

І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФММ

2018 р.

Старші курси

1. Студент приходить на олімпіаду з математики. Всього дається 5 задач, з них студент може розв'язати три простіші з ймовірністю 0.6 та ще дві складніші з ймовірністю 0.4. Розрахуйте ймовірності для всіх значень випадкової величини X - кількості розв'язаних студентом задач.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + y'' - 9y' - 9y = \left(\int_0^x te^t dt \right) - 1$$

3. Знайти значення параметра a , для якого

$$\int_a^{66} |||x - 1| - 1| - 1| dx = 2027$$

4. Обчислити

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}^{2018},$$

де i - уявна одиниця ($i^2 = -1$)

5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників всіх дільників числа n . Наприклад, число 6 має чотири дільники — 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій — по два, а четвертий — чотири. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$ та знайти його суму для $x = 2$.

6. Позначимо через A трикутник з вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, через $B_{x,y}$ — круг одиничного радіуса з центром в точці (x, y) , а через $\mathcal{S}(\cdot)$ — площу області. Знайти

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(A \cap B_{x,y}) dx dy.$$