}{6} \right). \quad (5')$$

**Приклад 1.** При  $x \mapsto f(x) = \exp(x)$ ,  $a = 0 \Rightarrow [a, a + x] = [0, x]$  рівності (5), (5') набувають вигляду

$$J(f) = (e^x - 1) \approx x \frac{e^x + 1}{2}, J(f) \approx \frac{x}{2} \left( (e^x + 1) - x \frac{(e^x - 1)}{6} \right)$$

Так, при  $x = 0.1$  за цими рівностями дістаємо  $J \uparrow f$ , з похибками, відповідно,  $\delta \approx -43^{07}$ ,  $\delta_1 \approx 1,5 \cdot 10^{-8}$  (за формулою Сімпсона — у чотири рази менша).

Загальніше, у рівностях (2), (3), замість  $f$ , можна покласти  $f^k$ ,  $k \neq 0$ , і тоді, замість тотожності (1), матимемо тотожності (відповідно, при  $k \neq -1$ ,  $k = -1$ )

$$J(ff^{k-1}f') = \frac{\Delta f^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{x} J(f) \frac{\Delta f^k}{k} + \int_a^{a+x} \left( f(s) - \frac{J(f)}{x} \right) \left( f^{k-1}(s)f'(s) - \frac{\Delta(f^{k-1}f')}{x} \right) ds,$$

$$\int_a^{a+x} f^{-1}(s)f'(s)ds = \Delta \ln f = \frac{1}{x} J(f)\Delta(f^{-1}) + \int_a^{a+x} \left( f^{-1}(s) - \frac{J(f^{-1})}{x} \right) \left( f'(s) - \frac{\Delta f}{x} \right) ds,$$

а отже, і рівності виду (4) та наближення виду (5), (5') шуканого інтеграла  $J \uparrow f$ .  
Так, наприклад, при  $k \neq -1$  рівність (5) матиме вигляд

$$J \uparrow f \approx x \frac{\Delta f^{k+1}}{(k+1)\Delta f},$$

(узагальнення формули трапецій), а рівність (5') — вигляд

$$J(f) \approx x \left( \frac{\Delta f^{k+1}}{k+1} - x \frac{\Delta f}{12} \right).$$

Друга можливість наближеного знаходження інтегралів  $J \uparrow f$ , у вигляді формул виду (4) є суперпозиція підінтегральної функції в табличних інтегралах, тобто, коли  $J(fg) = J(f(g)g')$ . Тоді тотожність (1) набуває вигляду

$$J(f(g)g') \equiv \int_a^{a+x} f(g(s))g'(s)ds = \frac{4}{x} J(f(g))\Delta g + \int_a^{a+x} (f(g(s)) - x^{-1}J(f(g)))(g'(s) - x^{-1}\Delta g)ds. \quad (6)$$

Ліва частина цієї тотожності є табличний інтеграл, а отже, відома.

Як і з (1), з тотожності (6) дістаємо асимптотичні рівності

$$J(f(g)g') = xJ(f(g))\Delta g + O(x^3), J(f(g)) = xJ(f(g))\Delta g + x \frac{\Delta f(g)\Delta g'}{12} + O(x^5),$$

звідки, відповідно, з точністю  $O(x^3)$ ,  $O(x^5)$  маємо наближення інтеграла

$$J(f(g)) \approx x \frac{J(f(g)g')}{\Delta g}, \quad J(f(g)) \approx \frac{x}{\Delta g} \left( J(f(g)g') - x \frac{\Delta f(g)\Delta g'}{12} \right). \quad (7)$$

**Приклад 2.** При  $x \mapsto f(x) = \exp(x^2)$ ,  $a = 0 \Rightarrow [a, a + x] = [0, x]$  рівності (7) набувають вигляду

$$J(f(g)) \approx \frac{\exp(x^2) - 1}{x}, \quad J(f(g)) \approx \frac{\exp(x^2) - 1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right).$$

Так, наприклад, при  $x = 0,5$  за цими формулами маємо наближено шуканий інтеграл відповідно, з похибками  $\delta \approx 216 \cdot 43^{05}$ ,  $\delta_1 \approx 6 \cdot 10^{-4}$  (за формулою трапецій  $\delta \approx 2.6 \cdot 10^{-2}$ , за формулою Сімпсона  $\delta_1 \approx 10^{-4}$ ).

#### Список літератури

Калайда, А. Ф. (1968). Об одной квадратурной формуле. *Вычислительная и прикладная математика*, 6, 131—136. Киев: Вища школа.

# Про рекурентні автономні алгоритми чисельного диференціювання

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

За допомогою автономних (двоточкових) формул автора чисельного інтегрування, еквівалентних за порядком формулі Сімпсона, шляхом їх зворотного застосування будуються автономні рекурентні формули чисельного диференціювання високого порядку.

**Ключові слова:** формули, чисельне, інтегрування, диференціювання, рекурентні.

Як відомо, доточкові, лінійні відносно значень диференційованої функції, формули чисельного диференціювання мають похибку  $O(h)$ ,  $h$  — крок сітки вузлів. За допомогою формул Сімпсона шляхом їх зворотного застосування побудовано рекурентні трьохточкові формули чисельного диференціювання з похибкою  $O(h^4)$  (Калайда, 2014, 2015). Тут за допомогою зворотного застосування двоточної квадратурної формули (Калайда, 1968), еквівалентної формулі Сімпсона, будуються рекурентні двоточкові (автономні) формули чисельного диференціювання з похибкою  $O(h^3)$ .

Розгляньмо квадратурну формулу (Калайда, 1968)

$$J(fg) = \int_a^{a+h} f(x)g(x)dx = \frac{1}{h} J(f)J(g) + \frac{h}{12} \Delta f \Delta g + O(h^5), \quad (1)$$
$$\Delta q = q(a+h) - q(a).$$

З (1) випливають формули (при заміні  $f, g$ , відповідно, на  $(f)^k = f^k, f'$ )

$$\int_a^{a+h} f^k(x)f'(x)dx = \frac{\Delta f^{k+1}}{k+1} = \frac{\Delta f^k}{kh} J(f) + \frac{h}{12} \Delta f \Delta(f^{k-1}f') + O(h^5), \quad (2)$$
$$k \neq 0, -1,$$

$$\int_a^{a+h} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \Delta \ln f = -\frac{1}{h} J(f) \Delta \left( \frac{1}{f} \right) + \frac{h}{12} \Delta f \Delta \left( \frac{f'}{f^2} \right) + O(h^5), \quad k = -1. \quad (2')$$

З (1) також випливає рівність (можливі і багато інших подібних рівностей)

$$J \left( \frac{ff'}{1+f^2} \right) = 0.5 \Delta \ln(1+f^2) = J(f) \frac{\Delta(\arctg f)}{h} + \frac{h}{12} \Delta f \Delta \left( \frac{f'}{1+f^2} \right) + O(h^5).$$

Для побудови рекурентних формул чисельного диференціювання для похідних першого порядку в цих формулах необхідно задати  $J(f)$  хоча б з похибкою, що фігурує в рівностях (1), (2), (2'). Так, наприклад, при  $k = 1$  з (2)

при заміні  $J(f) = J$  формулою Сімпсона маємо (правда, трьохточкову) формулу з похибкою  $O(h^3)$

$$f'_1 = f'_0 + 4 \frac{f_0 - 2f_{1/2} + f_1}{h} + h^3 \frac{f_0^{IV}}{48} + O(h^4).$$

Для побудови двоточкових формул виключимо з (2) при  $k \neq -1, l \neq -1$  інтеграл  $J(f) = J$ . В результаті матимемо рекурентну рівність (для рекурентності в ній слід замінити 0 на  $n$ , а 1, відповідно, на  $n + 1$ )

$$f'_1 = \alpha_{01} f'_0 + \beta_{01}, \quad (3)$$

де

$$\alpha_{01} = \frac{k \Delta f^l f_0^{k-1} - l \Delta f^k f_0^{l-1}}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = (k \Delta f^l f_1^{k-1} - l \Delta f^k f_1^{l-1}),$$

$$\beta_{01} = 12 \frac{\Delta f^k \Delta f^l}{\gamma_1} \left( \frac{k \Delta f^{k+1} \Delta f^l}{k+1} - l \frac{\Delta f^{l+1} \Delta f^k}{l+1} \right).$$

Однак ця рівність може виявитись слабко обумовленою і в результаті формула для першої похідної може мати нижчий порядок похибки. Так, при  $k = 2, l = 1$  з (3) маємо формулу

$$f'_1 = -f'_0 + 2 \frac{f_1 - f_0}{h} = f'_0 + h f''_0 + h^2 \frac{f'''_0}{3} + \dots \Rightarrow r_1 = h^2 f \frac{f'''_0}{6} + \dots$$

з похибкою лише  $O(h^2)$ . Що ж стосується формул чисельного диференціювання для похідних вищого порядку, то проблем з інтегралом немає, оскільки

$$J(f^{(m)}) = \Delta f^{(m-1)}.$$

Тому, наприклад, з рівності (2), замінивши в ній  $f^k$  на  $f^{(k)}$ ,  $f'$  на  $f^{(k+1)}$ , дістанемо рекурентну формулу ( $k \geq 1$ )

$$f_1^{(k+1)} = f_0^{(k+1)} + \frac{12}{h} \left( \frac{f_0^{(k)} + f_1^{(k)}}{2} - \frac{f_1^{(k-1)} - f_0^{(k-1)}}{h} \right) + O(h^3) \quad (4)$$

(рекурентну як за вузлами, так і за порядком похідної). Розвинення (4) за степенями  $h$  є

$$f_1^{(k+1)} = f_0^{(k+1)} + h f_0^{(k+2)} + h^2 \frac{f_0^{(k+3)}}{2} + 3h^3 \frac{f_0^{(k+4)}}{20} + \dots \Rightarrow r_1 = h^3 \frac{f_0^{(k+4)}}{60} + \dots$$

Проілюструємо формули (3), (4) на прикладах.

**Приклад 1.** Для  $f(x) = \exp(x)$  при  $a = 0, h = 0.1$  з (3) при  $k = 2, l = 1$

для першої похідної з (3) маємо  $f'_1 \approx 1.10341836, r_1 = 1.75 \cdot 10^{-3}$ , тоді як за

звичайною двоточною формулою  $f'_1 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}$  похибка  $r_1 \approx 5.3 \cdot 10^{-2}$ .

**Приклад 2.** Для  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  при  $a = 0, h = 0.1$  з (4) для другої похідної маємо (точне значення  $f_1'' = 1.5026236\dots$ )  $f_1'' \approx 1.50413228, r_1 = -1.5 \cdot 10^{-3}$ , тоді як за звичайною двоточною формулою

$$f_1'' \approx \frac{f_1' - f_0'}{h}$$

дістаємо наближення з похибкою всього  $-2.3 \cdot 10^{-1}$ .

### Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1968). Об одной квадратурной формуле. *Вычислительная и прикладная математика*, 6, 131—136. Киев: Вища школа.
- Калайда, О. Ф. (2014). Чисельне диференціювання за допомогою квадратурних формул. У *Матеріалах XV Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука, Київ* (Т. 4, с. 117). Київ: НТУУ «КПІ».
- Калайда, О. Ф. (2015). Двосторонні алгоритми чисельного диференціювання за допомогою двосторонніх квадратурних формул. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука*. (Т. 2, с. 106—110). Київ: НТУУ «КПІ».

# Про один автономний квадратурний метод високого порядку розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
aleksei\_kalaida@comcast.net

За допомогою інтегрально-дискретної двоточної квадратурної формули автора будується автономний квадратурний метод четвертого порядку розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, що на два порядки точніше відомого автономного методу, оснований на формулі трапецій.

**Ключові слова:** інтегральне, рівняння, формула, метод, порядок.

Розглядається рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds, x \in [a, b], \quad (1)$$

з достатньо гладкими вільним членом та ядром і для його покрокового чисельного розв'язування застосовується квадратурна формула (Калайда, 1968)

$$\int_a^x f(s)g(s)ds = \frac{1}{h} \int_a^x f(s)ds \int_a^x g(s)ds + \frac{h}{12} \Delta f \Delta g + O(h^5), h = x - a, \quad (2)$$

тобто формула четвертого (локального п'ятого) порядку.

Застосувавши формулу (2) для наближення інтеграла в (1), дістанемо інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{h} \int_a^x K(x, s)ds \int_a^x \varphi(s)ds + \frac{h}{12} \Delta K \Delta \varphi + O(h^5).$$

вигляду (1) з одночленним виродженим ядром, а отже, еквівалентного задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$\Phi'(x) \approx q(x) + p(x)\Phi(x), \Phi(x) = \int_a^x \varphi(s)ds \Rightarrow \Phi(a) = 0,$$

де

$$q(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \left( f(x) - f(a) \frac{h\Delta K}{12} \right), p(x) = \frac{1}{h\gamma(x)} \int_a^x K(x, s)ds,$$

$$\gamma(x) = 1 - \frac{h}{12} \Delta K, \Delta K = K(x, x) - K(x, a).$$

Тому

$$\Phi(x) \approx \exp\left(\int_a^x p(t)dt\right) \int_a^x q(s) \exp\left(-\int_a^s p(t)dt\right) ds, \quad (3)$$

а отже, з похибкою  $O(h^5)$  маємо

$$\varphi(x) \approx q(x) + p(x)\Phi(x). \quad (4)$$

Далі покроково діємо за формулами (2)—(4). Для цього рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s)\varphi(s)ds + \int_{x_n}^x K(x, s)\varphi(s)ds, \quad x_0 = a,$$

і до кожного з інтегралів під знаком суми застосовуємо формулу (2), а до останнього доданка — формули (3), (4).

#### Список літератури

Калайда, А. Ф. (1968). Об одной квадратурной формуле. *Вычислительная и прикладная математика*, 6, 131—136. Киев: Вища школа.



# Псіхалага-педагагічныя асаблівасці матэматычнай адукацыі студэнтаў тэхнічных універсітэтаў

Л. І. Майсеня

*Інстытут інфармацыйных тэхналогій Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта інфарматыкі і радыёэлектронікі, Мінск, Рэспубліка Беларусь  
maisenia@tut.by*

Для сучаснага перыяду характэрным з'яўляецца істотнае пашырэнне колькасці навучэнцаў на ўзроўні вышэйшай адукацыі, у тым ліку і ў постсавецкіх краінах. У Беларусі адпаведная лічба складае каля 70% маладых людзей. Росту гэтага паказніка спрыяе таксама адладжаная нарматыўна і арганізацыйна сістэма непарыўнай прафесійнай адукацыі. Выпускнікі ўсіх каледжаў (гэта ўстановы сярэдняй прафесійнай адукацыі) маюць магчымасць вучыцца ва ўніверсітэтах у скарачаныя тэрміны навучання (пасля здачы двух прафесійна скіраваных уступных экзаменаў). Трэба адзначыць, што дадзеная адукацыйная траекторыя з'яўляецца надзвычай папулярнай у беларускім грамадстве: амаль палова выпускнікоў базавай (пасля 9 класаў) і поўнай сярэдняй агульнаадукацыйнай школы працягваюць сваё навучанне ва ўстановах пачатковай і сярэдняй прафесійнай адукацыі, каб затым прадоўжыць вучыцца ва ўніверсітэтах. Разам з тым масавае навучанне і даступнасць паступлення прыводзяць да таго, што тэхнічныя ўніверсітэты папаўняюць студэнты з недастатковым веданнем школьнай (элементарнай) матэматыкі і, датаго ж, з недастатковай навучальнасцю матэматыцы. Аналіз навуковаметадычных даследаванняў і знаёмства з рэальнай педагагічнай практыкай паказваюць, што такая тэндэнцыя характэрна не толькі для Беларусі, але і ў глабальным маштабе. Найбольш выразна яна праяўляецца ў новых краінах, якія праходзяць актыўную фазу сацыяльнага развіцця і станаўлення сістэм адукацыі. Такое становішча цягне за сабой нестабільнасць базавых механізмаў для фармавання ў маладых людзей матывацыі не толькі на атрыманне вышэйшай адукацыі якімсьці чынам, але і на аб'ектыўна якасны вынік такой адукацыі. Спынімся на асноўных спецыфічных асаблівасцях матэматычнай адукацыі (як працэсу) студэнтаў тэхнічных універсітэтаў, найперш, беларускіх.

Матэматыка, як дысцыпліна, мае вялікае значэнне для фармавання адукацыйнай кампетэнтнасці студэнтаў тэхнічных універсітэтаў, асабліва па навукаёмістых спецыяльнасцях. Яе ґрунтоўнае засваенне ёсць аснова для фармавання прафесійнай кампетэнтнасці будучых спецыялістаў. Калі ўлічыць, што матэматыка складаецца, перш за ўсё, з абстрактнай інфармацыі ў строгай логіцы, то праблема якаснай матэматычнай адукацыі сучаснага маладога пакалення з'яўляецца складанай. Да цяжкасцяў «на ўваходзе» ў тэхнічны ўніверсітэт варта аднесці, найперш, недастаткова сістэмную матэматычную падрыхтоўку выпускнікоў устаноў агульнай сярэдняй адукацыі. У лепшым

выпадку адзначаецца сфармаванасць сукупнасці разрозненых матэматычных ведаў са школьнага курсу. У прыватнасці, масава не сфармаваныя паняцці функцыі, узаемна зваротных аперацый і інш., адзначаецца няўменне развязаць дыскрэтныя задачы. Паколькі ў змест матэматычнай адукацыі беларускіх школьнікаў да нядаўняга часу не ўваходзіла тэорыя імавернасцяў, універсітэты папаўнялі абітурыенты без адпаведнай асновы да імавернаснага мыслення (у апошніх праграмах элементы гэтай тэорыі прадугледжаны). У якасці неспрыяльнага моманту патрэбна адзначыць, што ў змесце навучання матэматыцы на ўзроўні агульнай сярэдняй адукацыі доказная аснова сцверджанняў, формул і тэарэм ўсё больш і больш спіскаецца, а патрабаванні ўмець даказваць тэарэмы, фактычна, ужо не прад'яўляюцца школьнікам. Гэта прывяло да таго, што ў тэхнічныя ўніверсітэты прыходзяць абітурыенты, якія не ўмеюць весці дэдукцыйныя развагі.

Прычына адсутнасці грунтоўных матэматычных ведаў палягае не толькі ў тым, што змест вучэбнага матэрыялу звужаецца і спрашчаецца, але і ў тым, што назіраецца змяненне характарыстык мыслення маладых людзей і іх разумовай дзейнасці. Менавіта гэта вымушае стваральнікаў праграм і падручнікаў для ўзроўня сярэдняй адукацыі пераглядаць змест. Узнікае заганняе кола: ступень развіцця разумовай дзейнасці дзяцей, падлеткаў, моладзі не дазваляе праектаваць патрэбны ўзровень матэматычнай адукацыі, а рэалізаваны ўзровень матэматычнай адукацыі не прыводзіць да актуальнага разумовага развіцця.

Характэрнай асаблівасцю часу з'яўляецца тое, што для большасці маладых людзей школьнага і студэнцкага ўзросту вядучай дзейнасцю з'яўляецца актыўнае і працяглае па часе скарыстанне кампутара, мабільнага тэлефона, Інтэрнэта ў паўсядзённым жыцці. Як адзначаюць многія даследчыкі, гэта часта прыводзіць да сыходу ад рэальнасці, тармозіць развіццё аналітычных здольнасцяў і доўгачасовай памяці чалавека. У такім выпадку фармуецца «мазаічнае», «кліпавае» мысленне (па А. Фрыдману), якое характарызуецца патрэбай кароткатэрміновага дзеяння, яго нагляднай асновай і яго абавязковай завершанасцю. Час ўстойлівай увагі сучасных маладых людзей істотна скараціўся. Вядома, што ўстойлівасць увагі звязваецца са здольнасцю асобы самастойна падтрымліваць увагу на больш працяглых часавых прамежках.

Як адзначаюць многія псіхолагі і педагогі, негатыўныя наступствы шырокай кампутарызацыі (перш за ўсё, узмоцненае імкненне моладзі да гульнявой дзейнасці) прыводзіць да таго, што шмат студэнтаў сёння (у традыцыйнай сістэме навучання) слаба матываваныя да вучэбна-пазнавальнай дзейнасці. Яны не гатовыя працаваць самастойна, у іх слаба прысутнічае (як з'ява) дзейсная пазааўдыторная самападрыхтоўка. Гэта, у сваю чаргу, вядзе да зніжэння іх здольнасці засвойваць новы матэрыял, а значыць, і якасць такога навучання зніжаецца. Тыповым памкненнем пераважнай большасці маладых людзей з'яўляецца засваенне «гатовай» інфармацыі, а не атрыманне яе ў выніку руціннай самастойнай пазнавальнай дзейнасці. Больш за тое, педагогічны вопыт паказвае, што у студэнтаў-першакурснікаў адзначаецца недастатковая

інфармацыйная кампетэнтнасць для забяспечання сябе базавымі ведамі па матэматыцы з даведнікавай літаратуры. Становіцца мэтазгодным вучыць іх гэтаму, для чаго намі была распрацавана серыя даведнікаў па матэматыцы (элементарнай і вышэйшай) для паспяховай рэалізацыі навучальнага працэсу ў Беларускім дзяржаўным універсітэце інфарматыкі і радыёэлектронікі (дзе працуе аўтар гэтага артыкула).

Праблема несфармаванай здольнасці да дзейнасці, асабліва да самастойнай дзейнасці і самаадукацыі, з'яўляецца, бадай, самай істотнай цяжкасцю, якую даводзіцца пераадольваць падчас навучання студэнтаў ва ўніверсітэтах. Як падкрэслівае Анісімаў (2002), адукацыя не можа цяпер арыентавацца на засваенне ведаў і набыццё ўменняў безадносна да засваення спосабаў дзейнасці і мыслення, камунікацыі і зносін, да набыцця здольнасцяў саманавучання, самаарганізацыі і самаразвіцця. Таму асабліва актуальнай становіцца рэалізацыя дзейнаснага падыходу у методыцы навучання матэматыцы.

Сманцар (1995) аргументуе, што адной з прычын недавальняючай працы сярэдняй і вышэйшай школы з'яўляецца адсутнасць цэласнага сістэмнага падыходу да рэалізацыі пераемнасці ў працэсе навучання. Прымаючы яго аргументацыю, пагаджаемся, што змястоўна-дзейнасны кампанент пераемнасці забяспечвае пераемнасць у змесце навучання і ў дзейнасці навучэнцаў па авалоданні матэматычным зместам. Кампанент пераемнасці абумоўліваецца матывацыйна-мэтавым кампанентам. Заслугоўвае ўвагі вопыт пераадолення разрыву паміж сфармаванымі школьнымі матэматычнымі ведамі і ведамі, запатрабаванымі пры навучанні матэматыцы ў Нацыянальным тэхнічным універсітэце Украіны «КПІ». У ліку эфектыўных метадычных прыёмаў можна назваць, у прыватнасці, арганізацыю індывідуальных кантрольных работ па элементарнай матэматыцы, для чаго распрацаваны спецыяльны дапаможнік (Алексеева та ін., 2011). Такі падыход, безумоўна, спрыяе не толькі актуалізацыі папярэдніх ведаў, але і развіццю навыкаў самастойнай вучэбнай дзейнасці.

Да зыходных цяжкасцяў варта аднесці таксама пэўную «сацыяльную інфантальнасць» і больш позняе псіхалагічнае сталенне выпускнікоў школ, абітурыентаў і студэнтаў універсітэтаў. Забяспечанасць і гарантаванасць многіх дабротаў, што атрымліваюцца ў сям'і і грамадстве, сфармаваная ментальнасць постсавецкага грамадства прыводзяць у масавым парадку да адсутнасці ўстойлівай матывацыі студэнтаў да атрымання максімальнай якасці матэматычнай адукацыі. Такім чынам, акрамя метадычных праблем, звязаных з фармаваннем матэматычных ведаў студэнтаў, актуальнай з'яўляецца праблема фармавання каштоўнасна-матывацыйнай кампаненты і якасцяў мыслення, неабходных для паспяховай адукацыі і будучай прафесійнай дзейнасці. Дасягненню такой мэты садзейнічае рэалізацыя матэматычнай адукацыі паводле прынцыпу кантэкстнасці (пра гэта шэраг прац І. Ю. Мацкевіч, у прыватнасці Мацкевіч (2017)).

Якасць матэматычнай адукацыі кожнага студэнта істотна залежыць ад яго

разумовага развіцця ў цэлым і ў дачыненні да матэматыкі ў прыватнасці. Адносна паняцця разумовае развіццё ў псіхалогіі вылучаны два яго ўзроўні: 1) фонд дзейных (засвоеных) ведаў або ўзровень навучанасці; 2) навучальнасць як здольнасць да набыцця ведаў (Н. А. Мянчынская і З. І. Калмыкова). Выяўлена таксама заканамернасць ўзаемадзеяння (сувязь) паміж навучальнасцю і разумовым развіццём, а таксама розныя ступені навучальнасці (ад нізкай да высокай). Аб'ектыўная цяжкасць у арганізацыі якаснай матэматычнай адукацыі студэнтаў тэхнічных універсітэтаў складаецца ў шырокім спектры ступеняў навучанасці і навучальнасці матэматыцы кантынгенту студэнтаў, ад чаго залежыць прадукцыйнасць выкладчыцкай і вучэбнай дзейнасці. Гэта праяўляецца ў кожнай студэнцкай групе.

Недахоп сфармаваных дзейных ведаў у студэнтаў (навучанасць) з'яўляецца галоўнай перашкодай для засваення новага матэрыялу. Ва ўмовах лагізацыі зместу матэматычных дысцыплін універсітэта веданне новай тэорыі – гэта заўсёды ўзаемасувязь з папярэднімі ведамі. Спробы проста запомніць новую матэматычную інфармацыю не прыводзяць да яе разумення. Традыцыйныя тэхналогіі навучання (дакладней, групавыя) разлічаны на сярэднестатыстычнага студэнта, без уліку яго схільнасцяў і псіхалагічнай гатоўнасці да засваення матэматыкі. Такое навучанне не ў поўнай меры рэалізуе прынцып асобна-арыентаванай адукацыі для найбольш поўнага раскрыцця і развіцця патэнцыйных, творчых магчымасцяў кожнага студэнта. Каб пазбегнуць названых хібаў, трэба скарыстоўваць прадукцыйныя метады і тэхналогіі навучання (метады праектаў, кантэкстнасць зместу, дзейнасны падыход, модульна-рэйтывавую сістэму, рознаўзроўневы змест матэматыкі і г. д.). Больш падрабязна праблема развіцця матэматычнай адукацыі студэнтаў тэхнічных універсітэтаў даследуецца ў манаграфіі Майсена (2017).

### Спіс літаратуры

- Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., & Федорова, Л. Б. (2011). *Элементарна матэматыка: Практикум*. Київ : НТУУ «КПІ».
- Анисимов, О. С. (2002). *Педагогическая акмеология: общая и управленческая*. Минск: Технопринт.
- Майсена, Л. И. (2017). *Развитие математического образования студентов технических университетов*. Минск: БГУИР. <https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/29068>
- Мацкевич, И. Ю. (2017). Особенности проектирования методической системы контекстного обучения математике в условиях непрерывности образования. *Вышэйшая школа*, (2), 48—51. <http://nihe.bsu.by/images/2016/2017-2-2.pdf>
- Сманцер, А. П. (1995). *Педагогические основы преемственности в обучении школьников и студентов: теория и практика*. Минск: НИЭИ М-ва эканомікі Респ. Беларусь.

# Про використання електронних комплексів у курсі вищої математики

А. З. Мохонько<sup>1</sup>, Л. С. Васіна<sup>2</sup>, В. Д. Мохонько<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

<sup>2</sup>Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка»,  
Львів, Україна

[ludavhome@gmail.com](mailto:ludavhome@gmail.com)

Розглянуто приклад використання електронного комплексу для самостійної роботи студентів ЗВО.

**Ключові слова:** електронний комплекс, методи обробки експериментальних даних.

Основний курс вищої математики в технічному навчальному закладі є фундаментом математичної підготовки майбутнього фахівця, яка здійснюється з метою розвитку логічного та алгоритмічного мислення студента, озброєння його методами дослідження, аналізу та моделювання пристроїв та явищ.

Особливістю сучасного навчального процесу є активне використання Інтернету студентами. Тому, природним є використання його і викладачами з метою повного, глибокого і більш наочного навчання математиці. Одним з напрямків є використання електронних комплексів, які містять лекції, практичні заняття, питання для самоконтролю, тестові завдання для діагностики й контролю знань, інструкції з виконання практичних та індивідуальних завдань з використанням комп'ютерних програм, довідковий матеріал, список літератури та інтернет-ресурсів.

Наведемо, як приклад, структуру та фрагменти електронного комплексу за темою «Методи обробки експериментальних даних».

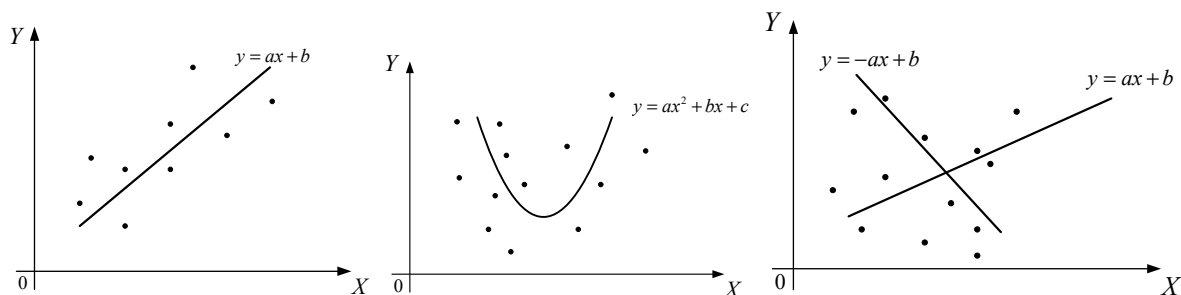
→ **Лекція. Метод найменших квадратів. Побудова лінійної та квадратичної емпіричних формул.**

1. Постановка задачі. 2. МНК. 3. Побудова лінійної та квадратичної емпіричної функції.

*Основні поняття теми:* емпірична функція, оптимальні параметри, мінімізація середньоквадратичного відхилення, нормальна система, лінійна емпірична функція, квадратична емпірична функція.

**1. Постановка задачі.** У процесі вивчення питань природознавства, економіки, розв'язуванні різноманітних інженерних задач доводиться на основі великої кількості дослідних (експериментальних) даних виявляти суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об'єкт і встановлювати форму зв'язку між різними, пов'язаними одна з одною величинами. Експериментальні дані, як правило, одержують у вигляді сукупності точок  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ , абсциси яких  $x_i, i = 1 \dots n$  різні. Однією із задач чисельних методів є визначення формули  $y = F(x)$ , яка пов'язує ці змінні, а точніше, вибір класу допустимих формул, коефіцієнти (параметри) яких повинні бути визначені.

Наприклад:



Таку задачу: пошук функції  $y = F(x)$ , значення якої досить близькі в точках  $x_i$  до табличних значень  $y_i = f(x_i)$  називають задачею згладжування експериментальної залежності, а функцію  $y = F(x)$  — емпіричною функцією або емпіричною формулою. Емпірична формула дає можливість не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, „згладжуючи» значення величини  $y$ , а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень  $x$ .

**→ Контрольні питання до теми**

1. В чому суть наближення таблично заданої функції за методом найменших квадратів? Чому формули, побудовані за методом найменших квадратів називають емпіричними?
2. Чим відрізняється МНК від методу інтерполяції? На якому методі математичного аналізу ґрунтується метод найменших квадратів?
3. Що називають нормальною системою? Як будується нормальна система для визначення оптимальних параметрів?
4. Сформулювати критерій лінійної залежності і скласти систему для визначення оптимальних параметрів лінійної емпіричної формули.
5. Скласти систему для визначення оптимальних параметрів квадратичної емпіричної формули.

**→ Тестові завдання для діагностики і контролю знань**

Під нев'язками або відхиленнями розуміють значення, які обчислюються:

А	$f(x_i) - F(x_{i+1})$	Б	$f(x_i) - F(x_i)$	В	$f(x_{i+1}) - F(x_i)$	Г	$F(x_i) - F(x_{i+1})$
---	-----------------------	---	-------------------	---	-----------------------	---	-----------------------

При побудові лінійної емпіричної формули  $y = ax + b$  згідно МНК шукають мінімум функції:

А	$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \rightarrow \min$	В	$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min$
Б	$\sum_{i=1}^n [y_i^2 - (ax_i + b)^2] \rightarrow \min$		

Задачу пошуку функції  $y = F(x)$ , значення якої досить близькі в точках  $x_i$  до табличних значень  $y_i = f(x_i)$ , називають задачею:

А	параболічної інтерполяції	Б	згладжування експериментальної залежності	В	екстраполяції	Г	інтерполяції
---	---------------------------	---	---	---	---------------	---	--------------

Установлено, що між змінними  $x$  та  $y$  існує нелінійна залежність

$y = \frac{x}{ax + b}$ . Лінеаризована форма цієї залежності має вигляд:

А	$\frac{1}{y} = ax + b$	Б	$Y = a \cdot \frac{1}{x} + b$	В	$Y = a \ln x + b$	Г	$\frac{1}{y} = b \cdot \frac{1}{x} + a$
---	------------------------	---	-------------------------------	---	-------------------	---	---

### → Практичне заняття

1. Побудова лінійної та квадратичної емпіричних формул. 2. Вибір оптимальної нелінійної функції. Лінеаризація даних. 3. Побудова нелінійної емпіричної формули.

*Мета.* 1. Навчитись будувати лінійну та квадратичну емпіричну функції. 2. Вибирати вигляд нелінійної залежності, лінеаризувати її та вибрати оптимальні параметри.

*Обладнання заняття:* роздатковий матеріал — таблиці до задач 1,2,3.

*Інструкції 1—6 з використання ППМП Mathcad та Excel.*

*Індивідуальні завдання практичної роботи.*

**Задача 1.** Для вивчення залежності електричного опору міді від температури виконувались вимірювання опору мідного дроту діаметром 0,93 см і довжиною 77,6 см. Результати вимірювань занесено в таблицю, де  $C$  — температура у градусах Цельсія,  $r$ -опір у мікроомах. Побудувати лінійну емпіричну функцію  $r = a \cdot C + b$  залежності опору від температури.

**Задача 2.** Для побудови статичної характеристики напівпровідникового діода вимірювали струм  $I$  (мА) та напругу  $U$  (В). Результати вимірювань зведено до таблиці. Побудувати за методом найменших квадратів емпіричну квадратичну функцію  $I(U) = aU^2 + bU + c$  залежності струму від напруги

**Задача 3.** Визначити динаміку курсу акцій, якщо дані про курс акцій в умовних грошових одиницях за 9 тижнів наведено в таблиці, припустивши, що між вхідними даними існує степенева стохастична залежність виду  $y = a_0 x^{a_1}$ .

### → Індивідуальні завдання практичної роботи

**Завдання 1.** Побудувати лінійну емпіричну функцію  $y = ax + b$ , яка наближає таблично задану залежність  $y = f(x)$ , визначити її параметри за допомогою функції чисельного розв'язку лінійних систем **Isolve(A,b)** пакету Mathcad, функції **ЛИНЕЙН** пакету Excel. Порівняти результати з аналітично знайденими.

**Завдання 2.** Побудувати за методом найменших квадратів емпіричну квадратичну функцію  $y(x) = ax^2 + bx + c$  для залежності, заданої таблично, використовуючи пакет Excel та визначити параметри квадратичної залежності за допомогою апроксимуючої функції **linfit(vx,vy,F)** пакету Mathcad. Порівняти результати.

**Завдання 3.** Вибрати вигляд емпіричної формули, яка найкраще наближає дану табличну залежність, лінеаризувати її та методом найменших квадратів визначити оптимальні параметри. Здійснити нелінійну апроксимацію в пакеті Mathcad за допомогою вбудованої функції **genfit(vx,vy,vg,F)**. Порівняти результати.

➔ **Інструкції по виконанню завдань практичної роботи**

**Розв'язування задачі 2 з використанням ППМП Mathcad**

Визначимо параметри квадратичної залежності за допомогою апроксимуючої функції **linfit(vx,vy,F)**, яка визначає вектор, що містить коефіцієнти рівняння регресії, які використовують для створення лінійної комбінації функцій в **F** і які найкраще апроксимують дані **vx,vy**. Необхідно задати: **vx**-вектор значень дійсних даних  $x$ , які повинні представлятись у порядку зростання; **vy**-вектор значень дійсних даних  $y$  (вектори **vx,vy** повинні містити однакову кількість елементів); **F**-вектор-стовпчик, який містить базисні функції. Після виклику функції **linfit** одержуємо вектор **a** з коефіцієнтами апроксимуючої лінійної комбінації функцій, а саму функцію  $f(x)$  отримаємо як скалярний добуток векторів **a** і **F**.

*Послідовність дій :*

↳ вводимо вектори вихідних даних **vU** , **vI** [кнопка відображення панелі інструментів **Matrix** (Матриці)];

↳ складаємо вектор-функцію **F(U)** [для апроксимації квадратичним поліномом використовуємо лінійну комбінацію  $F(U) = a_0U^2 + a_1U + a_2$  базисних функцій  $U^2, U, 1$ ];

↳ визначаємо вектор коефіцієнтів апроксимуючої функції **a** [для виклику **linfit** необхідно: в рядку меню обрати **Insert** (Вставити), **f(x)** (Функція) і в категорії функцій **Regression and Smoothing** знайти **linfit** і ввести аргументи **vU, vI, F**];

↳ будуємо графік отриманої емпіричної функції і заданих точок [послідовність побудови графіка аналогічна до побудови в задачі 1 ]. Розрахунки і графік квадратичної емпіричної функції  $I(U) = 212,186 \cdot U^2 - 35,163 \cdot U + 2,754$  представлено на рис. 3 , а на рис. 4 для порівняння представлено графік лінійної функції  $I(U) = 155,085 \cdot U - 31,915$ , побудованої за допомогою функції лінійної апроксимації **line(vU,vI)**.

➔ **Опорні знання**

*Елементарна математика* — класифікація функцій, властивості і графіки основних елементарних функцій, властивості логарифмів (довідка 1).

*Вища математика* — частинні похідні функції багатьох змінних; умови існування локального екстремуму функції багатьох змінних (довідка 2).



### → *Література та інтернет-ресурси.*

Використання інформаційних технологій під час вивчення вищої математики дозволяє збагатити зміст та урізноманітнити форми і способи оволодіння навчальним матеріалом, підвищити мотивацію навчання, вивільнити час за рахунок виконання комп'ютером обчислювальних операцій. Розроблені електронні комплекси розміщено на сайті ЗВО, студенти мають до них вільний доступ.

#### **Список літератури**

- Васіна, Л. С. (2010). *Практикум з курсу «Чисельні методи» з використанням ППМП Maple та Mathcad: Метод найменших квадратів* (Вип. 4). Львів: ВЦ ТК НУ «Львівська політехніка».
- Плис, А. И., & Сливина, Н. А. (2003). *Mathcad: математический практикум*. Москва: Финансы и статистика.

# Діалектика поєднання елементарної та вищої математики у творчому навчанні студентів

Н. М. Панасюк

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
nanipa01030@gmail.com

Розглянуто питання актуальності творчого навчання студентів як напрям інтерактивного навчання. Наведено динаміку виконання творчої роботи студентами 1-го курсу університету.

**Ключові слова:** творче мислення, інтерактивне навчання, формалізовані знання, елементарна та вища математика.

У сучасній педагогіці актуальним є впровадження інтерактивного навчання, у якому існує багато підходів, одним з яких є так зване творче навчання з видачею нестандартних завдань, які провокують самостійність у підходах, необхідність аналізувати, узагальнювати, пропонувати власне бачення розв'язку поставленої задачі. Термін *інтерактивний* походить від англійських слів «inter» та «act», тобто відповідно взаємно та діяти, отже, зрозуміло, що у творчому напрямі інтерактивного навчання відбувається активізація творчості студента як у взаємодії з математичним матеріалом, так і з викладачем. Виховання самостійності зовсім не означає кинути процес напризволяще, а потім вимагати результатів. Взаємність саме в терміні «interact» означає взаємність як у роботі студента з матеріалом, базуючись на вже отриманій раніше інформації, що перетворилася в знання, так і взаємодії з викладачем, керівником, генератором ідей, який повинен це робити ненав'язливо, розвивати логіку мислення студента таким чином, щоб той уважав себе автором ідеї і прагнув її розвивати в подальшому, отримував задоволення в переможності своєї роботи, відчув смак творчості й нестандартності. Нехай на початках це будуть лише маленькі кроки в руйнуванні стереотипів та догм у навчанні і саме математика може в цьому допомогти.

Як переважно відбувається процес навчання у студентів? Вивчаючи тему або отримавши задачу, студенти намагаються відшукати зразок (рецепт) розв'язку цієї задачі. Якщо завдання не виконано, можна навіть від них почути «ми такої задачі не розв'язували», хоча задача принципово не є новою, у неї внесено лише маленьку родзинку. Школярів «натаскують» на розв'язках стандартних задач, готуючи спочатку до контрольних робіт, а потім до ЗНО, привчають працювати по наданих схемах і тому, у процесі такого навчання виникають навички працювати за запропонованими рецептами, виконуючи стандартні звичні завдання. У результаті — заформалізовані і, до того ж, на жаль, дуже слабкі знання. І тому задачею вищої школи є, перш за все, побороти ці споживацькі тенденції у процесі пізнання, переходячи до формування у студентів волі до самостійності в пізнанні, прагнення вносити своє, хоча б в малому новому, а не шукати підказок в Інтернеті (до речі не завжди математично коректних і

кваліфікованих), переформовувати формалізоване навчання, дуже обережно й ненав'язливо, у творче, починаючи з самого малого.

Минулого навчального року я отримала курс «Методика викладання елементарної математики», що читається у групах математиків фізико-математичного факультету у другому семестрі I курсу. Усе своє достатньо довге педагогічне життя я читала різні курси вищої математики на інженерних спеціальностях і, достатньо довгий час працювала також із школярами на підготовчих курсах. Отримавши математиків, хоч і першого курсу, я мала шальну думку, що знайдуться талановиті і творчі студенти, з якими можна буде зайнятися науковою роботою. Помилилась. Отримала контингент з різним рівнем підготовки, який, особливо з ліцеїв, уважав, що цей курс не потрібний, треба його просто здати, бо вони і так все знають. Провела вступну контрольну з елементарної математики і побачила багато хиб, як в термінології, так і в умінні писати пояснення, відсутність строгої логіки викладок. Тут виникла думка видати семестрову творчу роботу на тему «Використання елементарної математики в курсах вищої математики». Тема достатньо об'ємна, тому дала свободу вибору в розділах і курсах, акцентуючи увагу на тому, щоб у виборі орієнтувалися саме на максимальне використання різних розділів елементарної і попередила, щоб не брали вже готові задачі з конспектів, а підбирали свої, краще за все самостійно придумати. Звернула увагу на те, що при посиленні на елементарну математику треба не просто виписувати формули, робити перетворення, а наводити пояснення, використовуючи відповідну термінологію, посилення тощо. Така тема інтегрована і не тільки пов'язує різні математичні дисципліни, а змушує побачити їх сумісність і диференційовність використання. Крім того, студент повинен глибоко володіти матеріалом вищої математики, щоб сепарувати і застосувати розділи елементарної, при цьому використовуючи кваліфіковано терміни і поняття, логічно обґрунтовуючи застосування, грамотно будуючи розв'язок.

Ми, певно, не один раз чули від студентів на прохання дати пояснення в роботі, «я краще напишу» і при цьому, знову таки, пише формули без обґрунтувань і посилянь. А саме це формує логіку мислення. Крім того, така тема дозволяє допрацювати матеріали курсів, як тих, що вивчались раніше (і вже можливо є призабутими), так і тих, що саме вивчаються. Узагалі, до наведеної теми я вже зверталась (Панасюк, 2017) і рекомендувала студентам для ознайомлення. Незважаючи на всі настанови, що ж я побачила при проміжному контролі? Задачі прямо з конспектів, навіть цифри не змінювались, а на питання про застосування, показували просто на обчислення. Дійшло до того, що один студент приніс роботу просто із задачами елементарної математики, а інший окремо з елементарної і вищої, практично без елементарної і без всілякого зв'язку. Пояснювала — тема не грає. Знову обговорювали, сперечалися. Це, звісно, корисно, але скільки некоректностей побачила в підказаній мною темі «Інтегрування раціональних дробів», де працюють і теорема про єдиність розкладу многочлена на множники, і такі поняття, як рівність многочленів, раціональних дробів, ме-

тод невизначених коефіцієнтів та метод частинних значень тощо. Виникла навіть необхідність задати питання, що таке рівняння, бо робились перетворення однієї його частини і тягнувся знак рівності дробів, а потім не відомо звідки впливали рівняння для невідомих коефіцієнтів, а метод частинних значень взагалі не застосовувався, хоча він дуже спрощує розв'язок у випадку лінійних множників знаменника. Звичайно були студенти, які більш-менш пристойно впорались з роботою, але особливого бажання до самостійності я не побачила, хоча з кожним працювала особисто, прагнучи настовхнути на самостійність. Боріться і поборемо, виникала думка. У більшості студентів якась уривчаста логіка, немає строгості в міркуваннях, строгої розвиненої думки. Мислення не можна розвинути за пару, тиждень, семестр. Воно розвивається в часі, якого в нас, математиків, особливо на інженерних спеціальностях, дуже мало, але, навіть маленький крок у цьому напрямі дає надію на майбутнє.

### Список літератури

Панасюк, Н. М. (2017). *Поглиблення знань з елементарної математики під час вивчення теми «Границі»*. У *Матеріалах VI Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 28—29 грудня 2016 р. (с. 266—268). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.

# О применении закона Био — Савара — Лапласа для расчета магнитных полей проводников

## сложной конфигурации

С. Н. Потемкина<sup>1</sup>, А. В. Розанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

<sup>2</sup>Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова, Саратов, Россия

s.potemkina@tltsu.ru, arosanov@yandex.ru

Рассматриваются особенности применения закона Био — Савара — Лапласа для вектора индукции магнитных полей, порождаемых постоянными электрическими токами. Особое внимание обращается на возможность расширения применимости закона Био — Савара — Лапласа для расчета магнитных полей различной конфигурации.

**Ключевые слова:** закон Био — Савара — Лапласа, условия применимости, проводники с токами сложной формы, вектор индукции магнитного поля, расчет магнитных полей.

Основная задача теории магнитного поля — расчет характеристик магнитного поля произвольной системы токов и движущихся зарядов, т.е. определение величины и направления вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в произвольной точке пространства.

Для практических расчетов магнитных полей, создаваемых проводниками с током различной формы, применяют закон Био — Савара — Лапласа в дифференциальной форме записи, а также закон полного тока, основанный на теореме о циркуляции вектора магнитной индукции (Беликов, 1986, с. 107—110).

Проблема состоит в том, что закон Био — Савара — Лапласа справедлив для тонких проводников, а теорема о циркуляции вектора магнитной индукции сформулирована для симметричных конфигураций магнитных полей. Тем не менее,

используя закон Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции, и применяя метод дифференцирования-интегрирования (ДИ) (Потемкина, 2010; Розанов & Потемкина, 2017), эту проблему можно успешно разрешить практически для любой конфигурации проводников с током. В основу указанного метода положены два принципа: возможность представления закона в дифференциальной форме и принцип суперпозиции, причем при решении таких задач *важно* учитывать векторный

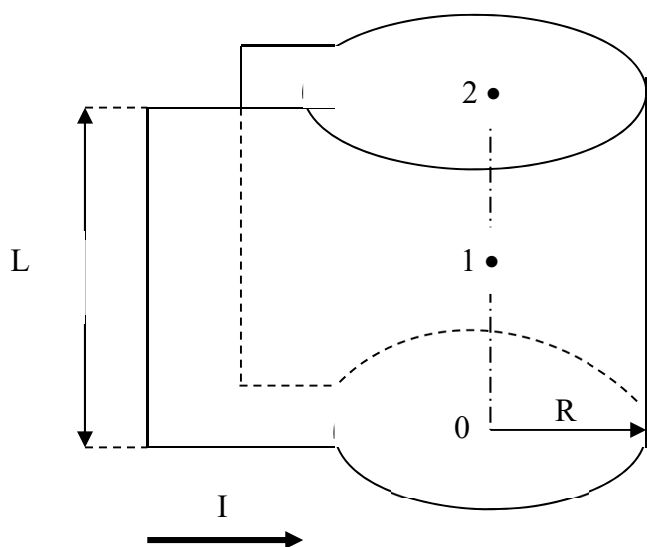


Рис. 1

характер принципа суперпозиции для рассматриваемых полей (Розанов & Потемкина, 2017).

В качестве примера реализации возможности расширения границ применимости закона Био — Савара — Лапласа рассмотрим тонкую ленту шириной  $L$ , свернутую в трубку радиусом  $R$  в форме кругового цилиндра с разрезом по образующей (рис. 1). По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток силой  $I$ . Необходимо определить индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$  на оси трубки в двух точках: в средней точке (1) и в точке, совпадающей с концом трубки (2). В рассматриваемой конфигурации проводник нельзя считать тонким, и, следовательно, для расчета магнитного поля непосредственное применение закона Био — Савара — Лапласа, не является оправданным. Закон полного тока также не применим из-за отсутствия симметрии поля.

Разобьем трубку на узкие кольца так, чтобы можно было считать их тонкими круговыми проводниками. Пусть ширина кольца —  $dx$ , а  $x$  — расстояние от кольца до точки (1) (рис. 2).

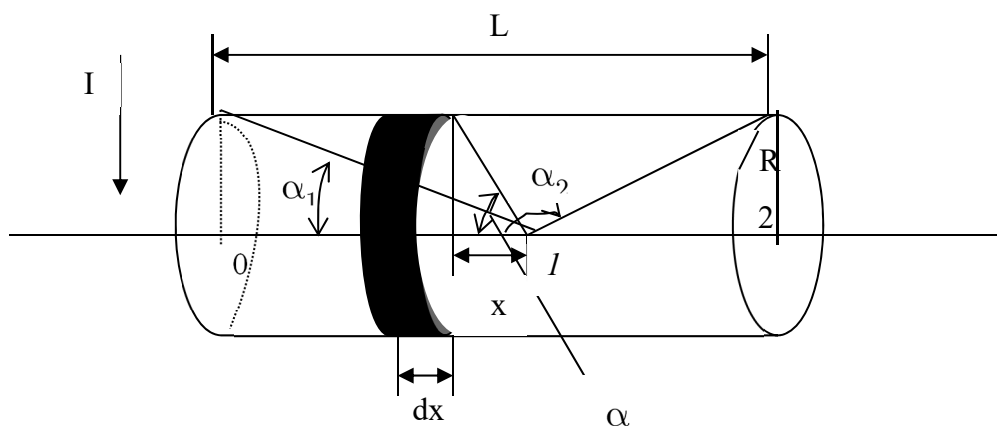


Рис. 2

Элементарный ток, текущий по тонкому узкому кольцу равен:

$$dI = \frac{I}{l} dl,$$

где  $\frac{I}{l} = I_0$  — ток, приходящийся на единицу длины трубки.

В соответствии с дифференциальной формой записи закона Био — Савара — Лапласа элементарный тонкий ток  $dI$  создает в точке (1) магнитное поле с элементарной индукцией

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dI R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2 dx}{2l(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{I_0 \mu_0 R^2 dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная свободного пространства.

Для расчета численного значения  $B_1$  применим принцип суперпозиции, и проинтегрируем вышеприведенное выражение.

В качестве переменной интегрирования удобно выбрать угол  $\alpha$ , под которым виден радиус каждого кольца из точки (1).

Из рис. 2 видно, что  $x = R \operatorname{ctg} \alpha$ , следовательно:

$$dx = -\frac{R \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad R^2 + x^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}; \quad \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{R^2}$$

Тогда

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I_0 \sin \alpha}{2} d\alpha.$$

Переходя к интегральной форме закона Био — Савара — Лапласа, можно определить величину интересующей характеристики магнитного поля (магнитной индукции) в точке (1):

$$B_1 = \int dB_1 = \frac{\mu_0 I_0}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I_0}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{(L/2)}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos \alpha_1.$$

Следовательно, в точке (1) получаем:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\sqrt{R^2 + (L^2/4)}}$$

Рассчитаем характеристику магнитного поля  $B_2$  в точке (2), используя тот же алгоритм, что и в первом случае.

С этой целью определим пределы интегрирования при расчете магнитной индукции в точке (2):

$$\cos \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

и тогда окончательно:

$$B_2 = \frac{I_0 \mu_0 L}{2\sqrt{R^2 + L^2}}$$

Рассчитав с помощью метода ДИ величину магнитной индукции, можно вычислить силы, действующие на контур, их механические моменты, а также определить работу перемещения контура в магнитном поле и другие, практически важные характеристики.

Таким образом, применение обще-частного метода ДИ даёт возможность студентам расширить границы применимости закона Био — Савара — Лапласа и тем самым увеличить диапазон задач, имеющих практическую направленность, с которыми будущий специалист может столкнуться в своей профессиональной деятельности (Сарафанова, Потемкина, & Ясников, 2016).

### Список литературы

- Беликов, Б. С. (1986). *Решение задач по физике. Общие методы*. Москва: Высшая школа.
- Потемкина, С. Н. (2010). Математические методы в преподавании курса физики. У Матеріалах Тринадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 13—15 травня (Т. 3, с. 229). Київ: КПІ.
- Розанов, А. В., & Потемкина, С. Н. (2017). Методы моделирования и расчета магнитных полей систем проводников с токами в виртуальной физической лаборатории. У Матеріалах XVIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 7—10 жовтня (Т. 1, с. 137—140). Київ: КПІ.
- Сарафанова, В. А., Потемкина, С. Н., & Ясников, В. С. (2016). *Лабораторный практикум по физике. Ч. 2. Электричество и магнетизм*. Тольятти: Изд-во ТГУ.



# Доведення нерівностей за допомогою похідної

В. Є. Ткачук

Луцька загальноосвітня школа I—III ступенів № 25, Луцьк, Україна

tvelutsk@ukr.net

Розглянуто деякі приклади застосування похідної до доведення нерівностей. Метою є продемонструвати ефективність цього методу при розв'язуванні різних вправ, значна частина яких носить олімпіадний характер.

**Ключові слова:** доведення нерівностей, похідна.

Важлива роль нерівностей визначається застосуванням їх в різних напрямках природознавства й техніки, соціальної статистики, термодинаміки, квантової фізики, хімії, фінансової математики, теорії інформації, теорії ігор, програмування. Методи математичного аналізу дозволяють розглянути низку задач, які складно розв'язати елементарними методами. До таких задач також належать задачі на доведення нерівностей за допомогою похідної (Перехейда & Ушаков, 2003).

Досить часто на учнівських математичних олімпіадах пропонують завдання на доведення нерівностей (Сарана, 2011). Нестандартне використання елементів математичного аналізу, дозволяє порівняно просто розв'язувати ці задачі.

Орієнтовна схема доведення нерівностей виду  $f(x) > g(x)$  або  $f(x) < g(x)$  за допомогою похідної.

1. Розглянути допоміжну функцію  $y(x) = f(x) - g(x)$  на її області означення або на заданому проміжку.

2. Дослідити за допомогою похідної зростання чи спадання функції  $y(x)$  або найбільше чи найменше значення на розглянутому проміжку.

3. Обґрунтувати, згідно з отриманими результатами, що  $y(x) > 0$ , або  $y(x) < 0$  на розглянутому проміжку, і зробити висновок, що  $f(x) > g(x)$  або  $f(x) < g(x)$  на цьому проміжку.

Аналогічно доводять нестрогі нерівності.

Наведемо приклади нерівностей, які доводяться за допомогою зазначених прийомів.

**Приклад 1.** Довести нерівність  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Доведення.* Спочатку, виконуючи рівносильні перетворення, дістаємо нерівність

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Розглядаємо функцію

$$y(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$

неперервну на всій числовій прямій і знаходимо її похідну

$$y'(x) = -\sin x + \frac{2x}{2} = -\sin x + x.$$

Тепер розглядаємо функцію

$$\phi(x) = -\sin x + x$$

і доведемо, що  $\phi(x) > 0$  на інтервалі  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Функція  $\phi(x)$  неперервна на всій числовій прямій і має похідну

$$\phi' = -\cos x + 1 \geq 0.$$

Отже, функція  $\phi(x)$  зростає на проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . За означенням зростаючої функції при  $x > 0$  отримуємо, що

$$\phi(x) > \phi(0) = -\sin 0 + 0 = 0,$$

тобто при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$   $y'(x) = \phi(x) > 0$ . Це означає, що функція  $y(x)$  зростає на інтервалі  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , а оскільки вона неперервна, то й на проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Отже,

$$y(x) > y(0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

для всіх  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . На цьому інтервалі виконується нерівність

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \text{ а отже і нерівність } \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

**Приклад 2.** Довести нерівність  $\operatorname{tg} x + 2 \sin x > 3x$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Доведення.* Розглядаємо функцію

$$y(x) = \operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cos x - 3 = \frac{1 + 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1 + 2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + \cos^2 x + 2 \cos x - 2 \cos x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(1 - \cos x)^2 + 2 \cos x (\cos^2 x - 2 \cos x + 1)}{\cos^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(1 - \cos x)^2 + 2 \cos x (\cos x - 1)^2}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \cos x)^2 (1 + 2 \cos x)}{\cos^2 x}.$$

Маємо

$$y'(0) = \frac{(1 - 1)^2 (1 + 2)}{1} = 0,$$

а при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$   $y'(x) > 0$ . Отже функція  $y(x)$  зростаюча на проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  і

$y(x) > y(0) = 0$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  і нерівність виконується.

**Приклад 3.** Порівняти  $\sqrt[2018]{2018}$  та  $\sqrt[2019]{2019}$ .

*Розв'язання.* Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа  $\frac{\ln 2018}{2018}$  і  $\frac{\ln 2019}{2019}$ , оскільки функція  $\ln x$  монотонно зростає на області визначення. Розглядаємо функцію

$$y(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ означену на інтервалі } (0; \infty).$$

Маємо

$$y'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$y'(x) = 0, \text{ якщо } x = e.$$

Це точка максимуму, тобто якщо  $x \in (0; e)$ , то похідна додатна, а для  $x \in (e; \infty)$  — від'ємна. Тому на проміжку  $(e; \infty)$  функція спадає. Оскільки цьому проміжку належать числа 2018 та 2019, то більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тому

$$\frac{\ln 2018}{2018} > \frac{\ln 2019}{2019},$$

а, отже, і

$$\sqrt[2018]{2018} > \sqrt[2019]{2019}.$$

**Приклад 4.** Доведіть нерівність  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ , при  $x \geq 0$ .

*Доведення.* Розглядаємо функцію

$$y(x) = \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{1+x} \text{ при } x \geq 0$$

(її область означення  $x \geq -1$  містить заданий проміжок). Похідна цієї функції

$$y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}} > 0 \text{ при } x > 0.$$

Отже, функція  $y(x)$  зростає в інтервалі  $(0; \infty)$ , а враховуючи неперервність функції  $y(x)$  в точці 0, одержуємо, що функція  $y(x)$  зростає і на проміжку  $[0; \infty)$ . Але  $y(0) = 0$ . Тоді при  $x \geq 0$  маємо

$$y(x) \geq y(0) = 0.$$

Отже,

$$\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{1+x} \geq 0,$$

тобто

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \text{ при } x \geq 0,$$

що й потрібно було довести. Зазначимо, що при  $x > 0$  значення  $y(x) > y(0) = 0$ , а при  $x = 0$  задана нерівність перетворюється на рівність.

**Приклад 5.** Довести нерівність  $x^3 + 4 > x^2 + 3x$ , при  $x \geq 0$ .

*Доведення.* Розглядаємо функцію

$$y(x) = x^3 + 4 - x^2 - 3x$$

неперервну на всій числовій прямій.

Знаходимо її похідну

$$y'(x) = 3x^2 - 2x - 3;$$

$$y'(x) = 0, \text{ якщо } x_1 = \frac{1 - \sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{10}}{3};$$

$$y'(x) < 0, \text{ якщо } x \in \left( \frac{1 - \sqrt{10}}{3}; \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \right).$$

Оскільки у критичній точці  $x = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$  похідна змінює знак з «−» на «+», то це точка мінімуму, але

$$y\left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right) > 0,$$

отже,

$$y(x) > y\left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right) > 0.$$

Тобто

$$x^3 + 4 - x^2 - 3x > 0 \text{ або } x^3 + 4 > x^2 + 3x, \text{ при } x \geq 0.$$

#### Список літератури

- Перехейда, О. М., & Ушаков, Р. П. (2003). *Доведення нерівностей*. Харків: Основа.  
 Сарана, О. А. (2011). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник*. (2-ге вид.). Тернопіль: Навчальна книга — Богдан.

# Про спеціальні прийоми вдосконалення математичної підготовки майбутніх учителів фізики під час викладання перших розділів курсу загальної фізики

О. Л. Чепок<sup>1</sup>, Д. М. Бєлітченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Південноукраїнський національний педагогічний університет  
імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна,  
olachepok@ukr.net

<sup>2</sup>Південноукраїнський національний педагогічний університет  
імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна,  
belca@te.net.ua

Запропоновані спеціальні прийоми тестового характеру вдосконалення математичної підготовки майбутніх учителів фізики під час викладання перших розділів курсу загальної фізики. Проведена апробація підтвердила ефективність представленої методики.

**Ключові слова:** курс загальної фізики, математична підготовка студентів, взаємопроникливий характер фізики та математики, тестовий контроль знань.

Згідно з навчальними планами здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» за спеціальністю 014.08 Середня освіта (Фізика), багатосеместровий курс загальної фізики відповідні студенти починають опановувати вже з перших тижнів першого семестру навчання. Як і будь-який курс фізики, цей курс є неможливим без суттєвого математичного супроводу. І основу такого супроводу, саме для даної частини курсу, повинні скласти відомості з курсів математики закладів середньої освіти.

Уже тривалий час, на жаль, курси математики та фізики середньої школи не є узгодженими між собою. Учителю фізики регулярно доводиться оперувати математичними поняттями, зміст яких у відповідних курсах математики з'ясовується значно пізніше. Зрозуміло, що така ситуація відповідає історичному шляху виникнення значної кількості математичних понять у надрах фізики. Але, за відсутності повторного з'ясування сутності фізичних явищ, уже на підставі чітко визначеного математичного підґрунтя, цей факт аж ніяк не сприяє ані глибшому засвоєнню курсу фізики, ані усвідомленню учнями взаємопроникливого характеру відношень між фізикою і математикою, як науками.

Для перших розділів вищівського курсу загальної фізики ситуація є іншою. Теоретично, зміст шкільної математичної освіти для даного курсу переважно забезпечує необхідне підґрунтя, тут уже є на що спиратися. Методичне питання полягає в тому, яким чином це доцільніше робити. Треба прийняти до уваги той факт, що з кожним роком поглиблюється різниця між тим, що випускники середніх шкіл повинні знати, і тим, що вони знають насправді.

Виходячи з тривалого досвіду роботи, можна запропонувати наступне. Зрозуміло, що для студентів першого року навчання першу лекцію з курсу загальної фізики присвячено характеристиці фізики як науки, висвітленню ролі й місця фі-

зики у природознавстві. У цій лекції можна і треба вести розмову про той взаємопроникливий характер зв'язків між фізикою і математикою, що історично склався протягом тисячоліть. На першій лекції, на поглибленому у порівнянні зі шкільним курсом фізики рівні, відбувається усвідомлення сутності кінематики, як розділу фізики, що вивчає характеристики змін положення матеріальних тіл у просторі із плином часу (напр. Кучерук, Горбачук та Луцик (2006), Путилов (1963)). При цьому, зрозуміло, мова йде про тривимірний простір, а це вже певна математична модель простору, про тіло відліку, з яким пов'язується певна прямокутна декартова система координат. І це, знову-таки, математичне поняття. А переважна більшість студентів-слухачів, не зважаючи на задовільні бали ЗНО, на жаль, не володіють математичним поняттям про прямокутну декартову систему координат і, тим паче, про тривимірний евклідов простір. На першій же лекції йде мова про таку адитивну додатну скалярну величину, як маса тіла, зокрема, про масу матеріальної точки. А поняття скалярної величини, додатної скалярної величини, адитивної скалярної величини по відношенню до шкільного курсу математики вимагають суттєвих уточнень. На першій же лекції з загальної фізики виникає питання не тільки про зв'язаний вектор, а й про вільний вектор, про вектор-функцію скалярного аргументу (часу) та її координатні функції, криву у просторі, як траєкторію руху матеріальної точки. Отже, реально, лектор-викладач, починаючи з першої лекції вимушений оперувати низкою математичних понять, змісту яких його слухачі не розуміють, або розуміють зовсім не в потрібному обсязі. Ми вважаємо, що під час першої лекції можна дозволити собі вільно використовувати необхідні математичні поняття без будь-яких додаткових пояснень. Наприкінці лекції, за допомогою проектора варто висвітлити на екрані перелік використаних математичних понять, разом з указівкою інформаційних джерел вільного доступу, за якими можна опанувати чи відновити опанування змісту цих понять. Одночасно, варто висвітлити перелік математичних понять, розуміння змісту яких є необхідним для наступної лекції.

На початку другої (і кожної наступної лекції) ми пропонуємо студентам протягом 7—10 хвилин виконати низку тестових завдань, які спроможні відобразити степінь готовності студента до сприйняття математичного підґрунтя того матеріалу, який буде запропоновано. Перелік завдань для всіх студентів є однаковим, але не однаковим є їх порядок. Сучасне матеріально-технічне обладнання спроможне забезпечити лектора миттєвим зворотнім зв'язком — точною інформацією про те, наскільки вдало студенти впоралися з поставленими завданнями. Але такого обладнання у нашому ЗВО поки що немає. Отже, результати виконання поставлених завдань і студентам, і викладачу стають відомими лише після лекції. Результати такого тестування враховуються при формуванні семестрової оцінки студента. Протягом семестру вони перегляду не підлягають. Перед початком семестрового контролю кожному студенту пропонується ще раз відповісти на ті питання, на які у семестрі він надав невірну відповідь. Вірна відповідь у певному степені покращує семестровий результат.

Як приклад, наведемо деякі зразки тестових завдань, що пропонуються.

1. Відомо, що  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d = 7$ ,  $p = 6$ ,  $q = 8$ . Обчисліть,

$$a \left( \frac{1}{b} + c \right) : p + \frac{d}{q}.$$

А	Б	В	Г
$1\frac{2}{3}$	$1\frac{47}{72}$	$28\frac{7}{8}$	$7\frac{7}{8}$

2. Параметри  $a, b, c, d$  можуть приймати відмінні від нуля дійсні значення.

Якщо,  $d = \frac{ab}{c}$ , то

А	Б	В	Г
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$c = \frac{ad}{b}$	$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$	$a = \frac{bd}{c}$

3. У якості геометричної моделі безпосередньо оточуючого людину середовища приймають модель

А	Б	В	Г
двовимірний евклідовий простору	тривимірний неевклідовий простору	тривимірний евклідовий простору	евклідової площини

4. У тривимірному евклідовому просторі вибрано прямокутну декартову систему координат  $Oxyz$ . Відносно даної системи координат відомі координати точок  $A(-3; 2; -5)$ ,  $B(1; 0; -7)$ . Установіть відповідність між початком речення і правильним його закінченням.

- |  |                   |
|--|-------------------|
| I. Координати середини відрізка $AB$ дорівнюють                                      | А. $(4; -2; -2)$  |
| II. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнюють                              | Б. $(-4; -2; -6)$ |
| III. Координати суми векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ дорівнюють | В. $(-1; 1; -6)$  |
| IV. Координати вектора $\overrightarrow{BA}$ дорівнюють                              | Г. $(-4; 2; 2)$   |
|  | Д. $(-2; 2; -12)$ |

5. У тривимірному евклідовому просторі вибрано прямокутну декартову систему координат  $Oxyz$ . Відносно даної системи координат відомі координати точки  $M(-2; -3; 4)$ . Для наступних речень встановіть відповідність між їх початком та вірним закінченням.

- |  |                 |
|--|-----------------|
| I. Точка $M'$ , симетрична до точки $M$ відносно початку | А. $(0; -3; 4)$ |
|--|-----------------|

відліку  $O$ , має координати

II. Проекція точки  $M$  на координатну площину  $Oyz$       Б.  $(-2; 0; -4)$

має координати

III. Точка  $M'$ , симетрична до точки  $M$  відносно координатної осі  $Oy$ , має координати      В.  $(2; -3; -4)$

IV. Точка  $M'$ , симетрична до точки  $M$  відносно координатної площини  $Oxz$ , має координати      Г.  $(2; 3; -4)$

Д.  $(-2; 3; -4)$

Зрозуміло, що на початку опанування курсу загальної фізики такі завдання тестового характеру повторюють традиційні завдання ЗНО. Але, у даному випадку, ці завдання систематизовані відповідно до тем курсу.

Паралельно до курсу загальної фізики студенти першого року навчання за спеціальністю «Середня освіта» (Фізика) починають вивчати систематичні курси математичного аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Значна кількість навчального матеріалу цих курсів також використовується в курсі загальної фізики. Отже, поступово, тестові завдання з математики, які пропонуються студентам у курсі фізики, починають спиратися не тільки на матеріал середньої школи, а й на матеріал відповідних математичних курсів ЗВО. Тепер, наприклад, можуть бути запропонованими такі тестові завдання.

6. Вектори  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  утворюють праву ортонормовану трійку векторів. Векторний добуток  $\vec{i} \times \vec{k}$  дорівнює

А	Б	В	Г
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{j}$

Протягом першого року навчання тестові завдання для студентів, які є іноземними громадянами, пропонуються на двох мовах — на рідній і на українській.

Реалізація представленої схеми проведення лекційних занять вимагає кропіткої підготовки, тісної співпраці викладача курсу загальної фізики з викладачами математичних дисциплін. Але досвід авторів вказує на те, що отриманий результат виправдовує ті труднощі, які доводиться долати.

#### Список літератури

Кучерук, І. М., Горбачук, І. Т. & Луцик, П. П. (2006). *Загальний курс фізики*. (Т. 1). (2-ге вид., випр.). Київ: Техніка.

Путилов, К. А. (1963) *Курс фізики*. (Т. 1). Москва: ГИ ФМЛ.



# Алгоритмізація у процесі навчання теорії ймовірностей

О. Б. Чернобай

Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь, Україна

[chernobai.olga@gmail.com](mailto:chernobai.olga@gmail.com)

У даній роботі розглядаються особливості використання алгоритмічного підходу у процесі навчання теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів та математичної статистики.

**Ключові слова:** теорія ймовірностей, методика навчання теорії ймовірностей, алгоритми в процесі навчання теорії ймовірностей.

«Теорія ймовірності» сьогодні є базовим предметом для підготовки спеціаліста будь-якого профілю. У вищій школі, залежно від спеціалізації, він вивчається як самостійна дисципліна, або входить до курсу вищої та прикладної математики, мета, основні завдання та мотивація згаданого курсу, розглядались і раніше (Чернобай, 2015, 2017).

Засвоєння студентами розділу теорії ймовірності має ряд особливостей. По-перше, обсяг знань за ймовірнісними розділами, необхідний для вивчення, досить великий, а час для цих розділів вищої та прикладної математики, передбачених навчальним планом закладу, обмежений. По-друге, існує низка труднощів, з якими стикаються студенти вивчаючи теорію ймовірностей, пов'язаних, наприклад, з наявністю абстрактно-логічних міркувань, ймовірнісних (неоднозначних) тверджень, з необхідністю перекладу змісту задачі (для її розв'язання) на мову ймовірнісних моделей. Головна проблема полягає в тому, що події менш наочні, ніж фігури, числа або вирази, а ймовірність, можливість, не такі інтуїтивні, як довжина, площа або об'єм. Подія та її наслідки — особливі типи розумових об'єктів, формалізація яких математично відбуваються значно важче, ніж формалізація рисунка (в геометрії) або кількість (в арифметиці або алгебрі).

Крім того, з кожним роком рівень математичної підготовки вступників до вищих навчальних закладів знижується. Сучасні студенти приходять в навчальний заклад зовсім не вміючи логічно мислити, міркувати, аналізувати. Традиційна складність математичних дисциплін — аналіз тексту завдання та, як наслідок, уміння розв'язувати текстові задачі — у теорії ймовірностей є вирішальною: усі задачі текстові. Текстові задачі з теорії ймовірності, комбінаторики, статистики та ймовірнісних процесів значно різноманітніші, ніж алгебричні. Крім класичних задач: підкидання кубиків, монет, витягування навмання різнокольорових кульок, існує велике число схожих сюжетів. Розв'язуючи нову задачу, зрозуміти, що це основна задача зазвичай виявляється досить складно для студента. Не дуже добре підготовлені студенти не бачать аналогію навіть у задачах на виїмання з урни різнокольорових ручок або різнокольорових кульок.

У зв'язку з цим перед викладачем виникає доволі тяжка задача адаптації учнів до навчання свого предмета. Одним із шляхів подолання цих труднощів є використання алгоритмічного підходу до розв'язування ймовірнісних задач.

Алгоритми можна давати студентам у вигляді таблиць, послідовності дій та схем.

Одна з перших тем у курсі «Теорія ймовірності, імовірнісні процеси та математична статистика» — класичне означення ймовірності події. Зазвичай після прочитання задачі, у студента в голові виникає хаос, усе звалюється до купи: події, результати, ймовірності. Структурувати міркування, допомогти побудувати логічний ланцюг із цих міркувань допомагають наступний алгоритм.

1. З'ясувати, який дослід має місце в розглянутій задачі.
2. Скільки існує у даного досліду ймовірних результатів ( $n$ ). На даному етапі добре, коли студенти вголос формулюють питання.
3. Розглянути подію  $A$ , імовірність якої потрібно знайти в задачі.
4. Визначити, скільки існує результатів, які сприяють події ( $m$ ). Тут також важливо вголос формулювати питання.

5. Застосувати формулу класичної ймовірності:  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

На кожному етапі важливо пропонувати студенту сформулювати те питання, на яке потрібно на цьому етапі дати відповідь. При цьому слід домогтись від студента чіткого розуміння того, що таке випробування (дослід, експеримент), що таке подія, і що таке ймовірність події.

**Приклад.** У групі навчається 25 студентів, 5 із них є учасниками олімпіади з вищої математики. Яка ймовірність того, що навмання обраний студент виявиться учасником олімпіади.

Для розв'язання застосуємо алгоритм.

1. Дослід: обирають студента з групи.
2. Ймовірних результатів даного досліду  $n = 25$ .
3. Подія  $A$  — навмання обраний студент є учасником олімпіади з вищої математики.
4. Сприяють події  $A$   $m = 5$ .
5. За формулою класичної ймовірності одержимо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Класичне означення ймовірності не можна застосувати до досліду з нескінченним числом рівно можливих наслідків. Тоді, використовують геометричне означення ймовірності. Під час аналізу задачі, низку ознак, таких як елементарна подія в досліді, можна звести до вибору точки. При цьому, елементарні події рівно можливі, число елементарних подій нескінченне, а їх кількість утворює скінченновимірну область, указують студенту на висновок про можливість застосування геометричної ймовірності — ймовірності потрапляння точки в область (відрізок, частину площини і т.д.). Розв'язання задачі при цьому, порівняно з попередніми, пов'язане з необхідністю інтерпретації досліду як вибору точки в деякій області.

Алгоритм розв'язання задач на геометричну ймовірність можна сформулювати так.

1. З'ясувати, який дослід має місце в розглянутій задачі. Так як кількість результатів дослід, описаного умовою задачі, нескінченна, то для обчислення ймовірності потрібно використати геометричний спосіб. Для цього дослід необхідно звести до вибору точки в деякій області.

2. Визначити область  $G$  всіх можливих результатів і знайти її міру (довжину, площу або об'єм) —  $mesG$ .

3. Сформулювати подію  $A$ , ймовірність якої потрібно знайти в задачі.

4. Визначити область  $Q$ , яка є підмножиною множини  $G$  і є множиною результатів, що сприяють події  $A$ . Знайти міру множини  $Q$  —  $mesQ$ .

5. Знайти ймовірність події  $A$  за формулою:  $P(A) = \frac{mesQ}{mesG}$ .

Розв'язання задач на геометричну ймовірність викликає багато труднощів. Це пов'язано саме з труднощами інтерпретації сюжетної задачі як задачі на кидання точки на деяку область. При цьому викладачеві доцільно не підносити відразу студентам ідею цієї інтерпретації, а за допомогою серії запитань спровокувати появу правильної ідеї у студентів.

**Приклад.** Два студенти домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від  $t_1$  до  $t_2$  годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом  $t_3$  годин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу  $t_3 \in [t_1; t_2]$ .

Розв'яжемо задачу за алгоритмом.

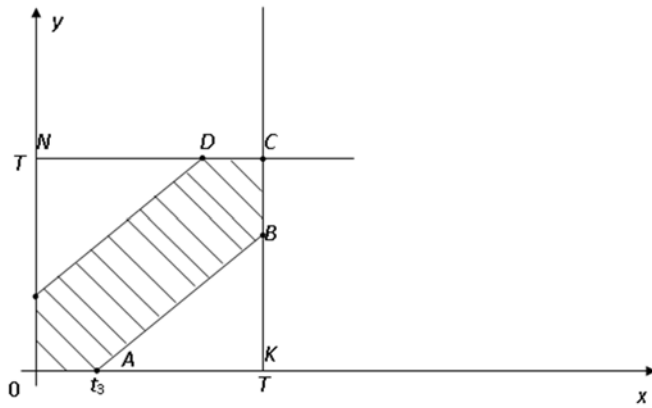
1. Дослід: дві особи перебувають у певному місці в межах деякого часу.

2. Область  $G$  всіх можливих результатів — множина точок квадрата зі стороною  $t_2 - t_1 = T$ .

3. Подія  $A$  — зустріч відбудеться.

4. Області  $Q$  відповідає заштрихована частина квадрата, якщо момент приходу кожної особи —  $A$  відбудеться за умови  $|x - y| \leq t_3$ , де  $0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$ .

5. Ці умови зобразимо в системі координат  $Oxy$ . Множині всіх результатів відповідає площа квадрата  $ONCK$ , а події  $A$  площа шестикутника  $OEDCBA$ .



Скориставшись геометричним означенням ймовірності дістаємо:

$$P(A) = \frac{S_{OEDCBA}}{S_{ONCK}} = \frac{T^2 - (T - t_3)^2}{T^2} = \frac{T^2 - T^2 + 2Tt_3 - t_3^2}{T^2} = \frac{t_3(2T - t_3)}{T^2}.$$

### Список літератури

- Чернобай, О. Б. (2015). Про деякі особливості викладання курсу «Вища та прикладна математика». У *Матеріалах III міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 25—26 грудня 2014 р., (с. 211—213). Київ: НТУУ «КПІ».
- Чернобай, О. Б. (2017). Мотивація при викладанні курсу вища та прикладна математика. У *Матеріалах П'ятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 29—30 грудня 2016 р. (с. 183—184). Київ: НТУУ «КПІ».

# **Об учебно-методическом обеспечении образовательного процесса на кафедре высшей математики Международного университета «МИТСО»**

**В. А. Шилинец**

*Международный университет «МИТСО», Минск, Республика Беларусь,  
v.shilinec@mitso.by*

Кафедра высшей математики Международного университета «МИТСО» обеспечивает организацию образовательного процесса по учебной дисциплине «Математика» для студентов специальности «Информационные системы и технологии (по направлениям)» (направление специальности: «Информационные системы и технологии (в экономике)») и по дисциплине «Высшая математика» для обучающихся по специальностям «Логистика», «Менеджмент», «Маркетинг», «Экономика и управление на предприятии» и «Мировая экономика».

Указанные учебные дисциплины имеют огромное значение в фундаментальной подготовке будущего специалиста в плане формирования у него научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, особенно по таким компонентам, как понимание сущности прикладной и практической направленности математики, овладение методом математического моделирования. Очевидно, что без качественного учебно-методического обеспечения образовательного процесса по указанным выше учебным дисциплинам невозможна эффективная работа преподавателей и студентов при любой форме получения высшего образования.

На кафедре высшей математики УО ФПБ «Международный университет «МИТСО» ведется значительная работа по созданию учебно-методического сопровождения образовательного процесса по высшей математике: запланирована разработка и издание учебно-методического пособия «Практикум по высшей математике» в 4 частях.

На данный момент для студентов специальностей «Экономика и управление на предприятии», «Менеджмент», «Маркетинг», «Логистика», «Финансы и кредит» разработаны и изданы первая и вторая части указанного выше учебно-методического пособия (Шилинец, Кибалко, & Подгорная, 2017, 2018).

Изданное учебно-методические пособие Шилинец и др. (2017) содержит упражнения по следующим темам высшей математики: «Матрицы». «Системы линейных уравнений и неравенств», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Элементы аналитической геометрии в пространстве», «Числовая последовательность и ее предел», «Предел функции одной переменной», «Непрерывные функции одной переменной», «Производная и дифференциал функции одной переменной», «Основные теоремы о дифференцируемых функциях», «Приложения дифференциального исчисления».

Учебно-методическое пособие Шилинец и др. (2018) — это сборник задач и упражнений по разделам «Дифференциальное исчисление функций многих

переменных», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды», «Ряды Фурье» учебной дисциплины «Высшая математика».

Главная цель изданных пособий состоит в том, чтобы способствовать глубокому усвоению теории, развитию конкретного математического мышления студентов, привитию им навыков решения примеров и задач.

Пособия имеют следующую структуру: в каждом параграфе приводятся краткие теоретические сведения, образцы решения типовых примеров и задач. Для самостоятельного решения предлагается большое количество примеров и задач с ответами. Такое построение пособий предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы.

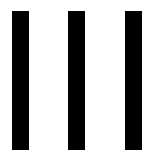
Потребность в новых знаниях возникает у студентов только в случае осознания их значимости для будущей профессиональной деятельности. Решение профессионально-ориентированных задач в процессе изучения математики и демонстрирует студенту степень необходимости владения математическими знаниями. Именно задачи такого типа и включены в изданные пособия. Эффективность применения экономических задач при изучении учебной дисциплины «Высшая математика» заключается в том, что они способствуют развитию творческого менеджерского мышления и позволят студентам в дальнейшем принимать оптимальные решения в любой экономической, управленческой или жизненной ситуации.

Авторским коллективом в соответствии с учебной программой по дисциплине «Высшая математика» разработана и предпоследняя третья часть комплекса учебно-методических пособий «Практикум по высшей математике», первые две части которого уже изданы. Учебно-методическое пособие «Практикум по высшей математике. Часть 3», находящееся в печати, является сборником задач и упражнений по разделам «Теория вероятностей», «Математическая статистика».

Следует заметить, что благодаря применению изданных учебно-методических пособий огромное количество студентов имеет возможность повысить свой образовательный уровень по учебным дисциплинам «Высшая математика» и «Математика», что в условиях сокращения часов на лекции и практические занятия имеет огромное значение.

#### Список литературы

- Шилинец, В. А., Кибалко, П. И., & Подгорная, В. В. (2017). *Практикум по высшей математике*. (Ч. 1). Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».
- Шилинец, В. А., Кибалко, П. И., & Подгорная, В. В. (2018). *Практикум по высшей математике*. (Ч. 2). Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».



ІСТОРІЯ  
ТОЧНИХ НАУК

# До 140-річчя від дня народження Костянтина Лебединцева, українського педагога-новатора

В. О. Гайдей<sup>1,2</sup>, О. П. Міхно<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

<sup>2</sup>Педагогічний музей України, Київ, Україна

victor144169@gmail.com

Подано відомості про життя і науково-методичну спадщину К. Ф. Лебединцева (1878—1925).

**Ключові слова:** історія методики математики, реформа освіти.

Згідно з річним планом діяльності Педагогічного музею України було підготовано віртуальну виставку, присвячену 140-річчю від дня народження видатного українського педагога-новатора, математика Костянтина Феофановича Лебединцева (1878—1925).

Виставка містить хронологію його життєвого шляху, який ми подаємо нижче.

Костянтин Феофанович Лебединцев народився (13) 25.10.1878 у Радомі (Польща, Російська імперія).

1888—1896 рр. — навчання у II Київській гімназії.

1896—1900 рр. — навчання на фізико-математичному факультеті Київського університету (диплом I ступеня). Рекомендований до підготування до професорського звання, але рекомендацію не затвердили.

1 вересня 1900 р. — 1901 р. — працює у II Київській гімназії

1901—1906 рр. — працює I Київському комерційному училищі, у приватній гімназії В. Науменка й на Київських вищих жіночих курсах А. В. Жекуліної.

З 1902 р. — член Київського фізико-математичного товариства.

1906 р. — разом з І. І. Гливенком редагує журнал «Педагогическая неделя» (8 випусків).

1909 р. — переїзд до Москви.

1909—1916 р. — викладає математику в Московській приватній гімназії О. О. Кирпичникової (потім П. М. Попової), у якій провадили спільне навчання хлопців і дівчат. У цій гімназії досліджували працездатність представників різних статей; уроки Закону Божого не були обов'язковими; заохочувалось упровадження новітніх методів і педагогічних ідей. Був головою педагогічної ради по виборах.

з 1910 — член Московського математичного гуртка.

1914 — 1917 рр. — завідує роботою гімназії О. О. Кирпичникової.

У травні 1915 р., травень — був залучений до роботи в комісії з реформування середньої школи. Лебединцев складає «Проект програми з математики для загальноосвітньої школи», альтернативний до запропонованого проекту комісії (під головуванням К. О. Поссе (1847—1928)), членом якої він є.

1916 р. — Лебединцев був запрошений на посаду окружного інспектора Петроградської навчальної округи, де продовжив роботу із складання програм з реформування середньої школи та вдосконаленню своїх підручників з алгебри.

1917 р., серпень — жовтень 1918 р. — був обраний головою педагогічної ради Московської гімназії спільного навчання, заснованої М. Х. Свентицькою



(1855—1932), викладає математику гімназії, яку потім перетворено в школу II ступеня.

1918 р., лютий — травень — член комісії з розроблення програми з математики для трудової школи при Наркомпросвіті у Москві.

1918/1919 навчальний рік — К. Ф. Лебединцев читає лекції на педагогічних курсах при лекційному бюро викладачів Московського університету, а також на педагогічних курсах у Воронежі (1918), у Веневі Тульської губернії (1919). Виступає з лекціями для широких кіл педагогів.

1919 р., травень — серпень — консультант при Відділі трудової школи Наркомосвіти України.

1919—1921 рр. — викладає математику й методику математики на російських вищих 3-х річних педагогічних курсах ім. М. І. Пирогова та українських вищих 3-х річних педагогічних курсах ім. Б. Д. Грінченка.

1919—1920 рр. — був обраний головою спілки працівників школи й культурно-просвітницьких закладів. 1920—1922 рр. він був членом управи цієї профспілки.

1920 р. — стає членом і заступником голови колегії експертів Київського губернського відділення народної освіти. Працює також постійним шкільним робітником Київської української учительської семінарії.

1921—1925 рр. — лекторська робота в Київському інституті народної освіти, читає лекції з вищої математики та методики математики. Був членом правління інституту, його проректором, деканом факультету соціального виховання і деканом факультету професійної освіти.

1923 — організовує й керує семінаром підвищеного типу з методики математики.

1923 р. — було присуджено звання професора.

25 жовтня 1925 р. — К. Ф. Лебединцев помер у Києві. О. М. Астряб про К. Ф. Лебединцева: «К. Ф. Лебединцев усього себе віддав роботі по будівництву школи і поширенню науки на Україні. Його робота в українських педвузах і наукових закладах, по складанню українських підручників була великою мірою цінним і корисним внеском у могутнє будівництво нового ладу на Україні».

Окремими розділами віртуальної виставки подано також: стислий огляд його науково-педагогічної та методичної спадщини; бібліографію його праць, доповнену посиланнями на електронні копії, що звісно полегшить і зробить ефективною роботу дослідників його науково-методичного доробку. Зазначимо, що чимало його праць, навчальних посібників та підручників міститься і в колекції Педагогічного музею України.

Уміщено також список літератури, у якій досліджувалась життя і науково-педагогічна творчість К. Лебединцева.

Доповнюють віртуальну виставку фотографії з архіву педагога.

Ознайомитись з матеріалами віртуальної виставки можна за посиланням:

[http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/140\\_rokiv\\_lebedincev/](http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/140_rokiv_lebedincev/)

# Декілька фрагментів з історії зображення групи (півгрупи) лінійних операторів експонентою від її генератора

В. М. Горбачук

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

v.m.horbach@gmail.com

У роботі викладено деякі моменти з історії розвитку теорії зображень сильно неперервної (пів)групи лінійних операторів у банаховому просторі експоненціальною функцією від її генератора.

**Ключові слова:** банахів і гільбертів простори,  $C_0$ - (пів)група лінійних операторів, генератор (пів)групи, експонента від генератора, проблеми Колмогорова та Хілле, функціональне рівняння.

У 1772 р. Лагранж (Lagrange, 1772) наважився зобразити групу зсувів  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  у просторі  $L^2(\mathbb{R})$  у вигляді

$$(U(t)f)(s) = f(t + s) = \left( e^{t \frac{d}{ds}} f \right)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \frac{d}{ds} \right)^n f(s), \quad (1)$$

де, як бачимо, ця група представлена експонентою від її генератора — оператора диференціювання. Що ж до надання цій формулі сенсу й можливості її застосування до зображення довільної  $C_0$ -групи (півгрупи) лінійних операторів у банаховому просторі  $\mathfrak{B}$  за допомогою її генератора  $A$  як

$$e^{At}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \quad (2)$$

то для цього знадобилося майже два століття, і це стало одним з найважливіших досягнень математичного аналізу середини 20-го ст.

Звернімося до короткої історії питання і розглянемо спершу скалярний випадок.

Л. Ейлер (Euler, 1728) був першим, хто вклав попередні результати в чіткий, зрозумілий контекст і показав, що в розглядуваній ситуації

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{tA}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I - \frac{tA}{n} \right)^{-n}$$

і  $e^{tA}x$  є розв'язком задачі

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad y(0) = x \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

У 1821 р. А. Л. Коші (Cauchy, 1821) уперше систематично розглянув функціональне рівняння

$$\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s), \quad \varphi \in C([0, \infty)), \quad (4)$$

і встановив, що його загальний неперервний розв'язок дає експоненціальна функція, а у 1826 р. до цих досліджень приєднався Н. Абель (Abel, 1826). Підсумком їхньої роботи став такий результат: нехай  $\varphi(t)$  — неперервний розв'язок рівняння (4), тоді існує єдине  $A \in \mathbb{C}$  таке, що  $\varphi(t) = e^{tA}$ . У подальшому (1920 р.) це твердження було поширене С. Банахом (Banach, 1920) і В. Серпінським (Sierpiński, 1920) на вимірні  $\varphi(t)$ .

А зараз перейдімо до операторного підходу. Як уже зазначалось, Лагранж розглянув випадок, коли  $A$  — оператор диференціювання у просторі  $L^2(\mathbb{R})$ . У 1887 р. Дж. Пеано (Peano, 1887) дослідив матричний випадок, тобто коли  $A$  є скінченною  $(m \times m)$ -матрицею, і показав, що в цьому випадку (2)  $\sim$  (3). М. Граменя (Gramena, 1910) поширила цей результат на нескінченні системи диференціальних рівнянь та інтегральні рівняння. Вона визначила збіжність відносно норми  $\|\cdot\|_\infty$  і розглянула лінійні оператори й операторну норму на  $l^\infty$ . Користуючись цими інструментами, було запроваджено експоненціальну функцію для обмежених операторів і доведено збіжність експоненціального ряду. Нею також встановлено, що якщо

$$(Af)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds, \quad k(t,s) \in C([0,1]^2),$$

то

$$U(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

збігається і  $U(t)f$  — єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \int_0^1 k(x,y)u(t,y)dy, \quad U(0) = f.$$

У 1924 р. Ж. Адамар (Hadamard, 1924) розглянув операторну версію функціонального рівняння (4), яка фактично є (пів)груповим законом, а саме:

$$U(t+s) = U(t)U(s).$$

З того часу її важливість почала невпинно зростати. Абстрактна задача Коші сучасною мовою є версією (3) у банаховому просторі.

М. Стоун розвинув (Stone, 1932) операторне числення для довільного самоспряженого оператора  $A$  в гільбертовому просторі  $\mathfrak{H}$  і охарактеризував сильно неперервні групи унітарних операторів  $U(t)$  в  $\mathfrak{H}$  як

$$U(t) = e^{itA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE(\lambda), \quad A = A^*,$$

( $E(\lambda)$  — розклад одиниці оператора  $A$ ). Що стосується сильно неперервних (пів)груп з необмеженим генератором у просторі  $\mathfrak{B}$  (а саме вони найчастіше виникають у задачах математичної фізики), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}$$

збігається не для всіх  $x \in \mathfrak{B}$ , а отже, зображення (2), взагалі кажучи, не має місця. Якщо ж поглянути на формулу (1), то, згідно з нею, група зсувів

$$(U(t)x)(s) = x(t + s)$$

у просторі  $L_2(\mathbb{R})$  зображується у вигляді експоненти від її генератора.

Що ж до надання цій формулі сенсу для довільної  $C_0$ -групи, тобто усвідомлення, а що саме треба розуміти під  $e^{tA}$ , де  $A$  — її генератор, то це, як вже зазначалось, забрало чимало часу.

Якщо розглядати формулу (2) в різних функціональних банахових просторах, наприклад, в  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $C_b(\mathbb{R})$  тощо, то можна помітити, що її ліва частина визначена на всьому просторі, а ряд справа — лише на певних, щільних у цих просторах класах цілих функцій. Тому постало питання: чи існують для довільної  $C_0$ - (пів)групи  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  у банаховому просторі  $\mathfrak{B}$  щільні в ньому підпростори  $\mathfrak{B}_1$  та  $\mathfrak{B}_2$  такі, що

$$\forall x \in \mathfrak{B}_1 : U(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \quad (5)$$

$$\forall x \in \mathfrak{B}_2 : U(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{tA}{n} \right)^n x ? \quad (6)$$

Для довільної  $C_0$ -групи у банаховому просторі проблема (5) була поставлена А. М. Колмогоровим і розв'язана І. М. Гельфандом (1939) у випадку, коли ця група є обмеженою. У статті Горбачук (2015) зазначену проблему розв'язано в загальному випадку.

Очевидно тоді, що зі збіжності ряду (5) випливає можливість продовження  $U(t)x$  до цілої вектор-функції  $U(z)x$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , і якщо оператор  $A$  неперервний у  $\mathfrak{B}$ , то  $U(z)x$  є експоненціального типу для будь-якого  $x \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$ . Це, узагалі кажучи, не так у випадку необмеженого  $A$ . У статті Горбачук (2015) наведено умови на вектор  $x \in \mathfrak{B}_1$ , за яких  $U(z)x$  має скінченний порядок росту і скінченний тип.

Проблема існування щільної в  $\mathfrak{B}$  множини  $\mathfrak{B}_2$ , на елементах якої існує границя (6), була поставлена Е. Хілле у 1946 р. для сильно неперервних півгруп (Хілле, 1951). Як було сказано ним, «поширити формулу (6) на сильний випадок мабуть надзвичайно важко; імовірно, що навіть при

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}} D(A^n)$$

границя (6) не завжди існує». Справді, неважко навести приклад  $C_0$ -півгрупи, для якої ця границя існує лише для  $x = 0$ . У статті Горбачук (2015) доведено, що для  $C_0$ -групи  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  границя (6) існує тоді і тільки тоді, коли  $x \in \mathfrak{B}_1$  (а отже,  $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ ), і вона є не що інше, як сума ряду (5).

#### Список посилань

- Abel, N. H. (1826). Untersuchungen über die Reihe  $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$  u.s.w. *J. Reine Angew. Math.*, 1, 311–339.
- Banach, S. (1920). Sur l'équation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . *Fundamenta Mathematicae*, 1(1), 123–124.
- Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première Partie. Analyse Algèbrique*.
- Euler, L. (1728). Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. *Comment. Acad. Sci. Petropolit.*, 3, 124–137.
- Gramegna, M. (1910). Serie di equazioni differenziali lineari ed equazioni integro-differenziali. *Atti Reale Acad. Sci. Torino*, 45, 291–313.
- Hadamard, J. (1924). Le principe de Huygens. *Bull. Soc. Math. France*, 52, 610–640.
- Lagrange, J. L. (1772). Nouvelle espèce de calcul. *Nouv. Mèm. l'Académie Rouale Sci. et Belles-Lettres*, 3, 185–218.
- Peano, G. (1887). Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari. *Atti Reale Acad. Sci. Torino*, 22, 293–302.
- Sierpiński, W. (1920). Sur l'équation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . *Fundamenta Mathematicae*, 1(1), 116–122.
- Stone, M. H. (1932). On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Annals of Mathematics*, 33, 643–648.
- Гельфанд, И. М. (1939). Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве. *Доклады АН СССР*, 25(9), 713–718.
- Горбачук, В. М. (2015). Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора. *Український математичний журнал*, 67(5), 592–601.
- Хилле, Э. (1951). *Функциональный анализ и полугруппы*. Москва: Изд-во иностр. лит.

# Математичні форуми, присвячені науковій діяльності визначного українського математика В. К. Дзядика (18.02.1919—26.10.1998) (до 100-річчя з дня народження)

П. В. Задерей, Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*  
[zadereyv@ukr.net](mailto:zadereyv@ukr.net), [zadereynm@gmail.com](mailto:zadereynm@gmail.com), [g.nefodova@gmail.com](mailto:g.nefodova@gmail.com)

18.02.2019 року виповнилося 100 років від дня народження видатного українського математика член-кореспондента НАН України Владислава Кириловича Дзядика. Стаття присвячена науковим форумам на честь відомого українського вченого, авторитет якого в розвитку школи з теорії наближення функцій є незаперечним та визнаним математичною спільнотою. Дослідження в цій галузі математики продовжують його учні.

**Ключові слова:** математичні форуми, українська математична школа, теорія наближення функцій, педагогічна та наукова діяльність.



Владислав Кирилович Дзядик — відомий український математик, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України довгий час жив і працював на Волині. Після закінчення Дніпропетровського університету в 1951 році за розподілом учителює в Луківській середній школі на Волині, де викладає математику, фізику, астрономію та німецьку мову.

Селище міського типу Луків, що за 29 км від райцентру Турійськ, раніше мало назву Мацеїв, за прізвищем колишнього власника — шляхтича Мацейовського. Там зберігся графський палац з парком, церква святої Параскеви 1723 року, костел Анни та Станіслава XVI—XVII сторіччя, будівля синагоги.

У Луцькому педінституті в той час кафедрою математики завідував професор С. І. Зуховицький (1908—1994), завдяки клопотанням якого, попри великі труднощі, В. К. Дзядика було прийнято на посаду асистента кафедри математики. У післявоєнні роки можновладці допускали Владислава



Церква Св.Параскеви у Лукові (1723 р.)



Костел Св. Анни і Станіслава (XVI ст.), село Луків

Кириловича лише до роботи у школі, ставлячи йому у провину перебування під час війни на роботах у Німеччині. Владиславу Кириловичу було 34 роки, коли він вперше переступив поріг Луцького педагогічного інституту імені Лесі Українки як викладач і почав проводити практичні заняття з математичного аналізу за професором С. І. Зуховицьким.

У Луцьку повною мірою розкрився могутній математичний таланти Владислава Кириловича. Його наснага та професійна наполегливість були зразком для студентів і колег. Працюючи в Луцькому педінституті імені Лесі Українки та виконуючи велике педагогічне навантаження, що складало біля 700 годин, Владислав Кирилович успішно склав за сім місяців чотири кандидатські іспити, захистив у 1955-му році кандидатську дисертацію, а вже в 1960-му році — докторську дисертацію.

Слід зазначити, що захисти кандидатської та докторської дисертацій на фізико-математичному факультеті Луцького педінституту відбулися вперше.

У 1955 році Владислав Кирилович отримав запрошення від Дніпропетровського державного університету на кафедру теорії функцій, та керівники області і Луцького педінституту, розуміючи значення та важливість роботи В. К. Дзядика, домоглися покращення житлових умов сім'ї Владислава Кириловича. За клопотанням ректора педагогічного інституту Д. М. Цимбалюка та допомоги першого секретаря Волинського обкому партії І. С. Грушецького вченому було виділено квартиру на вулиці Леніна 15, нині це проспект Волі.

В. К. Дзядику вдалося заснувати та розвинути потужну кафедру математичного аналізу в Луцькому педінституті імені Лесі Українки. Його педагогічні таланти сприяли розкриттю математичних здібностей випускників педінституту та вибору ними напрямку математичних досліджень. Серед його учнів були Р. М. Ковальчук (випуск 1956 року), О. І. Швай (1956), В. О. Панасович (1956), В. І. Горбачук (1957), В. Й. Горбайчук (1957), П. Є. Антонюк (1957), В. І. Білий (1960), більша частина з них надалі захистили кандидатські дисертації під керівництвом Владислава Кириловича.

В. К. Дзядик дуже любив місто Луцьк, навіть після від'їзду до Києва в 1960 році, він часто приїздив до Луцька, читав спецкурси, лекції, проводив консультації для викладачів і студентів. Владислав Кирилович часто згадував Волинь, казав, що в Луцьку пройшли кращі роки його життя.

На волинській землі, у мальовничому селі Світязь пройшла Всесоюзна математична школа «Теорія наближення функцій» (31.08—8.09. 1989 р.), присвячена 70-річчю член-кореспондента АН УРСР В. К. Дзядика. Організаторами



С. М. Нікольський (Росія), З. Чисельський (Польща), В. К. Дзядик 1987 р.



Інститут математики НАН України,  
співробітники відділу теорії функцій(18.02.1989)

були АН УРСР, товариство «Знання» та Луцький пединститут імені Лесі Українки. Владислав Кирилович дуже радів зустрічі з багатьма відомими математиками, а дорогою з Любомля до Ковеля відвідав село Луків, у якому свого часу вчителював.

У роботі всесоюзної математичної школи взяло участь 143 вчених, серед яких 28 докторів фіз.-мат. наук та 95 кандидатів фіз.-мат. наук. Були представники 32 міст та 10 республік, які колись входили до складу СРСР. Серед присутніх потрібно відзначити член-кореспондента АН СРСР (з 1981 р.), пізніше академіка РАН Петра Лаврентійовича Ульянова, авторитет якого в теорії функцій є незаперечним, а також його учня професора Е. О. Стороженко, завідувача кафедрою теорії функцій Одеського університету, професора Б. С. Кашина

Академік П. Л. Ульянов, який є

учнем Н. К. Барі, довгий час завідував кафедрою теорії функцій Московського державного університету, працював в експертній раді ВАК СРСР з математичного аналізу. Пізніше цю кафедру очолював професор Б. С. Кашин, нині академік РАН (з 2011 р.), головний редактор журналу «Математические заметки».

Серед присутніх на Всесоюзній математичній школі, що проходила біля перлини Волині — озера Світязь, були професор, доктор фіз.-мат. наук, декан фізико-технічного факультету Московського інституту електронної техніки (м. Зеленоград) Бугров Я. С., доктор фіз.-мат. наук, професор Голубов Б. І. (МФТІ).

У роботі школи приймали участь багато учнів В. К. Дзядика, а саме професор О. І. Степанець, професор Ю. І. Волков, професор І. О. Шевчук, А. П. Голуб, В. В. Ковтунець, В. М. Коновалов, Ю. І. Мельник, П. Н. Денисенко, В. Біленко, Л. І. Філософ та інші. Виступили зі змістовними та цікавими доповідями спеціалісти з теорії функцій: В. К. Дзядик, О. І. Степанець (Київ), І. О. Шевчук (Київ), П. Л. Ульянов (Москва), Б. С. Кашин (Москва), В. І. Буслаєв (Москва), К. І. Осколков (Москва), Н. П. Тіман (Дніпро), В. Кротов (Мінськ), В. Т. Шевалдін (Уральський математичний центр), Е. О. Стороженко (Одеса) та інші.



Свідченням визнання значних успіхів та досягнень українського математика В. К. Дзядика стала наступна II Міжнародна конференція з теорії наближення функцій та її застосувань, присвячена його пам'яті. Ця конференція відбулася в Києві 23—31 травня 1999 року. У ній взяло участь 130 вчених з багатьох країн світу. Доповідачами були науковці з України, Туреччини, Франції, Польщі, Росії, Ізраїлю, Китаю, Єгипту, США, Румунії, Канади, Німеччини, Болгарії.

В 2009 році світова математична спільнота відзначили 90-річчя від дня народження талановитого українського вченого В. К. Дзядика. Цій події було присвячено III Міжнародну конференцію «Функціональні методи в теорії наближення і теорії операторів III», присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919 — 1998), що відбулася 22—26 серпня 2009 року в селі Світязь Волинської області. Учасниками конференції були вчені з багатьох країн світу: Ізраїль, Франція, Туреччина, Іран, Єгипет, Німеччина, Білорусь, Росія, Литва, Польща, Україна, Швеція, Угорщина, Абхазія, Казахстан, Іспанія, Естонія, Азербайджан, Індія. Були присутні дружина та син вченого.

Програмний комітет очолював академік РАН С. М. Нікольський (1905—2012), якого Владислав Кирилович Дзядик уважав своїм учителем. На конференції було зроблено 124 доповіді. Працювало дві секції. Секціями керували відомі вчені професор Ф. Абдулаєв (Туреччина), професор В. Ф. Бабенко (США), академік О. В. Бесов (Росія), професор Я. Гілевич (Франція), професор Д. Левітан (Ізраїль), академік С. В. Конягін (Росія), професор І. О. Шевчук (Україна), професор М. О. Скопіна (Росія), професор Р. М. Тригуб (Ізраїль), професор А. С. Романюк (Україна), професор Н. Gronska (Німеччина), професор А. С. Сердюк (Україна), професор М. П. Тіман (Україна), професор В. І. Буслаєв (Росія), професор Х. Й. Кучмінська (Україна), професор С. О. Теляковський (Росія), професор Ю. А. Фарков (Росія), професор М. Н. Шеремета (Україна).

Конференція проходила на базі спортивно-оздоровчого табору «Гарт», на березі найбільшого озера України Світязь. На конференції панувала тепла наукова дружня атмосфера, було багато творчих дискусій, незабутніх зустрічей, важливо, що була присутня велика кількість молодих науковців, які розвивають та поширюють наукові ідеї та методи В. К. Дзядика.

У 2019 році планується провести IV Міжнародну конференцію, присвячену 100-річчю від дня народження українського математика В. К. Дзядика, який все життя горів великою любов'ю до математики, виховав цілу низку талановитих учнів, був прикладом наполегливого вченого та чудової людини.

#### Список літератури

- Gaier, D. (1980). *Vorlesungen über Approximation im Komplexen* (Vol. 38). Basel: Birkhäuser.
- Антонюк, О. П. (2017). Становлення математичної школи в Луцькому педагогічному інституті. У *Матеріалах XVIII Міжнародної конференції імені академіка Михайла Кравчука*, Луцьк — Київ, 7—10 жовтня (с. 171—174). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Гайер, Д. (1986). *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*. Москва: Мир.

- Ілляшенко, В. Я. (2017). Владислав Кирилович Дзядик — гордість української математики. У *Матеріалах XVIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука*, Луцьк — Київ, 7—10 жовтня (с. 267—273). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Тези доповідей (2009). *Конференція «Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів III», присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919—1998)*. Київ: Інститут математики НАН України.

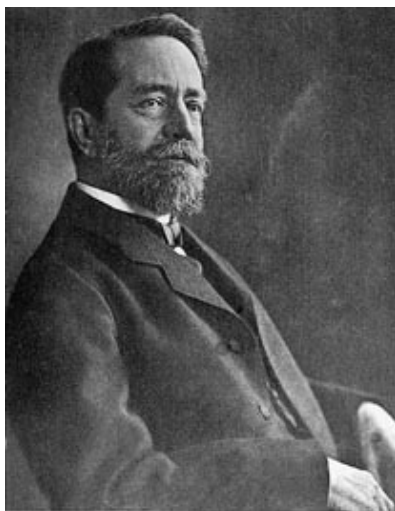
**Фелікс Клейн — видатний математик, педагог,  
реформатор математичної освіти  
(25.04.1849—22.06.1925)**

**В. Я. Ілляшенко**

*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,  
Луцьк, Україна  
iraform.16@gmail.com*

Стаття присвячена характеристиці життєвого шляху та науково-педагогічної діяльності видатного математика Ф. Клейна (1849—1925).

**Ключові слова:** група перетворень, простір Клейна, теорія інваріантів, проблема уніформації, групи Клейна.



Ф. Клейн (Ф. Кляйн, Felix Christian Klein) належить до класиків математики та математичної освіти. Його ідеї суттєво збагатили обидві ці сфери інтелектуальної людської діяльності, визначили сучасний облік як самої математики, так і методики її викладання у вищій та середній школах.

Ф. Клейн народився 25 квітня 1849 року в Дюссельдорфі, в родині чиновника. Тут він закінчив гімназію. У 1865 році поступив в Боннський університет. Вже на наступний рік професор Юліус Плюкер (1801—1868) залучив сімнадцятирічного студента як асистента з фізики. Плюкер починав свою наукову діяльність як геометр, але поступово переключився на заняття експериментальною фізикою

Проте в останні роки життя, після десятирічної перерви, Плюкер повернувся до геометрії. «Цей поворот відіграв вирішальну роль у моєму власному розвитку» — писав Клейн. Видання останнього, посмертного, мемуара Плюкера (1869) було підготовлено Ф. Клейном.

Дисертацію з геометрії Клейн захистив у 1868 р. і його перша публікація (1869) була геометричною (присвячена геометричному дослідженню поверхні Куммера) (Бородін & Бугай, 1973).

Після смерті свого вчителя Клейн відвідує основні математичні центри Німеччини (Геттінген, Берлін), встановлює особисті контакти з Клебшом (1833—1872), Вебером (1842—1913), Веерштрасом (1815—1897), знаходить друзів серед однолітків. Щасливою була дружба Фелікса з видатним норвежцем Софусом Лі (1842—1899), з яким вони познайомились у 1870 році в Берліні, коли Лі робив лише перші кроки в геометрії (Яглом, 1977).

У 1870 р. Клейн та Лі їдуть в Париж, де вони знайомляться з Дарбу (1842—1917) і Жорданом (1838—1922). Особливе значення для подальшої наукової долі Клейна та Лі мали зустрічі з Камілом Жорданом. У 1870 р. вийшла

велика праця Жордана з теорії скінченних груп, яка привернула увагу до робіт Галуа (1811—1832).

Після початку франко-прусської війни Клейн змушений був повернутись до Німеччини, оскільки захворів тифом. Після хвороби він приїжджає до Ерлангену. Для Клейна настає час великих звершень.

У 1869 р. Клейн познайомився з теорією Келі (Артур Келі (1821—1895) — англійський математик, автор «Шостого мемуара про форми» (1859 р.), у якому вперше виокремлено евклідову геометрію з проективної, запроваджено так звані метрики Келі). Дещо пізніше він вивчає геометрію Лобачевського. У нього виникає думка, що одна з метрик Келі приводить до геометрії Лобачевського. У лютому 1870 р. Ф. Клейн, виступаючи на семінарі Веєрштраса з теорії Келі, вирішив повідомити про свою гіпотезу. Але його не зрозуміли, а Клейн ще був мало підготовлений захищати свою ідею.

Клейн далі працював, досконало вивчав неевклідову геометрію і переконався у правдивості свого припущення: йому вдалось побудувати модель геометрії Лобачевського, яку тепер називають моделлю Келі — Клейна. Клейн дослідив неевклідові геометрії, побудувавши моделі еліптичної геометрії Рімана, інших відомих на той час геометрій.

З відкриттям нових геометрій виникає питання: «Що таке геометрія?».

У 1872 р. Ф. Клейн висловив свою точку зору в лекції «Порівняльний огляд новітніх геометричних досліджень», яку він прочитав у зв'язку із вступом на професорську посаду в Ерлангенському університеті. Ця доповідь ввійшла в історію математики як «Ерлангенська програма» — найбільш відомий твір Ф. Клейна (1956).

Провідну ідею «Ерлангенської програми» Клейна найточніше охарактеризував Е. Картан (1869—1951), французький математик, автор праць з теорії неперервних груп, теорії диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії, заклав основи алгебричної теорії груп Лі. «Як відомо, основна ідея Ф. Клейна може бути пов'язана з найстародавнішими поняттями науки. Елементарна геометрія вивчає властивості фігур, які не залежать від їх часткового положення у просторі. Минуло немало століть, перш ніж це дещо невизначене формулювання було перекладено на точну мову: властивості, що вивчаються елементарною геометрією, є тими, що залишаються інваріантними відносно деякої сукупності перетворень, які утворюють групу рухів... Проективна геометрія... з точки зору Клейна є вивчення властивостей фігур, інваріантних відносно деякої сукупності перетворень (проективних перетворень), що утворюють групу.

Узагалі кожна група неперервних перетворень визначає самостійну геометрію... Таким чином одержується афінна геометрія, конформна або анналагматична геометрія, геометрія Лагера, ермітова і т. д. (Картан, 1956).

Отже, у відповідності з «Ерлангенською програмою» Клейна геометрія — це наука, що вивчає інваріанти груп геометричних перетворень.

«Ерлангенська програма», як писав Н. Бурбакі, завершила «Золотий вік» класичної геометрії. Число нових геометрій зростає, поступово геометрична

мова пронизує значну частину математики. Класична геометрія переросла себе, і з живої самостійної науки перетворилась в універсальну мову сучасної математики, що володіє виключною гнучкістю і зручністю.

Після «Ерлангенської програми» Клейн опублікував в наступні три роки більше 20 робіт з неевклідової геометрії, теорії груп Лі, теорії многогранників і еліптичних функцій. Він починає розробляти теорію алгебричних функцій — галузь, у якій працювали Гаус, Лежандр, Абель, Якобі, Веєрштрас, Ріман. Найбільш близьким Клейну були ідеї Рімана (1826—1866). Клейн бачив своє завдання в поєднанні ідей Рімана та Галуа — тобто в проникненні теорії груп у геометричну теорію функцій комплексної змінної. На думку Клейна, це було головним в його науковій діяльності.

Він почав працювати над проблемою уніформації. Розглядаючи важливі випадки, він сподівався з часом розібратись і з загальною задачею. Але в 1881 році Ф. Клейн виявив серію статей невідомого на той час французького математика Анрі Пуанкаре (1854—1912), який по суті проблему уніформації розв'язав. (Слід зауважити, що загальна проблема ще фігурувала серед проблем Гільберта (1900 р.) і була повністю розв'язана в 1907 р. незалежно Пуанкаре і Кебе). Цю драматичну подію Клейн зустрів гідно. Він почав переписку з Пуанкаре. Вони обмінялись 26 листами. Клейн, уже відомий математик, виступив у ролі тактовного вчителя. Він знайомить Пуанкаре з теорією Рімана, про яку той не мав уявлення, але відразу засвоїв.

Клейн, змагаючись з Пуанкаре, поліпшує доведення основного результату і накреслює його узагальнення (1882 р.). Остаточний результат у цьому змаганні був нічийним.

Ця історія закінчилась для Клейна сумно: він підірвав своє здоров'я. Як писав він: «Тільки до осені 1884 р. мій стан дещо поліпшився, але попереднього ступеня творчої активності я вже не досягнув ніколи.» (Гиндикин, 1975).

Досліджуючи дискретні групи, Клейн розглянув так звані групи многогранників і показав, що цими й близькими до них групами можна скористатися, узагальнюючи метод Гауса для алгебричного розв'язування рівнянь деяких видів. Він розглядав групи симетрій правильних многогранників тривимірного простору (1884).

З початку своєї кар'єри Ф. Клейн проявив рідкісне поєднання творчих і організаторських здібностей, а також яскраво виражене прагнення руйнувати бар'єри між чистою і прикладною наукою. Його інтереси стосувалися всієї математики. Геометрія, теорія чисел, теорія груп, алгебра і теорія інваріантів — усе було залучено до його головної роботи — розвитку й завершенню великих ідей Рімана в геометричній теорії функцій. Вінцем цієї роботи була його теорія автоморфних функцій (Кра, 1975).

Завдяки дослідженням Клейна, у математику ввійшли поняття «Клейнові групи» (назву запропонував А. Пуанкаре) та їх окремі випадки (фуксові групи, квазіфуксові, групи Шотки, вироджені групи та ін.), поверхня (пляшка) Клейна, простір Клейна та ін. (Виноградов, 1979, с. 874—878; 1985, с. 514—517).

З 1886 року Клейн працює в Геттінгені, університеті Гауса, Діріхле та Рімана. Завдяки йому це місто перетворилось у справжню столицю математики. З його ініціативи в Геттінген запрошують талановитих молодих математиків (серед них — Д. Гільберт, Г. Мінковський, Д. Гурвіц, Г. Вейль та ін.).

Клейн ніколи не припиняв цікавитись новими ідеями. Його лекції з математики, присвячені найрізноматнішим галузям математики, механіки, фізики, любили відвідувати всі, вони поширювались в інших наукових центрах Німеччини. Репутація Клейна привертала в Геттінген студентів з усіх країн світу, зокрема із США (в науковому журналі «Bulletin» Американського наукового товариства систематично публікувався список лекцій, що читались у Геттінгені). «Центр математичного життя був зосереджений на III поверсі аудиторного приміщення. Тут Клейн організував читальню... Книги розміщувались на відкритих полицях, до яких був вільний доступ студентів. На третьому поверсі, у коридорі, Клейн влаштував величезну колекцію математичних моделей. Тут перед лекціями завжди збирались студенти...

Лекції Клейна визнавались класичними. Як правило, приблизно за годину до лекції він приходив, щоб перевірити енциклопедичний список цитованої літератури, який за його вимогами готувався асистентом. Цей же час він використовував для остаточної чистки всіх неточностей, які могли залишитись у рукописі. Перш ніж почати лекцію, він обдумував план розміщення формул, діаграм, цитат. Під час лекції на дошці нічого не витиралось. До кінця на ній залишався повний конспект лекції, кожний квадратний сантиметр дошки був охайно заповнений згідно з логічним порядком.

На думку Клейна, студенти повинні були самостійно працювати над доведенням. Він давав лише його загальний план.

У відборі матеріалу для лекцій Клейн дотримувався характерного для нього величного плану: протягом курсу дати повне уявлення про всю величезну територію сучасної математики (Рид, 1977, с. 67—68).

Фелікс Клейн був не тільки видатним математиком, талановитим популяризатором математики, але й визначним реформатором математичної освіти світового масштабу, одним з ідейним натхненників і керівників реформаторського руху в галузі математичної освіти в Німеччині на межі XIX—XX століть, одним з авторів так званих «Меранських програм». Суть цих програм полягає в наступному: викладання математики повинне будуватися на основі врахування психологічних закономірностей засвоєння математичного знання; увесь навчальний матеріал повинен бути проникнутим ідеєю функціональної залежності величин у їх геометричному освітленні; учні повинні систематично знайомитись з прикладними питаннями математики

«... науково навчати — значить вчити людину науково думати, а не приголомшувати її з самого початку холодною, науково напруженою систематикою ... » (Клейн, 1987).

Проекти реформування шкільного й університетського викладання математики, розроблені під керівництвом і особистій участі Ф. Клейна, загальнови-

знані. Кращі його ідеї реалізовані, але деякі принципово важливі ідеї, що стосуються реформування геометричної освіти, рівноваги в розподілі навчального часу між гуманітарним і природничо-математичними циклами дисциплін, залишаються актуальними до цього часу.

Ф. Клейн був прихильником ширшої, ніж це було тоді, математичної освіти. Він уважав необхідним у викладанні приділяти увагу розкриттю логічних основ курсів, історичних зв'язків, ідей, фактів, методів (Клейн, 1937) ... . Так він уважав для себе необхідним і рекомендував це іншим, в тому числі майбутнім вчителям: «... значно в більшому степені, ніж це звичайно робиться, вказувати на історичний розвиток науки, на досягнення її великих основоположників. Такими роз'ясненнями я сподівався сприяти, я б сказав, вашій загальній математичній освіті: поряд зі знаннями деталей, які ви черпаєте зі спеціальних курсів, повинно зайняти своє місце розуміння логічних, історичних зв'язків цілого» (Клейн, 1987).

Многостороння організаторська і громадська діяльність Клейна.

Майже 50 років він був головним редактором одного з основних математичних журналів «*Mathematische Annalen*», керівником Математичного клубу, на засіданнях якого виступили з доповідями і молоді, і вже відомі вчені з різних країн. Він багато зробив для створення «Енциклопедії математичних наук», брав участь у виданні повного зібрання творів Гауса.

Своєрідною лебединою піснею Клейна були його «Лекції про розвиток математики в ХІХ столітті», які він читав у 1914—1919 роках у виданні посмертно його учнями Курантом і Нейгебауером (Клейн, 1937).

У передмові дана характеристика цих творів і самої особистості Клейна.

«Ці лекції є зрілим плодом багатого життя, проведеного в центрі наукових подій, виразом зворушливої мудрості і глибокого історичного розуміння, високої людської культури і майстерного дару викладу».

Ф. Клейн користувався величезним авторитетом серед вчених не тільки Німеччини, але інших країн. Так, наприклад, на перший конгрес математиків (Цюріх) Клейн був запрошений очолювати делегацію з Німеччини.

Угорська Академія Наук призначила (1905 р.) комітет по присудженню премії імені Я. Больяї математику, чиї досягнення за останні 25 років внесли найбільший вклад у розвиток математики, в склад якого входив Ф. Клейн.

Він представляв Геттінгенський університет в парламенті, був членом Берлінської АН, член-кореспондентом Санкт-Петербурзької АН.

22 червня 1925 року Ф. Клейн помер.

Д. Гільберт у короткій промові перед своїми колегами сказав: «... ця подія глибоко всіх схвилювала і сильно вплинула на нас. До вчорашнього дня Фелікс Клейн був з нами, ми могли зайти до нього в гості, вислухати його пораду, переконатися в тому, як жваво він цікавився нашими справами. Тепер це все закінчилось...» (Рид, 1977, 231).

Усе, що оточувало студентів і науковців у Геттінгені, було справою рук Клейна: багаточисленні технічні інститути, які вирости навколо університету,

хороші відносини з міністерством освіти, велика кількість важливих людей серед промисловців, зацікавлених в них. Вони втратили «великий дух, сильну волю і благородний характер». Близькі родичі і колеги, а також більшість його учнів знали, що за незламною природною стійкістю Клейна завжди стояла добра людська душа... На його могилі вони залишили простий надпис: «Фелікс Клейн. Друг, Щирий і Незмінний» (Рид, 1977).

Європейське математичне товариство заснувало в 2000 році премію імені Ф. Клейна, яка присуджується за практично корисні праці в галузі прикладної математики молодим математикам Європи (кожні 4 роки) до Європейського математичного конгресу.

Міжнародний комітет з математичної освіти встановив медаль Ф. Клейна.

Ім'ям Клейна названо Математичний центр у Німеччині.

12045 Клейн — астероїд, названий на честь науковця.

Користуючись 170-річним ювілеєм від дня народження Ф. Клейна, ми коротко розглянули його наукові й педагогічні ідеї, які свідчать про великий, не оціненний вклад цього вченого в розвиток науки, математичної освіти. Разом з тим, багате джерело математичних та методичних ідей, що містяться у працях Клейна, далеко не вичерпане, багато з них чекають свого розвитку і втілення у шкільну та університетську практику.

### Список літератури

- Бородін, О. І., & Бугай, А. С. (1973). *Біографічний словник діячів у галузі математики*. Київ: Радянська школа.
- Виноградов, И. М. (Ред.) (1979). *Математическая энциклопедия*. (Т. 2). Москва: Советская энциклопедия.
- Виноградов, И. М. (Ред.) (1985). *Математическая энциклопедия*. (Т. 5). Москва: Советская энциклопедия.
- Гиндикин, С. Г. (1975). *Феликс Клейн. Квант*, (12), 2—9.
- Картан, Э. (1956). Теория групп и геометрия. В А. П. Норден (ред.), *Об основаниях геометрии: Сборник*. Москва: Гостехиздат.
- Клейн, Ф. (1937). *Лекции о развитии математики в XIX столетии* (Ч. 1). (Б. Лившиц, А. Лившиц, Ю. Рабинович, Л. Тумерманн, перевод.). Москва: Гостехиздат.
- Клейн, Ф. (1956). Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская програма). В А. П. Норден (ред.), *Об основаниях геометрии: Сборник*. Москва: Гостехиздат.
- Клейн, Ф. (1987). *Элементарная математика с точки зрения высшей* (Т. 1—2). (4-е изд.) Д. А. Крыжановский (перевод.). Москва: Наука.
- Кра, И. (1975). *Автоморфные функции и клейновы группы*. Москва: Наука.
- Рид, Р. (1977). *Гильберт*. (И. В. Долгачев, перевод.). Москва: Наука.
- Яглом, И. М. (1977). *Феликс Клейн и Софус Ли*. Москва: Знание.



# Мария Гаэтана Аньези

Т. В. Маловичко

*Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина*  
[tatianamtv@rambler.ru](mailto:tatianamtv@rambler.ru)

Рассмотрены жизнь и родственные связи Марии Гаэтаны Аньези — математика, философа и филантропа.

**Ключевые слова:** Мария Гаэтана Аньези, семья.

В этом году исполнилось 300 лет со дня рождения женщины-математика Марии Гаэтаны Аньези (Maria Gaetana Agnesi, 16 мая 1718 — 9 января 1799), которая была математиком, философом и филантропом. Она была первой женщиной, написавшей учебник по математике, и первой женщиной, назначенной профессором математики в университете.



Аньези поселились в Милане в начале семнадцатого века. Джакомо Аньези, торговец тканями из провинциального города Верчелли, стал гражданином Милана в 1612 году, примерно через десять лет после его прибытия туда. К середине века его потомок Пьетро женился на местной жительнице по имени Прасседе Мариани, дочери Джузеппе, богатого торговца золотом и серебром. Сыновья Пьетро, Антонио и Джакомо, впоследствии стали крупными торговцами шелком. В 1717 г. после смерти своего дяди Джузеппе Мариани братья Аньези унаследовали значительное состояние, которое вместе с капиталом Аньези сделало семью одной из самых богатых среди городских купеческих семейств.

Джакомо женился на Джованне Кортиновис. У них было четверо детей. После его смерти в 1736 г. все наследство перешло к его сыну Пьетро (около 1692 — 19 марта 1752), отцу Марии Гаэтаны, так как у Антонио детей не было. На тот момент сестры Пьетро Джузеппа Тереза и Мария Антония уже ушли в монастырь, а второй сын Джакомо, Федерико, стал монахом-бенедиктинцем под именем Джузеппе Антонио и отказался от права наследования в обмен на пожизненную пенсию в 120 лир в год. Тем не менее, Пьетро не смог продолжить торговлю, как его отец и дядя. В своём завещании Джакомо обязывал Пьетро согласовывать все свои действия с дядей, а также поручал Антонио провести ряд важных финансовых операций. В ноябре 1739 года Антонио, оставшийся бездетным, назначил Пьетро наследником, но и теперь свобода действий Пьетро должна была быть строго ограничена: любые финансовые операции и инвестиции он должен был осуществлять под наблюдением и с одобрения своего младшего брата, монаха Джузеппе, которого Антонио называл своим «самым дорогим племянником» и которого он «всегда любил как сына». Джузеппе согласился выступить гарантом Пьетро. Джакомо и Антонио

явно имели серьезные сомнения относительно деловых качеств Пьетро и держали его в стороне от семейного бизнеса, который, по сути, закончился в 1739 г. смертью Антонио, и планировали для него другую карьеру. В качестве отправной точки Джакомо получил для него должность коадьютора в Тайной канцелярии (Cancelleria Segreta). В 1722 г. братья также приобрели палаццо в Пантано для Пьетро вместе с мебелью, каретами и лошадьми.

В 1717 г. Пьетро женился на Анне Бривиио (1699—1732). У них родились Мария Гаэтана (Maria Gaetana, 1718—1799), Джакомо Гаэтано (Giacomo Gaetano, 1719— до 1755), Мария Тереза (Maria Teresa, 1720—1795), Джузеппа Тереза (Giuseppa Teresa, 1723—?), Джиясинта Мария (Giacinta Maria, 1726— до 1755), Гаэтано Федерико (Gaetano Federico, 1727—1748) и Ипполита Мария (Ippolita Maria, 1729—1773). Анна умерла во время родов 12 марта 1732 г., при этом новорожденная дочь не выжила. В 1734 г. Пьетро женился на Марианне Пецци (1714—1737), от которой имел двух сыновей: Джузеппе Карло (Giuseppe Carlo, 1735—1818) и Джакомо Антонио (Giacomo Antonio, 1736—1764). Марианна также преждевременно умерла в 1737 г., вероятно, от туберкулеза. В 1739 г. Пьетро женился на Антонии Бонати (1714—1789), которая пережила его и родила ему 11 детей: Паоло Мария (Paolo Maria, 1741— до 1755), Антонио Гаэтано (Antonio Gaetano, 1742—?), Анна Мария (Anna Maria, 1743—?), Анжела Мария (Angela Maria, 1744—?), Джованни Мария (Giovanni Maria, 1745— до 1755), Кристофоро Луиджи (Cristoforo Luigi, 1746 — 1748), Джованни Лука (Giovanni Luca, 1747—1748), Джузеппа Мария (Giuseppa Maria, 1749—?), Джиясинта Мария (Giacinta Maria, 1750— до 1755), Паола Джузеппа (Paola Guiseppa, 1751—1824) и Пьетро Луиджи (Pietro Luigi, 1752—1773) (Mazzotti, 2007).

Таким образом, Пьетро был отцом двадцать одного ребёнка, причём многие из его детей умерли в младенчестве. По данным налогового отчета от 1755 г. на тот момент в живых осталось 13 его детей. Все жены Пьетро происходили из солидных купеческих семей и имели хорошее приданое от 12000 до 18000 лир. Из его дочерей четверо ушли в монастырь, Мария Тереза и Анна Мария вышли замуж, в то время как Паола Джузеппа осталась незамужней.

Наиболее известной из сестёр Марии Гаэтаны стала Мария Тереза, которая была композитором и клавесинисткой. Она родилась 17 октября 1720 года. Будучи еще подростком, она выступала в своем доме, пока ее старшая сестра участвовала в диспутах. Многие из её сочинений были утеряны, хотя имеются сведения о том, что они когда-то существовали. Она написала семь опер, три из которых были основаны на ее собственных либретто. Её театральный дебют стал известным событием. Это была пасторальная кантата «Il Ristoro d'Arcadia», поставленная в Милане в 1739 году. В числе её покровителей были императрица Мария-Терезия и Мария-Антония Вальпурга, вдова курфюрста Саксонии, которая сама была талантливым композитором. Есть сведения, что императрица пела на одном из концертов Марии Терезы в 1747 году. В 1752 году Мария Тереза вышла замуж за Пьера Антонио Пиноттини. Детей у них не

было. Мария Тереза умерла 19 января 1795 года. Ее портрет висит в театральном музее Ла Скала.

Мария Гаэтана Анъези родилась в Милане 16 мая 1718 г. Свои необыкновенные способности она проявила очень рано. К пяти годам она говорила по-французски, к десяти годам освоила греческий, иврит, испанский, немецкий и латынь. В подростковом возрасте Мария Гаэтана освоила математику (Riddle, 2019). Стремясь поднять свой социальный статус, её отец настаивал на том, чтобы она и её сестра Мария Тереза выступали перед гостями. Мария Гаэтана говорила о науке и философии на разных языках, а её сестра исполняла музыку, зачастую собственного сочинения. Мария Гаэтана была очень застенчивой по натуре и не любила эти встречи, но продолжала участвовать в домашних собраниях, чтобы угодить своему отцу до самой смерти ее матери.

В возрасте двенадцати лет Мария Гаэтана перенесла загадочную болезнь, что было, вероятно, связано с ее чрезмерным обучением, и ей были предписаны энергичные танцы и катание на лошадях. Мария Гаэтана так усердно выполняла эти рекомендации, что у нее начались сильные судороги, схожие с приступами эпилепсии. После этого ей рекомендовали умеренность в упражнениях, и со временем её здоровье восстановилось.

В 1738 году она опубликовала сборник сложных эссе по естествознанию и философии под названием *Propositiones Philosophicae*.

Пьетро Анъези всячески мотивировал свою дочь в изучении математики и пообещал ей, что, если она продолжит свои исследования в области математики, ей будет разрешено заниматься любой благотворительной деятельностью. В дополнение к ее выступлениям и урокам, ее обязанностью было заниматься обучением своих братьев и сестер. Мария Гаэтана была крайне религиозной и хотела уйти в монастырь. Её отец отказался исполнить это желание, но согласился дать ей возможность избегать любых взаимодействий с обществом и полностью посвятить себя изучению математики.

Учителем Марии Гаэтаны стал Рамиро Рампинелли (1697—1759), монах, который ранее был профессором математики в Риме и Болонье, приезжал в Милан и часто посещал дом Анъези. Она с благодарностью вспоминала его в предисловии к своей книге.

К двадцати годам она начала работать над своей самой важной работой «*Instituzioni Analitiche per la gioventù d'Italia*», связанной с дифференциальным и интегральным исчислением. Говорят, что она начала писать «*Instituzioni analitiche*» как учебник для своих братьев, что затем переросло в более серьезный труд. Когда ее работа была опубликована в 1748 году, она вызвала сенсацию в академическом мире. Это была одна из первых и наиболее полных работ по конечному и бесконечно малому анализу. Вклад Марии Гаэтаны в математику заключался в том, что она систематизировала работы различных математиков и добавила собственную интерпретацию.

Свою самую крупную работу Мария Гаэтана писала на итальянском языке для собственного удовольствия и для своих братьев. При этом она использовала

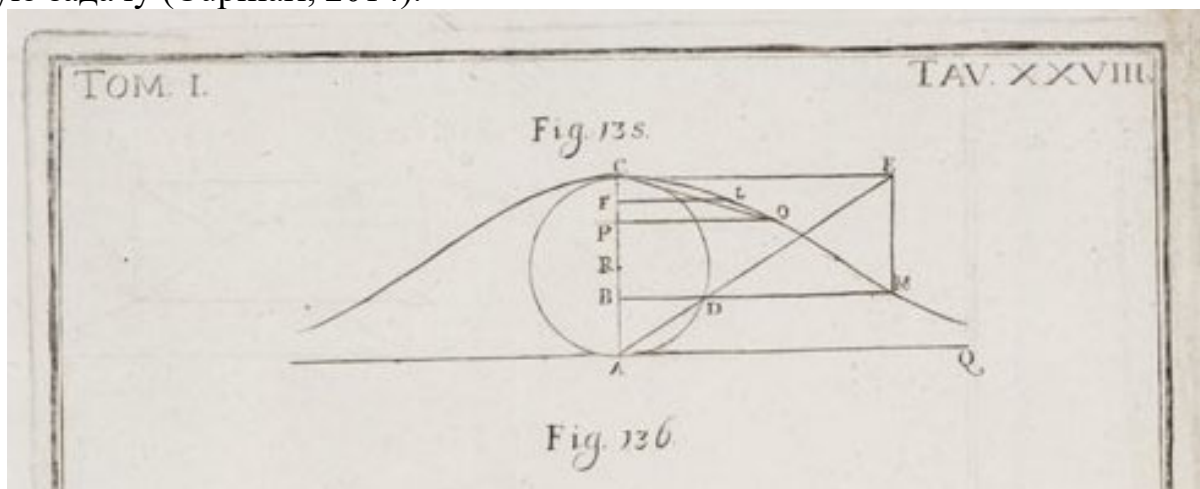
не свой родной диалект, а тосканский, который более близок к латыни и который лёг в основу литературного языка Италии (Truesdell, 1989).

Эта книга, напечатанная в частном порядке, с тех пор служит моделью математической типографии. Мария Гаэтана так тщательно следила за набором и оформлением, что некоторые из печатных станков типографии Stampatore Richini были перевезены в дом Анъези, где Мария Гаэтана обучала наборщиков работе с математическими символами и графиками (Cupillari, 2014).

По поводу своей книги Мария Гаэтана вела обширную переписку с Якопо Франческо Риккати (1676—1754), который даже высылал Марии отредактированные рукописи, чтобы она включила их в будущую книгу.

Первый раздел «Instituzioni analitiche» посвящен анализу конечных величин. В нем также рассматриваются максимумы, минимумы, касательные и точки перегиба. Во втором разделе обсуждается анализ бесконечно малых величин. Третий раздел посвящен интегральному исчислению. Последний раздел посвящен дифференциальным уравнениям.

В частности, в своей книге Мария Гаэтана исследовала кривую, названную затем её именем, а именно, локон или верзьеру Анъези, рассматривая следующую задачу (Cupillari, 2014).



Изображение локона Анъези, приведенное в «Instituzioni analitiche»

Дана полуокружность  $ACD$  с диаметром  $AC$ . Требуется найти вне её точку  $M$  такую, что если провести перпендикуляр  $BM$  с диаметру  $AC$ , который пересечёт полуокружность в точке  $D$ , будет иметь место соотношение

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}.$$

А поскольку таких точек бесконечно много, требуется описать кривую, которую они образуют.

Пусть  $M$  — одна из этих точек. Если обозначить  $AC = a$ ,  $AB = x$ ,  $BM = y$ , то из соотношения

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

где  $AB = x$ ,  $BC = a - x$ , получим

$$BD = \sqrt{x(a-x)},$$

откуда, учитывая, что в силу подобия треугольников

$$\frac{MD}{BD} = \frac{a-x}{x},$$

имеем

$$y = \frac{a}{x} \sqrt{x(a-x)}.$$

Если, как обычно, обозначить буквой  $x$  абсциссу, а буквой  $y$  ординату, то это уравнение запишется в привычном для нас виде как

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}.$$

Хотя эта кривая не является ни наиболее сложной, ни наиболее важной среди рассмотренных в данной работе кривых, именно она прославила имя Марии Гаэтаны Аньези.

В тексте эта кривая названа верзьерой, но итальянское слово *versiera/aversiera*, производное от латинского *adversarius*, имело также значение «ведьма». Возможно, по этой причине кембриджский профессор Джон Колсон, переводивший труд Аньези на английский, неправильно перевёл это слово, в результате чего в литературе на английском языке кривая часто именуется «the witch of Agnesi», что крайне несправедливо по отношению к Марии Гаэтане, которая всю жизнь была ревностной католичкой.

Мария Гаэтана посвятила свою работу Марии Терезии, эрцгерцогине Австрии, которая наградила ее шкатулкой, украшенной бриллиантами и кольцом.

Папа Бенедикт XIV, покровитель Болонской академии, прислал Марии Гаэтане тёплое письмо, в котором написал, что в молодости он тоже изучал математику и что после прочтения оглавления ее работы он мог видеть, что она была одним из великих «профессоров анализа», что будет способствовать росту репутации Италии и его академии (Truesdell, 1989). В 1750 году он назначил ее на кафедру математики, естественной философии и физики в Болонье, хотя она никогда там и не работала. Она была второй женщиной, получившей звание профессора в университете. Первой была физик и врач Лаура Басси (1711—1778).

Ещё при жизни отца Мария Гаэтана жила в отдалённых комнатах, где дала приют обездоленным пожилым женщинам, за которыми собственноручно ухаживала. После его смерти в 1752 году Мария Гаэтана исполнила свою давнюю мечту, посвятив себя изучению богословия и заботе о бедных и больных. Математикой она больше не занималась. С 1771 по 1799 годы в течение 28 лет Мария Гаэтана руководила приютом для пожилых женщин *Pio Albergo Trivulzio*, который функционирует и поныне, и на содержание, которого она тратила всё своё состояние.

9 января 1799 года Мария Гаэтана Аньези умерла в бедности в приюте, директором которого была (O'Connor & Robertson, 1999).

В 1996 году в честь Марии Гаэтаны был назван астероид 16765 Аньези. Также в её честь назван кратер на Венере.

#### Список літератури

- Cupillari, A. (2014). Maria Gaetana Agnesi's other curves (More than just the witch). *Mathematics Magazine*, 87 (1), 3-13.
- Mazzotti, M. (2007). *The world of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1999). Maria Gaëtana Agnesi. <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Agnesi.html>
- Riddle, L. (2019). *Maria Gaetana Agnesi*. <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/agnesi.htm>
- Truesdell, C. (1989). Maria Gaetana Agnesi. *Archive for the History of the Exact Sciences*, 40(2), 113—142.

# Семья Георга Кантора

Т. В. Маловичко

*Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, Киев, Украина*

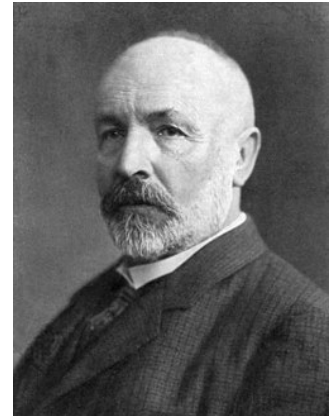
[tatianamtv@rambler.ru](mailto:tatianamtv@rambler.ru)

Рассмотрены родственные связи выдающегося математика Георга Кантора.

**Ключевые слова:** Кантор, семья.

В этом году исполнилось 200 лет со дня смерти великого математика Георга Кантора.

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле) — великий математик и философ. Наиболее известен как создатель теории множеств.



Кантор впервые определил сравнение произвольных множеств через понятие взаимно-однозначного соответствия. Он классифицировал множества по их мощности, определил понятия кардинальных и порядковых чисел, арифметику кардинальных и порядковых чисел. Теория Кантора о трансфинитных числах первоначально была воспринята как нарушение многовековых традиций и подверглась жёсткой критике.

Он обладал и музыкальными, и художественными способностями. Играл на скрипке, хотел стать скрипачом, но этому воспротивился его отец.

Георг Кантор умер 6 января 1918 года от сердечного приступа в психиатрической лечебнице города Галле, где лечился от депрессии.

Об отце великого математика известно немного. Даже его близкие мало знали о нём, сын не знал его возраста. Он никогда не называл имя своей матери. Пользовался фальшивым паспортом, уклонялся от налогов, скрывал свои доходы. Называя себя купцом третьей гильдии, он оставил своим детям огромное наследство. Его отличала восторженная религиозность.

Георг Кантор писал о нём: «Мой покойный отец, умерший в Германии в 1863 г., Георг Вольдемар Кантор, ребёнком приехал с матерью в Санкт-Петербург и сразу же был окрещён в лютеранство. Но родился он в Копенгагене (я не знаю точно в каком году, приблизительно между 1810 и 1815), родился у еврейских родителей, принадлежавших там к португальской еврейской общине, и, следовательно, видимо, испано-португальского происхождения» (Синкевич, 2012).

Отец его, Якоб Кантор, возможно, остался в Копенгагене. Видимо, он рано осиротел. Заботилась о мальчике родная сестра его матери Анастасия Гримм.

С 1833 или 1834 года он начал работать на Бирже. Ему было 19 лет, а маклером можно было стать лишь с 30 лет. Поэтому он пользовался паспортом с фальшивой датой рождения. Георг Вольдемар, начав торговлю в Петербурге как иностранный гость из Копенгагена, с 1835 г. приписал себя к Великому

княжеству Финляндскому как купец города Вильманстранда (ныне Лаппеенранта). Это делало его подданным Российской империи и давало немалые льготы в торговле.

О семье матери великого математика известно гораздо больше. Его дед Франц Людвиг Бём (1788—1848) был скрипачом-виртуозом (Синкевич, 2010). Родился он в Венгрии, в Пеште. Сохранился его контракт с Императорскими театрами от 1809 г., из которого известно, что Франц Бём занимал должность камер-скрипача и обязывался «играть концерты на скрипке и играть соло, во всех концертах, коих Императорская дирекция будет давать в городских театрах, так и при Императорском дворе». В 1811 г. Бём сам прервал этот контракт по болезни. До 1816 года он не служил, хотя с 1813 года давал в Санкт-Петербурге концерты. Ф. Бёма удержала в России любовь к чешке Марии Моравек, которая училась вместе с ним и Й. Бёмом игре на скрипке у П. Роде. Ф. Бём и М. Моравек стали выступать вместе и поженились в 1814 году. В 1816 г. Ф. Бём занял место первого скрипача. С 1819 по 1821 гг. Ф. Бём был учителем М. И. Глинки.

Йозеф Бём был младшим братом Франца. Он родился в 1795 г. в Вене. В 1821—1868 гг. был солистом Придворной капеллы в Вене. В 1819—1848 гг. был профессором Венской консерватории. Писал скрипичные пьесы. Й. Бём считается основоположником венской скрипичной школы. Известно, что его учениками были Й. Иоахим, Я. Донт, Э. Раппольди, Э. Ременьи и его племянник Людвиг Бём. В 1825 году Й. Бём исполнил соль-мажорный квартет Л. Бетховена в Вене по требованию самого автора.

Жена Франца Бёма, Мария Моравек, родилась в 1795 в Петербурге. Ее отец, Леопольд Моравек, был знаменитым метрдотелем (1788—1801) в Санкт-Петербурге при дворе Екатерины II и приехал из Вены для работы по контракту. Дети его были обеспечены и получили хорошее образование. Софья красиво и правильно писала на латыни, а Юстина в 1845 г. стала камер-фрейлиной великой княгини Марии Николаевны. Мария Моравек (1795—1823) училась играть на скрипке у самого Пьера Роде, который жил в Петербурге с 1803 до конца 1807 г. Мария и Катарина (1795—1845) были двойняшками. Мария Моравек была талантливой скрипачкой и с 1812 г. давала концерты в Петербурге, а также выступала вместе с Францем Бёмом, за которого в 1814 г. вышла замуж. От этого брака у Ф. Бёма родилось пятеро детей. Адольф (стал врачом), Анна (в 1835 г. была определена к княжне Марии Николаевне в камерюнгферы, т. е. в младшие фрейлины, а в 1853 г. получила звание домашней учительницы), Ма-



Франц Людвиг Бём



Йозеф Бём



рия (в будущем мать великого математика Георга Кантора) и София. Еще один ребенок, Францискус, в 1820 году умер младенцем.

Мария Моравек же играла скрипичные концерты с 1812 года, когда ей было 17 лет, хотя по тем временам, сольные концерты, которые давали девушки, были в новинку, тем более скрипичные. Концертировать она продолжала до 1821 года. В мае 1823 года Мария умерла в возрасте 28 лет от «грудной болезни», оставив четверых детей.

Сестра Марии, София Моравек (1798—1866), заботилась об осиротевших детях, и год спустя Франц Бём женился на ней. От нее у Франца родилось трое детей: Людвиг, Юлия и Максимилиан. Ф. Бём умер 16 февраля 1846 г. из-за «ослабления нервов».

Людвиг родился в Санкт-Петербурге 3 февраля 1825 года. С 12 лет выступал с отцом. С 1840 г. по 1844 г. учился в Вене у своего дяди Йозефа Бёма. В 1844 г. он был принят в Императорский оркестр в Петербурге на должность скрипача, а в 1864 г. стал первым скрипачом оркестра. Позже преподавал в Санкт-Петербургской консерватории. В 1867 г. он женился на Елизавете Меркурьевне Эндауровой (1843—1914), известной художнице. Работы Елизаветы Бём (изображения детей, рождественские и пасхальные открытки, силуэты) были популярны в конце XIX — нач. XX вв. Также она иллюстрировала журналы и книги, разрабатывала рисунки для изделий из хрусталя (<https://www.liveinternet.ru/users/4734325/post439785862/>).



Людвиг Бём



Елизавета Бём



Одна из работ Е. Бём

Дочь Франца Бёма и Марии Моравек, Мария Бём (1819—1896) была приветливой, жизнерадостной, несколько болезненной, играла на скрипке.

Дядя Георга Вольдемара Кантора по матери, Гартвиг Мейер, был скрипачом оркестра императорских театров, первой скрипкой которого являлся Франц Бём. Возможно, на одном из домашних концертов и познакомились молодые люди — Георг Вольдемар и Мария Бём. В 1842 г. они обвенчались.

В 1856 г. семья Канторов уехала из Петербурга в Германию. Георг Вольдемар не планировал отъезд навсегда — он взял отпуск на год для лечения от чахотки. Но переезд оказался окончательным. Георг Вольдемар Кантор умер в 1863 г. в Гейдельберге.

Есть упоминания, что в их семье было шестеро детей, из которых великий математик был старшим. Однако о двух из них информации найти не удалось, что вызывает сомнения в их существовании. У великого математика было два

брата и сестра: Людвиг Густав (Ludwig Gustav Cantor, 1846—1870), София (Sophie Nobiling, 1848—1931) и Карл Константин (Carl Constantin, 1849—1899). Константин был военным офицером в немецкой кавалерии и хорошим пианистом. София отлично рисовала.

9 августа 1874 г. Георг Кантор женился на Валли Гутман (Vally Maria Sophie Guttman, 1849—1923). Она была подругой его сестры Софии. Была она из купеческой семьи. В 10 лет осиротела и воспитывалась далее старшим братом Полом Гутманом (1834—1893) (Purkert & Ilgauds, 1985). П. Гутман с 1879 г. возглавлял большую больницу в районе Моабит Берлина, совместно с П. Эрлихом исследовал туберкулез и малярию.

Валли закончила Берлинскую консерваторию, была пианисткой и вокалисткой, потом работала учительницей музыки. Брак между ней и Георгом Кантором основывался на глубокой взаимной привязанности. У Канторов родилось шестеро детей: Эльза (Else, 1875—1954), Гертруда (Gertrud, 1877—1956), Эрих (Erich, 1879—1962), Анна-Мария (Anne-Marie Stahl, 1881—1920), Маргарита Фредерика (Margarethe, 1885—1956), Рудольф (Rudolf, 1886—1899).

Эрих Кантор изучал медицину и был врачом во время Первой мировой войны. Эльза была певицей и выступала с собственными концертами. Позднее она стала широко известным преподавателем музыки.

Гертруда вышла замуж за Эрнста Фалена (Ernst Heinrich Vahlen, 1865—1941), профессора Фармакологического института Университета Галле. Его отец Йоханнес Фален (1830—1911) был классическим филологом и ректором Берлинского университета им. Фридриха Вильгельма, а брат Карл Теодор Фален (1869—1945) был известным математиком и, увы, ярким сторонником нацистской партии, бригадефюрером СС. У Гертруды и Эрнста Фалена было двое детей: Ильзе Фален (1902—1937) и Райнхарт Фален (1917—1980).

Рудольф скончался от инфаркта, не дожив 4 дня до своего 13-летия. От этого удара Георг Кантор не оправился до конца жизни. В своём письме он отмечал высокие музыкальные способности Рудольфа.



Георг Кантор с женой Валли Кантор (Гутман)



Пол Гутман

#### Список літератури

Purkert, W., & Ilgauds, H. J. (1985). *Georg Cantor 1845–1918*. Basel: Birkhäuser.

Синкевич, Г. И. (2010). Бём. Семья скрипачей. *Musicus*, (5), 54—59.

Синкевич, Г. И. (2012). *Георг Кантор & Польская школа теории множеств*. Санкт-Петербург: СПбГАСУ.

# Українські вчені-математики — ювіляри 2019 року у науково-експозиційній роботі Педагогічного музею України

О. П. Міхно<sup>1</sup>, В. О. Гайдей<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Педагогічний музей України, Київ, Україна

<sup>2</sup>Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
[amihno@ukr.net](mailto:amihno@ukr.net)

У статті висвітлено план роботи Педагогічного музею України на 2019 рік, спрямований на відзначення ювілеїв українських математиків. Проаналізовано дві основні форми популяризації педагогічної спадщини видатних математиків: віртуальні музейні виставки та пости у соціальній мережі Facebook.

**Ключові слова:** Педагогічний музей України, українські математики, віртуальна виставка.

Жоден музей не може розвиватися без активної науково-експозиційної та культурно-освітньої роботи, адже ця діяльність є головною сполучною ланкою між музеєм і відвідувачем, дає змогу оперативно вводити в обіг наукові досягнення музею, реагувати на мінливі інтереси та потреби різних категорій відвідувачів. План роботи Педагогічного музею України на рік формується відповідно до місії музею — збереження, комплектування, систематизацію та дослідження фондів, наукову інтерпретацію та презентацію історії та сучасного стану української освіти та педагогічної думки — та з урахуванням наявності відповідних матеріалів у музейних фондах (Міхно, 2017, с. 195).

Світова тенденція розширення музейного простору шляхом застосування сучасних інформаційних технологій активно проникає і в українські музеї. Протягом 2019 року значну частину науково-експозиційної роботи Педагогічного музею України буде представлено у мережі Інтернет — на музейному сайті <http://pmu.in.ua> та на сторінці музею в соціальній мережі Facebook. Зокрема, це реалізація проектів «Музейна педагогіка в Україні» (створення електронного інформаційного ресурсу), «Музеї педагогів» та «Педагогічний календар 2019».

2019 рік надзвичайно багатий на знаменні й пам'ятні дати в галузі освіти й педагогічної науки, які відзначатимуться музеєм у формі виставок. З-поміж цих дат особливе місце посідають ювілеї видатних українських учених-педагогів, зокрема математиків. Ці ювілейні дати відзначатимуться музеєм у формі віртуальних виставок, які сьогодні користуються надзвичайно популярністю, оскільки відвідувачі мають змогу отримати інформацію, яка їх цікавить, без поспіху, часових або географічних обмежень, іншими словами, така виставка дає можливість, не виходячи з будинку чи офісу, відвідати її з максимальними зручностями. Віртуальні виставки Педагогічного музею України — це публічна демонстрація в мережі Інтернет віртуальних образів, спеціально підібраних музейних предметів (переважно книг і фото), представлених користувачам для огляду, ознайомлення та використання.

Структурно віртуальна виставка, підготовлена науковими співробітниками музею, складається, як правило, із двох частин: фото, коротка інформація про педагога та електронні копії його статей, книг, документів, що зберігаються у фондах музею. У зазначеному форматі на сайті музею протягом року заплановано відзначити ювілеї таких українських математиків-методистів: 100-річчя від дня народження **Олени Дубинчук** (1919—1994) та 140-річчя від дня народження **Олександра Астряба** (1879—1962).

У «Педагогічному календарі 2019» розміщуватиметься фотопортрет та стисла інформація про ювіляра. Для привернення уваги віртуального відвідувача фахівцями музею розроблено спеціальний графічний макет, який містить логотип музею, портрет ювіляра, роки його життя, ювілейну дату та коротку інформацію про наукові інтереси вченого. Цей графічний макет має досить просте, але водночас привабливе художньо-дизайнерське оформлення, яке покликане візуалізувати текстову інформацію. Наприклад:



У такому форматі в «Педагогічному календарі 2019» буде подано інформацію про українських математиків — ювілярів 2019 року: 125 років від дня народження **Миколи Єржківського** (псевдонім — Микола Очерет; 1894—1967), українського математика, педагога, публіциста (січень), 100 років від дня народження **Олексія Погорєлова** (1919—2002), українського вченого-математика, фахівця в галузі геометрії, теорії диференціальних рівнянь (березень), 160 років від дня народження **Самуїла Шатуновського** (1859—1929), українського математика, одного із фундаторів Одеської математичної школи (березень), 130 років від дня народження **Мирона Зарицького** (1889—1961), українського математика, педагога, одного з фундаторів української математичної культури (травень), 125 років від дня народження **Миколи Чеботарьова** (1894—1947), українського вченого-математика, автора вагомих досліджень у алгебричній теорії чисел, теорії Галуа, теорії груп Лі та теорії алгебричних функцій (червень), 160 років від дня народження **Бориса Букрєєва** (1859—1962), українського вченого-математика, педагога, засновника Київської геометричної школи та Київського математичного товариства (вересень).

Текст, який готує науковий співробітник музею до ювілею педагога в «Педагогічному календарі 2019», зазвичай досить короткий і містить найважливіші відомості з життя та творчої діяльності ювіляра, цікаві факти та акценти, які спонукають читача докладніше ознайомитися з біографією вченого на інших електронних ресурсах. Подаємо текст, який буде розміщено до ювілею Миколи Єржківського.

«Єржківський Микола Миколайович народився 1 січня 1894 у родині священика на Полтавщині. Середню освіту здобув у Прилуках, а вищу — на фізико-математичному факультеті Київського університету (1917).

Педагогічну діяльність розпочав у 1917 у середніх школах Полтавщини. Викладав математику у Баришевській, Березанській гімназіях, далі у Березанській 7-річній трудовій школі (1920) та на Березанських 3-річних Вищих педагогічних курсах (завідувач 1920—1923), далі працював київським окружним інспектором та секретарем профосвіти (1923—1929). У 1926—1927 працював у київських профшколах № 2, № 4. З 1929 — завідувач педагогічною частиною та викладач математики у 2-й кооперативній профшколі Києва. У 1930—1931 — викладач математики Київського книгарського технікуму, завідувач навчальною частиною Київських курсів підготовки викладачів для шкіл ФЗУ та лектор вищої математики цих курсів. З 1931 — заступник директора та завідувач навчальної частини Київського 1-го комбінату кооперативної освіти. У 1931—1932 — завідувач навчальної частини та лектор математики Київських вищих педагогічних курсів, штатний асистент кафедри математики Київського інституту профкооперації. У 1932—1935 — асистент математики Київського вечірнього освітянського університету, Київського українського педагогічного інституту, доцент Київського польського педагогічного інституту, Київського хіміко-технологічного інститут харчової промисловості.

У 1931—1934 у Київському інституті профкооперації працював разом з Михайлом Кравчуком. Зберіглася «Характеристика роботи М. М. Єржківського», власноруч написана та підписана М. Кравчуком, де зазначено: «Його викладання відзначалось ясністю, систематичністю, високими вимогами, об'єктивністю оцінки знань. Він вів значну роботу в кафедрі математики по виробленню програм, робітних планів, виступав з методичними доповідями, рецензіями підручників і т. ін.»

Під час Другої світової війни емігрував. У таборах для переміщених осіб в Німеччині і уже в США займався журналістсько-публіцистичною діяльністю під псевдонімом Микола Очерет. Друкувався в календарях-альманахах товариства «Відродження» (Буенос-Айрес, Аргентина), щоденнику «Свобода» (Джерсі-Сіті, США), тижневиках «Новий Шлях» (Вінніпег, Канада), «Народня Воля» (Скрентон, США), «Хлібороб» (Куритиба, Бразилія), «Українські вісті» (Ульм, Німеччина), часописі «Наш Клич» (Буенос-Айрес, Аргентина), «Прометей» (Нью-Йорк, США) та ін.

Уже перебуваючи в еміграції, М. Єржківський написав невеличкий допис-спогад про Миколу Зерова «Чи хто згадає?», де, зокрема, висвітлює власні погляди на роль і значення вчителя: «Адже ми вчителі, і, коли нас не згадають на-

ші учні, то винні в цьому будемо ми самі. Хто в цьому пункті вагається, той поганий учитель...» (Очерет, 1963, с. 80).

Помер у 11 квітня 1967 в м. Сиракузи у штаті Нью-Йорк, США.

Варто відзначити, що вищенаведена інформація про М. Єржківського вводиться в науковий обіг уперше завдяки невідомому популяризатору української математичної науки, професору Ніні Вірченко, яка передала у фонди Педагогічного музею України документи М. Єржківського, за якими і вдалося частково відтворити його життєпис і педагогічну діяльність як викладача математики ([http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/erzkivskii\\_125\\_rokiv/](http://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/erzkivskii_125_rokiv/)).

Підкреслимо, що в роботі музею популяризація педагогічної спадщини українських математиків посідає чільне місце. Крім створення ювілейних віртуальних виставок, значну увагу науковці приділяють участі у математичних конференціях, де виступають з доповідями, присвяченими життю та діяльності як відомих, так і призабутих українських математиків-педагогів (Гайдей & Міхно, 2016; 2018а; 2018б).

Отже, діяльність Педагогічного музею України у віртуальному інформаційному просторі допомагає відвідувачу поринути у світ історії освіти, відчути причетність до її традицій і цінностей. Створюючи електронні інформаційні ресурси, музей не лише забезпечує збереження й безпеку безцінних оригіналів своїх колекцій, а й сприяє відкритості та доступності електронних колекцій музейних експонатів для широкого кола науковців, освітян, усіх, хто цікавиться розвитком української школи та педагогічної науки. Тож протягом 2019 року будемо раді бачити старих і нових друзів у музеї, на музейному сайті та сторінці музею у соціальній мережі Facebook.

### Список літератури

- Гайдей, В. О., & Міхно, О. П. (2016). Особливості викладання математики у Харківській приватній жіночій недільній школі Христини Алчевської. У *Матеріалах XVII Міжнародної наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 19—20 травня* (Т. 3, с. 290—292). Київ: НТУУ «КПІ».
- Гайдей, В. О., & Міхно, О. П. (2018а). До 110-річчя від дня народження Михайла Гельфанда (1907—1991), українського математика-методиста. У *Матеріалах VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2017 р.* (с. 311—316). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Гайдей, В. О., & Міхно, О. П. (2018б). До 165-річчя від дня народження С. І. Шохор-Троцького (1853—1923), математика-методиста. У *Матеріалах VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2017 р.* (с. 317—320). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.
- Міхно, О. П. (2017). Науково-дослідна діяльність Педагогічного музею України у 2014—2016 рр. та її відображення у публікаціях науковців. У *Матеріалах наук.-практ. конф. «Всеукраїнський музейний форум», Переяслав-Хмельницький, 3—5 липня* (с. 195—197).
- Очерет, М. (1963). Чи хто згадає? У *Безсмертні: Збірник спогадів про М. Зерова, П. Филиповича і М. Драй-Хмару* (с. 79—81). Мюнхен: Інститут літератури імені Михайла Ореста.

# Енциклопедія з елементарної математики Гайнріха Вебера

О. В. Овчаренко

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[lenu\\_rum@ukr.net](mailto:lenu_rum@ukr.net)

У повідомленні коротко наведено історичні відомості про видання перекладу енциклопедії елементарної математики під редакцією Г. Вебера, його цікаві думки про завдання наукової освіти.

**Ключові слова:** енциклопедія з елементарної математики, елементарна математика, завдання наукової освіти.

У 2019 році виповнюється 110 років з часу видання перекладу (з німецької) знаменитої енциклопедії елементарної математики за редакцією Гайнріха Вебера. Видання було здійснене одеським видавництвом науково-популярної літератури «Mathesis». Вихід перекладу енциклопедії був не рядовою подією в історії математичної освіти, вона зіграла велику роль у становленні стандартів викладання математики. Оригінальна енциклопедія Вебера, тобто тритомне видання здійснене видавництвом Тойбнера (Verlag von W. G. Teubner) в Лейпцигу, мала назву «Encyklopädie der elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende». Її авторами були професори Г. Вебер, Р. Вебер, Й. Велштайн і В. Якобсталь. Перший том енциклопедії — «Елементарна алгебра та аналіз» вийшов друком в 1903 році (Weber & Wellstein, 1903; Вебер & Вельштейн, 1906), її другий том — «Елементарна геометрія» — в 1905 році (Weber, H., Wellstein, Jacobsthal, & Weber, R., 1905; Вебер, Г., Вельштейн, Якобсталь, & Вебер, Р., 1909; Вебер, Г., Вельштейн, Якобсталь, & Вебер, Р., 1910), а третій том «Застосування математики» — в 1907 році (Weber, H., Weber, R., & Wellstein, 1907). Загальний обсяг видання — 1850 сторінок.

Редактор енциклопедії і головний її автор Гайнріх Вебер (1842—1913) один з найбільш знаних німецьких математиків, відомий своїми працями з теорії Гаула, теорії еліптичних функцій, теорії алгебраїчних чисел, математичної фізики. Оцінкою заслуг Вебера в математиці було, зокрема, обрання його президентом третього Міжнародного математичного конгресу, який відбувся в Гейдельберзі (Німеччина) в 1904 році. Енциклопедія за редакцією Г. Вебера перевидавалася в Німеччині чотири рази, друге її видання (1906—1912) було розширене й перероблене, зокрема, третій том «Застосування математики» вийшов у двох книгах. Крім того, усі томи було доповнено історичними відомостями.

Одеським видавництвом було надруковано лише перші два томи енциклопедії. Чому не перекладався і не видавався третій том енциклопедії Вебера? Тут існує декілька припущень. Найімовірнішим є те, що за змістом третій том дуже далекий від елементарної математики у прийнятому значенні цього слова. Справді, цей том включав практично всю теоретичну механіку (аналітична статистика, динаміка), теорію електромагнетизму, геометричну оптику, задачі на максимум і мінімум (фактично основи варіаційного числення), основи теорії ймовірностей, теорію наближених обчислень, нарисну геометрію, основи теорії пружності, тощо. Можливо, також, що роботі над перекладом третього тому завадила Перша світова війна.

У передмові до перекладеного видання редактор В. Ф. Каган пише, що твори з елементарної математики чітко діляться на два типи: підручники за якими можна систематично вивчати предмет без попередньої підготовки, і трактати, що містять науковий виклад дисципліни й розраховані на підготовленого читача. Нові підручники з'являються досить часто, але значимі твори другого типу друкують раз на чверть століття, або й рідше. Поява нового трактату з елементарної математики свідчить про те, що в розробці й методиці викладання математики появилися нові течії, нові погляди на предмет; такі трактати ніби підсумовують працю цілого наукового покоління. Саме таким трактатом з елементарної математики є «Енциклопедія» Вебера. У передмові Г. Вебера до першого тому сказано, що видання не є підручником у власному значенні цього слова. Читачами, на яких розраховано енциклопедію, є, в першу чергу, учителі та викладачі, які знайдуть у ній корисні вказівки щодо вибору навчального матеріалу, а по-друге — особи, які вже «вивчають математику спеціально й серйозно і хочуть здобути для цього тверду основу шляхом поновлення і доповнення раніше здобутих елементарних знань» (Weber & Wellstein, 1903).

Цікаво пояснено і термін «елементарна математика». З цього приводу Вебер пише: «Під елементарною математикою ми розуміємо все те, що можна застосувати для викладання математики, у тому його періоді, який передуює вибору певної чіткої спеціалізації». Якщо пристати на таку точку зору, то межі елементарної математики значною мірою залежать від вибору, здійсненого педагогом, а думки із приводу такого вибору завжди були й повинні бути різними. Різниця залежить як від індивідуальних схильностей викладача, так і від цілей, на які викладання направлено. План освіти залежить від того, що вважати головним завданням наукової освіти, чи «всебічний гармонійний розвиток розумових здібностей, пробудження дрімотних сил та їх тренування», чи «повідомлення учням відомої суми корисних знань і навичок, які по-можливості раніше приготували б його до великої життєвої боротьби». Такий стан речей створює певне роздвоєння в математичній освіті і викладач, який прагне якнайкраще узгодити ці два підходи, повинен мати не лише ґрунтовні знання але й розуміння тонкощів і краси математики.

### Список літератури

- Weber, H., & Wellstein, J. (1903). *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Vol. 1. Elementaren Algebra und Analysis.* Leipzig: B. G. Teubner.
- Weber, H., Weber, R., & Wellstein, J. (1907). *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Vol. 2. Angewandte Elementar-Mathematik.* Leipzig: B. G. Teubner.
- Weber, H., Wellstein, J., Jacobsthal, W., & Weber, R. (1905). *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Vol. 2. Elementaren Geometrie.* Leipzig, B.G. Teubner.
- Вебер, Г., & Вельштейн, И. (1906). *Энциклопедия элементарной математики. Том 1. Элементарная алгебра и анализ.* Одесса: Матезис.
- Вебер, Г., Вельштейн, И., Якобстал, В., & Вебер, Р. (1909). *Энциклопедия элементарной математики. Том 2. Элементарная геометрия. Книга 1. Основания геометрии.* Одесса: Матезис.
- Вебер, Г., Вельштейн, И., Якобстал, В., & Вебер, Р. (1910). *Энциклопедия элементарной математики. Том 2. Элементарная геометрия. Книги 2, 3. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия.* Одесса: Матезис.



# IV

## СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

# Хмарні технології під час навчання вищої математики в сучасному технічному університеті

К. В. Власенко<sup>1</sup>, І. В. Сітак<sup>2</sup>, О. О. Чумак<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна

<sup>2</sup>Інститут хімічних технологій (м. Рубіжне) Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, Рубіжне, Україна

<sup>3</sup>Донбаська національна академія будівництва і архітектури,

Краматорськ, Україна

vlasenkokv@ukr.net

Проаналізовано стан розробленості проблеми застосування хмарних технологій під час навчання математичних дисциплін та з'ясовано, що в більшості випадків хмарні технології застосовуються для швидких розрахунків, спільного доступу до даних. Розглянуто використання хмарних програмних продуктів. Проаналізовано переваги залучення таких технологій під час навчання вищої математики у закладах вищої технічної освіти. Виокремлено особливості використання різних моделей хмар у навчанні вищої математики студентів технічних університетів. Визначено, що впровадження хмарних технологій у процес навчання вищої математики забезпечує позитивні тенденції у формуванні інформатичних компетентностей студентів завдяки постійній комунікації, своєчасному отриманню сучасних знань, високому рівню персоналізації електронної освітнього середовища.

**Ключові слова:** хмарні технології, навчання вищої математики, студенти технічних університетів, модель хмари.

Актуальність застосування хмарних технологій в освіті полягає в тому, що вони не тільки виконують функції інструментарію, що використовується для вирішення окремих педагогічних завдань, а й надають якісно нові можливості навчання, сприяють самостійній навчальній діяльності студентів, стимулюють удосконалення методик навчання математики в закладах вищої технічної освіти (ЗВТО), метою яких є формування інформатичних компетентностей студентів.

У сучасному світі характеристики програмного забезпечення змінюються та вдосконалюються кожного дня, тому заклади вищої освіти (ЗВО) не в змозі вчасно оновлювати свою технічну базу відповідно до швидкого розвитку комп'ютерної техніки. Така сама ситуація із програмним забезпеченням, удосконалення якого передбачає чималі матеріальні витрати на підтримку відповідного інформаційного обслуговування навчального процесу. Як показує досвід провідних університетів, розв'язати цю проблему можна за рахунок застосування хмарних технологій. Але впровадження таких технологій у навчальний процес ускладнюється тим, що більшість викладачів ЗВТО, зокрема викладачів вищої математики, не готові до використання хмарних технологій, оскільки не мають досвіду застосування зазначених технологій та не мають методичних рекомендацій для їх застосування.

Значний вклад у розроблення проблеми інформатизації суспільства, принциповим компонентом якої є використання інформаційно-комунікаційних тех-

нологій (ІКТ) у галузі науки й освіти, внесено В. Ю. Биковим. На думку науковця, подальша інформатизація науки в Україні має базуватись на концепції застосування хмарних технологій на всіх рівнях освіти (Биков, 2013, с. 97). Докладний аналіз розвитку хмарних технологій за останні 55 років і їхній зв'язок з розвитком ІКТ зроблено в дослідженні С. О. Семерікова, О. М. Маркової та А. М. Стрюка. За їхньою думкою, «хмарні технології (хмарні ІКТ) як різновид ІКТ можна визначити як сукупність методів, засобів і прийомів, використовуваних для збирання, систематизації, зберігання та опрацювання на віддалених серверах» (Маркова, Семеріков, & Стрюк, 2015, с. 39). Науковцями Шишкіною, Спіріним та Запорожченко (2012) окреслено перспективи використання хмарних технологій як платформи інформатизації сучасних освітніх систем та обґрунтовано психолого-педагогічні вимоги до засобів інформаційно-комунікаційних технологій навчального призначення у контексті проблем інформатизації сучасної освіти. На їхню думку, хмарним технологіям мають бути притаманні такі характеристики, як адаптивність, мобільність, повномасштабна інтерактивність, вільний мережний доступ, уніфікована інфраструктура, забезпечення універсального підходу до роботи. Узагалі, вітчизняними науковцями приділено багато уваги питанням втілення хмарних технологій у навчання, але переважна більшість досліджень спрямована на використання хмарних технологій для швидких розрахунків, спільного доступу до даних, використанню програмних продуктів, що розташовані у хмарі. Але можливості цих технологій набагато ширші. Хмарні технології доцільно використовувати для створення загально-доступного навчального середовища для вивчення конкретної дисципліни, циклу дисциплін або усієї підготовки студентів певної спеціальності. Крім того, залучення вказаних технологій може сприяти підвищенню рівня сформованості інформатичних компетентностей студентів.

Хмарні технології спрощують вирішення деяких проблем ЗВО, серед яких необхідність оцінювання характеристик обладнання та відсутність коштів для придбання нового потужного обладнання. Ми використовуємо класифікацію хмарних технологій за їх послугами (рис. 1).

З'ясуємо їх переваги та функції, що можуть бути використанні під час навчання математики у ЗВТО. Нами було розглянуто підготовку студентів, що опановують спеціальності галузей 12 — Інформаційні технології, 13 — Механічна інженерія, 14 — Електрична інженерія, 15 — Автоматизація та приладобудування, 16 — Хімічна та біоінженерія, 17 — Електроніка та телекомунікації, 18 — Виробництво та технології, 19 — Архітектура та будівництво та 27 — Транспорт.

При використанні хмарних технологій в освітніх закладах найбільшого розповсюдження набуває модель хмари «Програмне забезпечення як сервіс» (SaaS).

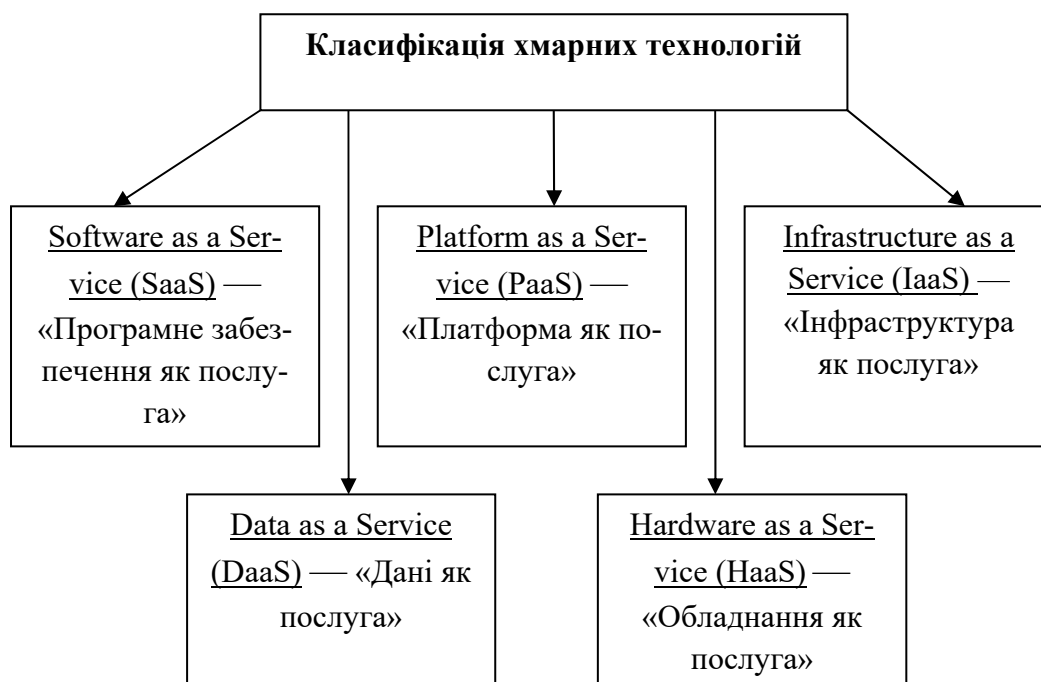


Рис. 1. Класифікація хмарних технологій

Перевагою використання даної моделі можна вважати наступні фактори: не вимагає від освітньої установи створення власного центру обробки даних і його обслуговування, дозволяє скоротити фінансові й організаційні витрати, а також дає можливість установлювати власні додатки на платформі провайдера. Така модель може бути використана під час навчання будь-якої дисципліни студентів ЗВТО. При навчанні математики модель SaaS застосовують для виконання розрахунків за допомогою таблиць або онлайн-калькуляторів, створення презентацій, спільного користування документами під час групової роботи над обчислювальними проектами, тощо. Особливо важливо використання такої моделі під час фундаментальної підготовки студентів галузей 13 — Механічна інженерія, 14 — Електрична інженерія, 15 — Автоматизація та приладобудування, 17 — Електроніка та телекомунікації, 18 — Виробництво та технології.

Модель хмари «Платформа як послуга» (PaaS) надає користувачеві доступ до використання програмної платформи — операційних систем (ОС), систем управління базами даних (СУБД), прикладного програмного забезпечення (ПО), засобів розробки й тестування програмного забезпечення. Фактично користувач отримує в оренду комп'ютерну платформу з установленою ОС і спеціалізованими засобами для розробки, розміщення і управління веб-додатками. Звісно, таку модель доцільно використовувати під час фахової підготовки майбутніх фахівців з інформаційних технологій (галузь 12 — Інформаційні технології), проте створені на наданій платформі освітні середовища можуть бути використані при навчанні фундаментальних дисциплін, зокрема вищої математики, студентів галузей 17 — Електроніка та телекомунікації, 19 — Архітектура та будівництво та 27 — Транспорт.

Модель надання хмарних сервісів «Інфраструктура як послуга» (IaaS) — це сервіс, що дозволяє отримати можливість управляти засобами обробки і зберігання даних та іншими фундаментальними обчислювальними ресурсами (віртуальними серверами або мережевою інфраструктурою), самостійно встановлювати ОС та прикладні програми. Цю модель доречно використовувати під час математичної підготовки спеціалістів, майбутня робота яких пов'язана із необхідністю зберігати та обробляти значні масиви даних, як от у галузях 12 — Інформаційні технології, 16 — Хімічна та біоінженерія, 19 — Архітектура та будівництво, 27 — Транспорт.

Допоміжна модель «Дані як послуга» (DaaS) орієнтована на використання хмарних сховищ для колективного доступу до масивів даних, що застосовуються при роботі з електронними освітніми ресурсами. Таку модель доцільно використовувати для спільної роботи студентів галузей 12 — Інформаційні технології, 15 — Автоматизація та приладобудування, 17 — Електроніка та телекомунікації, 18 — Виробництво та технології, під час розв'язування завдань-кейсів, що підсумовують вивчення кожної теми вищої математики.

Специфічну модель хмари «Обладнання як послуга» (HaaS) доцільно використовувати для організації віртуальних лабораторій для комп'ютерного моделювання та організації віддаленого доступу до реальних інформаційно-вимірювальних систем або інших технічних засобів при формуванні вміння математичного моделювання в студентів усіх технічних галузей, оскільки вказане вміння є фундаментальним під час підготовки компетентного інженера.

Отже, упровадження хмарних технологій у процес навчання вищої математики забезпечує позитивні тенденції в навчанні студентів вищої математики. Серед проблем впровадження хмарних технологій зазначимо недостатню підготовку викладачів та відсутність відповідного методичного забезпечення.

#### Список літератури

- Shyshkina, M., Spirin, O., & Zaporozhchenko, Yu. (2012). Problems of Informatization of Education of Ukraine in the context of research of ICT quality assessment. *Information technologies and learning tools*, (1). <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/632/483>.
- Биков, В. Ю. (2013). Хмарна комп'ютерно-технологічна платформа відкритої освіти та відповідний розвиток організаційно-технологічної будови ІТ-підрозділів навчальних закладів. *Теорія і практика управління соціальними системами*, (1), 81—98. <http://tipus.khpi.edu.ua/article/view/43448>.
- Маркова, О. М., Семеріков, С. О., & Стрюк, А. М. (2015). Хмарні технології навчання: витоки. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 46(2), 29—44. <https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1234/916>

# Викладання теми «Елементи операційного числення» із застосуванням пакету комп'ютерної математики Maple у курсі вищої математики

А. В. Волков

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна  
[wolkowaw@gmail.com](mailto:wolkowaw@gmail.com)

Розглядається приклад застосування пакету Maple для розв'язування диференціальних рівнянь методами операційного числення.

**Ключові слова:** Maple, операційне числення.

Пакет Maple містить широкі можливості для аналітичного інтегрування, диференціювання тощо. Його також можна використовувати для побудови інтегральних перетворень (Говорухин & Цибулин, 1997). Під час лекцій з операційного числення, наприклад, корисно за допомогою Maple демонструвати принципи застосування інтегральних перетворень до розв'язування диференціальних рівнянь не відволікаючи уваги студентів на виконання відповідних обчислень.

Розгляньмо приклад такого застосування пакету Maple під час розв'язування диференціального рівняння за допомогою інтеграла Дюамеля (Ефимов, 1980, ст. 239).

Припустимо, що треба знайти частинний розв'язок за нульових початкових умов наступного диференціального рівняння:

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2}, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Підключимо пакет інтегральних перетворень:

> *with(inttrans)* :

Введемо рівняння, що розглядається:

$$\text{> } \text{deq} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2};$$

$$\text{usl} := y(0) = 0, D(y)(0) = 0;$$

$$\text{deq} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2}$$

$$\text{usl} := y(0) = 0, D(y)(0) = 0$$

Позначаємо через  $Y(p)$  перетворення Лапласа (зображення) невідомої функції  $y(t)$ :

> *addtable(laplace, y(t), Y(p), t, p)*

Будуємо допоміжне рівняння з такою самою лівою частиною та правою частиною 1:

$$y'' + 2y' + y = 1.$$

Знайдемо перетворення Лапласа лівої та правої частини цього рівняння. Утворюється так зване «операторне рівняння» — алгебричне рівняння, що відповідає вихідному диференціальному рівнянню:

$$> eq := \text{laplace}(\text{lhs}(\text{deq}), t, p) = \text{laplace}(1, t, p)$$

$$eq := -D(y)(0) + Y(p)(p+1)^2 - y(0)(2+p) = \frac{1}{p}$$

Ураховуємо нульові початкові умови:

$$> eq := \text{subs}(usl, eq)$$

$$eq := Y(p)(p+1)^2 = \frac{1}{p}$$

Розв'язуємо операторне рівняння щодо зображення  $Y(p)$ :

$$> Y1 := \text{solve}(eq, Y(p))$$

$$Y1 := \frac{1}{p(p+1)^2}$$

Розкладаємо отриманий дріб на прості дробки:

$$> Y2 := \text{convert}(Y1, \text{parfrac}, p)$$

$$Y2 := -\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Знаходячи обернене перетворення Лапласа отриманого зображення, дістаємо  $y_1(t)$  — розв'язок допоміжного рівняння:

$$> y1 := \text{invlaplace}(Y2, p, t)$$

$$y1 := 1 - e^{-t}(1+t)$$

Шуканий розв'язок вихідного диференціального рівняння  $y(t)$  знаходять за допомогою інтегралу Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t y_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

де  $f(t)$  — права частина вихідного рівняння.

Знайходимо похідну функції  $y_1(t)$  в точці  $\tau$ :

$$> y11 := \text{simplify}(\text{subs}(t=\tau, \text{diff}(y1, t)))$$

$$y11 := e^{-\tau} \tau$$

Підставляючи  $t - \tau$  у праву частину рівняння, знаходимо  $f(t - \tau)$ :

$$> f := \text{subs}(t=t-\tau, \text{rhs}(\text{deq}))$$

$$f := \frac{e^{-t+\tau}}{(1+t-\tau)^2}$$

Знаходимо підінтегральний вираз:

>  $f1 := y11 \cdot f$

$$f1 := \frac{e^{-\tau} \tau e^{-t+\tau}}{(1+t-\tau)^2}$$

Спростуємо його:

>  $f2 := \text{simplify}(f1)$

$$f2 := \frac{e^{-t} \tau}{(1+t-\tau)^2}$$

Побудуємо інтеграл Дюамеля:

>  $yt = \text{Int}(f2, \tau = 0 .. t);$

$$yt = \int_0^t \frac{e^{-t} \tau}{(1+t-\tau)^2} d\tau$$

Під час застосування пакету Maple слід пам'ятати, що всі змінні в Maple вважаються комплексними. Це може ускладнювати процес інтегрування. Наприклад, у нашому випадку, спроба безпосереднього обчислення вищезазначеного інтегралу викликає появу попередження:

>  $\int_0^t f2 d\tau$

Warning, unable to determine if 1+t is between 0 and t; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\int_0^t \frac{e^{-t} \tau}{(1+t-\tau)^2} d\tau$$

Для правильного обчислення інтегралу Дюамеля слід врахувати, що в операційному численні розглядаються лише функції-оригінали, які означені на множині  $t \geq 0$ . З урахуванням цього факту обчислюємо інтеграл:

>  $\text{assume}(t, \text{positive}) : yt := \text{int}(f2, \tau = 0 .. t);$

$$yt := -(\ln(1+t) - t) e^{-t}$$

Таким чином отримано шуканий частинний розв'язок вихідного диференціального рівняння, що задовольняє нульові початкові умови:

$$y(t) = e^{-t}(t - \ln(1+t)).$$

Застосування пакету Maple під час викладання цієї теми без сумніву сприятиме кращому засвоєнню її сучасною молоддю та більш свідомому використанню вказаного методу.

### Список літератури

- Говорухин, В. Н., & Цибулин, В. Г. (1997). *Введение в Maple. Математический пакет для всех*. Москва: Мир.
- Ефимов, А. В. (1980). *Математический анализ (специальные разделы)*. (Ч. 1). Москва: Высшая школа.



# Комп'ютерно орієнтована методика оцінювання якості тестів як засіб покращення контролю знань студентів з вищої математики

О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

[adyx@ukr.net](mailto:adyx@ukr.net)

У доповіді підтверджено доведено покращення контролю знань студентів технічних спеціальностей з вищої математики внаслідок упровадження комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів.

**Ключові слова:** тестування, контроль знань, вища математика, експертне оцінювання.

Покращення контролю знань студентів є однією з актуальних задач педагогіки. Серед методів контролю знань у світовій практиці особливе місце займає тестування. У зв'язку з реформуванням вітчизняної освітньої галузі й упровадженням ІКТ, особливого значення набуває комп'ютерне тестування.

Комп'ютерне тестування знайшло своє місце в навчанні вищої математики студентів технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського. Викладачами кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей було розроблено пакет тестів, який входить до складу комплексу дистанційних курсів «Вища математика». Розширення кола студентів, охоплених тестуванням, вимагало розширення бази тестових завдань та аналізу їх якості. У зв'язку з цим було розроблено відповідну комп'ютерно орієнтовану методику оцінювання якості тестів з вищої математики (Дудко та ін., 2016).

Упровадження комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів з вищої математики передбачало покращення контролю знань студентів. Доведення даного твердження відбувалось із застосуванням методу експертного оцінювання. Експертне оцінювання якості контролю знань студентів було проведено за методом Делфі, що полягає в багаторазовому поштовому анкетуванні однієї і тієї ж групи експертів. Після першого опитування експертів і обробки його результатів, підсумки повідомляються учасникам експертної групи. Вони повинні або підтвердити свою точку зору, висловлену на попередньому етапі, і якщо вона значно відрізняється від думки більшості, розгорнуто її мотивувати, або змінити свою оцінку відповідно до думок більшості учасників. Потім знову обробляються висновки експертів, результати розсилаються експертам і так до тих пір, поки не будуть отримані узгоджені оцінки експертів.

Експертне оцінювання включало наступні етапи:

- 1) підготовка документів експертної оцінки;
- 2) формування групи експертів;
- 3) проведення експертизи;
- 4) опрацювання результатів експертної оцінки.

**Підготовка документів експертної оцінки.** На першому етапі було складено документ експертної оцінки, у якому визначалися мета та завдання експерименту та термін виконання робіт. Також було розроблено анкети для визначення компетентності експертів та для безпосереднього проведення експертизи.

**Формування групи експертів.** На другому етапі для формування групи експертів було використано методи, описані в роботі (Орлов, 2002). Спочатку було складено список із двадцяти можливих експертів. До цього списку увійшли найбільш досвідчені співробітники кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського, які викладають вищу математику, мають стаж роботи не менше п'яти років та вчене звання, досвід використання тестів для оцінювання знань студентів.

Далі було сформовано групу експертів із застосуванням методу колективної оцінки. Даний метод є доцільним для формування групи експертів, оскільки викладачі тривалий час працюють в одному колективі та знають один одного як спеціалісти.

Метод колективної оцінки полягав у наступному. Кожному із двадцяти можливих експертів було роздано список з їхніми прізвищами, у якому вони мали зазначити 10 на їхню думку найбільш компетентних колег. На підставі відповідей було побудовано таблицю рейтингів викладачів. За показниками рейтингу було відібрано групу з 10 компетентних експертів.

Для визначення компетентності відібраних експертів та підтвердження репрезентативності експертної групи було використано метод самооцінки, який передбачав заповнення експертами відповідної анкети. Рейтинг кожного експерта підраховувався у балах на основі методики Б. С. Гершунського (1980):

1) наявність наукового ступеня, вченого звання, рівня кваліфікації: доктор наук, професор — 1; кандидат наук, доцент — 0,8; кандидат наук, старший викладач — 0,6; кандидат наук, асистент — 0,4; асистент без вченого ступеня — 0,2;

2) стаж роботи: до 3 років — 0,2; від 3 до 5 років — 0,4; від 5 до 10 років — 0,6; від 10 років до 15 років — 0,8; понад 15 років — 1;

3) обґрунтування думки за проблемою (відповідно до проведених досліджень та педагогічного досвіду): 5 відповідей «так» на запитання 5—9 анкети — 1; 4 відповіді «так» на запитання 5—9 анкети — 0,8; 3 відповіді «так» на запитання 5—9 анкети — 0,6; 2 відповіді «так» на запитання 5—9 анкети — 0,4; 1 відповідь «так» на запитання 5—9 анкети — 0,2.

Достовірність експертної оцінки залежить від компетентності експертів відповідно до їх обізнаності щодо проблеми дослідження, наукового й педагогічного стажу, уміння обґрунтовано та об'єктивно довести власну думку. Загальну компетентність  $i$ -го експерта за усіма показниками було обчислено за результатами анкетування як частку від максимально можливого сумарного балу.

Група експертів вважається репрезентативною, якщо середнє значення загальних рейтингів експертів знаходиться в проміжку від 0,67 до 1. Середнє значення компетентності даної групи експертів дорівнювало 0,84. При цьому зна-

чення компетентності всіх експертів не виходили за проміжок  $[0, 67; 1]$ . Отже, результати експертного оцінювання можна вважати репрезентативними.

**Проведення експертизи.** Для опитування експертів було розроблено анкету, що містила 16 питань. Запитання було укладено за структурно-ієрархічною схемою: від широких питань до більш вузьких.

Під час анкетування експертів було забезпечено однозначність розуміння окремих запитань. Експертам було запропоновано для аналізу обрати шкалу оцінювання. Було прийнято рішення оцінювати якість контролю знань за наступною шкалою: «повністю не погоджуюсь», «скоріш не погоджуюсь, ніж погоджуюсь», «скоріш погоджуюсь, ніж не погоджуюсь», «повністю погоджуюсь». Така шкала є найзрозумілішою та дозволяє експерту обрати відповідь відповідно до вагомості та свого ставлення до поставленого запитання.

**Опрацювання результатів експертної оцінки.** Для узагальнення висновків експертів було використано статистичні методи. Коефіцієнти вагомості оцінок експертів обчислювались як відношення отриманої сумарної кількості балів за кожною оцінкою до загально можливої кількості балів. На Рис. представлено діаграму коефіцієнтів вагомості оцінок експертів.

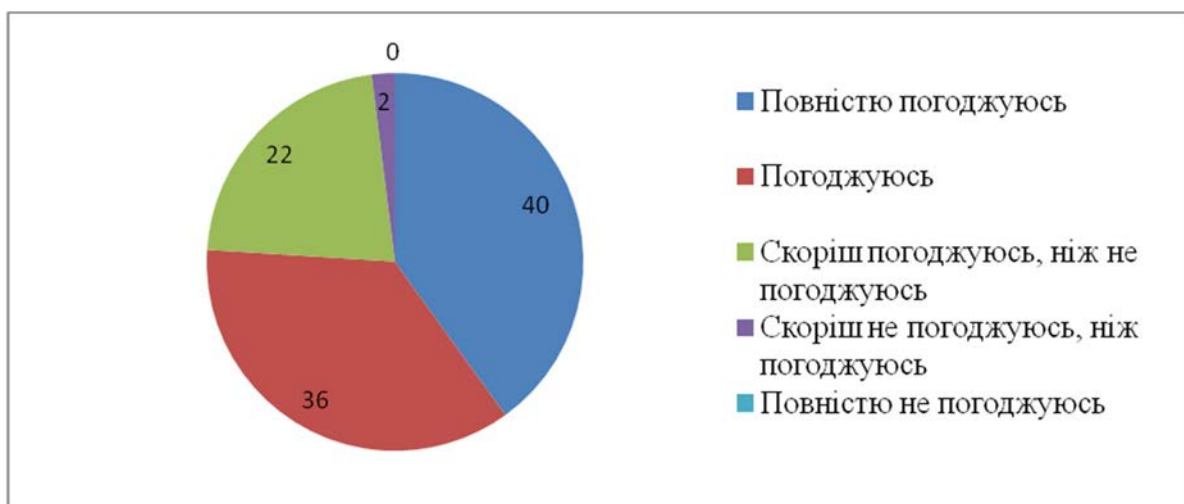


Рис. 1. Діаграма коефіцієнтів вагомості оцінок експертів у відсотках

Експертна оцінка характеризує узагальнену думку й ступінь узгодженості індивідуальних оцінок експертів. Відповідно до рис. 1 покращення контролю знань у результаті впровадження комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів з вищої математики відмітили 76% експертів (40% повністю погоджуються, 36% погоджуються) та 22% скоріше погоджуються, ніж не погоджуються.

Отже, можна зробити висновок, що впровадження комп'ютерно орієнтованої методики оцінювання якості тестів сприятиме покращенню контролю знань з вищої математики.

### Список літератури

- Гершунский, Б. С. (1980). *Прогнозирование содержания обучения в техникумах*. Москва: Высшая школа.
- Дудко, А. Ф., Алексеєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., & Федорова, Л. Б. (2016). Комп'ютерно-орієнтована методика аналізу якості педагогічних тестів як засіб ІК-підтримки викладачів вищої математики НТУУ «КПІ». У *Матеріалах IV Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 24—25 грудня 2015 р. (с. 277—278). Київ: НТУУ «КПІ».
- Орлов, А. И. (2002). *Экспертные оценки*. Москва.

# Формування практичних навичок студентів спеціальності 125 Кібербезпека за допомогою віртуальних лабораторій

Ю. Д. Жданова, С. О. Спасителєва, С.М. Шевченко

*Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна*

[y.zhdanova@kubg.edu.ua](mailto:y.zhdanova@kubg.edu.ua), [s.spasitielieva@kubg.edu.ua](mailto:s.spasitielieva@kubg.edu.ua),

[s.shevchenko@kubg.edu.ua](mailto:s.shevchenko@kubg.edu.ua)

В доповіді розглядається питання формування практичних навичок майбутніх спеціалістів в області інформаційної та кібербезпеки за допомогою технологій віртуальної лабораторії.

**Ключові слова:** практичні навички, віртуальна лабораторія, інформаційна та кібербезпека.

Сьогодні інформація стає одним з найбільш розповсюджених і важливих ресурсів, вона має таку саму цінність як матеріальні ресурси, в окремих випадках навіть вищу. Із збільшенням кількості інформації зростає її роль у розвитку держави, економіки, науки, культури тощо. І тому є очевидним, що захист самої інформації стає пріоритетним, як у всіх сферах суспільства, так і окремої людини.

У річному звіті Cisco за 2017—2018 роки (2018) з інформаційної безпеки вказано, що «миттєві атаки» стають усе складнішими, більш частими та тривалими (42% організацій зазнали DDoS-атак цього типу), вірус Petya був встановлений на понад 1 млн. комп'ютерів через автоматизовані системи оновлення програм. Більш третини компаній, які були вражені хакерською атакою, понесли матеріальні збитки близько 20% прибутку. За даними спеціалістів «Лабораторії Касперського», протягом року 30,01% комп'ютерів інтернет-користувачів у світі хоча б один раз зазнавали веб-атаки класу Malware (Kaspersky Security Bulletin, 2018). Все це вказує на те, що кількість фахівців, які забезпечують захист інформаційних даних, зростатиме. Тому проблема підготовки професіоналів в області кібербезпеки є актуальною.

Не зважаючи на те, що українські університети випускають 1,5 тисячі бакалаврів спеціальності 125 «Кібербезпека» щороку, ці випускники не мають достатніх практичних навичок, їм потрібно 2—3 роки, щоб зорієнтуватись у галузі та почати виконувати практичні завдання. Причина такої ситуації полягає в тому, що програми підготовки сьогоденних спеціалістів не дають в повному обсязі тих навичок, які потрібні на робочому місці (Підготовка фахівців..., 2016).

Пропонуємо наступні етапи вирішення даної проблеми:

1) створення практично орієнтовної програми підготовки фахівців спеціальності 125 Кібербезпека (на практичну та лабораторну складову відводиться 2/3 навчального часу);

2) дуальне навчання, тобто майбутнього фахівця навчають і заклади вищої освіти і роботодавці, при цьому студент поєднує навчання та стажування на ре-

альному підприємстві; залучення фахівців-професіоналів до розробки програм, до проведення практичних та лабораторних занять;

3) сертифікація спеціалістів з інформаційної безпеки відповідно до міжнародних вимог.

Велику роль у навчанні відводять формуванню практичних навичок майбутніх фахівців з інформаційної безпеки за допомогою так званих віртуальних лабораторій.

Під віртуальною лабораторією (virtual laboratory, V-lab, virtual reality laboratory) розуміють навчальну технологію, яка «дозволяє моделювати поведінку об'єктів реального світу у віртуальному комп'ютерному освітньому середовищі та допомагає тим, хто навчається, оволодівати новими знаннями та вміннями» (Палагін & Петренко, 2017, с. 146—147).

Чинниками створення та впровадження віртуальних лабораторій у навчальний процес ЗВО, з одного боку, став швидкий розвиток інформаційних технологій, а з іншого — велика ціна реального обладнання для проведення лабораторних та практичних занять у різних сферах навчання. Тому, як стверджують більшість науковців, віртуальні технології мають зайняти відповідну нішу в освітній діяльності ЗВО (Семеніхіна & Шамоля, 2011). Серед переваг застосування віртуальних лабораторій виділяють:

— формування фахових компетентностей, які можуть бути безпосередньо перенесені в реальність;

— підвищення якості самостійної навчально-пізнавальної діяльності;

— зацікавленість у вивченні дисципліни, розвиток мотиваційної діяльності;

— доступність;

— автоматизація операцій;

— постійне удосконалення програмних систем та технологій тощо.

Ураховуючи вище згадані чинники, на вимогу сьогодення в цьому навчальному році на кафедрі інформаційної та кібернетичної безпеки Київського університету імені Бориса Грінченка була створена віртуальна лабораторія «Кіберполігон». Технології цієї лабораторії дозволяють моделювати поведінку об'єктів реального світу в комп'ютерному середовищі, що дасть змогу не лише спостерігати за певним експериментом, а й безпосередньо брати в ньому участь. Така навчальна діяльність, як свідчать наукові педагогічні та психологічні праці, сприяє засвоєнню знань на більш свідомому та глибокому рівні, формує мотиваційну сферу студента до вивчення теоретичних основ спеціальних дисциплін. Обладнання «Кіберполігону» дозволить проводити заняття, наприклад, на наступні теми: «Технології розробки та тестування програмного забезпечення систем ІКБ», «Методи та засоби забезпечення безпеки мережевої інфраструктури», «Технології виявлення уразливості та протидія злоякісному програмному забезпеченню», «Технології виявлення уразливості мережевих ресурсів», «Методи та засоби забезпечення безпеки бездротових та мобільних мереж», «Технології виявлення уразливості та забезпечення безпеки веб-ресурсів». Зрозуміло, такі теми раніше можна було вивчати тільки теоретично. На сьогодні є

можливість створювати реальні проекти «з хакерами та жертвами», моделювати їх розв'язання.

Впровадження у навчальний процес віртуальних лабораторій типу «Кіберполігону» дозволяє адаптувати майбутніх фахівців з інформаційної та кібернетичної безпеки до професійної діяльності.

#### Список літератури

- Kaspersky Security Bulletin 2018. Statistics* (2018). <https://securelist.ru/kaspersky-security-bulletin-2018-statistics/92906/>
- Звіт Cisco із кібербезпеки за 2018 рік* (2018). [https://www.cisco.com/c/uk\\_ua/products/security/security-reports.html#~stickynav=2](https://www.cisco.com/c/uk_ua/products/security/security-reports.html#~stickynav=2)
- Палагін, О. В., & Петренко, М. Г. (2017). *Тлумачний онтографічний словник з інженерії знань*. Київ: ТОВ «НВП Інтерсервіс».
- Підготовка фахівців із кібербезпеки має бути практично орієнтованою (2016). У *Педагогічна преса* <https://pedpresa.ua/169818-pidgotovka-fahivtsiv-iz-kiberbezpeky-maye-but-y-praktychno-oriyentovanoyu.html>
- Семеніхіна, О. В., & Шамо́ня, В. Г. (2011). Віртуальні лабораторії як інструмент навчальної та наукової діяльності. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*, (1), 341—345.

# Про використання додатків Google для оптимізації навчання дисциплін математичного циклу

Н. М. Задерей<sup>1</sup>, І. Ю. Мельник<sup>2</sup>, Г. Д. Нефьодова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

<sup>2</sup>Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

[zadereynm@gmail.com](mailto:zadereynm@gmail.com), [iy.melnyk@kubg.edu.ua](mailto:iy.melnyk@kubg.edu.ua), [g.nefyodova@gmail.com](mailto:g.nefyodova@gmail.com)

У статті аналізується ефективність процесу підготовки майбутніх фахівців інженерних спеціальностей за допомогою використання додатків Google та засобів комп'ютерної візуалізації. Наголошується на важливості сучасного підходу до викладання математичних дисциплін за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення та хмарних технологій.

**Ключові слова:** засоби комп'ютерної візуалізації, web-орієнтовані системи комп'ютерної математики, спеціалізовані web-орієнтовані методи для підтримки дистанційного навчання.

Сучасна освіта характеризується інтенсифікацією навчального процесу, що обумовлено різними факторами, такими, як розвиток інформаційних технологій і експоненціальне збільшення інформаційного потоку. Інтерактивні технології, професійна майстерність і досвід викладача — ось ті найважливіші складові, що забезпечують ефективність навчання. Такі важелі, як мотивація, наочність, щирий інтерес до предмету, що вивчається, різноманітні прийоми розумової діяльності, не можуть бути на часі ефективно реалізовані лише традиційними формами та методами навчання. Необхідне поєднання традиційної методики викладання із провадженням у навчальний процес сучасних інноваційних технологій.

Освіта сьогодні спрямована на соціалізацію особистості, новітні науково-інформаційні досягнення. Нині студенту потрібні не лише формальні практичні знання, але й достатній рівень життєвої компетентності, вміння жити і працювати у глобалізованому світі за сучасними вимогами.

Згідно з Національною стратегією розвитку освіти в Україні на період до 2021 року, основним напрямом державної політики у сфері освіти визначено оновлення цілей та змісту освіти на основі компетентнісного підходу та особистісної орієнтації з урахуванням світового досвіду та принципів сталого розвитку, забезпечення розвитку особистості, здатної реалізувати свій інтелектуальний та творчий потенціал, яка ефективно пристосовується до швидких змін на ринку праці (Національна стратегія..., 2013).

Ефективність процесу підготовки майбутніх фахівців тісно пов'язана з використанням інформаційних технологій разом з інноваційними методами навчання і приводить до індивідуалізації та диференціації навчання. Це сприяє підвищенню активності студентів, інтенсифікації навчального процесу, посиленню мотивації навчання, створенню умов для самостійної роботи, формуванню належної самооцінки у студентів, що є заниженою через недоліки шкільної математичної освіти, створенню комфортного середовища навчання.



Тепер існує цілий ряд спеціалізованих web-орієнтованих рішень для підтримки дистанційного навчання, наприклад, Moodle, Blackboard, Google OpenClass, Canvas, Piazza, eFront, ILIAS, Claroline, Sakai, OpenSIS та інші. Один з підходів щодо використання зазначених систем для підтримки дистанційного навчання в університеті полягає у їх розгортанні на серверах розробників цих систем або провайдерів хмарних послуг. Ще один підхід полягає у використанні хмарних сервісів провідних ІТ-компаній таких, як Google, Microsoft, Amazon, для створення електронних навчальних курсів з організації самостійної роботи студентів, їх спілкування між собою та викладачами (Tryus & Kachala, 2014).

Аналіз стану викладання математичних дисциплін в технічних університетах показує, що результати навчання студентів, рівень їх розумової діяльності, пізнавальної активності, самостійності значною мірою не відповідає вимогам часу, не є задовільним для успішної реалізації особистості.

Важливою складовою фундаментальної підготовки спеціаліста з вищою освітою технічного напрямку є вивчення математичних дисциплін (вищої математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, чисельних методів, математичних методів оптимізації, теорії прийняття рішень). Для підвищення рівня підготовки студентів з цих дисциплін, поряд з використанням технологій дистанційного навчання, необхідне цілеспрямоване й систематичне застосування спеціальних засобів, що підтримують або використовують хмарні обчислення: web-орієнтовані системи комп'ютерної математики (webMathematica, WolframAlpha, MapleNet, SAGE, vxMaxima), математичні редактори, тренажери, навчальні і консультаційні web-орієнтовані експертні системи (Задерей, Мельник, & Нефьодова, 2018а, 2018б).

Із розвитком мережевих технологій стрімко почали розвиватися «хмарні технології» або «хмарні обчислення», які дозволили зберігати великий обсяг даних на віртуальних серверах. Ці переваги хмарних технологій обумовили актуальність і значимість використання додатків Google для реалізації різнопланових освітніх задач.

На Google Диску студенти працюють з Google Документами для спільної роботи над завданнями й прийняттям спільних рішень. Описуються теоретичні відомості щодо постановки відповідних задач, їх математичні моделі і розглядаються методи розв'язування поставлених задач. Додатково використовуються нові можливості Google Документів через меню «Доповнення» — наприклад: MindMeister; OnlineCorrector; Word Cloud Cenerator. Обчислення та розрахунки відтворюються у Google Таблицях з додатковими можливостями, встановлюючи «Доповнення» такі як: Flippity; Flubaroo; Analytics Canvas; autoCrat; Doctopus; siteMaestro. Для аналізу пройденого матеріалу створюють тести за допомогою Google Форм та додатків до них: FormLimiter (Обмежувач форми); Advanced Summary (Розширений підсумок). Доступ до матеріалів за посиланням студенти отримують, працюючи групами над спільним проектом й розв'язанням різнопланових задач в режимах перегляду, коментування та редагування. Для підведення підсумків спільної роботи при вивченні дисциплін

створюється сайт-навігатор, у якому обов'язковими є розділи рефлексії (аналіз вивченого матеріалу), знання та навички учасників, зворотній зв'язок з викладачем та одногрупниками.

Інформатизація суспільства має величезний вплив на молоде покоління, якому значно легше сприймати інформацію не з друкованої літератури, а з електронних носіїв, іноді підростаюче покоління навіть не хоче вивчати друковані тексти. Це обумовлює використання у сфері вже як і початкової, так і середньої та вищої освіти технологій електронного навчання (Задерей & Нефьодова, 2018).

Слід зазначити важливість результатів досліджень, присвячених візуалізації навчального матеріалу, при підготовці у вищій школі викладачів математики, фізики, інформатики, проведених на базі Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка (Семеніхіна & Білошاپка, 2018; Семеніхіна & Безуглий, 2017). Опитування та дослідження анкетування провідних педагогів області дало можливість виділити наступні основні напрями підготовки при застосуванні комп'ютерних технологій як викладачів, так і студентів:

- класифікація можливих програмних засобів;
- визначення форм та моделей візуалізації під час вивчення конкретних розділів або тем;
- розробка викладачами авторських спецкурсів з навчання

Програмні засоби, спрямовані на створення зображень, презентацій, відеофайлів, анімацій орієнтовані на глибоке нетривіальне візуальне сприйняття матеріалу, що вивчається. Як приклад, під час вивчення теми «Ряди Фур'є. Перетворення Фур'є», студенти факультету електроніки КПІ ім. Ігоря Сікорського, виконавши індивідуальну розрахунково-графічну роботу у вигляді презентації з елементами анімації та відеоряду, глибше засвоїли дану тему. Формат презентації дозволив їм надати теоретичну частину завдання, графічно та з допомогою анімації подати розвинення функції у ряд Фур'є декількома способами (продовживши її парним чи непарним чином, чи доповнивши функцію на півперіоді довільно), побудувати частинні суми ряду Фур'є, навчившись використовувати при цьому різні програми. Одне з завдань, яке отримали студенти, було завдання показати важливість практичного застосування рядів Фур'є, що було яскраво, різноманітно, креативно висвітлено. Зазначимо, що щиро зацікавились та виконали дану роботу і ті студенти, успішність яких не є достатньою.

У висновку зазначимо, що використання додатків Google надають можливість інтенсифікувати процес навчання, підвищити рівень професійної підготовки студентів. Запропонований підхід тісно пов'язаний з можливостями опрацювання матеріалів у будь-який час і з будь-якого місця, де є доступ до мережі Інтернет, для інтенсифікації розв'язування як навчальних задач, так і реальних задач у режимі онлайн.

### Список літератури

- Tryus, Y., & Kachala, T. (2014). Cloud technologies in management and educational process of Ukrainian technical universities. *Інформаційні технології в освіті*, 19, 22—33. Херсон: ХДУ.
- Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2018). Методичні аспекти професійно-орієнтовної математичної підготовки студентів технічних університетів. *Фізико-математична освіта*, (1), 205—209. [http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/fmo/2018\\_1-15-Scientific\\_journal\\_FMO.pdf](http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/fmo/2018_1-15-Scientific_journal_FMO.pdf)
- Задерей, Н. М., Мельник, І. Ю., & Нефьодова Г. Д. (2018б). Доповнена та віртуальна реальність як ресурс навчальної діяльності студентів. У *Матеріалах Міжнародної науково-практичної конференції, «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання»*, Івано-Франківськ, Яремча, 14—19 травня (с. 61—64). <http://itcm.comp-sc.if.ua/2018/zbirnyk.pdf>
- Задерей, Н. М., Мельник, І. Ю., & Нефьодова, Г. Д. (2018а). Формування сучасної моделі математичної підготовки студентів із застосуванням інформаційних технологій. У *Матеріалах Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та праві»* (с. 37—39). Київ: Видавничий центр КНУКіМ.
- Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року (2013). <http://www.zakon.rada.gov.ua/go/344/2013>.
- Семеніхіна, О. & Білошапка, Н. (2018). Про використання вчителями математики засобів комп'ютерної візуалізації. *Гуманізація навчально-виховного процесу*, (1), 289—301.
- Семеніхіна, О. В., & Безуглий, Д. С. (2017). Необхідність формування у вчителів умінь візуалізувати предметні знання як провідна стратегія розвитку освіти в Україні. *Гірська школа Українських Карпат. Наукове фахове видання з педагогічних дисциплін*, 16, 51—53.

# Розв'язання диференційних рівнянь за допомогою перетворень з використанням системи комп'ютерної математики Maple

Т. М. Крохмаль<sup>1</sup>, О. М. Нікітенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харківська загально-освітня школа № 63, Харків, Україна

<sup>2</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна  
nikonxipe@gmail.com

Розглядаються приклади застосування системи комп'ютерної математики Maple для розв'язання диференційних рівнянь за допомогою перетворень Лапласа та диференційних перетворень.

**Ключові слова:** Maple, перетворення Лапласа, диференційні перетворення.

Символічне (операційне) числення широко застосовують у найрізноманітніших галузях науки та техніки.

Велику роль воно відіграє під час дослідження процесів як в лінійних фізичних системах електротехніки, автоматики, радіотехніки, механіки тощо (інтегральні перетворення), так і в нелінійних фізичних системах електроніки, радіотехніки, керування тощо (диференційні перетворення).

Сучасний математичний апарат дозволяє розв'язувати задачі, які описують за допомогою систем лінійних диференційних рівнянь (звичайних і в частинних похідних), різницевих та диференційно-різницевих рівнянь, диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та певними типами інтегральних рівнянь. Така універсальність цих методів пояснюється їхньою універсальністю — можливістю отримати розв'язок найпростішими та економічними засобами та методами.

Алгоритм знаходження розв'язків диференційних рівнянь за допомогою методів перетворень містить з три кроки.

Суть першого кроку полягає в переході з області оригіналів до області зображень. Для інтегральних перетворень Лапласа такий перехід здійснюють за допомогою інтеграла Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

а для диференційних перетворень — за допомогою диференціювання функції-оригіналу (Пухов, 1978, 1980, 1986)

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}.$$

Суть другого кроку полягає в розв'язанні алгебричних рівнянь чи системи таких рівнянь в області зображень для інтегральних перетворень Лапласа або знаходженні дискрет диференційного спектру для диференційних перетворень. Для зручності використання перетворень створено таблиці таких перетворень для функцій, що найчастіше використовують.

Суть третього кроку полягає в поверненні з області зображень в область оригіналів.

Для інтегральних перетворень Лапласа такий перехід здійснюють за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

а для диференціальних перетворень — за допомогою степеневого ряду Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)t^k.$$

Розв'язання за допомогою методів перетворень вимагає додаткових рутинних обчислень. Тому доцільно скористатися системами комп'ютерної математики (СКМ), які дозволяють здійснити такі обчислення.

З усіх систем комп'ютерної математики найпривабливішою виглядає СКМ вищого класу Maple, яка має найбільше поширення серед таких систем. На ядрі СКМ Maple базуються такі популярні СКМ нижчого класу як MATLAB та Mathcad (Гречко, 2013).

Інша СКМ вищого класу Mathematica під час експлуатації має суттєво більше проблем різноманітного характеру (Аладьев, 2006).

Розглянемо можливість застосування Maple для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь.

Як приклад розглянемо задачу Коші для лінеаризованого рівняння руху заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями.

Лінеаризоване диференціальне рівняння руху в радіальному напрямі має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b - (1 + b)x, \quad (1)$$

де  $b = \frac{\eta}{\omega_H^2 r_k^2} \frac{U_a}{\ln s_a}$  — параметр, який залежить як від електростатичного потенціалу  $U_a$ , так і від напруженості магнітного поля  $\omega_H$ .

Початкові умови для задачі Коші визначають нульовими:

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) має аналітичний розв'язок

$$x(t) = \frac{b}{1+b} (1 - \cos \sqrt{1+bt}). \quad (3)$$

Застосуємо перетворення Лапласа до розв'язання рівняння (1) з початковими умовами (2).

В області зображень це рівняння набуде вигляду:

$$p^2 X(p) = \frac{b}{p} - (1 + b)X(p)$$

Розв'язком цього рівняння буде

$$\frac{b}{p(p^2 + 1 + b)}$$

Результатом зворотного перетворення Лапласа буде вираз

$$\frac{b}{1 + b} (1 - \cos \sqrt{1 + b}),$$

що повністю збігається з розв'язком (2).

Застосовуючи команду прямого перетворення Лапласа **laplace(eq,t,p)** з бібліотеки **inttrans** Maple до рівняння (1), отримуємо таке алгебричне рівняння

$$p^2 \text{laplace}(x(t), t, p) = \frac{b}{p} - \text{laplace}(x(t), t, p) - b \text{laplace}(x(t), t, p).$$

Розв'язуючи отримане рівняння відносно  $\text{laplace}(x(t), t, p)$  за допомогою команди **solve**, здобудемо такий розв'язок

$$\frac{b}{p(p^2 + 1 + b)}.$$

Застосовуючи до отриманого розв'язку команду зворотного перетворення Лапласа **invlaplace(% ,p,t)**, добудемо такий розв'язок

$$\frac{(1 - \cosh(\sqrt{-1 - bt}))b}{1 + b},$$

який, після нескладних алгебричних перетворень, набуває вигляду (2).

Застосуємо метод диференціальних перетворень до розв'язання рівняння (1) з початковими умовами (3).

В області зображень це рівняння набуде рекурентного вигляду:

$$X(k + 2) = \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} (b\sigma(k) - (1 + b)X(k)),$$

$$\text{тут } \sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Після обчислення дискрет диференційного спектру за вище наведеною рекурентною формулою отримуємо розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \frac{1}{2!} bt^2 - \frac{1}{4!} b(1 + b)t^4 + \frac{1}{6!} b(1 + b)^2 t^6 - \frac{1}{8!} b(1 + b)^3 t^8 + \dots, \quad (4)$$

який є розвиненням у степеневий ряд розв'язку (2).

Розглянемо реалізацію диференціальних перетворень у СКМ Maple.

```

Для цього необхідно згенерувати код обчислень
> ted :=k->piecewise(k=0,1);
> X(0) := 0; X(1) := 0;
> for k from 0 to kk do
> X(k+2) :=1/(k+1)/(k+2)*(b*ted(k)-(1+b)*X(k));
> end do:

```

Результатом виконання цього коду будуть дискрети диференційного спектру, з яких у подальшому отримують розв'язок у вигляді ряду (4).

Показано можливість застосування системи комп'ютерної математики Maple для розв'язання лінійних диференційних рівнянь методами перетворень.

Застосування комп'ютерних технологій під час викладання вищої математики та природничих дисциплін надає змогу відмовитися від рутинних обчислень, а більше уваги приділяти кращому засвоєнню викладеного матеріалу.

### Список літератури

- Аладьев, В. З. (2006). *Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования*. Москва: Лаборатория Базовых Знаний.
- Гречко, А. Л. (2013). Сучасний стан програмного забезпечення в курсах якісної теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем. У *Матеріалах II Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 20—21 грудня 2012 р.* (с. 296—298). Київ: НТУУ «КПІ».
- Пухов, Г. Е. (1978). *Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике*. Киев: Наукова думка.
- Пухов, Г. Е. (1980). *Дифференциальные преобразования функций и уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Пухов, Г. Е. (1986). *Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов*. Киев: Наукова думка.

# Створення інтерактивної моделі сферичного трикутника за допомогою GeoGebra

О. В. Олійник, В. І. Сонько

Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет  
імені Григорія Сковороди, Переяслав, Україна  
[elenaoliynik@gmail.com](mailto:elenaoliynik@gmail.com), [vkvoldem@gmail.com](mailto:vkvoldem@gmail.com)

У статті автори розглядають можливості застосування програмного середовища GeoGebra для створення інтерактивних моделей при викладанні курсу «Сферична геометрія»

**Ключові слова:** сферична геометрія, сферичний трикутник, GeoGebra, динамічна математика, інтерактивна модель.

На сьогодні при вивченні геометрії широко застосовуються комп'ютерні технології. Це дозволяє покращити візуальне сприйняття студентами просторових об'єктів. Інформаційні технології стали потужним інструментом розвитку просторової уяви як учнів, так і студентів. Оскільки методи візуалізації, які застосовує вчитель під час вивчення геометрії не тільки активізують заняття, а надають змогу підвищити ефективність уроку, рівень дослідницької активності студентів, пізнавальний інтерес до навчання. Досить поширеним інструментом для вивчення математичних дисциплін у вищій школі являється GeoGebra, яка має потужний хоча ще багато в чому нерозвинений потенціал. GeoGebra доступна на більш ніж 60 мовах, перекладається командами волонтерів і є мультиплатформна, доступна або через веб-переглядач, або як окрема програма, яка працює на більшості пристроїв.

Зокрема, GeoGebra являється інструментом за допомогою якого можна виготовити мультимедійний посібник з теми, візуалізувати геометричну фігуру. Сферичний трикутник являється одним із основних елементів сферичної геометрії, яка в свою чергу була утворена з практичних потреб та, в першу чергу завдань астрономії.

*Сферичним трикутником  $\Delta ABC$*  називається частина поверхні сфери, обмежена трьома дугами великих кіл, що взаємно перетинаються. Сферичний трикутник  $ABC$  має шість основних елементів: три кути  $A, B, C$  та три сторони  $a, b, c$  (Данилевський, Колосов, & Якунін, 2011) (рис. 1).

Площини великих кіл, дуги яких служать сторонами сферичного трикутника  $ABC$ , перетинаються між собою у центрі сфери  $O$  та утворюють тригранник  $OABC$  (рис. 2.).

З рис. 2 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двограним кутам тригранника. Сторони трикутника, визначені у кутовій мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.



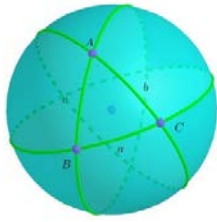


Рис. 1. Динамічна модель сферичного трикутника в GeoGebra

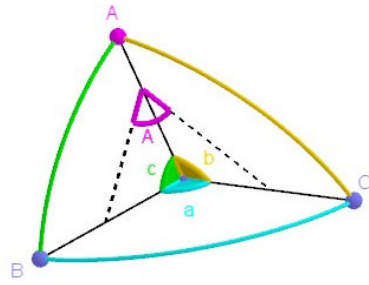


Рис. 2. Елементи сферичного трикутника

Сторони сферичного трикутника  $a, b$  та  $c$  прийнято вимірювати у кутовій мірі, тому вибір радіуса сфери стає не суттєвим. На рис. 3 трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їх елементи, що відображені в кутовій мірі, є відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус  $R$  сфери приймають за одиницю:  $R = 1$  (Гильберт, 1948).

За формою сферичні трикутники поділяють на:

- 1) прямокутні, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює  $90^\circ$  (рис. 4);

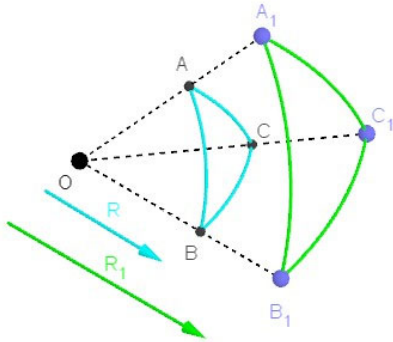


Рис. 3. Трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$ , які мають пропорційні розміри

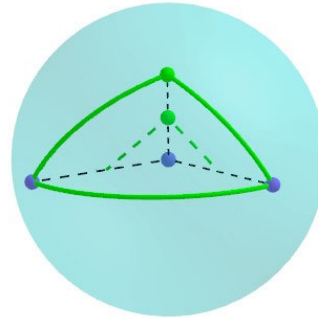


Рис. 4. Прямокутний сферичний трикутник

- 2) прямокутні, якщо хоча б одна зі сторін трикутника дорівнює  $90^\circ$  (рис. 5);

- 3) косокутні — в інших випадках (рис. 6).

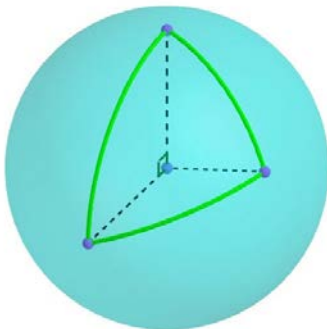


Рис. 5. Прямокутний сферичний трикутник

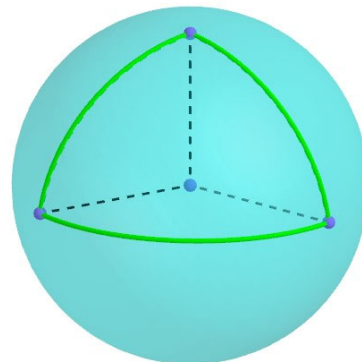


Рис. 6. Косокутний сферичний трикутник

Сферичні трикутники мають висоти, медіани та бісектриси, означення яких аналогічні означенням цих елементів у плоскій геометрії.

За допомогою комп'ютерної візуалізації можна показати, що бісектрисою кута  $A$  сферичного трикутника  $ABC$  називається дуга  $AL$  великого кола (Данилевський та ін., 2011), що ділить цей кут навпіл (рис. 7).

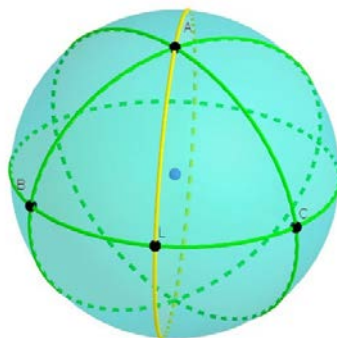






Рис. 7. Бісектриса сферичного трикутника  $\widehat{AL}$

Алгоритм побудови сферичного трикутника в системі GeoGebra.

1. Вибрати на панелі інструментів *Вид* — *полотно 3D*.
2. Виберіть на панелі інструментів  сфера з центром і радіусом. Укажіть довільну точку і довільний радіус.
  1. За допомогою інструменту  точка на об'єкті, побудуйте три довільні точки на сфері;
  2. Потім інструмент  площина через 3 точки і виділяємо дві точки і центр сфери.
  3. Будуємо, інструмент  лінія перетину — виділяємо лінію перетину площини і сфери (мал. 8)

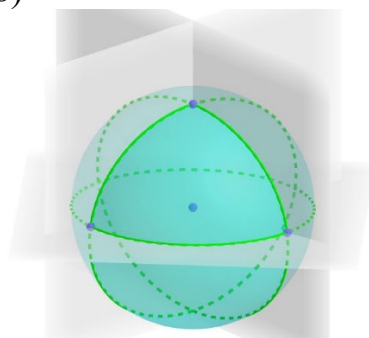


Рис. 8. Лінії перетину площин і сфери

4. Повторивши операції 4, 5 ще 2 рази, отримаєте сферичний трикутник. За допомогою *Вид – Алгебра (Ctrl + Shift + A)* приховайте площини, проєкспериментуйте з кольорами. Рухаючи за точки-маркери можна змінювати розміри сферичного трикутника, наприклад, отримаєте модель на рис. 1.

Розв'язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розгляді геометричних задач у ряді інших дисциплін (Данилевський та ін., 2011).

Вищевикладене дає підстави зробити висновок, що вивчення математичних понять за допомогою системи динамічної геометрії GeoGebra, допоможе студентам краще зрозуміти теоретичний матеріал і застосувати його на практиці. Подальше дослідження інтерактивної демонстрації елементів сферичної геометрії для студентів підвищить рівень самостійного вивчення.

#### Список літератури

- Vinberg, E. B. (Ed.) (2013). *Geometry II: Spaces of constant curvature*. (V. Minachin, Trans.). Springer Science & Business Media.
- Гильберт, Д. (1948). *Основания геометрии* (И. С. Градштейн, перевод.). Москва: Государственное изд-во технико-теоретической литературы.
- Данилевський, М. П., Колосов, А. І., & Якунін, А. В. (2011). *Основи сферичної геометрії та тригонометрії*. Харків: ХНАМГ.
- Ракута, В. М. (2012). Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*, (4). <https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/700/524>
- Сандраков, П. В. (1970). *Решение сферических треугольников*. Пермь: ПермПИ.

# Особливості створення та аналіз якості покрокових тестів з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Т. С. Омельчук, І. В. Орловський, О. А. Тимошенко

*Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна*  
[tata.omelchuk@gmail.com](mailto:tata.omelchuk@gmail.com), [i.v.orlovsky@gmail.com](mailto:i.v.orlovsky@gmail.com), [zorot@ukr.net](mailto:zorot@ukr.net)

Розглянуто специфіку створення покрокових тестових завдань з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Проаналізовано переваги та недоліки та запропоновано метод оцінки їх якості.

**Ключові слова:** покрокові тести, аналіз якості тесту, статистичний аналіз.

Із стрімким розвитком освітніх систем більше уваги почали приділяти комп'ютерному тестуванню, яке є одним з найпоширеніших і важливих сучасних засобів контролю за рівнем засвоєння знань студентів. Сучасне тестування — комплекс стандартизованих методів вимірювання недоступних для безпосереднього спостереження параметрів студентів, тобто латентних, які оцінюють рівень їх освіченості. Це викликано, насамперед, однією з переваг тестування, а саме з неупередженістю та об'єктивністю контролю знань. Ще однією, не менш вагомою перевагою є те, що проведення тестування з використанням комп'ютерних систем дає можливість, створюючи однакові умови написання, опитати велику кількість студентів, що навчаються на різних спеціальностях закладу вищої освіти. Проте, при цьому відчутно зменшується час перевірки робіт, автоматизується процес обробки результатів тестів та скорочується навантаження на викладача.

Важливий критерієм комп'ютерного тестування — існування стандартизованого інструменту для комфортної та ефективної роботи з тестовими завданнями викладачів та студентів. Один з варіантів такого інструменту є створення та проведення тестів на відкритій освітній системі управління навчанням Moodle. Система Moodle дає можливість розробити тести різного типу (наприклад, тестові завдання на множинний вибір, встановлення відповідності, перетягування в тексті та інші). А також, використовуючи тип питання «Вбудовані відповіді» (Embedded answer questions) та застосовуючи мову розмітки вебсторінок HTML, можна конструювати тестові завдання більш складної структури, зокрема, й так звані «покрокові» тестові завдання різного ступеня складності, що дозволяють перевіряти знання студентів з математичних дисциплін максимально об'єктивно.

Перші покрокові тести в КПІ ім. Ігоря Сікорського було розроблено колективом авторів кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей для кредитного модулю «Елементи лінійної алгебри». Вони пройшли сертифікацію центром УІТО КПІ ім. Ігоря Сікорського у 2017 році та успішно були апробовані на факультеті інформатики та обчислювальної техніки. У тестуванні взяло участь 97 респондентів. На основі проведеного тестування було зроблено перший аналіз якості подібних тестових завдань (Орловський & Тимошенко, 2017).

У 2018 році тестування було проведене для 297 студентів, серед яких 45 студентів радіотехнічного факультету, 63 студенти факультету біомедичної інженерії та 189 студентів факультеті інформатики та обчислювальної техніки.

У КПІ ім. Ігоря Сікорського вже не перший рік проводиться перевірка знань студентів за допомогою онлайн тестування, але до цього часу використовувались тестові завдання лише відкритого та закритого типів. Закриті тестові завдання — це питання, які мають готові варіанти відповідей, а студенту тільки необхідно обрати один або кілька правильних, встановити відповідність або продовжити відповідність (Крокер & Алгина, 2012; Ляшенко & Жук, 2015). Відкриті тестові завдання не містять готових відповідей, які студент має обрати, але вимагає від нього самостійного запису відповіді (наприклад, остаточне число значення виразу).

Для створенні тестів з математичних дисциплін використання тестових завдань відкритого та закритого типів не є достатнім для якісної перевірки набутих знань та навичок. Однією з найважливіших частин контролю знань з математичних дисциплін є перевірка не просто відповіді, а всього процесу розв'язання. Але стандартні відкриті та закриті тестові завдання вказаних типів дають можливість перевірити або тільки відповіді або деякий проміжний крок.

Саме тому, викладачами кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей було розпочато розробку так званих «покрокових тестів», які представляють собою послідовність тестових завдань відкритого та закритого типів, об'єднаних в одне завдання з метою перевірки алгоритму розв'язання та остаточної відповіді певної задачі.

Після апробації «покрокового» тестування у 2017—2018 роках та подальшого аналізу результатів було зафіксовано ряд суттєвих переваг таких, як:

- можливість заміни традиційних розрахункових робіт, що дозволить зменшити навантаженнями на викладача, який витрачає багато часу й зусиль на перевірку великої кількості одноманітних завдань;
- виключення людського фактору, що збільшує об'єктивність оцінювання;
- можливість одразу після написання, або завершення написання тестування групою, побачити оцінку й допущені помилки, що робить більш ефективним зворотній зв'язок.

Але слід зазначити, що повністю виключати, такі традиційні засоби перевірки, як письмові контрольні, залікові та екзаменаційні роботи не бажано, бо покрокові тести мають лінійний алгоритм реалізації, що не дає можливості студенту самому обрати спосіб розв'язання та проявити набуті навички у повній мірі.

Розроблення покрокових тестів є достатньо складним, оскільки потребує індивідуального підходу до кожної задачі та приведення розв'язку під лінійний алгоритм, який можна запрограмувати. Для використання покрокових тестів спочатку необхідно створити банк типових завдань з однаковою розмірністю та кількістю кроків у розв'язанні.

Розгляньмо приклад «покрокового» тестового завдання та подамо аналіз якості цього завдання.

**Завдання.** Розв'язати матричне рівняння  $XA = B$  (Див. Рис.1).

У завданні перевіряються вміння та навички студента розв'язувати матричні рівняння. Студенту необхідно вибрати вигляд розв'язку матричного рівняння, потім знайти матрицю  $A^{-1}$ , яка є оберненою до основної матриці  $A$  (обчислити визначник цієї матриці, усі елементи приєднаної матриці). Записати остаточний вигляд шуканої матриці  $X$ .

Питання 3

Частково правильно

Балів 0,46 з 1,00

Розв'язати матричне рівняння  $X \cdot A = B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Розв'язок даного рівняння слід шукати у вигляді

$X = B \cdot A$

$X = B/A$

$X = A^{-1} \cdot B$  ✖

$X = B \cdot A^{-1}$

Балів 0,00 з 2,00

Правильна відповідь:  $X = B \cdot A^{-1}$

б) Знайти  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -11 & 18 \\ -2 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

(Note: In the image, the matrix elements are: top row [-1, 4, -7], middle row [3, -11, 18], bottom row [-2, 8, -13]. The denominator is -1. Green checkmarks are under -1 and 3. Red crosses are over 4, -7, -2, 8, -13.)

в) Знайти розв'язок

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(Note: In the image, the matrix elements are: [1, -2, -3]. Green checkmarks are under 1 and -2. Red cross is over -3.)

Рис. 1

Завдання полягає в розв'язанні матричного рівняння. Максимум балів за правильне розв'язане завдання студент може отримати 26 балів. Вірний вибір рівняння оцінюється в 2 бали, визначник — 6 балів, кожен елемент оберненої матриці та розв'язку, відповідно у 1 та 2 бали.

Дане завдання було частиною підсумкового тесту, який було проведено для атестації студентів у 2018 році з кредитного модулю «Елементи лінійної алгебри». Результати опитування представимо у вигляді гістограми (рис. 2).

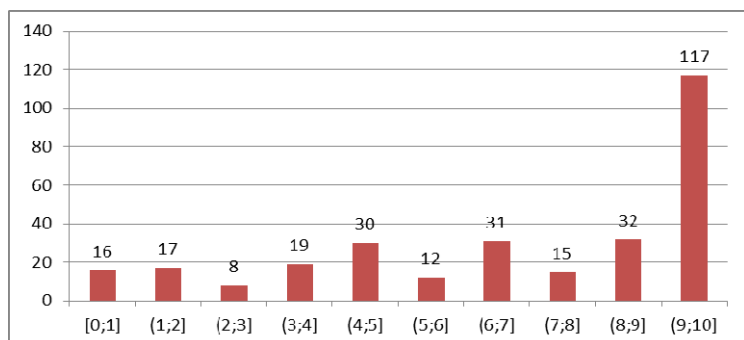


Рис. 2

Із графічного представлення легко бачити, що розподіл є унімодальним. Значення моди  $M_o = 9,42$  та вибіркового середнього  $\bar{x} = 6,97$ , дуже різняться між собою, тому дане завдання потребує корегування.

Значенні асиметрії дорівнює  $\gamma_1 = -0,7$  та медіани  $M_e = 8,08$ , вказують на те, що завдання не виявилось занадто складним для студентів, які його писали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання  $\alpha = 0,86$ . За нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, значення отриманого коефіцієнту говорить про достатньо високу якість завдання.

Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 6 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, тому що  $42,13 > 12,59 = \chi^2_{6;0,05}$ . (табл.1).

Таблиця 1

К-сть інт	Інтервали	Ймов.N(0,1)	Емпіричні ч-ти	Теоретичні ч-ти	Статистика $\chi^2$
1	<-1,84	0,03	16	9,84	3,85
2	(-1,84; -1,49)	0,04	17	10,45	4,10
3	(-1,49; -1,14)	0,06	20	17,46	0,37
4	(-1,14; -0,79)	0,09	22	25,87	0,58
5	(-0,79; -0,44)	0,11	22	33,99	4,23
6	(-0,44; -0,1)	0,13	31	39,60	1,87
7	(-0,1; 0,25)	0,14	20	40,93	10,70
8	(0,25; 0,6)	0,13	32	37,51	0,81
9	>0,6	0,27	117	81,35	15,63
		1,00	297,00	297,00	42,13

Усі елементи завдання мають високі коефіцієнти кореляції Пірсона, більші за 0,6 окрім частини «Вид рівняння», яка дорівнює 0,46, отже, завдання є правильним та має високу розрізняльну здатність (табл. 2). Знаходження кореляційної матриці показало, що найбільший зв'язок із правильно отриманою відповіддю є з підрахунок оберненої матриці, коефіцієнт кореляції цих двох частин завдання найвищий та дорівнює 0,58.

Таблиця 2

Етапи	Вид рівняння	Об-на матриця	Розв'язок
Вид рівняння	1,00		
Обернена матриця	0,38	1,00	
Розв'язок	0,29	0,58	1,00
Коефіцієнт кореляції Пірсона	0,46	0,91	0,86

### Список літератури

- Крокер, Л., & Алгіна, Дж. (2012) *Введение в классическую и современную теорию тестов*. Москва: Логос.
- Ляшенко, О. І., & Жук, Ю. О. (Ред.) (2015). *Тестові технології оцінювання компетентностей учнів*. Київ: Педагогічна думка.
- Орловський, І. В., & Тимошенко, О. А. (2017). Аналіз якості нових методів контролю знань з вищої математики в технічному університеті. У *Матеріалах VI Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 28—29 грудня 2016 р. (с. 374—377). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.

# Использование системы компьютерной математики Maple для пошагового решения задач линейной алгебры

А. И. Третьяк, Т. В. Коваль

*Южноукраинский национальный педагогический университет имени*

*К. Д. Ушинского, Одесса, Украина*

[tatiankoval562112@gmail.com](mailto:tatiankoval562112@gmail.com)

В работе приведены решения типовых примеров по теории матриц как «вручную», так и с использованием системы компьютерной математики Maple с пошаговым анализом решения.

**Ключевые слова:** системы компьютерной математики, Maple, решение задач, линейная алгебра

В настоящее время достижения в области вычислительной техники программного обеспечения и интернета стали существенными помощниками при изучении высшей математики, в частности, линейной алгебры.

С одной стороны, интернет дает свободный доступ к необходимой информации. С другой стороны, современные системы компьютерной математики Maple, MATLAB, Mathematica, Matcad позволяют избежать трудоемких вычислений при решении задач.

Однако для успешного, глубокого и неформального усвоения различных методов линейной алгебры очень важно не только получить конечный результат, но и пошагово проследить за процессом решения задачи. Такую возможность предоставляет система компьютерной математики Maple. Пакет LinearAlgebra в системе Maple содержит процедуры для создания и обработки матриц и векторов, реализации стандартных операций, решение задач линейной алгебры.

Подробно об этом в Третьяк, Усов и Коновалов (2017).

Проиллюстрируем возможность пошагового контроля процесса решения на примере нахождения жордановой формы квадратной матрицы.

Из теории жордановых матриц известно (Кострикин, 2000), что

- 1) любая квадратная матрица подобна жордановой;
- 2) любую квадратную матрицу при помощи преобразований подобия можно привести к нормальной жордановой форме и притом единственной (с точностью до перестановок жордановых клеток)

Найдем жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

непосредственно «вручную» и с помощью Maple, при этом получая информацию о каждом шаге решения.

1. Составляем характеристическую матрицу:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$



2. Находим инвариантные множители  $e_k(l)$  характеристической матрицы по формулам:

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda), \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \dots, e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)},$$

где  $d_i(\lambda), i = 1, 2, \dots, k$  — наибольший общий делитель миноров  $i$ -го порядка характеристической  $\lambda$ -матрицы  $A - \lambda E$ .

Для этого находим миноры первого порядка:

$$M_1^1 = 4 - \lambda, \quad M_2^1 = 4, \quad M_1^2 = -1, \quad M_2^2 = -\lambda,$$

откуда  $d_1 = 1$ .

Минор второго порядка, определитель

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2,$$

поэтому

$$d_2 = (1 - \lambda)^2.$$

Инвариантные множители:

$$e_1(\lambda) = 1, \quad e_2(\lambda) = (1 - \lambda)^2.$$

3. По инвариантным множителям находим элементарные делители характеристической матрицы. Это все отличные от 1 инвариантные множители, т. е.  $(1 - \lambda)^2$ .

4. Находим жорданову форму матрицы  $A$ . Для этого по элементарному делителю  $(\lambda - 2)^2$  строим жорданову клетку второго порядка  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , а так как элементарный делитель единственен, то эта клетка и будет жордановой формой матрицы  $A$ :

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним эти же вычисления в Maple с пошаговым выводением результатов

Матрица  $A$

```
> restart; with(LinearAlgebra):
```

```
> A := <<4, -1> | <4, 0>>;
```

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> AE := CharacteristicMatrix(A, lambda);
```

$$AE := \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

```
> L := []:
> for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do
    M := Minor(AE, i, j);
    if M <> 0 then L := [op(L), M]; print(M)
end if end do end do;
```

$$\begin{matrix} \lambda \\ 1 \\ -4 \\ \lambda - 4 \end{matrix}$$

```
> G := L[1]: for q from 2 to numelems(L) do
    P := gcd(G, L[q]); G := P; end do:
> d[1] := G;
```

$$d_1 := 1$$

```
> d[2] := unapply(Determinant(AE), lambda);
```

$$d_2 := \lambda \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

```
> e[1] := unapply(d[1](lambda), lambda);
```

$$e_1 := \lambda \rightarrow 1$$

```
> e[2] := unapply(d[2](lambda)/d[1](lambda),
    lambda);
```

$$e_2 := \lambda \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

```
> J['A'] := JordanBlockMatrix([[2, 2]]);
```

$$J_A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приведенные выше два вида решения наглядно показывают, как с помощью системы компьютерной математики Maple не только получить конечный результат, но и проследить за самим процессом решения

#### Список литературы

- Третьяк, А. И., Усов, А. В., & Коновалов, А. П. (2017). *Теория матриц в системе компьютерной математики Maple*. Одесса: Астропринт.
- Кострикин, А. И. (2000). *Введение в алгебру* (Ч. 2). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

# ЗМІСТ

## Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Borysenko O. V. <i>Average method for the stochastic non-autonomous random oscillating systems of fourth order</i> .....	4
Goy T., Zatorsky R. <i>A note on some identities involving Mersenne numbers</i> .....	9
Kovalchuk V. V. <i>Bifurcation analysis for a triple inverted pendulum</i> .....	14
Kurbyko I. F. <i>The solution of one contact problem of elasticity theory</i> .....	18
Semeniv O. V. <i>Machine learning algorithm for star-sky segments identification</i> .....	21
Shtefan T. A., Zasovenko A. V. <i>Simulation of plasto-elastic waves in structures under dynamic loads</i> .....	25
Авдеева Т. В., Абисое Ф. Э. <i>Построение сетевого графика технологического комплекса</i> .....	28
Авдеева Т. В. <i>Застосування методу динамічного програмування до оптимального розподілу інвестицій</i> .....	33
Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. <i>Квазиоптимальное торможение вращений гиростата с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением</i> .....	38
Антоненко Н. М. <i>Побудова системи інтегральних рівнянь задачі про тріщину на межі пружного шару та півплощини, що знаходиться під дією двох нормальних сил</i> .....	42
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Дуальна стратегія аналізу ймовірних загроз для об'єктів критичної інфраструктури</i> .....	46
Буценко Ю. П., Савченко Ю. Г. <i>Мережні обчислення як засіб підвищення ймовірності ефективного функціонування комп'ютерних систем</i> .....	48
Голінко І. М., Галицька І. Є. <i>Модель стохастичної системи автоматичного керування за розширеним критерієм якості</i> .....	50
Горалік Є. Т., Лупіна Т. О. <i>Про рух стрижня під дією ексцентрично прикладеної поперечної сили</i> .....	55
Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Рожок Л. С. <i>Застосування сплайн-функцій у задачах про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів</i> .....	60
Давидович В. Ф. <i>Функціональні рівняння: приклади, застосування, методи розв'язування</i> .....	65
Диховичний О. О., Круглова Н. В. <i>Підбір закону ймовірнісного розподілу рівня автентичності людини</i> .....	69
Зеліско М. М., Пирч Н. М. <i>Застосування рекурентних співвідношень до вивчення процесів розмноження</i> .....	73
Іваненко Т. В. <i>Застосування диференціальних рівнянь у задачах з фінансової математики</i> .....	76
Іванов О. В., Каптур Н. В., Савич І. М. <i>Асимптотична нормальність квантильних оцінок у моделях регресії з сингулярним спектром шуму</i> .....	79

Колпакова Е. В., Кривонос Е. А. <i>Об улучшении дифференциальных свойств обобщенных решений в моделях Маргерра — Власова с помощью введения обобщенного собственного спектра</i> .....	83
Кузьменко Б. В. <i>Визначення температури теплового самозаймання пилувугільних сумішей на основі математичної моделі цього процесу</i> .....	87
Кушлик Б. Р., Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. <i>Задача прийняття рішення з мінімізацією можливих втрат</i> .....	89
Лазаренко С. В. <i>До обчислювальних проблем антисипаційних систем</i> .....	92
Лапач С. М. <i>Стійкість коефіцієнта кореляції до «викидів» при використанні в регресійному аналізі</i> .....	96
Міцюхін А. І. <i>Абарона кадаванага сігналу ад перахопу</i> .....	101
Назаренко О. А. <i>Дослідження поведінки жорсткого сферичного сегменту в пружному середовищі під дією хвилі кручення</i> .....	105
Павлюк Д. В., Семенів О. В. <i>Математичні аспекти обробки даних судових рішень</i> .....	110
Поліщук Н. В., Кушлик-Дивульська О. І. <i>Про ефективність роботи деякого технічного пристрою</i> .....	114
Радченко С. Г. <i>Планы эксперимента на основе ЛПТ равномерно распределенных последовательностей</i> .....	118
Селезньова Н. П., Петриняк Д. Ю. <i>Кривини поверхні та оптимізація функції двох змінних</i> .....	122
Сокіл Б. І., Сокіл М. Б., Сокульська Н. Б. <i>Складні коливання пружних тіл та методологія їх дослідження</i> .....	129
Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С. <i>Про аналітичне і чисельне розв'язання крайових задач для некругових циліндричних оболонок при дії статичного навантаження</i> .....	133
Шаповалова Н. В., Процак Л. В. <i>Способи створення паркетів, мозаїк та замоощень площини</i> .....	137

## Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Баліна О. І., Безклубенко І. С., Буценко Ю. П. <i>Аналіз Фур'є в «інженерному» курсі вищої математики</i> .....	143
Дем'яненко А. Г. С. П. <i>Тимошенко та сучасна математична й інженерна освіта в Україні: деякі реалії, проблеми та перспективи</i> .....	145
Довгай В. В. <i>Актуальність профорієнтаційної роботи в середній загальноосвітній школі для підвищення рівня якості знань з елементарної математики</i> .....	152
Дрозд В. В. <i>Щодо sacramentalної абрєвіатури СРС</i> .....	156
Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Гаєвський М. В., Пісний І. С. <i>Побудова графіків функцій та використання ІКТ</i> .....	160
Калайда О. Ф. <i>Про контроль точності квадратурних формул</i> .....	163
Калайда О. Ф. <i>Про дві модифікації методу квадратування знаходження нулів алгебричних многочленів</i> .....	166
Калайда О. Ф. <i>Про один спосіб наближеного знаходження квадратур</i> .....	169
Калайда О. Ф. <i>Про рекурентні автономні алгоритми чисельного диференціювання</i> .....	172
Калайда О. Ф. <i>Про один автономний квадратурний метод високого порядку розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду</i> ....	175
Майсеня Л. І. <i>Психолога-педагогічнє асаблівасці матэматычнай адукацї студэнтаў тэхнічных універсітэтаў</i> .....	177
Мохонько А. З., Васіна Л. С., Мохонько В. Д. <i>Про використання електронних комплексів у курсі вищої математики</i> .....	181
Панасюк Н. М. <i>Діалектика поєднання елементарної та вищої математики у творчому навчанні студентів</i> .....	186
Потемкина С. Н., Розанов А. В. <i>О применении закона Био — Савара — Лапласа для расчета магнитных полей проводников сложной конфигурации</i> .....	189
Ткачук В. Є. <i>Доведення нерівностей за допомогою похідної</i> .....	193
Чепок О. Л., Белітченко Д. М. <i>Про спеціальні прийоми вдосконалення математичної підготовки майбутніх учителів фізики під час викладання перших розділів курсу загальної фізики</i> .....	197
Чернобай О. Б. <i>Алгоритмізація у процесі навчання теорії ймовірностей</i> .....	201
Шилинець В. А. <i>Об учебно-методическом обеспечении образовательного процесса на кафедре высшей математики Международного университета «МИТСО»</i> .....	205

### Секція 3. Історія точних наук

Гайдей В. О., Міхно О. П. <i>До 140-річчя від дня народження Костянтина Лебединцева, українського педагога-новатора</i> .....	208
Горбачук В. М. <i>Декілька фрагментів з історії зображення групи (півгрупи) лінійних операторів експонентою від її генератора</i> .....	210
Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Математичні форуми, присвячені науковій діяльності визначного українського математика В. К. Дзядика (18.02.1919—26.10.1998) (до 100-річчя з дня народження)</i> .....	214
Ілляшенко В. Я. <i>Фелікс Клейн — видатний математик, педагог, реформатор математичної освіти (25.04.1849—22.06.1925)</i> .....	219
Маловичко Т. В. <i>Марія Гаэтана Анъези</i> .....	225
Маловичко Т. В. <i>Семья Георга Кантора</i> .....	231
Міхно О. П., Гайдей В. О. <i>Українські вчені-математики — ювіляри 2019 року у науково-експозиційній роботі Педагогічного музею України</i> .....	235
Овчаренко О. В. <i>Енциклопедія з елементарної математики Гайнріха Вебера</i> .....	239

### Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Власенко К. В., Сітак І. В., Чумак О. О. <i>Хмарні технології під час навчання вищої математики в сучасному технічному університеті</i> .....	242
Волков А. В. <i>Викладання теми «Елементи операційного числення» із застосуванням пакету комп'ютерної математики Maple у курсі вищої математики</i> .....	246
Диховичний О. О., Дудко А. Ф. <i>Комп'ютерно орієнтована методика оцінювання якості тестів як засіб покращення контролю знань студентів з вищої математики</i> .....	249
Жданова Ю. Д., Спасітелева С. О., Шевченко С. М. <i>Формування практичних навичок студентів спеціальності 125 Кібербезпека за допомогою віртуальних лабораторій</i> .....	253
Задерей Н. М., Мельник І. Ю., Нефьодова Г. Д. <i>Про використання додатків Google для оптимізації навчання дисциплін математичного циклу</i> .....	256
Крохмаль Т. М., Нікітенко О. М. <i>Розв'язання диференційних рівнянь за допомогою перетворень з використанням системи комп'ютерної математики Maple</i> .....	260
Олійник О. В., Сонько В. І. <i>Створення інтерактивної моделі сферичного трикутника за допомогою GeoGebra</i> .....	264
Омельчук Т. С., Орловський І. В., Тимошенко О. А. <i>Особливості створення та аналіз якості покрокових тестів з лінійної алгебри та аналітичної геометрії</i> ...	268
Третьяк А. И., Коваль Т. В. <i>Использование системы компьютерной математики Maple для пошагового решения задач линейной алгебры</i> .....	272



Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

# МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали  
VII Міжнародної  
науково-практичної конференції  
*27—28 грудня 2018 року*