

**I тур Олімпіади з математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського**

ІГС

2018

1-й курс

1. Знайдіть A^{2018} , якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Нехай точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = 16$, а $M_2(x_2, y_2)$ — на колі $x^2 + y^2 = 25$. Знайдіть найменше значення виразу $x_1x_2 + y_1y_2$.

3. Побудуйте графік функції $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$.

4. Знайдіть віддаль від параболи $y = x^2$ до прямої $x - y - 2 = 0$.

5. Через B_r позначено круг із центром у точці $(r; r)$ і радіусом $\sqrt{r^2 + 1}$. Опишіть множину $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразіть її.

6. Нехай $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ — точки з **цілими** координатами й $\alpha = \angle ABC$. Доведіть, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ — раціональні числа.

*Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні
математичного гуртка.*

*Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olympr.kpi/>
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті
<http://matan.kpi.ua>*

І тур Олімпіади з математики

КПІ ім. Ігоря Сікорського

ІТС

2018

Старші курси

1. Знайдіть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{x^{2018}}{1 + 2018^x} dx$.

3. Обчисліть площу фігури, яка розташована в першій чверті площини Oxy та обмежена лінією $(x + y)^3 = x - y$.

4. Відомий частинний розв'язок $y_1 = e^{-x} + x + 2$ диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 4x + 8 + 5e^{-x}$, $p, q \in \mathbb{R}$. Знайдіть інший частинний розв'язок цього рівняння, який має екстремум при $x = 0$, рівний 1. Що це буде мінімум чи максимум?

5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначили через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників усіх дільників числа n . Наприклад, число 6 має чотири дільники — 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій — по два, а четвертий — чотири. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$. Визначте область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$ та знайдіть його суму для $x = 2$.

6. Позначили через A трикутник з вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, через $B_{x,y}$ — круг одиничного радіуса із центром у точці (x, y) , а через $\mathcal{S}(\cdot)$ — площу області. Знайдіть $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(A \cap B_{x,y}) dx dy$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті

<http://matan.kpi.ua>