

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФАКУЛЬТЕТ Біомедичної інженерії

2018 р.

Перший курс

1. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+11+111+\dots+11\cdots1}{10^n}$.
2. Обчисліть похідну функції $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\cdots(x+2^{2018})}$ у точці $x=0$.
3. Обчисліть визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 2018 & 2019 & 2020 & 2021 \\ -2019 & 2018 & -2021 & 2020 \\ -2020 & 2021 & 2018 & -2019 \\ -2021 & -2020 & 2019 & 2018 \end{pmatrix}$.
4. Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + 2 \sin x > 3x$ для $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
5. Позначимо B_r круг з центром у точці $(r; r)$ та радіусом $\sqrt{r^2 + 1}$.
Описати множину $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді і зобразити її.
6. Нехай $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ – точки з цілими координатами. Позначимо $\alpha = \angle ABC$. Довести, що $\sin(2018\alpha)$ і $\cos(2018\alpha)$ раціональні числа.

*Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні
математичного гуртка.*

Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua>

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФАКУЛЬТЕТ Біомедичної інженерії

2018 р.

Старші курси

1. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+11+111+\dots+11\cdots 1}{10^n}$.
2. Обчисліть похідну функції $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\cdots(x+2^{2018})}$ у точці $x=0$.
3. Обчисліть суму $\sum_{n=1}^{2018} \frac{n^n - (n+1)^n}{n!}$.
4. Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + 2 \sin x > 3x$ для $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників усіх дільників числа n . Наприклад, число 6 має чотири дільники – 1, 2, 3, 6. Перший з них має один дільник, другий і третій – два, четвертий – чотири дільники. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$ та знайти його суму для $x=2$.
6. Позначимо через A – трикутник з вершинами $(0;0), (0;1), (1;0)$, через $B_{x,y}$ – круг одиничного радіуса з центром у точці $(x; y)$ координатами, через $S(\cdot)$ – площу області. Знайти $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(A \cap B_{x,y}) dx dy$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua>