І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ТА ІНШІ ФАКУЛЬТЕТИ
2018 р.

Перший курс

1. Знайти суму
$$\sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

2. Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ знайти матрицю X, що задовольняє матричне рівняння
$$\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ разів}} \cdot X \cdot \underbrace{A^T \cdot A^T \cdot \ldots \cdot A^T}_{n \text{ разів}} = E,$$
де
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$
φ — фіксований аргумент, а E — одинична матриця.

3. Знайти всі строго монотонні функції $\big(f(x), x \geq 0\big)$, які для будь-якого x задовольняють нерівність
$$f\big(x^{2018}\big) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}.$$

4. Довести, що для всіх $n \geq 0$ та $x \neq 0$
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

5. Позначимо через B_r круг з центром в точці (r, r) та радіусом $\sqrt{r^2+1}$. Описати множину $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразити її.

6. Нехай $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ — точки з *цілими* координатами. Позначимо $\alpha = \angle ABC$. Довести, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ — раціональні числа.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ТА ІНШІ ФАКУЛЬТЕТИ
2018 р.

Старші курси

1. Знайти суму ряду
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2}.$$

2. Обчислити інтеграл
$$\int\limits_0^{\pi} \Big(\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \Big) \, \mathrm{d}x.$$

3. Довести, що для всіх $n \geq 0$ та $x \neq 0$
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \Big(x^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \Big) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

4. Нехай функція y є розв'язком задачі Коші
$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) = xy'(x), \\ y(0) = \alpha, \; y'(0) = \beta \end{cases}$$
з деякими константами $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Обчислити $y^{(2018)}(0)$ та $y^{(2019)}(0)$.

5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників всіх дільників числа n. Наприклад, число 6 має чотири дільники — 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій — по два, а четвертий — чотири. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$.

   Визначити область збіжності ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$$
   та знайти його суму для $x = 2$.

6. Позначимо через A трикутник з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, через $B_{x,y}$ — круг одиничного радіуса з центром в точці (x,y), а через $\mathcal{S}(\cdot)$ — площу області. Знайти
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(A \cap B_{x,y}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/