

І тур Олімпіади з математики

КПІ ім. Ігоря Сікорського

ММІ

2018

1-й курс

1. Для всіх значень параметра розв'яжіть систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Нехай точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = 16$, а $M_2(x_2, y_2)$ — на колі $x^2 + y^2 = 25$. Знайдіть найменше значення виразу $x_1x_2 + y_1y_2$.

3. Побудуйте графік функції $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$.

4. Для будь-яких x та y виконано нерівність $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Знайдіть $f(x)$, якщо $f(0) = 2$.

5. Через B_r позначено круг із центром у точці $(r; r)$ і радіусом $\sqrt{r^2 + 1}$. Опишіть множину $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразіть її.

6. Нехай $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ — точки з **цілими** координатами й $\alpha = \angle ABC$. Доведіть, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ — раціональні числа.

*Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні
математичного гуртка.*

Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olympr.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті

<http://matan.kpi.ua>

І тур Олімпіади з математики

КПІ ім. Ігоря Сікорського

ММІ

2018

Старші курси

1. Знайдіть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{x^{2018}}{1 + 2018^x} dx$.

3. Обчисліть площу фігури, яка розташована в першій чверті площини Oxy та обмежена лінією $(x + y)^3 = x - y$.

4. Розв'яжіть диференціальне рівняння $(y')^2 - 2y' - 4y + 4x + 1 = 0$.

5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначили через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників усіх дільників числа n . Наприклад, число 6 має чотири дільники — 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій — по два, а четвертий — чотири. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$. Визначте область

збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$ та знайдіть його суму для $x = 2$.

6. Позначили через A трикутник з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, через $B_{x,y}$ — круг одиничного радіуса із центром у точці (x,y) , а через $\mathcal{S}(\cdot)$ — площу області. Знайдіть $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(A \cap B_{x,y}) dx dy$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olympr.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті

<http://matan.kpi.ua>