I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІСЗЗІ

2018 р.

Перший курс

1. Обчислити визначник Вандермонда $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$, де x_1, x_2, x_3, x_4 - різні дійсні числа.
2. Знайти центр та радіус кола, утвореного в перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та площини $x + y + z = 1$. Виконати малюнок.
3. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$.
4. Використавши правило Лопіталя-Бернуллі, знайти n, при якому справджується рівність
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x + \arcsin 2x + \ldots + \arcsin nx}{\sin x + \sin(2\cdot 2!\,x) + \ldots + \sin(n\cdot n!\,x)} = \frac{15}{719}.$$
5. Позначимо через B_r круг з центром в точці $(r;\, r)$ та радіусом $\sqrt{r^2+1}$. Описати множину $\bigcup\limits_{r\in R} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразити її.
6. Нехай $A, B, C \in R^2$ - точки з цілими координатами. Позначимо $\alpha = \angle ABC$. Довести, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ - раціональні числа.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІСЗЗІ, 2018 р.

Старші курси

1. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = x^x$, $x > 0$.
2. Користуючись розвиненням у степеневий ряд, обчислити $f^{(16)}(0)$ для функції $f(x) = \dfrac{x^7}{x^3 + 2}$.
3. Знайти $f(x)$ з рівняння $\int_1^x \dfrac{dt}{f^3(t)} = f(x) - 1$, $f(1) = 1$, де $f(x)$ - неперервна на $[1;\, x]$ функція, $f(x) \neq 0$, використавши теорему про інтеграл зі змінною верхньою межею.
4. Розклавши в ряд Фур'є функцію $y = x^2$ на відрізку $[-\pi;\, \pi]$, знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.
5. Для $n \in N$ позначимо через $\Theta(n)$ сумарну кількість дільників всіх дільників числа n. Наприклад, число 6 має чотири дільники – 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій – по два, а четвертий – чотири. Тому $\Theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Theta(n)}{n^x}$ та знайти його суму при $x = 2$.
6. Позначимо через A трикутник з вершинами $(0;\, 0)$, $(1;\, 0)$, $(0;\, 1)$; через $B_{x,y}$ - круг одиничного радіуса з центром в точці $(x;\, y)$; через $S(\cdot)$ - площу області. Знайти $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S\left(A \cap B_{x,y}\right) dxdy$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua